
MÉMOIRE DE PREMIÈRE ANNÉE
RACINES DE POLYNÔMES ALÉATOIRES

MARTIN Titouan et TOURNAIRE Sarah

Fevrier-Mai 2025

- Encadré par Djalil Chafai -

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier chaleureusement Monsieur Djalil Chafaï, qui nous a encadrés tout au long de ce mémoire. Sa passion communicative pour les polynômes aléatoires, les probabilités et les mathématiques en général a été une véritable source de motivation. Grâce à ses explications claires et enthousiastes, nous avons pu élargir notre curiosité à des domaines parfois éloignés de notre sujet principal, ce qui a enrichi notre démarche.

Nous le remercions également pour sa disponibilité, sa bienveillance et sa réactivité face à toutes nos questions, même les plus inattendues.

Nos remerciements vont également à nos camarades du DI et du DMA, en particulier à José, pour leurs échanges précieux et leur aide dans nos réflexions géométriques.

Enfin, nous souhaitons exprimer notre gratitude à l'équipe pédagogique du DMA ainsi qu'à Ariane Mézard et Thomas Duyckaerts, les lecteurs de ce mémoire. Merci de nous avoir permis d'explorer un sujet aussi stimulant et de nous initier, le temps de ces quatre mois, à la recherche et à la documentation en mathématiques.

Contents

1	Introduction	1
1.1	Répartition complexe des racines	2
1.2	Cas gaussien et géométrie aléatoire	2
1.3	Modèles discrets et phénomènes d'universalité	2
2	Répartition asymptotique des racines dans le plan complexe	3
2.1	Contexte	3
2.2	Majoration du potentiel logarithmique associé au comptage des racines	4
2.2.1	Majoration de la queue de la série	4
2.2.2	Majoration de la partie initiale	5
2.3	Non accumulation des racines	5
2.3.1	Introduction à la concentration	5
2.3.2	Inégalité de Kolmogorov-Rogozin	6
2.3.3	Application aux polynômes	6
2.4	Mesure empirique des racines	7
2.4.1	Application aux polynomes de Kac	9
3	Étude des racines réelles	9
3.1	Contexte	9
3.2	Approche géométrique : le polynôme comme un produit scalaire	10
3.2.1	Les racines réelles des polynômes aléatoires réels Gaussiens	10
3.3	Discussion sur l'universalité	12
3.3.1	Fonctions de corrélation	12
3.3.2	Phénomène d'universalité	13
4	Perspectives	13
A	Annexe: Présentations des objets mathématiques	15
A.1	Topologie et convergence de l'espace des mesures	15
A.2	Distributions et fonctions test	15
A.3	Théorie du potentiel	16
A.4	Application à la mesure des racines	16
A.5	Transformée de Legendre-Fenchel	17

1 Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, notamment grâce aux travaux pionniers de Kac (voir par exemple [Kac43]), l'étude des polynômes s'est enrichie d'une perspective probabiliste. Lorsqu'on considère des polynômes dont les coefficients sont choisis aléatoirement, on entre dans le domaine des polynômes aléatoires, où les racines forment une configuration aléatoire dans le plan complexe ou sur la droite réelle.

Les problématiques qui en émergent sont à la croisée de l'algèbre, de l'analyse complexe, des probabilités, de la géométrie et même de la physique statistique. L'un des objectifs centraux reste la localisation des racines, enjeu également fondamental dans l'étude plus classique des polynômes. Cependant, la particularité de l'approche probabiliste réside dans son intérêt pour le comportement asymptotique des polynômes, c'est-à-dire leur comportement lorsque le degré tend vers l'infini. En présence d'aléa, des régularités statistiques émergent à grande échelle : bien que le bruit aléatoire masque les détails, il fait apparaître, en toile de fond, des structures globales stables et souvent universelles.

Ces phénomènes mettent en lumière une remarquable robustesse vis-à-vis de la loi de probabilité choisie pour les coefficients. Néanmoins, l'indépendance des coefficients reste une condition cruciale pour que ces effets statistiques se manifestent pleinement. Elle garantit un bruit uniforme, condition essentielle pour que le « filtre aléatoire » révèle les structures sous-jacentes sans distorsion.

Trois axes majeurs émergent dans la littérature récente et structurent cette exploration.

Le premier concerne la **répartition des racines dans le plan complexe**. Des travaux récents, dans la lignée de ceux de Šparo et Šur ou de Kabluchko et Zaporozhets, montrent que les racines d'un polynôme aléatoire ne se dispersent pas de façon chaotique, mais suivent des motifs réguliers, souvent circulaires ou annulaires. Cette organisation dépend notamment de la manière dont la variance des coefficients décroît. Ces résultats illustrent la puissance des approches probabilistes, où des structures globales émergent malgré l'aléa local.

Le deuxième axe touche à la **géométrie aléatoire des racines réelles** dans le cas où les coefficients sont gaussiens. Dans ce cadre, Edelman et Kostlan ont mis en évidence un lien profond entre le comportement moyen du nombre de racines réelles et des propriétés géométriques sous-jacentes à l'espace des polynômes. Ces résultats relient de façon élégante probabilités, géométrie différentielle et algèbre.

Enfin, le troisième axe porte sur les **modèles discrets**. Ici, l'intérêt est porté sur la proportion de racines réelles et la robustesse des phénomènes observés, même lorsque les coefficients ne suivent pas une loi gaussienne. Les travaux de Tao et Vu mettent en lumière des mécanismes d'universalité : certains comportements statistiques restent inchangés même en modifiant les lois de probabilité, à condition que certaines propriétés, comme l'indépendance, soient conservées.

Ces trois axes illustrent la diversité des approches et la profondeur des résultats obtenus. Dans ce mémoire nous allons explorer ces contributions en détail et montrer comment des structures universelles émergent dans des contextes très variés.

Pour cela nous allons considérer le polynôme aléatoire

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n \xi_k z^k \tag{1}$$

où ξ_0, \dots, ξ_n sont des variables aléatoires indépendantes. Étant donné que les coefficients de (1) sont aléatoires, il est naturel de s'interroger sur la distribution spatiale typique des racines lorsque le degré n devient grand. Le cas où les coefficients suivent une loi gaussienne conduit souvent à des analyses plus accessibles, avec des formules exactes pour les corrélations entre racines. On pense (et on démontre parfois) que beaucoup de propriétés des racines de polynômes aléatoires ne dépendent pas de la loi spécifique des coefficients lorsque $n \rightarrow \infty$. Ce type de méta-conjecture est souvent désigné sous le nom de *phénomène d'universalité*.

Un résultat marquant et non classique affirme que, sous des hypothèses d'intégrabilité modérées sur ξ_0 , la plupart des racines de f_n ont tendance à se répartir uniformément autour du cercle unité lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour arriver à ce résultat, nous allons considérer la mesure des racines de G_n dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$

où G_n ne s'annule pas identiquement par :

$$\mu_n := \sum_{z \in D \text{ tel que } G_n(z)=0} n_{G_n}(z) \delta_z \quad (2)$$

Où $n_{G_n}(z)$ désigne la multiplicité du zéro z .

