Théorèmes de restriction de la transformée de Fourier et applications

Yuhui Zhu & Paul Montobbio

Encadré par Côme Tabary et Corentin Gentil

Mai 2025

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Exploration et conditions nécessaires **3**

2.1 Outillage 3

2.2 Le cas plat s'effondre 4

3 Le théorème de Tomas-Stein **8**

3.1 Préliminaires 8

3.2 Développement Asymptotique 9

3.3 Estimation par Décomposition Dyadique 11

4 Passage de la Sphère au Paraboloïde **13**

5 Application à l'Équation de Schrödinger **15**

1 Introduction

Le but de ce mémoire est d'étudier des propriétés de bornitude de la transformée de Fourier, pour en donner ensuite un exemple d'application aux équations aux dérivées partielles. On prendra la convention suivante pour définir la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\xi\cdot x} f(x)\, dx, \quad \text{pour } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Rappelons que l'opérateur $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ainsi obtenu borné, puisque l'inégalité triangulaire donne

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1}$$

et qu'on peut définir, par densité de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, un opérateur $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, lui aussi borné grâce à la formule de Plancherel :

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On se pose alors la question suivante : y a-t-il d'autres exposants $1 \leq p, q \leq +\infty$ pour lesquels on peut étendre la transformée de Fourier en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$?
On peut prendre comme point de départ le résultat suivant :

Théorème 1.1 (Interpolation de Riesz-Thorin)**.**
Soient μ, ν deux mesures σ-finies sur deux espaces E, E', et soit T un opérateur défini sur $L^{p_0}(\mu)$ et $L^{p_1}(\mu)$, avec $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$. On suppose que

$$T : L^{p_i}(\mu) \to L^{q_i}(\nu) \text{ est borné pour } i = 0, 1.$$

Si $\theta \in]0,1[$, on définit $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et de même pour q_θ. Alors l'opérateur $T : L^{p_\theta}(\mu) \to L^{q_\theta}(\nu)$ est un opérateur borné pour tout $\theta \in]0,1[$, et de plus :

$$\|T\|_{p_\theta \to q_\theta} \leq \|T\|^{1-\theta}_{p_0 \to q_0} \|T\|^{\theta}_{p_1 \to q_1}.$$

Remarquons que p_θ peut parcourir toute valeur entre p_0 et p_1, et de même pour q_θ. En calculant ces exposants pour $(p_0, q_0) = (1, \infty)$ et $(p_1, q_1) = (2, 2)$, on obtient $q_\theta = p'_\theta$, l'exposant conjugué de p_θ. Le théorème d'interpolation appliqué à la transformée de Fourier donne donc lieu à l'inégalité de Hausdorff-Young :

$$\text{Si } 1 \leq p \leq 2 \text{ et } f \in L^p(\mathbb{R}^n), \text{ alors } \|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

Toutefois, la question devient stérile une fois ces exposants non triviaux établis. En effet, il s'avère que les conditions $p \leq 2$ et $q = p'$ sont nécessaires, notamment à cause du caractère trop « plat » de $\mathbb{R}^n$.

On va considérer une variation de notre problème initial. Rappelons que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$, et que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même : on peut donc restreindre la transformée $\hat{f}$ d'une fonction[1] $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Étant donné $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface munie d'une mesure $d\sigma$ borélienne,

1. On pourra écrire « fonction test ».

la norme $\|\hat{f}\|_{L^q(S,d\sigma)}$ a donc un sens, et on se pose la question suivante : pour quels couples (p,q) la transformée de Fourier s'étend-elle en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(S,d\sigma)$? Par densité, il suffit donc de vérifier

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S,d\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

On utilise ici la notation $x \lesssim y$ pour signifier qu'il existe une constante $C > 0$ (qui pourra changer d'une ligne à l'autre) indépendante de x et y, telle que $x \leq Cy$. L'assertion (3) est appelée « Théorème de restriction (L^p, L^q) pour S », et on note $R_S(p \to q)$ lorsqu'un couple $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ vérifie le théorème.

Si on a déjà l'estimée triviale donnée par (1), ce nouveau problème est de nature plus complexe que le premier. Par exemple, la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ n'est en général que dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$: puisqu'une hypersurface S est toujours de mesure de Lebesgue nulle, la restriction de $\hat{f}$ à S peut alors être définie n'importe comment ! On ne peut donc pas espérer avoir une estimée de type (3) pour $p = 2$, et le théorème d'interpolation 1.1 implique que c'est aussi le cas pour $p \geq 2$.

Montrer l'existence de théorèmes de restriction pour une surface et une mesure données s'avère très difficile, le seul cas de la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ n'étant encore aujourd'hui pas entièrement résolu. On présentera néanmoins des conditions nécessaires dans un cadre général, mais aussi des résultats d'existence dans des cas spécifiques. Plus précisément, on déduira des théorèmes de restriction pour le paraboloïde à partir de ceux de la sphère, après avoir présenté le résultat suivant dû à Tomas[3] et Stein[1] :

Théorème 1.2 (Tomas-Stein)**.** *$R_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \to 2)$ est vrai si et seulement si $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$.*

Enfin, on se servira de ces deux résultats pour montrer une forme de régularité des solutions de l'équation de Schrödinger –libre, à titre d'exemple– pour certaines conditions initiales.

2 Exploration et conditions nécessaires

Les théorèmes de restriction possèdent une certaine malléabilité ; on va mettre en lumière que cela rend leur existence relativement rare en général.

2.1 Outillage

Dans la plupart de nos résultats, une astuce sera particulièrement utile : le *scaling*.

Lemme 2.1. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction test, et $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible, on pose*

$$f_L(x) = f \circ L(x),$$

qui définit une nouvelle fonction test f_L. On a :

$$\widehat{f_L} = \frac{1}{\det(L)} \hat{f}_{L^{\top -1}}, \quad \textit{et pour tout } p \geq 1 \; : \; \|f_L\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{\det(L)^{1/p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On utilisera essentiellement ce lemme avec un endomorphisme L diagonal (d'où le nom de *scaling*), ce qui rendra la description de $\widehat{f_L}$ plus pratique.

