

Comportement à l'explosion des solutions des équations de Navier-Stokes

Youssef Guindy

Matthieu Vogel

Encadré par Isabelle Gallagher

1 Introduction

On s'intéresse dans ce mémoire à un aspect de la résolution de l'équation de Navier-Stokes dont on cherche à étudier les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u &= -\nabla p \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

Le célèbre problème donné par l'existence et l'unicité des solutions de cette équation aux dérivées partielles aurait des conséquences intéressantes. En particulier, si des solutions régulières globales en temps existent pour toute donnée initiale régulière qui décroît « assez rapidement » à l'infini, cela indiquerait que la physique des fluides est bien décrite par cette équation. À l'inverse, prouver la non-unicité ou la non-existence de telles solutions permettrait de prouver que la physique n'est pas bien décrite par cette équation.

On sait que pour une condition initiale petite, il existe une unique solution en temps infini, et que pour une donnée initiale quelconque, on a existence et unicité locales en temps. Leray a démontré l'existence globale de solutions faibles qui vérifient une inégalité sur l'énergie, mais il a été prouvé récemment par Albritton, Brué et Colombo [ABC22] qu'il n'y a pas unicité de ces solutions, dans le cas de l'équation de Navier-Stokes avec un terme de force volumique extérieure.

Les deux directions de recherche sur la résolution de ce problème difficile sont donc les suivantes. La première direction est bien entendu d'essayer de démontrer l'existence. Pour contourner la difficulté de travailler avec les solutions dites *classiques*, qui sont régulières (au moins C^2), l'idée, initiée par Leray, est d'étudier les solutions faibles, puis de montrer *a posteriori* qu'elles sont en fait régulières. L'autre direction - celle qui nous intéresse dans ce mémoire - est celle de construire un contre-exemple à l'existence de solutions globales en temps. L'idée serait d'étudier une solution qui existe en temps fini et de regarder ce qui se passe à l'instant d'explosion pour essayer de trouver une telle solution. Dans des espaces fonctionnels dits *critiques*, notion qui dépend d'une certaine invariance d'échelle de l'équation et que nous définirons plus bas, ceci est très difficile. Dans le cas de l'espace critique L^3 très familier, ce n'est qu'en 2003 que Escauriaza, Seregin et Šverák, démontrent dans [ES3] que si une solution u dans un certain sens défini plus loin cesse d'exister à partir du temps $T^* < \infty$, alors

$$\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u(t, \cdot)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} = +\infty .$$

L'enjeu de ce mémoire est donc la preuve d'un résultat d'Albritton dans [Alb18] qui montre l'explosion au temps maximal d'existence de la norme d'un certain type de solution de l'équation de Navier-Stokes dans les espaces de Besov critiques qui sont des espaces fonctionnels que nous définirons dans la suite du mémoire. Plus récemment, Terence Tao obtient dans [Tao21] un résultat quantitatif sur l'explosion de la norme $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions *classiques* de Navier-Stokes au temps maximal d'existence. Il est probablement possible d'adapter ces méthodes pour obtenir un résultat quantitatif dans les espaces de Besov.

Nous remercions notre encadrante de mémoire Isabelle Gallagher pour ses explications très claires, son enthousiasme et pour ses perpétuels (très rassurants) rappels que « les maths c'est dur » !

2 Des résultats d'analyse

Nous suivons les notations de Bahouri, Chemin et Danchin dans [BCD11].

2.1 Les objets classiques

Pour introduire les notations et les conventions que nous utiliserons dans le texte, nous définissons ici quelques objets classiques et rappelons les énoncés de quelques résultats fondamentaux.

Remarque. Pour $p \in [1, \infty]$, on notera toujours p' l'exposant conjugué de p , i.e. l'unique élément de $[1, \infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Nous commençons par rappeler l'inégalité de Hölder - qui est cruciale à tous les résultats de ce mémoire - sous une forme légèrement plus générale que celle qu'on trouve habituellement.

Proposition 2.1 (Inégalité de Hölder). *Soit (X, μ) un espace mesuré et $(p, q, r) \in [1, +\infty]^3$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} .$$

Si $(f, g) \in L^p(X, \mu) \times L^q(X, \mu)$, alors fg est dans $L^r(X, \mu)$ et

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} .$$

De plus, si

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}} \leq 1} \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) < \infty ,$$

alors f est dans L^p et

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}} \leq 1} \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) .$$

Remarque. Le fait d'avoir un espace mesuré quelconque sera vraiment utile dans la suite puisqu'on pourra appliquer l'inégalité « avec des poids », par exemple pour une mesure $f(x)dx$ sur \mathbb{R}^d .

Nous énonçons également les inégalités classiques de Minkowski et de Young.

Proposition 2.2 (Inégalité de Minkowski). *Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés, et $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Alors on a :*

$$\left\| \|f\|_{L^p(\mu)} \right\|_{L^q(\nu)} \leq \left\| \|f\|_{L^q(\nu)} \right\|_{L^p(\mu)} .$$

Remarque. On retrouve l'inégalité de Minkowski classique en prenant pour (X, μ) la paire $\{0, 1\}$ avec la mesure de comptage, et $q \geq p = 1$.

Proposition 2.3 (Inégalité de Young). *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} .$$

Si $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|f \star g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} .$$

Remarque. On peut démontrer l'inégalité de Young dans un groupe localement compact muni de sa mesure de Haar invariante à gauche (avec des hypothèses plus précises), mais nous ne considérons que \mathbb{R}^d dans ce mémoire.

Nous utilisons la convention suivante pour la transformée de Fourier.

Définition 2.4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de f est la fonction définie par :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|\xi)} f(x) dx .$$

On a alors $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Maintenant on rappelle quelques définitions élémentaires.

Définition 2.5 (Espace de Schwartz). On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f\|_{k,\mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha f(x)| < \infty .$$

Muni de cette famille de semi-normes, c'est un espace de Fréchet.

Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions tempérées.

Nous rappelons qu'on peut définir la transformée de Fourier sur \mathcal{S} , et que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue. Nous rappelons aussi que nous définissons par dualité la transformée de Fourier sur les distributions tempérées : si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors on définit $\mathcal{F}u$ par

$$\langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$.

Remarque. Par densité, nous montrons alors que \mathcal{F} est continue $L^2 \rightarrow L^2$. Par interpolation (par exemple grâce au théorème de Riesz-Thorin), la transformée de Fourier est continue de L^p dans $L^{p'}$ pour tout $p \in [1, 2]$.

Maintenant nous définissons un ensemble particulier de distributions tempérées dont l'utilité apparaîtra quand on parlera de la théorie de Littlewood-Paley. On utilisera la notation suivante :

Pour $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le multiplicateur de Fourier $\theta(\lambda D)$ par $\theta(\lambda D)f = \mathcal{F}^{-1}(\theta(\lambda \cdot)\widehat{f})$.

Définition 2.6. On définit $\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \forall \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \|\theta(\lambda D)u\|_{L^\infty} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \right\}$.

Remarque. Donnons une façon pratique que nous avons trouvée pour montrer qu'une fonction est dans \mathcal{S}'_h . Si $f \in L^p$ avec $p \in [1, \infty[$, alors $f \in \mathcal{S}'_h$.

En effet, soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, qu'on écrit $\theta = \widehat{\chi}$. On a alors $\theta(\lambda D)f = \lambda^{-d} \chi(\lambda^{-1} \cdot) \star f$. De plus $\widehat{\chi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p'}$. Par inégalité de Young, on a alors

$$\|\theta(\lambda D)f\|_{L^\infty} = \lambda^{-d} \|\chi(\lambda^{-1} \cdot) \star f\|_{L^\infty} \leq \lambda^{-d+d/p'} \|\chi\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} .$$

Or $p' > 1$ car $p < \infty$, donc $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\theta(\lambda D)\|_{L^\infty} = 0$.

Comme nous nous intéressons à une EDP, il est normal de vouloir calculer la norme d'une fonction en espace, puis la norme de cette norme en temps. La définition suivante donne un sens à cela.

Définition 2.7. Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, I un intervalle de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq \infty$. Soit $u : I \rightarrow X$ telle que $\|u\|$ est mesurable. On définit alors

$$\|u\|_{L^p_T(X)} = \|\|u(t)\|_X\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_I \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} & \text{si } p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in I} \|u(t)\|_X & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

L'espace $L^p_T(X) = \{u \mid \|u\|_{L^p_T(X)}\}$ est alors un espace de Banach. On le notera aussi parfois $L^p(I; X)$.

Preuve que $L_I^p(X)$ est un Banach. Nous traitons le cas le plus facile $p = \infty$ pour donner l'idée. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $L_I^\infty(X)$. Soit $\epsilon > 0$. Pour n, m grands, on a pour presque tout $t \in I$

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|_X \leq \|u_n - u_m\|_{L_I^\infty(X)} \leq \epsilon .$$

Par complétude de X , $u_n(t)$ converge vers $u(t) \in X$ pour presque tout t , et la limite est mesurable. On a alors pour presque tout $t \in I$,

$$\|u(t)\|_X = \lim_n \|u_n(t)\|_X \leq \limsup_n \|u_n\|_{L_I^\infty(X)} < \infty .$$

Ce qui montre que la limite est dans $L_I^\infty(X)$. On montre de même qu'on a convergence dans $L^\infty(I; X)$. \square

Nous donnons un résultat classique de point fixe dans les espaces de Banach, qui est l'ingrédient principal pour démontrer des théorèmes d'existence de solutions. Nous donnons ensuite une version plus précise en remarque, mais nous avons modifié l'énoncé que donne Albritton dans l'article [Alb18] pour réussir à le démontrer.