Nous allons étudier le comportement de cette mesure en nous intéressant tout d'abord à la répartition asymptotique des racines complexes d'un polynôme aléatoire. Nous étudierons ensuite le cas des racines réelles qui est un peu plus délicat et pour lequel nous nous intéresserons d'abord à des coefficients ξ_i gaussiens avant de nous pencher sur l'universalité de ces résultats. Les outils utilisés dans ce mémoire sont présentés en annexe et les résultats mathématiques présentés s'articulent autour des trois axes évoqués précédemment, chacun donnant lieu à des théorèmes fondamentaux.

1.1 Répartition complexe des racines

Le premier résultat majeur concerne la distribution des racines dans le plan complexe. Šparo et Šur (1962) ont montré que, pour les polynômes de Kac (voir définition 2.2), la mesure empirique des racines

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{z:K_n(z)=0} \delta_z$$

converge vers la mesure de Lebesgue sur le cercle unité. Ce phénomène est connu sous le nom de *loi du cercle*. Ce résultat s'inscrit dans une perspective plus générale développée par Kabluchko et Zaporozhets. Pour une large classe de polynômes, les racines possèdent une répartition asymptotique invariante par rotation, dont le profil radial est entièrement déterminé par le comportement asymptotique de la variance des coefficients. Ces résultats reposent sur des outils tels que le potentiel logarithmique (5) et les principes de grandes déviations.

1.2 Cas gaussien et géométrie aléatoire

Dans le cas des polynômes à coefficients gaussiens indépendants, Edelman et Kostlan ont obtenu une formule exacte pour l'espérance du nombre de racines réelles. Ils montrent que :

$$\mathbb{E}(R_n) \sim \frac{2}{\pi} \log n.$$

Ce résultat s'interprète géométriquement à l'aide d'une métrique naturelle sur l'espace des polynômes, reliant la densité des racines à la géométrie différentielle de l'espace fonctionnel considéré.

1.3 Modèles discrets et phénomènes d'universalité

Pour des modèles à coefficients discrets comme les polynômes de Littlewood (coefficients ± 1), les travaux de Tao et Vu généralisent les résultats précédents à des lois non gaussiennes. Leur approche repose sur un principe de remplacement : il s'agit de substituer progressivement les coefficients du polynôme par des variables gaussiennes afin de transférer les résultats du cadre intégrable. Ce procédé s'appuie sur la régularité statistique induite par les lois gaussiennes et permet de montrer que :

$$\mathbb{E}(R_n) \sim \frac{2}{\pi} \log n$$

reste valable dans des cadres beaucoup plus larges. Ces résultats révèlent un phénomène d'universalité : certaines propriétés statistiques des racines dépendent peu de la loi exacte des coefficients, à condition que des hypothèses structurelles — comme l'indépendance — soient maintenues.

2 Répartition asymptotique des racines dans le plan complexe

2.1 Contexte

Nous avons donné la forme générale des polynômes étudiés dans le mémoire en Annexe 4. Nous allons ici considérer quelques polynômes particuliers pour lesquels on peut exhiber des résultats précis sur la répartition des racines. Cette partie est inspirée par l'article [KZ14].

Définition 2.1 (Polynôme de Littlewood–Offord (PLO)). *Pour $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi et $(f_{n,k})_{k, n \geq 0}$ une famille de complexes. On appelle polynôme de Littlewood–Offord (PLO) associé et on note G_n le polynôme définie par :*

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{n,k} z^k$$

On étudiera notamment des PLO particuliers, les polynômes de Kac.

Définition 2.2. *Les polynômes de Kac sont des polynômes aléatoires définis par :*

$$K_n(z) := \sum_{k=0}^n \xi_k z^k,$$

Les polynômes de Kac ont été les premiers à être étudié et il existe un grand nombre de résultats sur le comportements des racines de ce type de polynôme. On constate alors qu'en supposant que la série entière définie.

$$K_{\infty}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k \tag{3}$$

a un rayon de convergence presque sûrement égal à 1, où $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi, les racines de K_n ne peuvent s'accumuler en aucun point du disque unité car les zéros de K_{∞} ne peuvent avoir aucun point d'accumulation à l'intérieur du disque ouvert de convergence. Alors, les racines des polynômes K_n se répartissent sur le cercle unité, une analyse numérique montre même qu cette répartition est uniforme. Cette propriété remarquable peut être énoncée comme suit (en constatant que la condition sur le rayon de convergence est en fait équivalente à la condition $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$).

Théorème 2.3. *Soit μ_{K_n} la mesure comptant les racines complexes de K_n avec multiplicité, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathbb{E}[\log(1 + |\xi_0|)] < \infty$
2. Avec probabilité 1, la suite $\frac{1}{n} \mu_{K_n}$ converge lorsque $n \mapsto \infty$ faiblement vers la distribution de probabilité uniforme sur le cercle unité \mathbb{T} .

On peut aussi remarquer que si la loi du vecteur aléatoire (a_0, \dots, a_n) est la même que celle de (a_n, \dots, a_0) , alors la loi des $\{z_1, \dots, z_n\}$ est invariante par l'inversion $z \mapsto 1/z$. Cela provient du fait que, dans ce cas, $P_n(z)$ et $z^n P_n(1/z)$ ont la même loi.

On étudie la répartition des racines de PLOs (définition 2.1) dans le plan complexe, ainsi il est naturel d'introduire une mesure.

Définition 2.4. *Pour un PLO G_n on définit sa mesure empirique des racines que l'on note μ_{G_n} ou μ_n lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté par :*

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{z \in D \text{ tel que } G_n(z)=0} N_{G_n}(z) \delta_z$$

dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ où G_n ne s'annule pas identiquement et où $N_{G_n}(z)$ désigne la multiplicité du zéro z .

On veut décrire le comportement asymptotique de la mesure des racines, en particulier on montrera que la masse devient faible lorsque $|z|$ devient grand. c'est l'objet de la partie 2.2 en page 4. Dans un second temps, On montrera que les racines se vont pas se concentrer sur le racines complexes, partie 2.3. Enfin, il est remarquable que l'on puisse donné une expression de la mesure, partie 2.4.

2.2 Majoration du potentiel logarithmique associé au comptage des racines

Nous allons dans un premier temps montrer que la mesure de répartition des racines est majorée presque sûrement et que cela nous permet d'affirmer que la masse est faible vers l'infini. Pour cela nous utilisons l'égalité au sens des distributions

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |G_n(z)|. \quad (4)$$

que l'on a démontré en Annexe A.3. Ainsi pour obtenir un résultat sur μ_n nous allons nous intéresser au potentiel logarithmique associé à G_n par défini par $p_n(z) := \frac{1}{n} \log |G_n(z)|$.

Nous allons ici majorer le potentiel logarithmique et pour cela établir un contrôle de $G_n(z)$ un PLO. Le but est de considérer séparément la queue de distribution et les termes initiaux, nous cherchons donc un $N > 0$ tel que l'on pourra étudier

$$G_n(z) = \sum_{k < N} \xi_k f_{k,n} z^k + \sum_{k \geq N} \xi_k f_{k,n} z^k.$$

pour z fixé dans un disque D_{R_0} .