Démonstration. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\widehat{f_L}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\xi\cdot x} f \circ L(x)\, dx \\
&\overset{y=L(x)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\xi\cdot L^{-1}(y)} f(y)\, \frac{dy}{\det(L)} \\
&= \frac{1}{\det(L)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi L^{-1^\top}(\xi)\cdot y} f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{\det(L)} \hat{f}(L^{-1^\top}(\xi)).
\end{aligned}$$

Puisque les opérations d'inverse et d'adjoint commutent, on a démontré la première assertion. La deuxième résulte du même changement de variable et de la puissance $1/p$ de la norme L^p. □

Puisqu'une translation $\tau_a : x \mapsto x + a$ pour $a \in \mathbb{R}^n$ donne $\widehat{f \circ \tau_a}(\xi) = e^{2i\pi\xi\cdot a}\hat{f}(\xi)$, la norme est inchangée. En combinant cette observation avec 2.1, on peut donc se simplifier la tâche de la manière suivante.

Corollaire 2.2. *Si A est une transformation affine inversible et $S \subset \mathbb{R}^n$ est une hypersurface, alors :*

$$\forall\, (p,q), \quad R_S(p \to q) \iff R_{A(S)}(p \to q).$$

Étant donné $A \subset B$ deux hypersurfaces munies d'une même mesure, observons que pour tout $q \geq 1$ et toute fonction g mesurable, on a $\|g\|_{L^q(A)} \leq \|g\|_{L^q(B)}$. En particulier, tout couple (p,q) donnant lieu à un théorème de restriction sur B est également valable pour A. Aussi, pour toute surface S munie d'une mesure finie μ, si $r \leq q$ l'inégalité de Hölder donne :

$$\|g\|_{L^r(S,\mu)} \lesssim \|g\|_{L^q(S,\mu)}, \quad \forall\, g \text{ mesurable.}$$

On en déduit que si (p,q) est un couple vérifiant le théorème de restriction pour une surface de mesure finie S, alors (p,r) l'est aussi pour tout $r \leq q$. Enfin, rappelons que $(p,q) = (1,\infty)$ est toujours un couple valide, quel que soit (S,μ) : en particulier, si μ est une mesure finie, alors $(1,q)$ est encore valide pour tout $q \geq 1$.

2.2 Le cas plat s'effondre

On a évoqué en introduction le fait que les théorèmes de restriction de $\mathbb{R}^n$ sont automatiquement de la forme $q = p'$ avec $p \leq 2$. Si on considère un hyperplan, c'est encore pire :

Proposition 2.3. *Soit $H \subset \mathbb{R}^n$ un hyperplan muni de sa mesure de surface $d\sigma$.*
Si $R_H(p \to q)$ est réalisé, alors $p = 1$.

Démonstration. D'après 2.2, on peut supposer que $H = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x_n = 0\}$, et on va même montrer mieux : pour

$$S = H \cap \overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x_n = 0 \text{ et } |x| \leq 1\}, \text{ on a } R_S(p \to q) \implies p = 1.$$ [2]

2. Notons que S est de mesure finie pour $d\sigma$, et que par conséquent $R_S(1 \to q)$ est vérifié pour tout $q \geq 1$.

Soit (p,q) un couple valide pour S, et soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\hat{f}\|_{L^q(S)} = 1$. Pour $\lambda > 0$ qu'on va faire varier, on pose

$$f_\lambda = f_{L_\lambda}, \quad \text{où} \quad L_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \frac{x_n}{\lambda}).$$

D'après le Lemme 2.1, on a

$$\widehat{f_\lambda} = \lambda \hat{f}_{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \|f_\lambda\|_p = \lambda^{1/p} \|f\|_p.$$

D'une part, notre hypothèse donne

$$\lambda \|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|_{L^q(S,d\sigma)} = \|\widehat{f_\lambda}\|_{L^q(S,d\sigma)} \lesssim \|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{1/p} \|f\|_p \lesssim \lambda^{1/p},$$

et d'autre part, en décomposant $\xi = (\underline{\xi}, \xi_n) = (\underline{\xi}, 0) \in S$:

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|^q_{L^q(S,d\sigma)} &= \int_S |\hat{f}|^q(\underline{\xi}, \lambda \xi_n)\, d\sigma(\xi) \\ &= \int_S |\hat{f}|^q(\underline{\xi}, 0)\, d\sigma(\xi) \\ &= \int_S |\hat{f}|^q(\underline{\xi}, \xi_n)\, d\sigma(\xi) \\ &= \|\hat{f}\|^q_{L^q(S,d\sigma)} = 1. \end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu, pour $\lambda > 0$ quelconque :

$$\lambda \lesssim \lambda^{1/p}, \quad \text{ou encore} \quad \lambda^{1-\frac{1}{p}} \lesssim 1,$$

où la constante cachée par $\lesssim$ est indépendante de lambda. En faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient $1 - \frac{1}{p} \leq 0$ et comme $p \geq 1$, on a bien $p = 1$. $\square$

Remarque 2.4. La preuve de $q = p'$ dans le cas de $\mathbb{R}^n$ est très similaire ; il suffit de prendre un *scaling* uniforme en toutes les variables. En faisant tendre λ vers $+\infty$ puis vers 0, on obtient une inégalité puis l'autre. On mentionnera que si B est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le problème s'avère ne pas être beaucoup plus intéressant que le cas de $\mathbb{R}^n$ lui-même : pour une boule, par exemple, le même argument donne $q \leq p'$ (on ne peut cette fois faire tendre λ que vers $+\infty$) qui est toujours un couple valide puisqu'elle est de mesure de Lebesgue finie.