Lemme 2.8 (Schéma d'itération de Picard). *Soient E un espace de Banach et $B : E \times E \rightarrow E$ une application bilinéaire bornée. Soit $a \in E$ tel que*

$$\|a\| \leq \alpha < \frac{1}{4\|B\|} .$$

On définit la suite $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et

$$a_{n+1} = a + B(a_n, a_n) .$$

Alors (a_n) converge dans E vers l'unique solution dans $B_E(0, 2\alpha)$ de l'équation

$$x = a + B(x, x) .$$

Démonstration. Montrons par récurrence que $\|a_n\| \leq 2\alpha$. C'est bien le cas pour a_0 . Si $\|a_n\| \leq 2\alpha$, alors on a

$$\|a_{n+1}\| \leq \alpha + \|B\| \|a_n\|^2 < 2\alpha .$$

Remarquons ensuite que $B(x, x) - B(y, y) = B(x, x - y) + B(x - y, y)$, d'où il vient que

$$\|a_{n+1} - a_n\| = \|B(a_n, a_n) - B(a_{n-1}, a_{n-1})\| \leq \underbrace{4\alpha\|B\|}_{<1} \|a_n - a_{n-1}\| .$$

Ainsi, (a_n) est de Cauchy, donc converge, et sa limite est solution de l'équation. L'unicité est claire. \square

Remarque. Albritton donne dans [Alb18] une version beaucoup plus forte de ce lemme. Nous n'avons pas réussi à la montrer « naïvement », mais nous avons réussi à reformuler l'énoncé. Nous donnons donc l'énoncé suivant que nous avons réussi à démontrer.

Soit de plus $L : E \rightarrow E$ linéaire continue, telle que $\|L\| < 1$ (en particulier $\text{Id} - L$ est inversible). Soit $a \in E$ tel que $\|a\| < \frac{(1 - \|L\|)^2}{4\|B\|}$. Alors on trouve l'unique solution de norme inférieure à $\frac{1 - \|L\|}{2\|B\|}$ de l'équation

$$x = a + L(x) + B(x, x)$$

par un schéma d'itération similaire.

Nous utilisons cette version générale implicitement dans ce mémoire quand on parle d'existence des solutions de l'équation de Navier-Stokes perturbée que nous définirons plus tard. Nous n'utiliserons explicitement que le cas $L = 0$ démontré ci-dessus.

2.2 Les objets moins classiques

Nous introduisons ici les résultats plus spécifiques à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles et notamment de l'équation de Navier-Stokes. Il s'agit des bases de la théorie de Littlewood-Paley.

Commençons par deux lemmes essentiels sur les fonctions à transformée de Fourier localisée.

Lemme 2.9 (Inégalité de Bernstein). *Soient $0 < r_1 < r_2$ et soient $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid r_1 \leq |x| \leq r_2\}$ une couronne et B une boule centrées en 0. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous $p, q \in [1, \infty]$ tels que $q \geq p$ et toute fonction $f \in L^p$,*

(i) *Si $\text{Supp } \widehat{f} \subset \lambda B$, alors*

$$\sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq C^{k+1} \lambda^{k+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p} .$$

(ii) *Si $\text{Supp } \widehat{f} \subset \lambda \mathcal{C}$, alors*

$$C^{-k-1} \lambda^k \|f\|_{L^p} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C^{k+1} \lambda^k \|f\|_{L^p}$$

Démonstration. Montrons la première assertion. Si $\text{Supp } \widehat{f} \subset \lambda B$, alors pour $f_\lambda(x) = \lambda^{-d} f(\lambda^{-1}x)$, on a $\widehat{f_\lambda} = \widehat{f}(\lambda \cdot)$, donc $\text{Supp } \widehat{f_\lambda} \subset B$.

Or on a

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (f_\lambda)\|_{L^q} &= \lambda^{-k-d+\frac{d}{q}} \|\partial^\alpha f\|_{L^q} , \\ \|f_\lambda\|_{L^p} &= \lambda^{-d+\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p} . \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer le résultat pour $\lambda = 1$, ce que nous supposons dans la suite de la preuve.

Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $0 \leq \rho \leq 1$ et telle que $\rho \equiv 1$ sur B . On a alors $\widehat{f} = \rho \cdot \widehat{f}$, donc en posant $\psi = \mathcal{F}^{-1}\rho$, on a $f = f \star \psi$, ou encore

$$\partial^\alpha f = f \star \partial^\alpha \psi .$$

Soit alors $r \geq 1$ (car $q \geq p$) tel que $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Par l'inégalité de Young, on a

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^r} .$$

Nous allons maintenant utiliser l'inégalité de Young : $xy \leq \frac{x^r}{r} + \frac{y^{r'}}{r'}$. On a alors

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^r} &\leq \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty}^{(r-1)/r} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^1}^{1/r} \\ &\leq \frac{1}{r} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^1} + \frac{r-1}{r} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty} \\ &\leq \|\partial^\alpha \psi\|_{L^1} + \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty} . \end{aligned}$$

Or $\|\partial^\alpha \psi\|_{L^1} = \left\| \frac{(1 + |\cdot|^2)^d \partial^\alpha \psi}{(1 + |\cdot|^2)^d} \right\|_{L^1}$, donc on obtient par continuité de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^r} &\leq C \left\| (1 + |\cdot|^2)^d \partial^\alpha \psi \right\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left\| (\text{Id} - \Delta)^d ((\cdot)^\alpha \rho) \right\|_{L^1} \\ &\leq C^{k+1} . \end{aligned}$$

La deuxième assertion est un peu plus difficile mais se montre de façon similaire, le lecteur¹ en trouvera une preuve par Bahouri, Chemin et Danchin dans [BCD11]. \square

1. Nous allons parfois nous adresser au « lecteur ». Bien entendu, nous voudrions systématiquement dire au (à la) lecteur(-trice).

Et un deuxième lemme très utile pour contrôler la taille des solutions :

Lemme 2.10 (Effet du flot de la chaleur). *Soit \mathcal{C} une couronne de \mathbb{R}^d . Il existe des constantes $c, C > 0$ telles que pour tout $p \in [1, \infty]$, tous $t, \lambda \geq 0$ et toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{Supp } \hat{f} \subset \mathcal{C}$, on a*

$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^p} \leq C e^{-ct\lambda^2} \|f\|_{L^p} .$$

Démonstration. L'idée est similaire. On peut supposer $\lambda = 1$. On considère $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ qui vaut 1 sur un voisinage de la couronne \mathcal{C} . On écrit alors $e^{t\Delta} u = \rho(D)e^{t\Delta} u$, puis comme avant, en appliquant la transformée de Fourier on obtient une convolution. Pour majorer les termes dans l'inégalité de Young, on utilise des intégrations par parties et la formule de Faà di Bruno. \square

Ainsi, avec ces lemmes, il est naturel de vouloir décomposer la transformée de Fourier d'une fonction en composantes à support dans des compacts, qui quantifient « une bande de fréquences ». Il est donc naturel d'utiliser une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de \mathbb{R}^d par des couronnes.

Définition 2.11 (Les fonctions χ et φ). Il existe des fonctions positives $\chi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (on peut même demander qu'elles soient radiales *i.e.* ne dépendent que de la distance à l'origine) telles que

$$\begin{aligned} \text{Supp } \chi &\subset B\left(0, \frac{4}{3}\right), & \text{Supp } \varphi &\subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d \mid \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3} \right\} \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, & \chi(\xi) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi(2^{-j}\xi) &= 1 \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) &= 1 \end{aligned}$$

Remarque. Le choix des supports de χ et φ est un peu arbitraire. Il assure simplement que dès que $|j - k| > 1$, on ait $\text{Supp } \varphi(2^{-j}\cdot) \cap \text{Supp } \varphi(2^{-k}\cdot) = \emptyset$, et que dès que $j \geq 1$, on ait $\text{Supp } \varphi(2^{-j}\cdot) \cap \text{Supp } \chi = \emptyset$.

Ne perdons pas de vue notre but, qui est de « décomposer » la transformée de Fourier via cette partition de l'unité. Il est donc naturel de définir

Définition 2.12 (Les multiplicateurs $\dot{\Delta}_j$ et \dot{S}_j). Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on définit le j -ième bloc dyadique homogène $\dot{\Delta}_j$ par $\dot{\Delta}_j u = \varphi(2^{-j}D)u$, et l'opérateur de troncature \dot{S}_j par $\dot{S}_j u = \chi(2^{-j}D)u$ pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Maintenant nous avons les outils pour définir les espaces de Besov.