Pour cela, nous allons essayer de majorer les modules des ξ_k et des $f_{n,k}$ séparément. Pour ce qui est des ξ_k ce sont des variables aléatoires i.i.d complexes, on a vu que pour l'exemple des polynômes de Kac, la condition $\mathbb{E}[\log(1 + |\xi_0|)] < \infty$ est nécessaire et suffisante pour montrer la convergence de la distribution des racines. On essaie donc de tirer une majoration de nos variables aléatoires à partir de cette condition.

On constate alors que d'après Borel-Cantelli, pour tout $\varepsilon > 0$, si $X = \frac{1}{\varepsilon} \log(1 + |\xi_0|)$, alors $\mathbb{E}[\log(1 + |\xi_0|)] < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\xi_0| \geq e^{\varepsilon k}) < \infty$. Ainsi on a l'équivalence, pour tout $\varepsilon > 0$

$$S := \sup_{k \geq 0} \frac{|\xi_k|}{e^{\varepsilon k}} < \infty \quad \text{p.s.} \iff \mathbb{E}[\log(1 + |\xi_0|)] < \infty. \quad (5)$$

qui nous permet de caractériser le moment logarithmique.

2.2.1 Majoration de la queue de la série

On va maintenant essayer de contrôler la queue de la série en introduisant le N mentionné plus haut, celui-ci va donc dépendre de n de manière croissante. Il nous suffit alors de majorer les $f_{n,k}$ en remarquant que pour un terme fixé, on a $|f_{k,n} z^k| = |f_{k,n}| \cdot |z|^k$. Afin que la série converge, il faut que ces termes soient suffisamment petits pour k grand de telle sorte à ce que, pour $k \leq N$ on ait $|f_{n,k} \xi_k z^k| \leq h(k)$ avec h une fonction de k qui soit le terme d'une série convergente. On constate qu'on on peut pour cela introduire l'hypothèse de contrôle de la queue: Il existe $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $k \geq An : |f_{k,n}| \leq (|z|e^{2\varepsilon})^{-k}$.

Sous cette hypothèse-là on a alors

$$|f_{k,n} z^k| \leq e^{-2\varepsilon k}.$$

Et d'après l'équation 5 il existe $S < \infty$ une variable aléatoire telle que :

$$\left| \sum_{k \geq An} \xi_k f_{k,n} z^k \right| \leq S \sum_{k \geq An} e^{-\varepsilon k} \leq M' e^{-\varepsilon An}.$$

On a donc majoré la queue de la série. On constate de plus que pour vérifier l'hypothèse de contrôle de la queue il suffit d'avoir l'existence d'une fonction $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ continue et nulle sur $[T_0, \infty)$ pour un certain T_0 tel qu'en notant $R_0 := \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)^{-1/t} \in (0, \infty]$ on ait

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{k,n}|^{-1/k} \geq R_0 \quad \text{pour tout } n,$$

et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in [0, An]} ||f_{k,n}|^{1/n} - f(k/n)| = 0$ pour tout $A > 0$. En effet la série converge alors pour $R_0 > |z|$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \gg 1$ on ait $|f_{k,n}| \leq (|z|e^{2\varepsilon})^{-k}$.

2.2.2 Majoration de la partie initiale

Il nous reste alors à nous intéresser à la partie initiale, c'est à dire aux termes pour $k < An$. Le résultat sur le moment logarithmique s'applique toujours et il nous faut comme précédemment une hypothèse sur les $f_{n,k}$. Nous allons nous inspirer de la condition énoncée pour la queue de la série et supposer que pour chaque k et n : $|f_{k,n}| = e^{-nu(k,n)}$ avec u une fonction à déterminer plus tard. Alors :

$$|f_{k,n}z^k| = \exp(-nu(k,n) + k \log |z|) = \exp(n(s \log |z| - u(k,n)))$$

On remarque alors que si $u(k,n)$ est en fait de la forme $u(\frac{k}{n})$ avec $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ on aura que chaque terme du module est d'ordre exponentiel en n , avec un taux donné par la fonction $s \mapsto s \log |z| - u(s)$.

Le comportement de la somme sera donc dominé par les plus grands termes de cette forme. On définit alors la borne maximale : $(\log f)^*(\log |z|) := \sup_{s \geq 0} (s \log |z| - u(s))$, qui est la transformée de Legendre-Fenchel de u .

Ainsi, pour assurer la convergence et une estimation correcte du module de $G_n(z)$, il est naturel d'exiger

$$|f_{k,n}| \lesssim \exp\left(n \left[(\log f)^*(\log |z|) - \frac{k}{n} \log |z| \right]\right).$$

Cela garantit que $|f_{k,n}z^k| \leq e^{n(\log f)^*(\log |z|)}$ et que l'ensemble des termes de la série reste uniformément sous ce plafond exponentiel.

On peut introduire l'hypothèse de contrôle des termes initiaux: il existe une fonction bornée $g_n : [0, A] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $k < An$:

$$|f_{k,n}| \leq (g_n(k/n))^n, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{n} \log(g_n(k/n)) + \frac{k}{n} \log |z| \leq (\log f)^*(\log |z|) + \delta.$$

et cette hypothèse implique le résultat de notre discussion précédente mais nous permet d'introduire δ et lorsque n devient grand, δ peut être arbitrairement petit.

Sous cette hypothèse, on obtient alors que $|f_{k,n}z^k| \leq e^{n((\log f)^*(\log |z|) + 2\delta)}$. Finalement, par l'équation 5 on a : $|\sum_{k < An} \xi_k f_{k,n} z^k| \leq M'' e^{n((\log f)^*(\log |z|) + 3\delta)}$. En posant $M = M' + M''$, on déduit l'encadrement :

$$|G_n(z)| \leq M e^{n((\log f)^*(\log |z|) + 3\delta)}.$$

D'où:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n(z)| \leq (\log f)^*(\log |z|) \quad \text{presque sûrement.}$$

2.3 Non accumulation des racines

Les racines d'un polynôme aléatoire ne vont pas se concentrer autour des racines du plan complexe. Nous allons le montrer dans cette partie. On utilisera pour cela une quantité la concentration qui dénote de la concentration d'une variable aléatoire. Puisque l'on a relié, par le potentiel, la mesure des racines au module du polynôme, on va étudier la concentration du module du polynôme.

2.3.1 Introduction à la concentration

Pour cette partie où on établit des résultats généraux : X est une variable aléatoire sur cet espace à valeurs dans \mathbb{R}^d . On pose $(X_i)_i$ indépendante et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Définition 2.5 (Concentration). *On appelle concentration de X et on note $Q_{\delta(X)}$ la quantité :*

$$Q_{\delta}(X) = \sup_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X \in B(x, \delta))$$

Proposition 2.6. *On verifie rapidement que :*

- $Q_\delta(aX) = Q_{\delta/a}(X)$
- $Q_\delta(Y + X) \leq Q_\delta(X)$

2.3.2 Inégalité de Kolmogorov-Rogozin

Les calculs ne sont pas écrits complètement dans cette partie. Ils sont à retrouver dans le document étudié [KZ14].