Que s'est-il passé ? Le moment clé survient lorsqu'on explicite $\|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|_{L^q(S)}$: la dépendance en λ disparaît car S est tout à fait plate. Il est donc naturel de se demander ce qui se passerait si on courbait notre hyperplan : considérons une hypersurface lisse S. Qui peut le plus peut le moins, et de la même manière que dans la preuve ci-dessus, quitte à appliquer une transformation affine et à intersecter S avec $\overline{B}(0,1)$, on va donner des conditions nécessaires aux théorèmes de restriction de S dans le cas où S est une partie bornée du graphe d'une fonction lisse $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, telle que $h(0) = 0$ et $\nabla h(0) = 0$ –ces conditions étant rendues possibles par la transformation affine–. Plus précisément, on considère :

$$S = \{\big(\underline{x}, h(\underline{x})\big) \in \mathbb{R}^n \;/\; |\underline{x}| \leq 1\}.$$

Notons qu'on peut donc toujours supposer que h et son gradient s'annulent en 0 puisque S est lisse ; en d'autres termes, S est « plutôt plate » en 0. De la même manière, si les différentielles d'ordre supérieur de h s'annulent jusqu'à un certain ordre $k \geq 2$, de sorte que $D^{(k-1)}h(0) = 0$, son expansion de Taylor donne $h(\underline{x}) = O(|\underline{x}|^k)$; alors, S est « d'autant plus plate » que k est grand. Le résultat qui suit donne sur les théorèmes de restriction de S une contrainte qui se durcit à mesure que S s'avère ressembler de plus en plus à un hyperplan, ce qui est cohérent avec ce qu'on a trouvé plus haut.

Théorème 2.5. *Avec les notations ci-dessus, si $p, q \geq 1$ et h s'annule à l'ordre $k \geq 2$, alors :*

$$R_S(p \to q) \implies p' \geq \frac{n+k-1}{n-1} q\,.$$

Remarque 2.6. Le choix de la mesure associée à S n'a pas été précisé : les deux candidats naturels sont la mesure de surface $d\sigma$ et la mesure image $d\xi$ de la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $\{x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ identifié à $\mathbb{R}^{n-1}$, par l'application graphe qui définit S. On montre le théorème en utilisant la deuxième puisque c'est celle-ci qui nous sera utile dans la dernière section, mais aussi par simplicité. En effet, intégrer une fonction mesurable positive g contre ces deux mesures donne :

$$\int_S g\, d\sigma = \int_{\mathbb{D}^{n-1}} g(\underline{\xi}, h(\underline{\xi}))\sqrt{1 + \|\nabla h(\underline{\xi})\|^2}\, d\underline{\xi}, \quad \text{tandis que} \quad \int_S g\, d\xi = \int_{\mathbb{D}^{n-1}} g(\underline{\xi}, h(\underline{\xi}))\, d\underline{\xi},$$

où $\mathbb{D}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est la boule unité fermée. Ceci dit, la preuve qui suit est tout à fait valide si l'on considère la mesure de surface (voir les notes de bas de page).

Démonstration. La stratégie est globalement la même que pour le Théorème 2.3, mais la courbure de S va nous rendre la tâche moins aisée. Supposons que $R_S(p \to q)$ soit vrai : on considère $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 au voisinage[3] de 0, et on pose, pour $\lambda > 0$:

$$L_\lambda : (x_i)_i \in \mathbb{R}^n \mapsto (\lambda^{-1}x_1, \ldots, \lambda^{-1}x_{n-1}, \lambda^{-k}x_n).$$

On a $\det(L_\lambda) = \lambda^{-(n+k-1)}$, ce qui donne avec les notations du Théorème 2.3 :

$$\widehat{f_\lambda} = \lambda^{n+k-1} \hat{f}_{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \|f_\lambda\|_p = \lambda^{\frac{n+k-1}{p}} \|f\|_p, \quad \text{d'après le Lemme 2.1.}$$

En exploitant $R_S(p \to q)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|_{L^q(S)} &= \lambda^{-(n+k-1)} \|\widehat{f_\lambda}\|_{L^q(S)} \\ &\lesssim \lambda^{-(n+k-1)} \|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \lambda^{-(n+k-1)+\frac{n+k-1}{p}} \|f\|_p \\ &\lesssim \lambda^{-\frac{n+k-1}{p'}}. \end{aligned}$$

Pour obtenir un résultat, on voudrait minorer la norme de $\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}$ par une puissance de λ, pour ensuite faire tendre ce dernier vers 0 et/ou l'infini. On note $g = |\hat{f}|^q$ pour simplifier les calculs, de sorte que :

$$\|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|^q_{L^q(S)} = \int_S g_{\frac{1}{\lambda}}\, dx = \int_{\mathbb{D}^{n-1}} g(\lambda\underline{\xi}, \lambda^k h(\underline{\xi}))\, d\underline{\xi} \overset{\zeta = \lambda\xi}{=} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \int_{\lambda\mathbb{D}^{n-1}} g(\underline{\zeta}, \lambda^k h(\lambda^{-1}\underline{\zeta}))\, d\underline{\zeta}. \tag{4}$$

3. Prendre, par exemple, $f = \mathcal{F}^{-1}(\rho)$ pour une fonction cloche ρ.

Aussi, on a une constante $C > 0$ telle que $|h(\underline{x})| \leq C|\underline{x}|^k$ pour tout $\underline{x} \in \mathbb{D}^{n-1}$: en effet, c'est vrai par hypothèse pour $\underline{x}$ proche de 0, et $\mathbb{D}^{n-1}$ est compact. Aussi, on a choisi f pour que $\hat{f}$ vaille 1 proche de 0 ; c'est donc aussi le cas de $g = |\hat{f}|^q$, disons, sur une boule de rayon $r > 0$. Pour $\delta = \min\big(\frac{r}{2}, (\frac{r}{2C})^{1/k}\big)$, si $\underline{\zeta} \in \delta\mathbb{D}^{n-1}$ et de plus $\lambda \geq \delta$, alors par construction :

$$|\lambda^k h(\lambda^{-1}\underline{\zeta})| \leq C|\underline{\zeta}|^k \leq \frac{r}{2}, \quad \text{donc} \quad \big|(\underline{\zeta}, \lambda^k h(\lambda^{-1}\underline{\zeta})\big| \leq r \quad \text{et} \quad g(\underline{\zeta}, \lambda^k h(\lambda^{-1}\underline{\zeta})) = 1.$$