Définition 2.13 (Espaces de Besov). Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$. Pour $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$\|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} = \left\| \left(2^{js} \left\| \dot{\Delta}_j u \right\|_{L^p} \right)_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \left\| \dot{\Delta}_j u \right\|_{L^p}^q \right)^{1/q} .$$

L'espace de Besov homogène $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$ telles que $\|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} < \infty$. C'est un espace normé.

Preuve que $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ est une norme si on se restreint à \mathcal{S}'_h . L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent directement des mêmes propriétés pour les normes ℓ^q et L^p .

Si $\|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = 0$, alors $\text{Supp } \hat{u} \subset \{0\}$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $u = \dot{S}_j u$. Mais comme $u \in \mathcal{S}'_h$, on a $\left\| \dot{S}_j u \right\|_{L^\infty} = \left\| \chi(2^{-j}D)u \right\|_{L^\infty} \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0$, ce qui conclut. \square

Remarque. (i) Pour que $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ soit une norme, on utilise vraiment le fait d'être dans \mathcal{S}'_h . En effet, la transformée de Fourier d'un polynôme $P(x)$ est une combinaison linéaire des dérivées de la distribution de Dirac (ceci est facilement vu en calculant la transformée de Fourier des dérivées de la distribution de Dirac par dualité, et en utilisant l'inversion de Fourier), donc on a $\|P\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = 0$. Ainsi, certains auteurs définissent plutôt les espaces de Besov dans les distributions tempérées modulo les polynômes.

- (ii) Ici le choix de χ et φ n'est pas important. En effet, si on décale les supports en gardant la condition que $\text{Supp } \varphi(2^{-j} \cdot) \cap \text{Supp } \varphi(2^{-j'} \cdot) = \emptyset$ dès que $|j - j'| \geq J_0$, on obtient une norme équivalente.
- (iii) Il est également possible de définir des bloc dyadiques non homogènes et des espaces de Besov non homogènes, mais cela ne nous intéressera pas dans ce mémoire. Ainsi, nous parlerons parfois (par abus de langage) d'espace de Besov pour indiquer un espace de Besov *homogène*.

Remarque. Grâce à la condition sur le support de φ , on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{2} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi^2(2^{-j} \xi) \leq 1$$

Ainsi, le lecteur notera que les espaces de Besov homogènes sont une généralisation des espaces de Sobolev homogènes (plus familiers) puisque la norme de Sobolev \dot{H}^s est équivalente à la norme de Besov $\dot{B}_{2,2}^s$.

Maintenant nous donnons quelques propriétés fondamentales des espaces de Besov homogènes. On admet le théorème fondamental suivant. On trouvera une preuve de la première moitié dans le livre de Bahouri, Chemin et Danchin [BCD11] et de la propriété de Fatou dans l'article de Gérard Bourdaud [Bou11].

Théorème 2.14. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$. Si $s < \frac{d}{p}$, ou ($s = \frac{d}{p}$ et $q = 1$), alors pour tous $s_1 \in \mathbb{R}$, et $p_1, q_1 \in [1, \infty]$, l'espace $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d) \cap \dot{B}_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach. Il vérifie de plus la propriété de Fatou : de toute suite bornée dans $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d) \cap \dot{B}_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^d)$, il existe une sous-suite qui converge faiblement (dans \mathcal{S}').*

Remarque. Nous pensons que sous les hypothèses du théorème précédent, le dual de $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ est $\dot{B}_{p',q'}^{-s}(\mathbb{R}^d)$, donc en particulier que les espaces de Besov considérés sont réflexifs. Cependant, nous n'avons pas réussi à démontrer ce résultat et nous n'avons pas trouvé de référence qui le démontre.

Proposition 2.15 (Effet des dilatations dans les espaces de Besov). *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$. Il existe $C > 0$ ne dépendant que de s tel que pour tous $u \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$C^{-1} \lambda^{s - \frac{d}{p}} \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|u(\lambda \cdot)\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \lambda^{s - \frac{d}{p}} \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} .$$

Démonstration. Commençons par le cas où λ est une puissance de 2. On pose $u_\lambda = u(\lambda \cdot) = u(2^l \cdot)$. On a alors en faisant le changement de variable $\zeta = 2^{-l} \xi$,

$$\begin{aligned} \widehat{\dot{\Delta}_j u_\lambda}(\xi) &= \varphi(2^{-j} \xi) 2^{-ld} \widehat{u}(2^{-l} \xi) \\ &= 2^{-ld} \varphi(2^{l-j} \zeta) \widehat{u}(\zeta) \\ &= 2^{-ld} \widehat{\dot{\Delta}_{j-l} u}(2^{-l} \xi) \end{aligned}$$

Ainsi, par la transformée de Fourier inverse, on a

$$\dot{\Delta}_j u_\lambda(x) = \dot{\Delta}_{j-l} u(\lambda x) .$$

Il vient par un décalage des indices dans la somme qui donne $\|u_\lambda\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)}$ que

$$\|u_\lambda\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} = 2^{l(s-d/p)} \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} .$$

Maintenant, pour λ quelconque, on écrit $\lambda = c2^l$, où $l \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{\log \lambda}{\log 2} \right\rfloor$, de sorte que $1 \leq c < 2$.

$$\begin{aligned} \widehat{\dot{\Delta}_j u_\lambda}(\xi) &= \varphi(2^{-j} \xi) c^{-1} 2^{-ld} \widehat{u}(c^{-1} 2^{-l} \xi) \\ &= c^{-1} 2^{-ld} \varphi(c 2^{l-j} \zeta) \widehat{u}(\zeta) , \end{aligned}$$

mais d'après la remarque après la définition des espaces de Besov, on sait que la fonction $\varphi(c \cdot)$ définit une norme équivalente, et comme on peut prendre $c > 2$ et avoir une norme équivalente, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de c (donc pas de λ) telle que

$$C^{-1} \lambda^{s-\frac{d}{p}} \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|u(\lambda \cdot)\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \lambda^{s-\frac{d}{p}} \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} .$$

□

Proposition 2.16 (Inclusions entre espaces de Besov). *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p_1, q_1, p_2, q_2 \in [1, \infty]$ tels que $p_1 \leq p_2$ et $q_1 \leq q_2$. Alors on a une injection continue*

$$\dot{B}_{p_1, q_1}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}_{p_2, q_2}^{s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} .$$

Démonstration. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $\text{Supp } \widehat{\Delta_j u} \subset 2^j B(0, 2)$, donc d'après l'inégalité de Bernstein, il existe $C > 0$ tel que

$$\|\dot{\Delta_j u}\|_{L^{p_2}} \leq C 2^{jd\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)} \|\dot{\Delta_j u}\|_{L^{p_1}} .$$

Ainsi, on a $2^{j\left(s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\right)} \|\dot{\Delta_j u}\|_{L^{p_2}} \leq C 2^{js} \|\dot{\Delta_j u}\|_{L^{p_1}}$, donc

$$\left(2^{j\left(s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\right)} \|\dot{\Delta_j u}\|_{L^{p_2}} \right) \in \ell^{q_1}(\mathbb{Z}) .$$

On conclut avec l'inclusion continue $\ell^{q_1}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \ell^{q_2}(\mathbb{Z})$. □

Nous donnons maintenant une caractérisation très utile des espaces de Besov.

Théorème 2.17 (Caractérisation calorifique des espaces de Besov). *Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, q \in [1, \infty]$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{S}'_h$, on a*

$$C^{-1} \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}} \leq \left\| t^{s/2} \|e^{t\Delta} u\|_{L^p} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t})} \leq C \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}}$$

Démonstration. La preuve utilise le lemme suivant, purement technique et que nous ne démontrons donc pas. L'idée est de distinguer quatre cas selon le signe de j et la taille de t .

Lemme 2.18. *Soient $s, c > 0$, on a*

$$\sup_{t>0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}} < \infty$$

Comme $u \in \mathcal{S}'_h$, on a $e^{t\Delta} u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{t\Delta} \dot{\Delta_j u}$, donc $\|e^{t\Delta} u\|_{L^p} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|e^{t\Delta} \dot{\Delta_j u}\|_{L^p}$.

Par l'effet du flot de la chaleur ($\text{Supp } \widehat{\Delta_j u} \subset 2^j \mathcal{C}$), on a

$$\|e^{t\Delta} u\|_{L^p} \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-ct2^{2j}} \|\dot{\Delta_j u}\|_{L^p} .$$

Il vient que

$$t^{s/2} \|e^{t\Delta} u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{s/2} e^{-ct2^{2j}} 2^{js} a_j ,$$

où $\|(a_j)\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} = 1$.