Définition 2.7 (Symétrisation d'une variable aléatoire). *On appelle symétrisation de X et on note X^s la variable aléatoire défini par :*

$$X^s = X - X'$$

où $X' \sim X$ sont indépendantes. De même on note F^s la loi de répartition de la symétrisation de X où X a pour loi de répartition F .

Puisque l'on s'intéresse à une somme de variables aléatoires (un polynôme), on donne un majorant dépendant de la fonction caractéristique qui se comporte bien avec des sommes.

Proposition 2.8. *Pour tout $0 < a\delta \leq 1$, on a*

$$Q_\delta(X) \leq C_d \frac{1}{a^d} \int_{\|t\| \leq a} |f(t)| dt$$

Où f est la fonction caractéristique de X .

On en déduit, par des majorations subtile d'analyse convexe, la majoration suivant :

Théorème 2.9. *On a aussi $\delta_1, \dots, \delta_k \leq \delta$,*

$$Q_\delta(S_k) \leq C_d \delta^d \left(\sum_{i=1}^k \delta_k^{2d} \mathbb{P}(|X_i^s| \geq \delta_i) \right)^{-\frac{1}{2}} \leq C_d \delta^d \left(\sum_{i=1}^k \delta_k^{2d} Q_{\delta_i}(X_i) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

En prenant, $\delta_1 = \dots = \delta_k = \delta$ on a la version qui nous intéresse.

2.3.3 Application aux polynômes

On applique directement le résultat précédant à une somme de variables aléatoires bien particulière : un polynôme.

Proposition 2.10.

$$Q_\delta \left(\sum_{k=0}^n f_{k,n} \xi_{k,n} z^n \right) \leq C \left(\sum_{k \in J_n(z)} 1 - Q_\delta(\xi_{k,n}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Où $J_n(z) = \{0 \leq k \leq n; |f_{k,n} z^n| > 1\}$

Proof. Dans un premier temps on rappelle que $Q_\delta(ae^{i\theta} X) = Q_{\delta/a}(X)$ et que $Q_\delta(X + Y) \leq Q_\delta(X)$. Puis on utilise l'inégalité $Q_{\delta/a}(X) \leq Q_\delta(X)$ vrai dès lors que $a > 1$. \square

De plus, pour Il reste à dire que si la queue de distribution n'est pas trop légère ie $|f_{k,n} z^n| > 1$ pour un nombre de $0 \leq k \leq n$, assez grand. On a $\text{Card} J_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ et donc :

Théorème 2.11. *Il existe $\delta_{|z|} > 0$ suffisamment petit pour que :*

$$Q_{\delta_{|z|}} \left(\sum_{k=0}^n f_{k,n} \xi_{k,n} z^n \right) \leq \frac{K}{\text{Card} J_n(z)^{1/2}} \longrightarrow 0$$

Dans le document [KZ14] cette hypothèse est plus forte. On suppose alors que $\text{Card} J_n(z) > \alpha n$ pour un certain α .

Remarque 2.12. *On remarque que le résultat ci-dessus n'est pas uniforme en z . Il montre juste que pour un z assez grand le polynôme aléatoire n'est pas concentré en un point.*

Proposition 2.13. *Pour une fonction u tel que $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \leq n$ $e^{n(u(|z|)-\varepsilon)} < |f_{n,k} z^k|$ On a, à partir d'un certain rang $e^{-n\varepsilon} < \delta_{|z|}$ et donc :*

$$\mathbb{P}(|W_n(z)| < e^{n(u(|z|)-2\varepsilon)}) \leq Q_{\delta_{|z|}}(e^{-n(u(|z|)-2\varepsilon)} W_n(z)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

La condition d'application de la proposition se reformule :

$$e^{n(u(|z|)-\varepsilon)} < |f_{n,k} z^k| \Leftrightarrow u(|z|) < \frac{k}{n} \log(|z|) + \log |f_{k,n}|^{\frac{1}{k}} + \varepsilon$$

Il suffit donc, si on dispose d'une fonction f tel que $f(\frac{k}{n}) = |f_{k,n}|$ et alors $u(|z|) = (\log f)^*(\log |z|)$ convient. De plus cette condition est optimal pour être uniforme en ε . On a donc :

Théorème 2.14.

$$\mathbb{P}(|W_n(z)| < e^{n((\log f)^*(\log |z|)-2\varepsilon)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Et donc, pour des entiers $l_1 < \dots < l_n < \dots$, il existe une extraction $l'_1 < \dots < l'_n < \dots$ tel que :

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \left(\frac{1}{l'_k} \log |W_{l'_k}(z)| < (\log f)^*(\log |z|) \right) \right) = 0$$

Proof. Le premier point découle de ce qui précède. Ensuite, on peut prendre l'_i de sorte que $\mathbb{P}(|W_{l'_i}(z)| < e^{l'_i((\log f)^*(\log |z|)-2\varepsilon)}) \leq \frac{1}{i^2}$. On a ensuite, par Borel-Cantelli : $\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \left(\frac{1}{l'_k} \log |W_{l'_k}(z)| \leq (\log f)^*(\log |z|) - \varepsilon \right) \right) = 0$. Puisqu'une union d'événement négligeable est négligeable, on a bien le résultat. \square

2.4 Mesure empirique des racines

On peut maintenant énoncer le théorème général:

Soit ξ_0, ξ_1, \dots une suite de variables aléatoires complexes, i.i.d., non dégénérées, vérifiant la condition de moment logarithmique :

$$\mathbb{E} [\log(1 + |\xi_0|)] < \infty.$$

Considérons une série de Taylor aléatoire de la forme :

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{k,n} z^k,$$

où les coefficients $f_{k,n} \in \mathbb{C}$ sont déterministes et satisfont asymptotiquement :

$$|f_{k,n}| = e^{-nu(k/n)+o(n)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

pour une certaine fonction $u : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(A1) Il existe $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ et $T_0 \in (0, \infty]$ tels que $f(t) > 0$ pour $t < T_0$ et $f(t) = 0$ pour $t > T_0$.

(A2) f est continue sur $[0, T_0)$ et semi-continue à gauche en T_0 si $T_0 < \infty$.

(A3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in [0, An]} |f_{k,n}^{1/n} - f(k/n)| = 0$ pour tout $A > 0$.

(A4) $R_0 := \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)^{-1/t} \in (0, \infty]$ et

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{k,n}|^{-1/k} \geq R_0 \quad \text{pour tout } n,$$

et aussi $\liminf_{n, k/n \rightarrow \infty} |f_{k,n}|^{-1/k} \geq R_0$.

Le théorème suivant est le théorème principal de [KZ14] que nous avons étudié au cours de ce mémoire.