En particulier, dès que $\lambda \geq \delta$, on peut tronquer violemment l'intégrale pour obtenir [4] :

$$\int_{\lambda\mathbb{D}^{n-1}} g(\underline{\zeta}, \lambda^k h(\lambda^{-1}\underline{\zeta}))\, d\underline{\zeta} \geq \int_{\delta\mathbb{D}^{n-1}} g(\underline{\zeta}, \lambda^k h(\lambda^{-1}\underline{\zeta}))\, d\underline{\zeta} = \int_{\delta\mathbb{D}^{n-1}} 1\, d\underline{\zeta} = A. \tag{5}$$

On peut désormais revenir à (4) :

$$\|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|_{L^q(S)} = \lambda^{-\frac{n-1}{q}} \Big(\int_{\lambda\mathbb{D}^{n-1}} g(\underline{\zeta}, \lambda^k h(\lambda^{-1}\underline{\zeta}))\, d\underline{\zeta}\Big)^{1/q} \geq \lambda^{-\frac{n-1}{q}} A^{1/q} \gtrsim \lambda^{-\frac{n-1}{q}}.$$

Avec les majorations obtenues précédemment, on obtient finalement

$$\lambda^{-\frac{n-1}{q}} \lesssim \|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|_{L^q(S)} \lesssim \lambda^{-\frac{n+k-1}{p'}}, \quad \text{et en particulier} \quad \lambda^{\frac{n+k-1}{p'}} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{q}}.$$

Comme cette estimation est valable pour tout $\lambda \geq \delta$, alors en faisant tendre λ vers $+\infty$, on doit nécessairement avoir $\frac{n+k-1}{p'} \leq \frac{n-1}{q}$, c'est-à-dire $p' \geq \frac{n+k-1}{n-1} q$. □

On ne peut en général pas obtenir l'inégalité inverse de cette manière, puisque la condition $\lambda \geq \delta$ –qui provenait en partie de la minoration drastique faite en (5)– nous empêche de faire tendre λ vers 0. On peut cependant conclure si on considère le cas particulier suivant :

Proposition 2.7. *Si $S = \{(\underline{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, x_n = |\underline{x}|^k\}$ pour $k \geq 2$, et si $p, q \geq 1$, alors :*

$$R_S(p \to q) \implies p' = \frac{n+k-1}{n-1} q\,.$$

Attention, ici on ne considère plus une surface compacte. La preuve fonctionne également si l'on tient à considérer la mesure de surface plutôt que la mesure image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Démonstration. Le début de la preuve est identique à celle au-dessus avant (4) ; on a encore, avec les mêmes notations, $\|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|_{L^q(S)} \lesssim \lambda^{-\frac{n+k-1}{p'}}$. On peut aussi écrire plus explicitement :

$$\begin{aligned}\|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|^q_{L^q(S)} = \int_S g_{\frac{1}{\lambda}}\, dx \;&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\lambda\underline{\xi}, \lambda^k |\underline{\xi}|^k))\, d\underline{\xi} \\ &\overset{\underline{\zeta}=\lambda\underline{\xi}}{=} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\underline{\zeta}, |\underline{\zeta}|^k)\, d\underline{\zeta} \\ &= \frac{1}{\lambda^{n-1}} \|\hat{f}\|^q_{L^q(S)}.\end{aligned}$$

4. Pour montrer le théorème avec la mesure de surface, il suffit de réécrire les intégrales précédentes avec le bon élément de surface. Comme ce dernier n'est autre que $\sqrt{1 + \|\nabla h(\underline{\xi})\|^2} \geq 1$ et que l'on cherche à minorer la norme de $\hat{f}$, on peut oublier ce facteur à cet endroit, donnant une fin de preuve identique.

On obtient donc l'estimation valable pour tout $\lambda > 0$:

$$\lambda^{-\frac{n-1}{q}} \lesssim \lambda^{-\frac{n-1}{q}} \|\hat{f}\|_{L^q(S)} = \|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}\|_{L^q(S)} \lesssim \lambda^{-\frac{n+k-1}{p'}},$$

et en particulier $\lambda^{\frac{n+k-1}{p'}} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{q}}$. On peut cette fois faire tendre λ vers $+\infty$ mais aussi vers 0, d'où l'égalité ! □

On utilisera plus tard cette condition pour déterminer des théorèmes de restriction du paraboloïde.