Il vient alors par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (t^{s/2} \|e^{t\Delta} u\|_{L^p})^q \frac{dt}{t} &\leq C \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}}^q \int_0^\infty t^{sq/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-ct2^{2j}} 2^{js} a_j \right)^q \frac{dt}{t} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}}^q \int_0^\infty t^{s/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-ct2^{2j}} 2^{js} a_j^q \right) \cdot t^{s(q-1)/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-ct2^{2j}} 2^{js} \right)^{q-1} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le lemme puis on intervertit les sommes pour avoir :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (t^{s/2} \|e^{t\Delta} u\|_{L^p})^q \frac{dt}{t} &\leq C \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}}^q \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} a_j^q \int_0^\infty t^{s/2} e^{-ct2^{2j}} \frac{dt}{t} \\ &= C \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}}^q \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} a_j^q \frac{2^{-js}}{c^{s/2}} \int_0^\infty x^{s/2} e^{-x} \frac{dx}{x} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{-s}}^q. \end{aligned}$$

Nous ne démontrons pas l'autre inégalité ici, qui est un calcul très similaire. L'astuce est de remarquer que

$$\dot{\Delta}_j u = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty t^s (-\Delta)^{s+1} e^{t\Delta} \dot{\Delta}_j u dt$$

où $\Gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ est la fonction Gamma. La preuve détaillée est dans [BCD11]. \square

Ce théorème motive la définition des espaces de Kato, que nous utiliserons plus tard.

Définition 2.19 (Espaces de Kato). Soient $0 < T \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ et $u \in L^1_{loc}(Q_T)$. On définit

$$\|u\|_{\mathcal{K}_{p,q}^s(Q_T)} = \left\| t^{-\frac{s}{2}} \|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right\|_{L^q([0, T], \frac{dt}{t})}.$$

On définit alors l'espace de Kato par $\mathcal{K}_{p,q}^s(Q_T) = \{u \in L^1_{loc}(Q_T) \mid \|u\|_{\mathcal{K}_{p,q}^s(Q_T)} < \infty\}$.

Quand $q = \infty$, on définit également $(\mathcal{K}_{p,q}^s)_c(Q_T)$ comme l'ensemble des $u \in \mathcal{K}_{p,q}^s(Q_T)$ telles que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{s}{2}} \|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Remarque. (i) On notera comme dans la définition précédente $Q_T =]0, T[\times \mathbb{R}^d$ quand $T \in]0, +\infty[$. On définit également pour $0 < t_1 < t_2$ l'ensemble $Q_{t_1, t_2} =]t_1, t_2[\times \mathbb{R}^d$.

(ii) Le théorème ci-dessus compare donc la norme de u dans $\dot{B}_{p,q}^s$ à la norme de $e^{t\Delta} u$ dans $\mathcal{K}_{p,q}^s$.

Au lieu de calculer la norme de Besov, puis de l'intégrer en temps pour une certaine norme $L^r(\mathbb{R}, dt)$, il est parfois intéressant d'intégrer en temps d'abord les normes des blocs dyadiques, avant de les sommer. Ceci motive donc la définition suivante.

Définition 2.20 (Espaces de Besov en espace-temps). Soient $r, p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Pour $u \in \mathcal{S}'(Q_T)$, on définit

$$\|u\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{B}_{p,q}^s} = \left\| 2^{js} \left\| \dot{\Delta}_j u \right\|_{L^r([0, T]; L^p(\mathbb{R}^d))} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.$$

On définit alors, suivant [BCD11], l'espace de Besov homogène en espace-temps $\mathcal{L}_T^r \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des distributions tempérées u telles que

$$\|u\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{B}_{p,q}^s} < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \left\| \dot{S}_j u \right\|_{L^r([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))} = 0.$$

Remarque. (i) Il faut comprendre la deuxième condition, qui parait un peu technique, comme un remplacement de la condition qui définit $\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Il est naturel de vouloir comparer cette norme à la norme de $L^r(]0, T[; \dot{B}_{p,q}^s)$. D'après l'inégalité de Minkowski (cf. 2.2), il est clair que si $r \leq q$, alors $\|u\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{B}_{p,q}^s} \leq \|u\|_{L^r(]0, T[; \dot{B}_{p,q}^s)}$, et que si $q \leq r$ on a l'inégalité inverse.

3 Les équations de Navier-Stokes - Quelques préliminaires

3.1 Formulations et notions de solutions

On s'intéresse, comme on l'a déjà dit dans l'introduction, aux équations de Navier-Stokes incompressibles. Il s'agit du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u &= -\nabla p \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ où $T \in]0, +\infty[$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u(t, \cdot)$ est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^d (champ des vitesses) et $p(t, \cdot)$ est une fonction $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (champ de pression). Dans ce mémoire, on se restreindra assez vite au cas $d = 3$.

Si on note $u \otimes u = (u_i u_j)_{1 \leq i, j \leq d}$ et $\operatorname{div}(u \otimes u) = \left(\sum_{j=1}^d \partial_j (u_i u_j) \right)_{1 \leq i \leq d}$, alors en utilisant l'incompressibilité ($\operatorname{div} u = 0$), l'équation se réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) - \Delta u &= -\nabla p \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

En fait, nous allons voir qu'on peut - au moins formellement - retrouver la pression à partir de la vitesse. En prenant la divergence de l'équation, on obtient :

$$-\Delta p = \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \partial_i \partial_j (u_i u_j) .$$

Il est donc naturel de considérer le terme $-\nabla p$ en fonction de u , ce qui motive la définition suivante.

Définition 3.1 (Projecteur de Leray). On définit \mathbb{P} comme le multiplicateur de Fourier $\operatorname{Id} - \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}$, *i.e.* on a

$$\widehat{\mathbb{P}u}(\xi)_i = \widehat{u}_i(\xi) - \sum_{j=1}^d \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \widehat{u}_j(\xi) .$$

Remarque. Il est possible de montrer que c'est le projecteur orthogonal sur le noyau de la divergence (au sens des distributions) si on se restreint par exemple à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais ceci ne nous intéresse pas pour la suite. Pour la suite, il suffit de noter que si $u \in \mathcal{S}'$ est à divergence nulle, alors $\mathbb{P}u = u$.

En appliquant le projecteur de Leray, l'équation se réécrit sous la forme suivante, que nous allons utiliser dans la suite :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u - \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u) \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

Pour définir les solutions qui nous intéressent, nous allons utiliser la formule de Duhamel formellement pour avoir une équation intégrale.

La formule de Duhamel donne :

$$u(t, \cdot) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds .$$

Remarque. La question des conditions d'équivalence entre cette formulation intégrale et les autres formulations est délicate. Nous n'allons pas la traiter ici, mais le lecteur intéressé pourra regarder le livre de Lemarié [LR23].

Nous allons définir maintenant quelques notions des solutions des équations de Navier-Stokes. Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser surtout aux solutions *mild*.

Définition 3.2 (Solution *mild*). Une distribution u est une solution *mild* de Navier-Stokes avec donnée initiale u_0 est une solution de la formulation intégrale

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds .$$

Pour une solution *mild* associée à u_0 , on note $T^*(u_0)$ son temps maximal d'existence.

Mais nous aurons aussi besoin d'autres notions de solutions :

Définition 3.3 (Solution faible). Une solution faible de Navier-Stokes est un champ de vecteurs $u \in \mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^d)^d$ de divergence nulle tel que $u \in L^2_{loc}(]0, T[\times \mathbb{R}^d)$ et tel que pour tout champ de vecteurs φ lisse à support compact, dépendant de t , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \cdot \varphi(t, x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \cdot \varphi(0, x) dx = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \Delta \varphi + u \otimes u : \nabla \varphi + u \cdot \partial_t \varphi)(s, x) dx ds .$$

Le premier résultat d'existence de solutions faibles qui vérifient une inégalité sur l'énergie a été démontré par Leray, ce qui explique la définition suivante, que nous donnons simplement pour son intérêt historique.

Définition 3.4 (Solution de Leray). Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à divergence nulle (au sens des distributions). Un champ de vecteurs u sur \mathbb{R}^d dépendant du temps est une solution de Leray de Navier-Stokes sur $]0, T[\times \mathbb{R}^d$ avec donnée initiale u_0 si

- (i) u est une solution faible.
- (ii) La solution u est dans $L_t^\infty L_x^2(]0, T[\times \mathbb{R}^d) \cap L^2(]0, T[; \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$.
- (iii) On a $\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.
- (iv) La solution vérifie l'inégalité de l'énergie $\frac{1}{2} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2$.

Maintenant nous définissons une notion de solution dont le seul intérêt est plutôt technique. Il s'agit de décomposer les solutions faibles en « partie surcritique » et « partie sous-critique » qui restent à divergence nulle et qu'on contrôle bien en utilisant une méthode perturbative. Nous verrons les définitions de *surcritique* et *sous-critique* dans la section suivante. Il s'agit du comportement de la norme de l'espace considéré par rapport à l'invariance d'échelle de l'équation. Nous reprenons la définition d'Albritton dans [Alb18]. Pour la définition, on utilisera pour $3 < p < \infty$, l'indice de régularité critique $s_p = -1 + 3/p$, dont l'intérêt sera détaillé plus bas.