Théorème 2.15. *Sous les hypothèses ci-dessus, la suite de mesures aléatoires $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ converge en probabilité vers une mesure déterministe μ , localement finie sur le disque D_{R_0} . La mesure μ est invariante par rotation et est caractérisée par :*

$$\mu(D_r) = (\log f)^{*'}(\log r), \quad r \in (0, R_0),$$

où $(\log f)^{*'}$ est la dérivée à gauche de $(\log f)^*$. Si $(\log f)^{*'}$ est absolument continue sur un intervalle $(\log r_1, \log r_2)$, alors la densité radiale de μ sur l'anneau $r_1 < |z| < r_2$ est donnée par :

$$\rho(z) = \frac{(\log f)^{**}(\log |z|)}{2\pi|z|^2}.$$

Remarque 2.16. *La mesure limite μ est déterministe, invariante par rotation, et décrite par :*

$$\mu(z) = \rho(|z|)^2 z, \quad \text{avec} \quad \rho(|z|) = \frac{(\log f)^{**}(\log |z|)}{2\pi|z|^2},$$

lorsque $(\log f)^*$ est dérivable deux fois.

Les inégalités obtenues dans les deux parties précédentes permettent alors de démontrer ce résultat.

Pour cela on introduit le potentiel logarithmique de G_n : $p_n(z) = \frac{1}{n} \log |G_n(z)|$ et on alors d'une part une borne supérieure uniforme de $|G_n(z)|$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n(z)| \leq (\log f)^*(\log |z|) \quad \text{presque sûrement.}$$

On en déduit la borne supérieure du potentiel logarithmique :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n(z)| \leq (\log f)^*(\log |z|) \quad \text{presque sûrement.}$$

Et d'autre part, une borne inférieure via l'inégalité de Kolmogorov–Rogozin, empêchant une trop forte annulation entre les termes:

Il existe une extraction $(l'_1 < \dots l'_n < \dots)$ telle que : $\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \left(\frac{1}{l'_k} \log |W_{l'_k}(z)| < (\log f)^*(\log |z|) \right) \right) = 0$

On a finalement que pour tout $z \in D_{R_0} \setminus \{0\}$,

$$p_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} (\log f)^*(\log |z|),$$

et sur des sous-suites bien choisies, cette convergence est presque sûre. Ce qui implique grâce à la relation $\mu_n = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |G_n(z)|$ qui repose sur la continuité du Laplacien dans l'espace des distributions comme discuté en section A.3 la convergence

$$\frac{1}{n} \mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu := \frac{1}{2\pi} \Delta (\log f)^*(\log |z|),$$

au sens des mesures dans D_{R_0} .

2.4.1 Application aux polynômes de Kac

Le théorème énoncé nous permet également de prouver la proposition sur la répartition des racines des polynômes de Kac. En effet, le modèle des polynômes de Kac correspond à $f_{n,k} = 1$ pour tout $k \leq n$, et $f_{n,k} = 0$ pour $k > n$. Il entre donc dans le cadre général avec :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.17. *La fonction $u(t) = -\log f(t)$ est donnée par :*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1], \\ +\infty & \text{si } t > 1, \end{cases} \quad \text{et donc} \quad (\log f)^*(s) = \sup_{t \in [0, 1]} st = \begin{cases} s & \text{si } s \leq 0, \\ 1 & \text{si } s > 0. \end{cases}$$

Proposition 2.18. *Lorsque $(\xi_k)_{k \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires complexes i.i.d., non dégénérées, vérifiant $\mathbb{E}[\log(1 + |\xi_0|)] < \infty$, Alors la mesure limite μ des racines de K_n (au sens $\frac{1}{n}\mu_{K_n} \rightarrow \mu$) est donnée par :*

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta(\log f)^*(\log |z|) = \delta_{\mathbb{S}^1},$$

c'est-à-dire la mesure uniforme sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$.

Proof. On a vu que :

$$(\log f)^*(\log |z|) = \begin{cases} \log |z| & \text{si } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Cette fonction est harmonique sauf sur le cercle \mathbb{S}^1 , où elle présente une discontinuité de dérivée.

Ainsi :

$$\Delta(\log f)^*(\log |z|) = 2\pi\delta_{\mathbb{S}^1},$$

au sens des distributions, et donc :

$$\frac{1}{n}\mu_{K_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta_{\mathbb{S}^1}.$$

□

Ce résultat montre que les racines des polynômes de Kac se répartissent asymptotiquement sur le cercle unité. Ce comportement est typique des modèles à coefficients constants dans le temps, et contraste fortement avec d'autres modèles où les racines remplissent un disque ou son extérieur.

Remarque 2.19. *Lorsque la condition de moment $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$ ne s'avère pas vérifiée, d'autres comportements sont possibles. Par exemple, Götze et Zaporozhets dans [GZ11] ont montré que si $\log(1 + \log(1 + |a_0|))$ a une queue de distribution à variations lentes, alors les racines de P_n se concentrent sur 2 cercles dont les rayons tendent vers 0 et l'infini.*

3 Étude des racines réelles

3.1 Contexte

Une question que l'on peut se poser à propos de polynôme est de savoir si ils ont des racines réelles. Pour répondre à cette question, l'approche métrique que nous avons utilisé auparavant, pour étudier la répartition sur tout le plan, n'est pas en soit conclusive. En effet, une mesure sur \mathbb{R}^2 telle qu'on l'a construite plus tôt, donne une masse nulle aux droites. En particulier à la droite $\text{Im}(z) = 0$. On va donc aborder le sujet sous un autre angle, on reconnaîtra dans un polynôme un produit scalaire, ce qui nous conduira à étudier des polynômes aléatoires particuliers. Ensuite, on cherchera naturellement à généraliser les résultats que l'on a obtenu.

Définition 3.1 (Nombre de racines réels). *Pour P_n un polynôme aléatoire quelconque, de degré déterministe n , on définit une variable aléatoire :*

$$R_n = \text{Card}\{t \in \mathbb{R} \mid P_n(t) = 0\}$$

Qui compte le nombre de racines réels.

3.2 Approche géométrique : le polynôme comme un produit scalaire

Une approche qui sera plus fructueuse est de considérer l'évaluation du polynôme $A(X) = a_0 + \dots + a_n X^n$ en t comme le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$$

On s'intéresse à l'orthogonale de $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$. On va mesurer sa projection sur la sphère. Pour que cette

méthode ait un intérêt, il faut un vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dont le normalisé se répartit uniformément sur la sphère.

Remarque 3.2. *On note f_X la fonction de répartition de X .*

Pour avoir ξ tel que $\xi/\|\xi\| \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^{n-1})$, il faut $f_{\xi/\|\xi\|} = 1$ et donc $f_\xi(x) = g(\|x\|)$. Si on demande de plus l'indépendance, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Pour $(\xi_k)_{k \leq n}$ une famille de variables aléatoires, on a*

$$\frac{\xi}{\|\xi\|} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^{n-1}) \quad \text{De coordonnées indépendantes} \iff \xi_i \sim \mathcal{N}(0, \lambda) \quad \text{Indépendantes}$$

Proof. La réflexion précédant la proposition a permis de montrer que $\xi/\|\xi\| \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^{n-1})$ de coordonnées indépendantes si et seulement si :

- $f_\xi(x) = h(\|x\|)$
- $f_\xi(x) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}$

Ainsi, le sens réciproque est clair puisque $f_\xi(x) = e^{-\lambda\|x\|^2}$. Pour le sens direct, on a remarqué que $f_{\xi_i}(t^2) = \int_0^{+\infty} f_\xi(s + t^2) ds =: g(t^2)$ et de plus, $f_\xi(x^2) = g(x^2)$. Ainsi, g vérifie :

$$g(x_1^2 + \dots + x_n^2) = g(x_1^2) \cdots g(x_n^2)$$

Donc, il existe λ, α tel que $g(x) = \alpha \exp(-\lambda x^2)$. Pour l'intégrabilité, il faut $\lambda > 0$ et α déterminé par la normalisation. Ainsi, on a finalement $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, \lambda)$ indépendantes. \square

3.2.1 Les racines réelles des polynômes aléatoires réels Gaussiens

Définition 3.4 (Polynôme aléatoire réel Gaussien). *Pour $(\xi_k)_{k \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, où $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Le polynôme aléatoire réel Gaussien associé est le polynôme définie par :*

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^n \xi_k z^k$$

Pour un polynôme $\sum^d a_n t^n$, admettre x comme racine veut exactement dire que le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$$

est nul. Ainsi, l'ensemble des polynômes admettant x comme racines est $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}^\perp$. C'est une variété de dimension $n - 1$.