3 Le théorème de Tomas-Stein

On s'intéresse au cas particulier de la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Puisqu'elle est lisse, le Théorème 2.5 réduit déjà le champ des possibles ; cependant, on ne peut l'exploiter qu'avec $k = 2$, ce qui donne tout de même la condition nécessaire $p' \geq \frac{n+1}{n-1}q$. On peut en fait montrer une autre condition nécessaire pour la sphère, à savoir $p < 2\frac{n}{n+1}$, et bien que le problème ne soit pas résolu dans le cas général, la conjecture de restriction de la sphère affirme que ces conditions sont suffisantes :

$$R_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \to q) \iff p' \geq \frac{n+1}{n-1}q \quad \text{et} \quad p < 2\frac{n}{n+1}.$$

Comme annoncé, on va démontrer le Théorème 1.2, d'après les articles de Tomas[3] et de Stein[1]. C'est précisément la conjecture de restriction pour $q = 2$: en effet, la condition $p < 2\frac{n}{n+1}$ devient alors triviale, et on peut réécrire

$$p \leq 2\frac{n+1}{n+3} = \left(2\frac{n+1}{n-1}\right)' \iff p' \geq 2\frac{n+1}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}q.$$

3.1 Préliminaires

Comme dit plus haut, on a déjà montré avec le Théorème 2.5 que la condition $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$ était nécessaire. Il s'agit donc de démontrer, pour un tel p, que pour toute fonction de classe Schwartz $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\hat{f}|^2 d\sigma(\xi) \leq C\|f\|_p^2,$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface de la sphère, et C est une constante ne dépendant que de la dimension. Par définition de la transformée de Fourier des distributions et puisque $d\sigma$ est réelle et symétrique, on a $\widehat{\widehat{d\sigma}} = d\sigma$ et l'inégalité est équivalente [5] à

$$\langle \hat{f}, \widehat{f * \widehat{d\sigma}} \rangle \lesssim \|f\|_p^2.$$

La formule de Plancherel donne $\langle \hat{f}, \widehat{f * \widehat{d\sigma}} \rangle = \langle f, f * \widehat{d\sigma} \rangle$, et par l'inégalité de Hölder, il suffit de démontrer

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'} \lesssim \|f\|_p.$$

5. Notons que cette manipulation est propre au cas $q = 2$.

Fixons ϕ une fonction radiale, lisse, à support compact dans $B(0,2)$ et valant 1 sur la boule unité $B(0,1)$. On définit alors

$$\psi_k(x) = \psi_0(2^{-k}x) = \phi(2^{-k}x) - \phi(2^{1-k}x) \quad \text{pour tout entier } k \geq 0,$$

de sorte que ψ_k soit supporté dans l'anneau $2^{k-1} \leq |x| \leq 2^{k+1}$, et qu'on ait un télescopage :

$$\phi(x) + \sum_{k \geq 1} \psi_k(x) = 1.$$

On peut alors scinder par l'inégalité triangulaire :

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'} \leq \|f * (\phi \widehat{d\sigma})\|_{p'} + \sum_{k \geq 1} \|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{p'}. \tag{6}$$

En analyse harmonique, pour estimer des normes L^p on fait souvent usage de décompositions de ce type (ici dyadique) afin d'exploiter au mieux les comportements asymptotiques des fonctions en jeu.

3.2 Développement Asymptotique

Dans cette section, on va étudier le développement asymptotique de la transformée de Fourier de la mesure de sphère.

Proposition 3.1. *Si on note $d\sigma$ la mesure usuelle de la sphère unité, alors*

$$\widehat{d\sigma}(x) = C \frac{e^{2\pi i |x|}}{|x|^{(n-1)/2}} + C \frac{e^{-2\pi i |x|}}{|x|^{(n-1)/2}} + O_{|x| \to \infty}(|x|^{-n/2}). \tag{7}$$

Les outils qu'on va utiliser sont les principes de phase stationnaire et non stationnaire, souvent utiles dans l'étude d'intégrales de fonctions oscillantes.

Lemme 3.2 (Phase Non Stationnaire)**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne. Si ψ est une fonction lisse à support compact sur M et ϕ est une fonction réelle lisse définie sur le support de ψ telle que $|\nabla \phi| > \varepsilon$ pour une constante $\varepsilon > 0$, alors pour tout entier N, on a*

$$\int_M e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = O_{\lambda \to \infty}(\lambda^{-N}). \tag{8}$$

Démonstration. On définit l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ pour toute fonction lisse f sur la variété par

$$\mathcal{L}(f) := \frac{g(\nabla f, \nabla \phi)}{i |\nabla \phi|^2}.$$

Et on trouve par définition que la fonction $e^{i\lambda\phi(x)}$ est une fonction propre pour $\mathcal{L}$. C'est-à-dire que $\mathcal{L}(e^{i\lambda\phi(x)}) = \lambda e^{i\lambda\phi(x)}$. On cherche à calculer son « dual » (on ne précisera pas les espaces sur lesquels on travaille pour définir la notion de dual. En fait, on peut prendre l'espace de Sobolev $H_0^1(M)$ mais pour simplifier, les fonctions dans l'intégrale sont lisses et à support compact).

Pour toute fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et toute fonction lisse et à support compact $h \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$, on fait l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_M \mathcal{L}(f)h &= \int_M \frac{g(\nabla f, \nabla\phi)}{i|\nabla\phi|^2}h \\
&= \int_M f \mathrm{div}\Big(\frac{ih}{|\nabla\phi|^2}\nabla\phi\Big) \\
&= \int_M f\Big(ig(\nabla\frac{h}{|\nabla\phi|^2}, \nabla\phi) + i\frac{h\Delta\phi}{|\nabla\phi|^2}\Big) \\
&=: \int_M f\mathcal{L}^*(h). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Comme h est lisse et à support compact, et puisque $|\nabla\phi| > \varepsilon$, on a $\|\mathcal{L}^*(h)\|_{L^\infty(M)} \lesssim 1$.
En appliquant (9) à $f = e^{i\lambda\phi}$ et $h = \psi$, on a

$$\begin{aligned}
\int_M e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x) &= \lambda^{-N}\int_M \mathcal{L}^N(e^{i\lambda\phi(x)})\psi(x) \\
&= \lambda^{-N}\int_M e^{i\lambda\phi(x)}\big(\mathcal{L}^*\big)^N(\psi) \\
&\lesssim \lambda^{-N}, \qquad (10)
\end{aligned}$$

où la constante implicite ne dépend que de ψ et ε. □

Lemme 3.3 (Phase Stationnaire)**.** *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et ϕ une fonctions lisse et réelle tels que x_0 est un point stationnaire mais non dégénéré de ϕ, c'est-à-dire $\nabla\phi(x_0) = 0$ et $\det\big(Hess(\phi)\big)(x_0) \neq 0$, où $Hess(\phi)$ est la hessienne de ϕ. Alors pour toute fonction supportée dans un voisinage suffisamment petit de x_0, il existe une constante C qui dépend de ϕ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = C\psi(x_0)e^{i\lambda\phi(x_0)}\lambda^{-n/2} + O_{\lambda\to\infty}(\lambda^{-(n+1)/2}). \qquad (11)$$

On se référera à un livre de Stein[2] pour la démonstration de ce lemme.