Définition 3.5 (Solution de Calderón). Soient $3 < p < \infty$, $u_0 \in \dot{B}_{p,p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle et $0 < T < \infty$. Une distribution $u \in \mathcal{S}'(Q_T)$ (i.e. pour tout $0 < t < T$, $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) est une *solution de Calderón* sur Q_T de donnée initiale u_0 si on peut écrire $u_0 = U_0 + V_0$ et $u = U + V$ tel qu'il existe $q > p$ et $0 < \epsilon < -s_p$ avec V la solution *mild* associée à V_0 dans l'espace de Besov sous-critique $\dot{B}_{q,q}^{s_q + \epsilon}$ et tels que :

$$U_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad V_0 \in \dot{B}_{p,p}^{s_p + \epsilon}(\mathbb{R}^3) ,$$

$$U \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q_T), \quad V \in \mathcal{K}_{q,\infty}^{s_q + \epsilon}(Q_T) .$$

On suppose U continue sur $[0, T]$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et que $\|U(t, \cdot) - U_0\|_{L^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. On suppose également que U est à divergence nulle et est solution au sens des distributions de l'équation de Navier-Stokes perturbée suivante :

$$\partial_t U - \Delta U = \operatorname{div}(U \otimes U) + \operatorname{div}(V \otimes U) + \operatorname{div}(U \otimes V) = -\nabla P$$

où $P \in L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}(Q_T) + L^2(Q_T)$.

On pose $p = P + (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} \operatorname{div}(V \otimes V)$ et on demande que les inégalités suivantes soient vérifiées. D'abord l'inégalité de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |U(t_1, x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |U(t_0, x)|^2 dx \leq 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^3} -|\nabla U|^2 + V \otimes U : \nabla U dx dt$$

pour presque tout $t_0 \in [0, T[$ et tout $t_1 \in]t_0, T]$. On demande aussi que la solution soit *convenable*, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'inégalité :

$$\partial_t |u|^2 + 2|\nabla u|^2 \leq \Delta |u|^2 - \operatorname{div}((|u|^2 + 2p)u),$$

Enfin, (U, P) est *convenable* pour l'équation de Navier-Stokes perturbée, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'inégalité :

$$\partial_t |U|^2 + 2|\nabla U|^2 \leq \Delta |U|^2 - \operatorname{div}((|U|^2 + 2P)U) - \operatorname{div}(|U|^2 V) - 2U \operatorname{div}(V \otimes U).$$

3.2 Premières propriétés

Maintenant nous donnons une propriété dont la preuve est un simple calcul, mais qui est cruciale pour l'étude des équations de Navier-Stokes.

Proposition 3.6 (Invariances des solutions). *Soit (u, p) solution de Navier-Stokes sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \in [0, T[$. On a alors :*

1. $(u_\lambda(t, x), p_\lambda(t, x)) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x))$ est solution sur $[0, \lambda^{-2} T] \times \mathbb{R}^d$.
2. $(u(t - t_0, x), p(t - t_0, x))$ est solution sur $[t_0, T + t_0] \times \mathbb{R}^d$.
3. $(u(t, x - x_0), p(t, x - x_0))$ est solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Remarque. Nous proposons une explication qualitative de cette invariance. En effet, l'équation de Navier-Stokes s'écrit $\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p$, où ν est la viscosité, dont la dimension physique est $[\nu] = L^2/T$. En prenant $\nu = 1$, on décreète que $L^2 = T$, donc $[\lambda x] = [\lambda \sqrt{t}] = [\sqrt{\lambda^2 t}]$, ce qui explique l'invariance.

Commençons par une discussion qualitative. Avec l'invariance par dilatation des solutions, nous voyons qu'il est pertinent de « zoomer » sur une éventuelle singularité pour mieux comprendre le comportement de la solution au voisinage. Donc une première observation est qu'on doit logiquement essayer de résoudre Navier-Stokes dans des espaces fonctionnels où on sait contrôler la norme d'une dilatation. Cependant, trois cas (très différents) se présentent.

- Si la norme décroît strictement quand on fait un « zoom », on s'attend à ce que la résolution soit « facile », puisque nous faisons disparaître les singularités en s'en approchant. C'est le cas *sous-critique*.
- Si la norme croît strictement quand on fait un zoom, on ne sait rien dire, puisque maintenant on ne peut plus regarder plus finement la solution dans l'espace qui nous intéresse. C'est le cas *surcritique*.
- Si la norme de l'espace considéré a la même invariance que les solutions, on parle du cas *critique*. Nous nous intéressons essentiellement aux espaces de Besov critiques, et plus tard à l'espace L^p critique.

Remarque. 1. D'après la proposition 2.15, nous voyons que $\|u_\lambda\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} \sim \lambda^{1+s-d/p} \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)}$, donc

l'indice de régularité critique pour les espaces de Besov est $s_p \stackrel{\text{def}}{=} -1 + \frac{d}{p}$.

2. De même, on a $\|u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{1-d/p} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, donc l'exposant critique pour les espaces de Lebesgue est $p = d$.

Si u est solution de Navier-Stokes, alors on a formellement en intégrant le produit scalaire de l'équation par u ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = 0$$

où $\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^d \|\nabla u_j(t, \cdot)\|_{L^2}^2$. Ainsi, si on intègre par rapport au temps entre 0 et T on obtient :

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 dt = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 .$$

Pour le cas $d = 3$, comme la seule quantité qu'on sait contrôler *a priori* est la norme $L^2(\mathbb{R}^3)$ de la solution, qui est surcritique d'après la discussion précédente, on dit que l'équation est surcritique. Dans le cas $d = 2$ que nous ne traitons pas ici, l'équation est donc critique. C'est notamment grâce à cette différence par exemple que l'équation de Navier-Stokes est globalement bien posée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ (*i.e.* on a des solutions faibles globales en temps). Le théorème 5.14 de [BCD11] donne un énoncé précis.

Remarque. Nous n'avons pas mentionné le cas $d = 1$ parce qu'il est trivial. En effet, l'incompressibilité donne que la vitesse est juste une fonction du temps $u(t)$, et dès qu'on a des hypothèses de bornitude de la pression par exemple, on obtient des solutions constantes.

3.3 Cas des espaces de Besov

3.3.1 Espaces de Besov sous-critiques

Nous commençons par les espaces de Besov sous-critiques. D'après la discussion qualitative déjà faite, on s'attend à avoir des solutions régulières. Ceci est confirmé par le théorème suivant, énoncé par Albritton [Alb18], et que nous n'allons pas démontrer.

Théorème 3.7 (Solutions mild dans les espaces de Besov sous-critiques). *Soient $p, q \in]3, \infty[$, $0 < \varepsilon < -s_p$ et $M > 0$. On pose $s = s_p + \varepsilon$. Il existe une constante κ dépendant de s et p telle que pour tout $u_0 \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle vérifiant $\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq M$, il existe une unique solution mild $u \in \mathcal{K}_{p,\infty}^s(Q_T)$ de Navier-Stokes avec donnée initiale u_0 (ici $T = \left(\frac{\kappa}{M}\right)^{2/\varepsilon}$). De plus, la solution u est lisse et on a même pour tous $k, l \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} \partial_t^k \nabla^l u &\in \mathcal{C}([0, T], L^p(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)) \quad \text{et} \\ \left\| t^{k+\frac{l}{2}} \partial_t^k \nabla^l u \right\|_{\mathcal{K}_{p,\infty}^s(Q_T)} + \left\| t^{k+\frac{l}{2}} \partial_t^k \nabla^l u \right\|_{\mathcal{K}_{\infty,\infty}^{-1+\varepsilon}(Q_T)} &\leq cM, \end{aligned}$$

où c est une constante qui dépend de s, p, k et l .

Remarque. Avec les notations du théorème précédent, on vérifie que $\|u_\lambda\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \lambda^\varepsilon \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$, donc on est bien dans le cas sous-critique.

3.3.2 Espaces de Besov critiques

On rappelle que l'indice de régularité critique pour les espaces de Besov homogènes est

$$s_p = -1 + \frac{3}{p} .$$

On s'intéresse donc à l'existence des solutions *mild* de Navier-Stokes dans $\dot{B}_{p,q}^{s_p}(\mathbb{R}^3)$. On a le théorème suivant sur l'existence et l'unicité dans ces espaces, dont on donnera une idée très rapide de la preuve qui est celle d'Albritton dans [Alb18].