Remarque 3.5. L'ensemble des polynômes ayant une racine réel est $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}^\perp$. C'est une variété de dimension n . On peut même remarquer que c'est un fibré vectoriel.

Pour calculer l'espérance, il nous faut introduire une nouvelle notion.

Définition 3.6 (Aire avec multiplicité). Pour $(\gamma_t)_{t \in \Gamma}$ des courbes sur \mathbb{S}^1 , on définit leur Aire avec multiplicité par $\mathcal{A}_m(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} dt$ où :

$$B_k = \bigcup_{X \in \mathcal{P}_k(\Gamma)} \bigcap_{i \in X} \gamma_i$$

On pose $\gamma_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} \right\|$. Et $\gamma_t^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}^\perp \cap \mathbb{S}^n$. t est une variété de dimension $n - 1$ et donc γ^\perp est un fibré dont les fibres sont \mathbb{S}^{n-1} .

Proposition 3.7. Par un changement de variable, on mesure le fibré :

$$\mathcal{A}_m(\gamma^\perp) = \int \mathcal{A}_m(\mathbb{S}^{n-1}) d\gamma = \mathcal{A}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{\mathbb{R}} \|\gamma'(t)\| dt$$

Théorème 3.8.

$$\mathbb{E}(R_n) = \frac{\mathcal{A}_m(\gamma^\perp)}{\mathcal{A}(\mathbb{S}^n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(t^2 - 1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2} - 1)^2}} dt$$

Proof.

$$\mathbb{E}(R_n) = \frac{\mathcal{A}_m(\gamma^\perp)}{\mathcal{A}(\mathbb{S}^n)} = \frac{\mathcal{A}(\mathbb{S}^{n-1})}{\mathcal{A}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{R}} \|\gamma'(t)\| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\gamma'(t)\| dt$$

on pose, $v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left(\frac{\|v(t)\|^2 v'(t) - (v(t) \cdot v'(t)) v(t)}{\|v(t)\|^3} \right)^2 = \frac{\|v(t)\|^2 \|v'(t)\|^2}{\|v(t)\|^6}$$

On a donc,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \frac{\|v(t)\| \times \|v'(t)\|}{\|v(t)\|^3} = \sqrt{\frac{(1-t^2)^3}{(1-t^{2n+2})^3} \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \left(\frac{1}{4t} \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{(1-t^2)^3}{(1-t^{2n+2})^3} \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \frac{t^{2n+2} - t^2 - 1 + t^{2n}(nt^2 - n - 1)^2}{(1-t^2)^3}} \end{aligned}$$

En simplifiant l'expression, on arrive au résultat. □

Théorème 3.9 (Conséquence asymptotique).

$$\mathbb{E}(R_n) \sim \frac{2}{\pi} \log(n)$$

Proof. Il faut étudier le changement de variables: $t = 1 + \frac{x}{n}$. □

3.3 Discussion sur l'universalité

Au cours de notre travail nous nous sommes finalement demandé dans quelle mesure les résultats obtenus sur le nombre de racines réelles dans le cas Gaussien restaient valables pour des coefficients suivant d'autres lois. Nous nous sommes donc intéressés aux travaux de Tao et Vu (voir [TV15]) qui établissent des résultats d'universalité pour les racines de polynômes aléatoires. On peut en effet montrer que sous des conditions très générales sur la distribution des coefficients, la statistique locale des racines réelles ou complexes est universelle, c'est-à-dire indépendante de la loi des coefficients, ces résultats sont valables pour des moments fixés. Cependant ces comportements universels reposent sur la forme du polynôme aléatoire. Nous allons ici présenter les résultats sur un type de polynôme que nous n'avons pas encore présenté lors de ce mémoire, il s'agit des polynômes dits plats ou de Weyl. On considère pour cela des polynômes aléatoires de la forme

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^n c_i \xi_i z^i,$$

où les c_i sont des coefficients déterministes de la forme $c_i = \frac{1}{\sqrt{i!}}$ et (ξ_i) sont des variables aléatoires i.i.d. Nous n'avons pas eu le temps de rentrer dans tous les détails de la preuve des résultats de l'article étudié mais comme nous trouvons ces derniers remarquables, nous les présentons ici ainsi qu'une partie de la méthode de preuve utilisée.

3.3.1 Fonctions de corrélation

Pour démontrer l'universalité il nous faut d'abord introduire des fonctions appelées de corrélation. Pour un polynôme à coefficients complexes, les racines forment un processus ponctuel $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \subset \mathbb{C}$. Les fonctions de corrélation à k -points $\rho^{(k)}$ décrivent la densité conjointe des racines :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \varphi(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_k}) \right] = \int_{\mathbb{C}^k} \varphi(z_1, \dots, z_k) \rho^{(k)}(z_1, \dots, z_k) dz_1 \cdots dz_k.$$

Ici l'intuition pour comprendre $\rho^{(k)}(z_1, \dots, z_k)$ est qu'elle approxime la probabilité d'avoir un zéro dans un petit voisinage de chacun des z_j . Elle modélise les interactions entre racines.

Lorsque les coefficients sont réels, les racines sont symétriques par conjugaison. On définit donc des fonctions de corrélation mixtes $\rho^{(k,\ell)}$:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_\ell} \varphi(\zeta_{i_1}^{\mathbb{R}}, \dots, \zeta_{i_k}^{\mathbb{R}}, \zeta_{j_1}^{\mathbb{C}}, \dots, \zeta_{j_\ell}^{\mathbb{C}}) \right] = \int_{\mathbb{R}^k \times (\mathbb{C}_+)^{\ell}} \varphi \cdot \rho^{(k,\ell)}.$$

Cela permet d'étudier séparément les racines réelles et complexes conjuguées. On a alors la formule

$$\mathbb{E}N_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \rho^{(1,0)}(x) dx$$

ce qui nous permettra aussi d'obtenir des résultats sur le nombre de racines en moyenne selon la forme du polynôme.