Démonstration de la Proposition 3.1. Quitte à composer par une rotation, on peut supposer $x = \lambda e_n$ pour un $\lambda \gg 1$. L'objectif est d'estimer l'intégrale

$$\widehat{d\sigma}(\lambda e_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\lambda w_n}dw. \qquad (12)$$

La projection sur la dernière coordonnée, qui envoie $\mathbb{S}^{n-1}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, est stationnaire en $w = \pm e_n$ et non stationnaire ailleurs. On prend donc $\psi_\pm$ deux fonctions de troncature autour de $\pm e_n$ et on décompose l'intégrale (12) en trois termes

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\lambda w_n}\psi_+(w)dw + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\lambda w_n}\psi_-(w)dw \\
&\qquad + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\lambda w_n}\big(1 - \psi_+(w) - \psi_-(w)\big)dw \qquad (13)
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, en considérant une paramétrisation $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_{n-1})$ de l'hémisphère supérieur, on obtient une intégrale sur $\mathbb{D}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, et la projection sur la dernière coordonnée devient

$$w_n = (1 - |\underline{w}|^2)^{\frac{1}{2}} =: \Phi(\underline{w}),$$

qui admet un point stationnaire non dégénéré en 0. On effectue un raisonnement similaire pour le deuxième terme de (13). En conséquence, le Lemme 3.3 donne :

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\lambda w_n} \psi_{\pm}(w) dw = Ce^{-2\pi i\lambda\Phi(0)} \lambda^{-(n-1)/2} + O(\lambda^{-n/2}). \tag{14}$$

Pour le troisième terme, par le Lemme 8 on a

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\lambda w_n} \big(1 - \psi_+(w) - \psi_-(w)\big) dw = O(\lambda^{-N}), \tag{15}$$

pour tout entier N : on conclut en combinant (14) et (15). □

3.3 Estimation par Décomposition Dyadique

On fixe dans cette section une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Chaque terme de (6) est donné par un opérateur de convolution ; on voudrait appliquer le théorème 1.1 d'interpolation, souvent utile dans ce genre de situation. Comme par hypothèse $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3} < 2$, il suffit de trouver des continuités de type (L^1, L^∞) et (L^2, L^2), qui vont s'avérer plus accessibles. Notons T_k l'opérateur défini par

$$T_k(f) \coloneqq f * (\psi_k \widehat{d\sigma})$$

Proposition 3.4. *Pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est continu de L^1 vers L^∞ et de L^2 vers lui-même. Plus précisément :*

$$\|T_k(f)\|_\infty \lesssim 2^{-\frac{(n-1)k}{2}} \|f\|_1, \tag{16}$$

$$\|T_k(f)\|_2 \lesssim 2^k \|f\|_2, \tag{17}$$

où les constantes ne dépendent ni de f, ni de k.

Démonstration. Pour démontrer (16), on observe que par la définition de ψ_k, la fonction $\psi_k \widehat{d\sigma}$ est à support dans l'anneau $\{2^k \leq |x| \leq 2k + 1\}$. Avec l'estimée asymptotique de $\widehat{d\sigma}$, on obtient

$$\|\psi_k \widehat{d\sigma}\|_\infty \lesssim 2^{-\frac{(n-1)k}{2}}.$$

Avec l'inégalité de Young, on a déjà la continuité (L^1, L^∞) de T_k :

$$\|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_\infty \leq \|\psi_k \widehat{d\sigma}\|_\infty \|f\|_1 \lesssim 2^{-\frac{(n-1)k}{2}} \|f\|_1.$$

L'estimée (17) revient à montrer $|\widehat{\psi_k} * d\sigma| \lesssim 2^k$ puisqu'en utilisant l'identité de Plancherel et l'inégalité de Hölder, on a

$$\|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_2 = \|\hat{f} \cdot \widehat{\psi_k \widehat{d\sigma}}\|_2 \leq \|f\|_2 \|\widehat{\psi_k} * d\sigma\|_\infty. \tag{18}$$

Comme la fonction ψ_k est une dilatation de ψ_0, on a

$$\widehat{\psi_k}(x) = 2^{nk}\widehat{\psi_0}(2^k x).$$

Aussi, ψ_0 est à support compact donc sa transformée de Fourier est une fonction Schwartz. On a donc une estimée uniforme en k :

$$|\widehat{\psi_k}(x)| \lesssim \frac{2^{nk}}{(1+2^k|x|)^N}, \quad \text{pour tout entier} \quad N \geq 1. \tag{19}$$

Après des calculs élémentaires qu'on ne détaillera pas, on a

$$|\widehat{\psi_k} * d\sigma| \lesssim \left| \frac{2^{nk}}{(1+2^k|x|)^N} * d\sigma \right| \lesssim 2^k,$$

qui est exactement ce qu'on veut. □

On peut directement en déduire le résultat de Tomas dans [3], à savoir le cas sous-critique $1 \leq p < 2\frac{n+1}{n+3}$. En effet, le Théorème d'interpolation 1.1 donne :

$$\|T_k\|_{L^{p'} \to L^p} \leq \|T_k\|^{\theta}_{L^\infty \to L^1} \|T_k\|^{1-\theta}_{L^2 \to L^2},$$

où θ est défini par $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2}$. En conséquence, on a

$$\|T_k\|_{L^{p'} \to L^p} \leq 2^{-k\frac{1}{2}(n-1)(\frac{2}{p}-1)+k(2-\frac{2}{p})}.$$