Théorème 3.8 (Solutions mild dans les espaces de Besov critiques). *Soit $3 < p, q < \infty$ et $u_0 \in \dot{B}_{p,q}^{s_p}(\mathbb{R}^3)$. Alors il existe $T^*(u_0) > 0$ tel que l'équation de Navier-Stokes avec donnée initiale u_0 a une solution mild u sur $]0, T^*(u_0)[\times \mathbb{R}^d$ telle que pour tout $T \in]0, T^*(u_0)[$,*

$$u \in \mathcal{C}([0, T], \dot{B}_{p,q}^{s_p}) \cap \mathcal{L}_T^1 \dot{B}_{p,q}^{s_p+2} \cap \mathcal{L}_T^\infty \dot{B}_{p,q}^{s_p} \quad (1)$$

$$u \in (\mathcal{K}_{p,\infty}^{s_p})_\circ(Q_T) \cap (\mathcal{K}_{\infty,\infty}^{-1})_\circ(Q_T) \cap \mathcal{C}([0, T], L^p \cap L^\infty) \quad (2)$$

De plus, u est l'unique solution mild qui vérifie (1) et l'unique solution mild qui vérifie (2). Si $T^*(u_0) < \infty$, alors pour tous $p \leq p_0 < \infty$, $q \leq q_0 < \infty$ et $1 \leq r_0 \leq \infty$ tel que $0 < s_{p_0} + \frac{2}{r_0} < \frac{3}{p_0}$, on a

$$\lim_{t \rightarrow T^*(u_0)} \|u(t)\|_{L^{p_0}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow T^*(u_0)} \|u(t)\|_{\mathcal{L}_T^{r_0} \dot{B}_{p_0, q_0}^{s_{p_0} + 2/r_0}} = +\infty .$$

Idée de la preuve. On montre par un schéma d'itération de Picard 2.8 qu'il existe une unique solution pour T assez petit. En effet, on montre que B est borné sur $(\mathcal{K}_{p, \infty}^{s_p})_{\circ} \cap \mathcal{L}_T^r \dot{B}_{p, q}^{s_p + 2/r}$, en utilisant notamment de la théorie de Littlewood-Paley (paraproduit de Bony que nous n'avons pas définie ici) et l'effet du flot de la chaleur.

On montre ensuite par un argument de bootstrap astucieux que la solution est continue et qu'elle est bien dans les espaces fonctionnels donnés dans l'énoncé. L'unicité est claire par l'absurde en utilisant l'unicité locale qui vient du théorème de Picard (cf. lemme 2.8). \square

Remarque. D'après le corollaire A.6 d'Albritton [Alb18], si u la solution mild de Navier-Stokes avec donnée initiale u_0 a un temps maximal d'existence $T^*(u_0) < \infty$, alors u a une singularité au temps T^* , i.e. un point au voisinage duquel la norme L^∞ diverge.

3.4 Quelques résultats admis sur les solutions de Calderón

Dans toute cette section, on considère $3 < p < \infty$, $T > 0$ et $u_0 \in \dot{B}_{p, p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)$.

Les preuves d'existence de solutions de Calderón qui vérifient éventuellement des contraintes supplémentaires sont techniques et utilisent un spectre très large de résultats classiques d'existence de solutions aux équations de Navier-Stokes. Ainsi, nous nous contentons de donner une idée rapide des preuves. Le lecteur intéressé pourra trouver les preuves détaillées par Albritton dans [Alb18].

Nous commençons par un théorème d'existence.

Théorème 3.9. *Soient $3 < p < \infty$, $0 < T$ et $u_0 \in \dot{B}_{p, p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Alors il existe une solution de Calderón de Navier-Stokes sur Q_T avec donnée initiale u_0 .*

Pour la preuve du théorème principal, nous aurons besoin de construire des solutions de Calderón qui coïncident avec la solution mild (qui nous intéresse), et même une suite de solutions de Calderón qui converge faiblement pour nous permettre de nous rapprocher d'une éventuelle singularité au temps maximal d'existence. Les deux théorèmes suivants permettent de faire ceci.

Théorème 3.10. *Il existe une solution de Calderón u sur Q_T avec donnée initiale u_0 qui coïncide avec la solution mild de Navier-Stokes associée à u_0 sur $[0, \min(T, T^*(u_0))]$.*

Le dernier théorème que nous donnons est plus technique que les précédents et c'est un ingrédient important dans la preuve du théorème principal.

Théorème 3.11. *Soit $3 < p < \infty$, et $T > 0$. On suppose que $(u_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de champs de vecteurs à divergence nulle vérifiant*

$$u_0^{(n)} \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } \dot{B}_{p, p}^{s_p}(\mathbb{R}^3).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'une solution $u^{(n)}$ sur Q_T avec condition initiale $u_0^{(n)}$ avec pression $p^{(n)}$ tels que la solution $u^{(n)}$ coïncide avec la solution mild jusqu'à l'instant $\min(T, T^(u_0^{(n)}))$. De plus, il existe une solution au sens des distributions (u, p) de l'équation de Navier-Stokes sur Q_T avec les propriétés*

$$u_0 = U_0 + V_0, \quad u = U + V,$$

où

$$\begin{aligned} U_0 &\in L^2(\mathbb{R}^3), \quad V_0 \in \dot{B}_{q, q}^{s_p + \epsilon}(\mathbb{R}^3) \\ U &\in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(Q_T), \quad V \in \mathcal{K}_{q, q}^{s_q + \epsilon}(Q_T), \end{aligned}$$

$$q > p, \quad 0 < \epsilon < -s_q,$$

V est une solution mild de l'équation de Navier-Stokes sur Q_T avec donnée initiale V_0 , et U est une solution de l'équation de Navier-Stokes perturbée (cf. définition 3.5) dans Q_T . Le champ de vecteur $U(t, \cdot)$ est continu faiblement comme fonction à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ sur $[0, T]$ et avec $U(0, \cdot) = U_0$. La solution (u, p) vérifie dans Q_T l'inégalité

$$\partial_t |u|^2 + 2 |\nabla u|^2 \leq \Delta |u|^2 - \operatorname{div}((|u|^2 + 2p)u),$$

et l'inégalité globale d'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^3} |U(t_1, x)|^2 dx + 2 \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U(t, x)|^2 dx dt \leq \int_{\mathbb{R}^3} |U(0, x)|^2 dx + 2 \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^3} V \otimes U : \nabla U dx dt$$

pour presque tout $0 < t_1 < T$ et pour tout $t_2 \in]t_1, T]$. Et enfin il existe une sous-suite (notée $u^{(n)}$) telle que les solutions de Calderón $u^{(n)}$ convergent vers u au sens suivant :

$$u^{(n)} \rightarrow u \text{ dans } L_{loc}^3(\mathbb{R}^3 \times]0, T]), \quad p^{(n)} \rightharpoonup p \text{ dans } L_{loc}^{3/2}(\mathbb{R}^3 \times]0, T])$$

ainsi que

$$u^{(n)} \rightarrow u \text{ dans } C([0, T]; S'(\mathbb{R}^3)).$$

En particulier, $u^{(n)}(t, \cdot) \xrightarrow{*} u(t, \cdot)$ dans $S'(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq T$

Remarque. Nous allons noter ici quelques conséquences de ce théorème sur les décompositions

$$u = U + V \quad \text{et} \quad p = P + Q$$

qui rendront la preuve du théorème principal plus fluide. **Nous considérons donc le cas $d = 3$.**

- (i) D'après le théorème 3.7 sur l'existence dans les Besov sous-critiques, comme V est la solution mild associée à V_0 , on sait que $V_0 \in \mathcal{C}([0, T], L^p(\mathbb{R}^d))$, donc pour tout $0 < \delta < 1$, $V_0 \in L_t^\infty L_x^p([\delta, 1] \times \mathbb{R}^d)$. Pour U , on a $U \in L_t^2 \dot{H}_x^1(Q_T)$. Or par les injections de Sobolev (par exemple dans le livre [BCD11], théorème 1.38), on a une injection continue $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}} = L^6(\mathbb{R}^3)$, donc $U \in L_t^2 L_x^6(Q_T)$. On interpole maintenant entre $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 L_x^6$, pour montrer que $U \in L^3(Q_T)$. On retiendra pour la suite que dans \mathbb{R}^3 pour tout $0 < \delta < 1$, on a

$$u = U + V \in L^3(Q_T) + L_t^\infty L_x^p([\delta, 1] \times \mathbb{R}^3).$$

- (ii) On a déjà vu qu'on peut formellement écrire $p = (-\Delta)^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (u_i u_j)$. On applique donc un opérateur d'ordre 0 à une fonction dans $L^{3/2}$. On admet que cela donne la décomposition suivante : pour tout $0 < \delta < 1$, on a

$$p = P + Q \in L^{3/2}(Q_T) + L_t^\infty L_x^{p/2}([\delta, 1] \times \mathbb{R}^3).$$

3.5 Quelques résultats admis qui utilisent des inégalités de Carleman

Dans la preuve du théorème principal, nous utilisons certains résultats qualitatifs démontrés par Escauriaza, Seregin et Šverák dans [ES3]. Ils reposent essentiellement sur les inégalités de Carleman. Nous commençons par énoncer la forme générale de l'inégalité de Carleman, dont la preuve détaillée est dans l'article de Tao [Tao21].

Définition 3.12. On définit l'équation de la chaleur rétrograde $Lu = f$ où $L = \partial_t + \Delta$. Cet opérateur permet de simplifier les énoncés suivants.

Lemme 3.13 (Inégalité générale de Carleman). Soit $u \in \mathcal{D}([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ solution de l'équation de la chaleur rétrograde

$$\partial_t u + \Delta u = f .$$

Soient $g \in C^\infty([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $F \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t g - \Delta g - |\nabla g|^2$. Alors on a l'inégalité suivante :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{2} F |u|^2 \right) e^g dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} (LF) |u|^2 + 2D^2(\nabla u, \nabla u) - \frac{1}{2} |Lu|^2 \right) e^g dx .$$

Avec ceci, il est possible de démontrer les résultats suivants (que nous admettons).