3.3.2 Phénomène d'universalité

À partir de ces fonctions, on peut énoncer des résultats d'universalité notamment que les statistiques locales des racines (comme $\rho^{(k)}$ ou $\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}]$) sont indépendantes de la loi des coefficients ξ_i , sous certaines hypothèses sur leurs moments. À grande échelle, les racines des polynômes sont distribuées selon une mesure limite :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\zeta_i} \rightarrow \mu \quad \text{faible.}$$

Les résultats énoncés dans l'article étudié ([TV15]) permettent d'établir que pour les polynômes plats on a la mesure limite suivante:

$$\mu = \frac{1}{\pi} 1_{|z| \leq \sqrt{n}} dz.$$

Et on obtient ainsi le nombre de racines réelles si le moment satisfait l'hypothèse $\mathbb{E}|\xi|^{2+\varepsilon} < \infty$, on a :

$$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}] = \frac{2}{\pi} \sqrt{n} + \mathcal{O}(n^{1/2-c})$$

Ce résultat dépend de l'universalité des fonctions de corrélation locales. Ce résultat se base sur une démonstration qui utilise le principe du remplacement, nous avons trouvé ce dernier remarquable, il est utilisé de manière très explicite par Lindeberg dans le théorème Central limite (on peut par exemple se référer à [Chi22]). Sa formulation dans le cas qui nous intéresse ici est un peu subtile mais elle permet d'affirmer que deux fonctions f et \tilde{f} sont asymptotiquement proches si elles n'ont pas une trop forte concentration de zéro au même endroit et si leurs moments logarithmiques sont proches à certains endroits. Soient f et \tilde{f} deux polynômes aléatoires de degré au plus n , le principe de remplacement repose plus exactement sur les hypothèses de non-dégénérescence à savoir f et \tilde{f} ne sont presque jamais identiquement nuls, de non-agglomération: le nombre de racines dans tout petit disque est borné et de comparabilité des log-magnitudes qui peut être énoncé de la manière suivante

$$\left| \mathbb{E}F(\log |f(z_1)|, \dots, \log |f(z_k)|) - \mathbb{E}F(\log |\tilde{f}(z_1)|, \dots, \log |\tilde{f}(z_k)|) \right| \leq \varepsilon_n$$

pour toute fonction test F régulière. Sous ces hypothèses, les fonctions de corrélation k -points des racines de f et de \tilde{f} sont asymptotiquement équivalentes :

$$\int G(w_1, \dots, w_k) \rho_f^{(k)}(z_1+w_1, \dots, z_k+w_k) dw_1 \dots dw_k \approx \int G(w_1, \dots, w_k) \rho_{\tilde{f}}^{(k)}(z_1+w_1, \dots, z_k+w_k) dw_1 \dots dw_k$$

Ainsi, si deux distributions $\xi, \tilde{\xi}$ ont même moyenne, variance, et moments d'ordre 2, alors leurs statistiques de racines coïncident asymptotiquement.

La preuve repose sur de nombreux lemmes techniques et résultats intermédiaires que nous n'avons pas eu le temps d'étudier en détail, elle utilise cependant le fait que $\log |f(z)|$ est concentré autour d'une fonction déterministe $G(z)$, on a alors que si $f(z)$ est une somme de variables indépendantes, alors $\log |f(z)|$ est fortement concentré autour de $\frac{1}{2} \log \mathbb{E}|f(z)|^2$. On peut ensuite, par une version quantitative de la formule de Jensen, relier la densité des racines à $\Delta G(z)$. Finalement, grâce au principe de remplacement, on peut remplacer les coefficients originaux par des gaussiens -pour lesquels la distribution des racines est connue-tout en contrôlant l'erreur.

Les résultats s'appliquent tant aux lois continues qu'aux lois discrètes (par exemple Bernoulli), ce qui est remarquable. L'universalité permet donc de transférer des calculs faits dans le cas gaussien vers des cas plus généraux.

4 Perspectives

Les polynômes sont désormais un élément essentiel de l'étude des objets aléatoires. Ce champ d'étude s'est imposé grâce à la précision des résultats que l'on peut obtenir et à la faiblesse des hypothèses requises.

L'affaiblissement de l'hypothèse d'indépendance que l'on a présenté comme nécessaire est un enjeu qui pourra intéresser le lecteur qui souhaite poursuivre la lecture sur le sujet.

Plus personnellement (pluriel à comprendre dans le sens où nous sommes deux personnes), nous avons apprécié effectuer ce travail de lecture, de compréhension sur un sujet que nous ne connaissions pas. Nous remercions Djailil Chafai pour la suggestion du sujet et de nous avoir accompagné durant ces quelques mois. Les probabilités ont ceci de remarquable que des questions simples amènent à des élaborations diverses, on a eu l'occasion de découvrir la théorie du potentiel, des concentrations, d'étudier un raisonnement de géométrie, et bien évidemment les principes classiques des probabilités. Et ces élaborations diverses produisent des résultats très généraux et simples à énoncer, ce qui les rend incisifs et puissants.

A Annexe: Présentations des objets mathématiques

A.1 Topologie et convergence de l'espace des mesures

Soit $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ le disque ouvert de rayon $r > 0$ centré à l'origine. Soit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$ le disque unité. On note $\mathbb{D}_\infty = \mathbb{C}$. On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} . Une mesure de Borel μ sur un espace métrique localement compact X est dite *localement finie* (l.f.) si $\mu(A) < \infty$ pour tout ensemble compact $A \subset X$.

Définition A.1. Une suite μ_n de mesures localement finies sur X converge vaguement vers une mesure localement finie μ si, pour toute fonction continue à support compact $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi(z) \mu_n(dz) = \int_X \varphi(z) \mu(dz). \quad (6)$$

Si μ_n et μ sont des mesures de probabilité, la convergence vague est équivalente à la convergence faible plus familière, pour laquelle (1) doit être vérifiée pour toutes les fonctions φ continues et bornées ; voir Lemme 4.20 dans [Kal02].

Soit $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble de toutes les mesures localement finies sur X , muni de la topologie vague. Notons que $\mathcal{M}(X)$ est un espace polonais ; voir Théorème A.2.3 [Kal02].

Définition A.2. Une mesure aléatoire sur X est un élément aléatoire défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant des valeurs dans $\mathcal{M}(X)$. La convergence presque sûre et la convergence en probabilité de mesures aléatoires sont définies comme la convergence des éléments aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}(X)$ correspondants.

On a alors, par définition, qu'une suite de mesures aléatoires μ_n converge vers une mesure aléatoire μ en probabilité (resp. presque sûrement) si 6 est vérifiée en probabilité (resp. presque sûrement) pour toute fonction continue à support compact $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition A.3. Soit $(\xi_k)_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires complexes, soit $(f_{n,k})_{k \geq 0}$ une suite complexe dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On définit la série entière aléatoire :

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{n,k} z^k,$$

dans le disque de convergence associé.

Définition A.4. On définit la mesure des racines de G_n (dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ où G_n ne s'annule pas identiquement) par :

$$\mu_n := \sum_{z \in D \text{ tel que } G_n(z)=0} n_{G_n}(z) \delta_z,$$

où $n_{G_n}(z)$ désigne la multiplicité du zéro z .