Mais, on a

$$-\frac{1}{2}(n-1)(\frac{2}{p}-1)+2-\frac{2}{p} = 2+\frac{1}{2}(n-1)-\frac{2}{p}(1+\frac{n-1}{2}) < 0 \iff \frac{2}{p} > \frac{2+\frac{1}{2}(n-1)}{1+\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{n+3}{n+1}.$$

En conclusion, si $p < 2\frac{n+1}{n+3}$, on peut majorer la série dans (6), et obtenir

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'} \leq \|f * (\widehat{\phi d\sigma})\|_{p'} + \sum_{k \geq 1} 2^{-k\left(\frac{1}{2}(n-1)(\frac{2}{p}-1)+\frac{2}{p}-2\right)} \|f\|_p \lesssim \|f\|_p,$$

où on a directement contrôlé le premier terme avec l'inégalité de Young, ce qui est possible puisque $\widehat{\phi d\sigma}$ est lisse à support compact. Cette estimation conclut la preuve du théorème.

Dans la preuve ci-dessus, c'est l'inégalité triangulaire de (6) qui nous a fait perdre de l'information. Pour le cas critique $p = 2\frac{n+1}{n+3}$, on peut raisonner par méthode « d'interpolation complexe », qui améliore précisément ce passage. La preuve, bien que similaire, est plus technique et fait appel à des résultats extérieurs que nous devrions admettre. C'est pourquoi on ne la détaillera pas ici pour éviter de trop nous étaler.

4 Passage de la Sphère au Paraboloïde

Dans cette section, on va essayer de transformer les théorèmes de restriction sur la sphère en ceux sur le paraboloïde
$$\mathrm{P} = \Big\{ \Big(\underline{x}, \frac{1}{2}|\underline{x}|^2 \Big) \ / \ \underline{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \Big\}.$$
On prendra, comme évoqué dans la Remarque 2.6, la mesure image de la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ par la fonction graphe $\underline{x} \mapsto (\underline{x}, \frac{1}{2}|\underline{x}|^2)$. C'est cette mesure, et non la mesure de surface usuelle, qui apparaîtra lors de notre étude de l'équation de Schrödinger (22) dans la section suivante.

On a déjà donné une lourde condition sur les théorèmes de restriction du paraboloïde P (à transformation affine près) dans la Proposition 2.7, à savoir :

$$R_{\mathrm{P}}(p \to q) \implies \frac{n+1}{p'} = \frac{n-1}{q}.$$

Fixons des notations : pour des raisons pratiques, on considérera

$$\mathrm{S} = \Big\{ \Big(\underline{x}, 1 - \sqrt{1 - |\underline{x}|^2} \Big) \ / \ \underline{x} \in \frac{1}{2}\mathbb{D}^{n-1} \Big\},$$

qui est un morceau de l'hémisphère sud de la sphère à laquelle on a appliqué une translation. En particulier, le Corollaire 2.2 assure que les théorèmes de restriction de la sphère sont valides pour S. On pose aussi, pour $k \geq 1$:

$$\mathrm{P}_k = \Big\{ \Big(\underline{x}, \frac{1}{2}|\underline{x}|^2 \Big) \ / \ \underline{x} \in \frac{k}{2}\mathbb{D}^{n-1} \Big\}.$$

C'est un sous-ensemble compact de P.

Rappelons que la mesure considérée sur la sphère –et donc sur S– est la mesure de surface usuelle $d\sigma$, ce qui n'est pas le cas de P, et a fortiori des P_k. Sur S, l'élément de surface associé à $d\sigma$ est $\sqrt{1 + |\nabla\varphi(\underline{\xi})|^2}$, où $\varphi(\underline{\xi}) = 1 - \sqrt{1 - |\underline{\xi}|^2}$ est la fonction dont S est le graphe. On simplifie :

$$\sqrt{1 + |\nabla\varphi(\underline{\xi})|^2} = \sqrt{1 + \frac{|\underline{\xi}|^2}{1 - |\underline{\xi}|^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - |\underline{\xi}|^2}}.$$

Théorème 4.1. *Pour tout couple (p, q) tel que $\frac{n+1}{p'} = \frac{n-1}{q}$, on a :*

$$R_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \to q) \implies R_P(p \to q).$$

L'idée derrière ce résultat provient de l'observation suivante : en appliquant le *scaling* parabolique, l'intégrale d'une fonction sur la sphère va se concentrer vers l'origine, là où S ressemble beaucoup au paraboloïde.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On considère le *scaling* parabolique normalisé

$$f_\lambda(x) = \lambda^{-n-1} f\big(\lambda^{-1}\underline{x}, \lambda^{-2}x_n\big), \quad \text{pour } x = (\underline{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda > 0,$$

de sorte que pour $\xi = (\underline{\xi}, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, on ait :

$$\widehat{f_\lambda}(\xi) = \hat{f}(\lambda\underline{\xi}, \lambda^2\xi_n) \quad \text{et} \quad \|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{-\frac{n+1}{p'}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour alléger les notations, on note $g = |\hat{f}|^q$, pour écrire d'une part

$$\|\hat{f}\|^q_{L^q(\mathrm{P}_1)} = \int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}^{n-1}} g\Big(\underline{x}, \frac{1}{2}|\underline{x}|^2\Big)d\underline{x}, \tag{20}$$

et d'autre part, pour $\lambda \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f_\lambda}\|^q_{L^q(\mathrm{S})} &= \int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}^{n-1}} g\Big(\lambda\underline{\xi}, \lambda^2 - \lambda^2\sqrt{1-|\underline{\xi}|^2}\Big)\sqrt{\frac{1}{1-|\underline{\xi}|^2}}d\underline{\xi} \\
&\overset{\underline{x}=\lambda\underline{\xi}}{=} \lambda^{-(n-1)}\int_{\frac{\lambda}{2}\mathbb{D}^{n-1}} g\Big(\underline{x}, \lambda^2 - \lambda^2\sqrt{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2}\Big)\sqrt{\frac{1}{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2}}d\underline{x} \\
&\geq \lambda^{-(n-1)}\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}^{n-1}} g\Big(\underline{x}, \lambda^2 - \lambda^2\sqrt{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2}\Big)\sqrt{\frac{1}{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2}}d\underline{x}.
\end{aligned}$$