Lemme 3.14 (Unicité rétrograde). On note $K =]0, 1[\times (\mathbb{R}^3 \setminus B(R))$. Soit $u : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Il existe une constante $c > 0$ telle que $|\partial_t u - \Delta u| \leq c(|\nabla u| + |u|)$ presque partout dans K .

(ii) $u(1, \cdot) = 0$.

(iii) Il existe une constante $M > 0$ telle que $|u(t, x)| \leq e^{M|x|^2}$ sur K .

(iv) La fonction u est « régulière » : $u, \partial_t u, \nabla^2 u \in L_t^2(L_{loc}^2)_x(K)$.

Alors u est identiquement nulle sur K .

Lemme 3.15 (Prolongement unique). Soient $R, T > 0$. On définit $Q_{R,T} =]0, T[\times B(0, R)$.

Soit $u : Q_{R,T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Il existe une constante $c > 0$ telle que $|\partial_t u + \Delta u| \leq c(|\nabla u| + |u|)$ presque partout dans $Q_{R,T}$.

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que $|u(t, x)| \leq C_k(|x| + \sqrt{t})^k$ sur $Q_{R,T}$.

(iii) La fonction u est « régulière » : $u, \partial_t u, \nabla^2 u \in L_t^2(L_{loc}^2)_x(Q_+)$.

Alors pour tout $x \in B(0, R)$, $u(0, x) = 0$.

Le lemme suivant est un peu différent. Il permet notamment de montrer qu'une solution petite est automatiquement régulière! (sous certaines hypothèses) Pour l'énoncer, on définit d'abord les boules paraboliques.

Définition 3.16. Soient $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et $R > 0$. On définit la boule parabolique

$$Q(z_0, R) =]t_0 - R^2, t_0[\times B_{\mathbb{R}^3}(x_0, R) .$$

On notera $Q(R)$ pour $Q(0, R)$.

Lemme 3.17 (ε -régularité). Il existe des constantes $\varepsilon_0 > 0$ et $c_{0,k} > 0$ pour tout $k \geq 0$ telles que si (v, q) est une solution faible convenable de Navier-Stokes sur $Q(1)$, telle que

$$\int_{Q(1)} |v|^3 + |q|^{\frac{3}{2}} dxdt < \varepsilon_0 ,$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nabla^{k-1} v$ est Hölder-continue sur $\overline{Q(\frac{1}{2})}$, et vérifie

$$\sup_{Q(\frac{1}{2})} |\nabla^{k-1} v| \leq c_{0,k} .$$

Le lemme suivant permet de montrer l'existence d'une singularité pour une solution construite comme limite d'autres solutions mild ayant des singularités. Il est démontré par Rusin et Šverák dans [R9]

Lemme 3.18 (Persistance de la singularité). Soit $(v_k, q_k)_{k \geq 0}$ une suite de solutions mild convenables de Navier-Stokes sur $Q(1)$ telle que $v_k \rightarrow v$ dans $L^3(K)$ et $q_k \rightarrow q$ dans $L^{3/2}(K)$ pour tout compact $K \subset Q(1)$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la solution v_k a une singularité en $(t_k, x_k) \in \overline{Q(1)}$ et que la suite des point singuliers vérifie $(t_k, x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (t_\infty, x_\infty)$. Alors v a une singularité en (t_∞, x_∞) .

4 Comportement à l'explosion des normes critiques

Nous avons vu que si la solution *mild* de Navier-Stokes a un temps maximal d'existence fini T^* , alors elle a une singularité en T^* . Il s'agit de comprendre le comportement de sa norme quand $t \rightarrow T^*$. Le théorème suivant a été démontré par Albritton dans [Alb18].

Théorème 4.1. *Soient $3 < p, q < \infty$ et $u_0 \in \dot{B}_{p,q}^{s_p}(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Soit u la solution *mild* de Navier-Stokes sur \mathbb{R}^3 avec donnée initiale u_0 , de temps maximal d'existence $T^*(u_0)$.*

Si $T^(u_0) < \infty$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow T^*(u_0)} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{B}_{p,q}^{s_p}(\mathbb{R}^3)} = +\infty .$$

Remarque. Avant d'en faire la preuve, expliquons l'intérêt de ce résultat. Dans les cas sous-critiques, nous pouvons obtenir en général un taux quantitatif d'explosion pour une solution qui n'est pas globale. Par exemple dans les espaces L^p sous-critiques (pour $p > 3$ dans le cas de la dimension 3), Leray obtient déjà dans [Ler34] une minoration du taux d'explosion. Dans les espaces critiques, il est difficile d'obtenir même la simple explosion des normes. Ceci explique le fait que dans les espaces de Besov critiques, le premier résultat dans cette direction est relativement récent. En effet, Gallagher, Koch et Planchon montrent en 2016 dans [GKP16] que $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u\|_{\dot{B}_{p,p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)} = +\infty$.

Démonstration. Commençons par se ramener à un cas plus simple. Soit $r = \max(p, q)$. D'après les inclusions des espaces de Besov dans la proposition 2.16, on a

$$\dot{B}_{p,q}^{s_p} \hookrightarrow \dot{B}_{r,r}^{-1+3/p+3(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} = \dot{B}_{r,r}^{s_r}$$

dans les deux cas possibles. Ainsi, d'après le théorème 3.8 qui établit l'existence et l'unicité dans les espaces de Besov, il suffit de montrer le résultat pour l'espace de Besov plus grand où $p = q$, ce que nous supposons dans la suite.

On suppose que $T^* = T^*(u_0) < \infty$. La remarque après le théorème 3.8 montre que u a un point singulier en T^* . Par l'invariance des solutions par dilatation et translation, nous pouvons supposer que ce point singulier a lieu en $T^* = 1$ et $x = 0$.

Par l'absurde, on suppose que $\lim_{t \rightarrow T^*} \|u(t, \cdot)\|_{\dot{B}_{p,p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)} \neq \infty$. Alors il existe (t_n) qui croît vers 1 et $M \in \mathbb{R}$ tels que $\|u(t_n, \cdot)\|_{\dot{B}_{p,p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)} \leq M$ pour tout n . L'idée maintenant est de « zoomer » sur la singularité de u , et montrer qu'elle ne peut pas exister ! Pour se concentrer sur l'intervalle $]t_n, 1]$, on pose $\lambda_n = \sqrt{1 - t_n}$, et on définit

$$u^{(n)}(t, x) = \lambda_n u(\lambda_n^2 t + t_n, \lambda_n x),$$

qui est la solution *mild* de Navier-Stokes sur $]0, 1[$, avec donnée initiale $u_0^{(n)}(x) = \lambda_n u(t_n, \lambda_n x)$. Par hypothèse sur u , on a $\|u_0^{(n)}\|_{\dot{B}_{p,p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)} = \lambda_n \|u(t_n, \cdot)\|_{\dot{B}_{p,p}^{s_p}(\mathbb{R}^3)} \leq M$ pour tout n , donc par la propriété de Fatou dans les espaces Besov (comme on a bien $s < 3/p$), on suppose quitte à extraire que

$$u_0^{(n)} \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans } \dot{B}_{p,p}^{s_p} .$$

Maintenant, nous pouvons donc appliquer le théorème 3.11 à la suite faiblement convergente de données initiales $(u_0^{(n)})$ pour trouver une suite $(v^{(n)})$ de solutions de Calderón sur $]0, 1[\times \mathbb{R}^3$ qui coïncident avec $u^{(n)}$ les solutions *mild*, donc qu'on notera aussi par abus de notation $u^{(n)}$. Quitte à extraire, le même théorème donne une solution (v, q) de Navier-Stokes telle que

$$u^{(n)} \rightarrow v \quad \text{dans } L_{loc}^3([0, 1] \times \mathbb{R}^3), \quad p^{(n)} \rightarrow q \quad \text{dans } L_{loc}^{\frac{3}{2}}([0, 1] \times \mathbb{R}^3) .$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme de persistance de la singularité 3.18, donc v a une singularité en $(t, x) = (1, 0)$. Maintenant, dans la suite de la preuve, nous allons montrer que v est identiquement nulle sur

$Q_{1/2,1}$, ce qui donnera l'absurdité qu'on cherche. Le théorème 3.11 donne la convergence faible- \star de $u^{(n)}(t, \cdot)$ vers $v(1, \cdot)$ dans \mathcal{S}' . Ainsi, un calcul direct utilisant la densité de \mathcal{S} dans $\dot{B}_{p,p}^{s_p}$ montre que

$$v(1, \cdot) = 0 .$$

Nous allons nous intéresser maintenant au tourbillon $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot } v$, qui vérifie l'équation

$$\partial_t \omega - \Delta \omega = -\text{rot}(v \nabla v) .$$

Rappelons d'abord la décomposition montrée dans la remarque après le théorème 3.11 :

$$u = U + V \in L^3(Q_T) + L_t^\infty L_x^p([\delta, 1] \times \mathbb{R}^3) .$$

$$p = P + Q \in L^{3/2}(Q_T) + L_t^\infty L_x^{p/2}([\delta, 1] \times \mathbb{R}^3) .$$

On a alors $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{1/4}^1 \int_{B(x,1)} |v|^3 + |q|^{3/2} dx dt = 0$. De plus, (v, q) est une solution mild sur Q_1 . Le lemme d' ε -régularité 3.17 montre alors qu'il existe $R, c > 0$ tels que sur $K \stackrel{\text{def}}{=}]\frac{1}{2}, 1[\times (\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R))$, on a

$$\sup_K |v| + |\nabla v| + |\nabla^2 v| < c .$$

En combinant ceci avec le fait que $|\partial_t \omega - \Delta \omega| \leq c'(|\nabla \omega| + |\omega|)$ sur K , et que $\omega(1, \cdot) = 0$, on applique le lemme d'unicité retrograde 3.14, qui donne

$$\omega = 0 \quad \text{sur }]\frac{1}{2}, 1[\times (\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)) .$$

Pour le cas de la boule, nous commençons par le fait suivant.