A.2 Distributions et fonctions test

Nous renvoyons au cours d'analyse pour les démonstrations des propositions énoncées dans cette partie, ici nous n'allons pas jusqu'à introduire la topologie limite inductive qui permet de définir formellement la topologie associée à l'espace des fonctions tests car ce n'est pas le sujet du mémoire.

Définition A.5. 1. On appelle fonction test toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact. L'ensemble des fonctions test est noté $\mathcal{D}(\Omega)$.

2. Une distribution sur Ω est une application linéaire continue $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$. L'ensemble des distributions est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La dérivée distributionnelle $D^\alpha T$ est définie par :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

La continuité est définie via la topologie usuelle de $\mathcal{D}(\Omega)$: convergence des suites de fonctions test ainsi que de toutes leurs dérivées, avec support contenu dans un compact fixé.

Proposition A.6. *L'application $T \mapsto D^\alpha T$ est linéaire et continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On définit l'action de $P(D)$ sur $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle P(D)T, \varphi \rangle := \langle T, P(-D)\varphi \rangle.$$

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$, l'action de $P(D)$ sur T est bien définie et linéaire (il s'agit d'une conséquence immédiate de la linéarité de T et de la stabilité de $\mathcal{D}(\Omega)$ par dérivation).

Proposition A.7. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on a :*

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle.$$

où le Laplacien sur \mathbb{R}^n est l'opérateur $\Delta := \sum_{i=1}^n \partial_i^2$.

A.3 Théorie du potentiel

La théorie du potentiel concerne l'étude de l'opérateur laplacien et notamment des fonctions harmoniques et sous-harmoniques. Dans le plan complexe par exemple, cette théorie commence par l'étude de la fonction potentiel et de son énergie définies de la manière suivante :

Soit μ une mesure de Borel finie à support compact dans \mathbb{C} , Le potentiel associé est défini sur \mathbb{C} par $p_\mu(z) = \int \log |z - w| d\mu(w) = \mu \star \log$

Dans les résultats étudiés pour ce mémoire, la démonstration d'un des théorèmes principaux repose sur l'utilisation du potentiel pour minorer la mesure des racines.

Proposition A.8. *Pour tout multi-indice α , on a :*

$$\partial^\alpha \delta_{x_0}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

où pour $x_0 \in \Omega$, la distribution delta en x_0 est définie par :

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition A.9. *La fonction fondamentale du Laplacien en dimension 2 est :*

$$\Phi(z) := -\frac{1}{2\pi} \log |z - z_0|.$$

Théorème A.10. *On a au sens des distributions :*

$$\Delta \Phi = \delta_{z_0}.$$

A.4 Application à la mesure des racines

Théorème A.11. *Dans tout domaine D où G_n converge et n'est pas identiquement nul, on a au sens des distributions :*

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |G_n(z)|.$$

Proof. La série $G_n(z)$ converge normalement dans un disque D fixé (par hypothèse sur les $f_{n,k}$ et les ξ_k). En dehors des racines, G_n est holomorphe donc $\log |G_n(z)|$ est sous-harmonique. De plus, G_n est analytique non nulle sur un ouvert dense.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(D)$. Localement, autour d'un zéro z_0 de G_n de multiplicité m , on peut écrire :

$$G_n(z) = (z - z_0)^m h(z),$$

avec $h(z)$ holomorphe et non nul. Alors :

$$\log |G_n(z)| = m \log |z - z_0| + \log |h(z)|.$$

On applique le Laplacien au sens des distributions :

$$\Delta \log |G_n(z)| = m \Delta \log |z - z_0| + \Delta \log |h(z)|,$$

et comme précédemment :

$$\Delta \log |z - z_0| = 2\pi \delta_{z_0}, \quad \Delta \log |h(z)| \in L_{\text{loc}}^1.$$

En sommant sur tous les racines :

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |G_n(z)| = \sum_{G_n(z)=0} n_{G_n}(z) \delta_z = \mu_n.$$

□

Définition A.12. On définit le potentiel logarithmique associé à G_n par :

$$p_n(z) := \frac{1}{n} \log |G_n(z)|.$$

A.5 Transformée de Legendre-Fenchel

Un dernier outil nécessaire est la transformée de Legendre-Fenchel, pour des résultats supplémentaires nous renvoyons au cours d'optimisation de ce semestre.

Définition A.13. Pour une fonction f , on définit la transformée de Legendre-Fenchel de f que l'on note f^* par :

$$f^*(s) := \sup_t (st + f(t))$$

Si f est convexe, et que f' admet localement une réciproque : $(f^*)' = (f')^{-1}$.

Soit $u(t) := -\log f(t)$ (avec convention $\log 0 = -\infty$). O

Remarque A.14. I est convexe, finie sur $(-\infty, \log R_0)$ et infinie sur $(\log R_0, \infty)$.

References

- [Kac43] M. Kac. “On the average number of real roots of a random algebraic equation”. en. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 49.4 (1943), pp. 314–320. ISSN: 0273-0979, 1088-9485. DOI: [10.1090/S0002-9904-1943-07912-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07912-8). URL: <https://www.ams.org/bull/1943-49-04/S0002-9904-1943-07912-8/>.
- [Kal02] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. en. Probability and Its Applications. New York, NY: Springer New York, 2002. ISBN: 9781441929495. DOI: [10.1007/978-1-4757-4015-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4015-8). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-4015-8>.
- [GZ11] Friedrich Gotze and Dmitrii Nikolaevich Zaporozhets. “On the distribution of complex roots of random polynomials with heavy-tailed coefficients”. en. In: 56.4 (2011), pp. 812–818. ISSN: 0040-361X. DOI: [10.4213/tvp4427](https://doi.org/10.4213/tvp4427). URL: <http://mi.mathnet.ru/tvp4427>.
- [KZ14] Zakhar Kabluchko and Dmitry Zaporozhets. “Asymptotic distribution of complex zeros of random analytic functions”. In: *The Annals of Probability* 42.4 (July 2014). ISSN: 0091-1798. DOI: [10.1214/13-AOP847](https://doi.org/10.1214/13-AOP847). URL: <https://projecteuclid.org/journals/annals-of-probability/volume-42/issue-4/Asymptotic-distribution-of-complex-zeros-of-random-analytic-functions/10.1214/13-AOP847.full>.
- [TV15] Terence Tao and Van Vu. “Local Universality of Zeroes of Random Polynomials”. en. In: *International Mathematics Research Notices* 2015.13 (2015), pp. 5053–5139. ISSN: 1073-7928, 1687-0247. DOI: [10.1093/imrn/rnu084](https://doi.org/10.1093/imrn/rnu084). URL: <https://academic.oup.com/imrn/article-lookup/doi/10.1093/imrn/rnu084>.
- [Chi22] Calvin Wooyoung Chin. “A Short and Elementary Proof of the Central Limit Theorem by Individual Swapping”. en. In: *The American Mathematical Monthly* 129.4 (Apr. 2022), pp. 374–380. ISSN: 0002-9890, 1930-0972. DOI: [10.1080/00029890.2022.2027711](https://doi.org/10.1080/00029890.2022.2027711). URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00029890.2022.2027711>.