Fait. *Il existe un ouvert G dense dans $]0, 1[$ tel que ω est lisse sur $\Omega = G \times \mathbb{R}^3$.*

Preuve du fait. On a $v = U + V$ où V est une solution mild dans un espace sous-critique donc est lisse. On pose Π_s l'ensemble des $t_1 \in]0, 1[$ tels que $U(t_1, \cdot) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et Π_e l'ensemble des t_1 tels que U satisfait l'inégalité globale d'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^3} |U(t_1, x)|^2 dx + 2 \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U(t, x)|^2 dx dt \leq \int_{\mathbb{R}^3} |U(0, x)|^2 dx + 2 \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^3} V \otimes U : \nabla U dx dt$$

pour tout $t_2 \in]t_1, 1]$. D'après le théorème 3.11, $U \in L_t^2 H_x^1$, donc $\|u(t, \cdot)\|_{H^1} < \infty$ pour presque tout t , donc Π_s est de mesure pleine. Le théorème montre en outre que Π_e est de mesure pleine. Ainsi $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_s \cap \Pi_e$ est de mesure pleine. Or, par existence locale de solutions faibles, pour tout $t_1 \in \Pi$, il existe $\epsilon > 0$ noté $\epsilon(t_1)$ ainsi que (\tilde{U}, \tilde{P}) un champ de vecteurs et de pressions avec $\tilde{U} \in C([t_1, t_1 + \epsilon(t_1)]; H^1(\mathbb{R}^3))$ et $\tilde{P} \in L_t^\infty L_x^3(Q_{t_1, t_1 + \epsilon(t_1)})$ vérifiant l'équation de Navier-Stokes perturbée (cf. énoncé du théorème 3.11).

Nous admettons deux résultats ici. L'étude de l'équation de Navier-Stokes perturbée (que nous n'étudions pas ici) montre que \tilde{U} est lisse sur $Q_{t_1, t_1 + \epsilon(t_1)}$. De plus, un résultat d'unicité forte-faible locale en temps pour l'équation perturbée qui est une adaptation des méthodes du théorème 3.10 montre que $U = \tilde{U}$ sur $Q_{t_1, t_1 + \epsilon(t_1)}$. En particulier, U est lisse sur $Q_{t_1, t_1 + \epsilon(t_1)}$. Donc l'ouvert

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{t_1 \in \Pi}]t_1, t_1 + \epsilon(t_1)[$$

est dense car $[0, 1] \subset \overline{\Pi} \subset \overline{G}$, de qui conclut la preuve du fait. \square

Maintenant, soit $z_0 = (t_0, x_0) \in \Omega \cap K$ tel que $|x_0| = 2R$. D'après l'étude de ω sur K , ω est identiquement nulle sur un voisinage de z_0 , en particulier, l'hypothèse (ii) du lemme 3.15 est vérifiée. De plus, ω étant lisse sur Ω , (iii) est satisfaite et on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que (i) est satisfaite sur $Q =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, 4R)$. Par prolongement unique, $\omega(0, \cdot)$ est identiquement nulle sur $B(0, R)$, et par unicité locale en temps, quitte à prendre ε plus petit, ω est nulle sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(0, R)$. Ainsi, on a montré que $\omega = 0$ sur $\Omega \cap (] \frac{1}{2}, 1[\times \mathbb{R}^3)$. Rappelons maintenant que $v \in \mathcal{C}([0, 1], \mathcal{S}')$ d'après le théorème 3.11. Ainsi, par densité de G , il vient que ω s'annule sur $Q_{1/2, 1}$.

Or on a $\text{rot rot } v = \underbrace{\text{grad div } v}_{=0} - \Delta v$, donc on obtient que pour tout $t \in] \frac{1}{2}, 1[$, la fonction $v(t, \cdot)$ est harmonique, et

d'après la décomposition du théorème 3.11, elle est somme de fonctions dans L^q . Or une fonction harmonique dans L^q est bornée en intégrant la formule de la moyenne et en utilisant l'inégalité de Hölder, donc constante, donc nulle car intégrable. On a donc montré que v est identiquement nulle sur $Q_{\frac{1}{2}, 1}$, ce qui conclut la preuve. \square

Références

- [ABC22] D. Albritton, E. Brué, and M. Colombo. Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier-Stokes equations. *Annals of Mathematics*, 196(1) :415–455, 2022.
- [Alb18] D. Albritton. Blow-up criteria for the Navier-Stokes equations in non-endpoint critical Besov spaces. *Anal. PDE*, 11(6), 2018.
- [BCD11] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2011.
- [Bou11] G. Bourdaud. La propriété de Fatou dans les espaces de Besov homogènes. *Comptes Rendus Mathématique*, 349(15) :837–840, 2011.
- [ES3] L. Escauriaza, G. Seregin, and V. Šverák. $L_{3, \infty}$ -solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness. *Russian Mathematical Surveys*, 58 :211–250, 2003.
- [GKP16] I. Gallagher, G. S. Koch, and F. Planchon. Blow-up of Critical Besov Norms at a Potential Navier–Stokes Singularity. *Communications in Mathematical Physics*, 343(1) :39–82, 2016.
- [Ler34] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, 63 :193–248, 1934.
- [LR23] P.-G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*. Chapman and Hall/CRC, 2nd edition, 2023.
- [R9] W. Rusin and V. Šverák. Minimal initial data for potential Navier–Stokes singularities. *Journal of Functional Analysis*, 260 :879–891, 2009.
- [Tao21] T. Tao. Quantitative bounds for critical bounded solutions to the Navier-Stokes equations. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 149–193. American Mathematical Society, 2021.

Annexes

A Existence dans les espaces L^p

Rappelons que l'exposant critique dans le cas des espaces $L^p(\mathbb{R}^3)$ est $p = 3$. Lorsque $p > 3$, c'est-à-dire dans le cas sous-critique, Leray [Ler34] obtient déjà des solutions et démontre le résultat quantitatif suivant sur l'explosion en temps fini :

Théorème A.1 (Leray, 1934). *Soient $3 < p < \infty$ et $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Alors il existe une solution u lisse de Navier-Stokes avec donnée initiale u_0 . Si son temps maximal d'existence T^* est fini, alors*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p} \geq c \left(\frac{1}{\sqrt{T^* - t}} \right)^{1-3/p}.$$

Dans le cas critique $p = 3$, Bahouri, Chemin et Danchin démontrent dans [BCD11] (théorème 5.21.) que l'équation de Navier-Stokes est bien posée dans L^3 localement en temps pour une donnée initiale dans L^3 et globalement en temps pour une donnée initiale de norme L^3 assez petite.

Théorème A.2. *Soit $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Il existe $T > 0$ tel que l'équation de Navier-Stokes a une solution $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$. Il existe une constante $c > 0$ telle que si $\|u_0\|_{L^3} < c$, alors on peut prendre $T = \infty$.*

B Résultat quantitatif d'explosion dans L^3

Dans L^3 , Tao donne dans [Tao21] un énoncé quantitatif sur l'explosion des solutions en temps fini. Pour énoncer le théorème, nous commençons par définir la notion de solution que Tao utilise dans son article.

Définition B.1. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Une *solution classique* de Navier-Stokes avec donnée initiale u_0 sur $[0, T]$ est une fonction lisse u solution de l'équation aux dérivées partielles et telle que pour tous $k, l \in \mathbb{N}$, on a

$$\partial_t^k \nabla^l u \in L_t^\infty L_x^2([0, T]; \mathbb{R}^3).$$

Les résultats d'unicité rétrograde et de prolongement unique reposent sur les inégalités de Carleman et des arguments « qualitatifs » de compacité ou de complétude. Tao part des mêmes inégalités et obtient le résultat quantitatif suivant :

Théorème B.2 (Tao, 2021). *Soit u une solution classique de Navier-Stokes sur $[0, T^*[\times \mathbb{R}^3$ qui explose en temps fini T^* . Alors il existe une constante absolue $c > 0$ telle que*

$$\limsup_{t \rightarrow T^*} \frac{\|u(t, \cdot)\|_{L^3}}{(\log \log \log \frac{1}{T^* - t})^c} = +\infty.$$