En observant que pour $|\underline{x}| \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\lambda^2 - \lambda^2\sqrt{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2} = \frac{1}{2}|\underline{x}|^2 + o(\lambda^{-2}),$$

et que le terme $\sqrt{\frac{1}{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2}}$ reste borné, on trouve par convergence dominée :

$$\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}^{n-1}} g\Big(\underline{x}, \lambda^2 - \lambda^2\sqrt{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2}\Big)\sqrt{\frac{1}{1-\lambda^{-2}|\underline{x}|^2}}d\underline{x} \xrightarrow{\lambda\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}^{n-1}} g\Big(\underline{x}, \frac{1}{2}|\underline{x}|^2\Big)d\underline{x} = \|\hat{f}\|^q_{L^q(\mathrm{P}_1)}.$$

Pour λ assez grand, on a donc obtenu :

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathrm{P}_1)} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{q}}\|\widehat{f_\lambda}\|_{L^q(\mathrm{S})}.$$

Si on suppose que (p, q) satisfait la relation $\frac{n+1}{p'} = \frac{n-1}{q}$, et que ce couple donne un théorème de restriction pour la sphère, la dépendance en λ disparaît, puisqu'alors :

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathrm{P}_1)} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{q}}\|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{\frac{n-1}{q}-\frac{n+1}{p'}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{21}$$

On a donc obtenu un théorème de restriction pour P_1, un sous-ensemble borné du paraboloïde. C'est en fait suffisant pour en déduire le résultat sur le paraboloïde tout entier : avec des mots, l'intégrale d'une fonction de classe Schwartz sur P peut être approchée par son intégrale sur l'un des P_k pour un k assez grand, et on peut facilement contrôler ce qu'il se passe sur ces domaines bornés, en se ramenant à P_1. Plus précisément, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ dépendant de f, tel que

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathrm{P})} \leq 2\|\hat{f}\|_{L^q(\mathrm{P}_k)}.$$

Or, on peut réécrire avec le même *scaling* parabolique :

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|^q_{L^q(\mathrm{P}_k)} &= \int_{\frac{k}{2}\mathbb{D}^{n-1}} |\hat{f}|^q\big(\underline{\xi}, \frac{1}{2}|\underline{\xi}|^2\big)d\underline{\xi} \\ &= \int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}^{n-1}} k^{n-1}|\hat{f}|^q\big(k\underline{x}, \frac{1}{2}k^2|\underline{x}|^2\big)d\underline{x} \\ &= k^{n-1}\|\widehat{f_k}\|^q_{L^q(\mathrm{P}_1)}.\end{aligned}$$

En appliquant (21), on a :

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_{L^q(\mathrm{P})} &\leq 2k^{\frac{n-1}{q}}\|\widehat{f_k}\|_{L^q(\mathrm{P}_1)} \\ &\lesssim k^{\frac{n-1}{q}}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= k^{\frac{n-1}{q}-\frac{n+1}{p'}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

où la constante dissimulée par $\lesssim$ est deux fois celle de (21), et ne dépend en particulier ni de k ni de f : c'est exactement ce qu'on veut. □

5 Application à l'Équation de Schrödinger

On termine en établissant un lien entre les théorèmes de restriction et l'équation de Schrödinger libre

$$i\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \tag{22}$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ est l'inconnue. On considère le problème de Cauchy associé à la condition initiale $u(0,x) = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. On admet l'unicité et l'existence de la solution, et on va exhiber une forme de continuité de la solution par rapport à la condition initiale.

Donnons d'abord un peu de motivation aux calculs qui vont suivre. Tout d'abord, la conservation de la norme L^2 en espace est un résultat élémentaire du même acabi que celui qu'on montrera avec les outils accumulés plus haut :

Lemme 5.1. *Soit u la solution au problème de Cauchy associé à $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de l'équation de Schrödinger[6] libre (22). Alors, pour tout $t \geq 0$:*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad \textit{En particulier,}\ \|u\|_{L^\infty_t L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x}.$$

Démonstration. On dérive –en supposant que u est assez régulière pour ce type de manipulation– l'expression de $\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ par rapport au temps pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t|u(t,x)|^2\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u)\overline{u} + u(\partial_t\overline{u})\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} i(\overline{u}\Delta u - u\Delta\overline{u})\,dx,\end{aligned}$$

6. On notera que ce Lemme est vrai en toute dimension.

où on a utilisé le fait que $\Delta\overline{u} = \overline{\Delta u} = \overline{i\partial_t u} = -i\partial_t\overline{u}$. Or, une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u}\Delta u \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \overline{u} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\overline{u} \, dx.$$

On a donc $\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot\,)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, et $\|u(t,\cdot\,)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ est constante. □

Ensuite, si on admet que la solution u possède une transformée de Fourier en temps et en espace $\mathcal{F}_{t,x}(u)(\tau,\xi) = \hat{u}(\tau,\xi)$, on peut appliquer celle-ci à (22) pour obtenir :

$$-2\pi\tau\hat{u}(\tau,\xi) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\tau,\xi) = 0,$$

qu'on peut réécrire en

$$(\tau - 2\pi|\xi|^2)\hat{u}(\tau,\xi) = 0.$$

Autrement dit, la transformée de Fourier en temps et en espace d'une solution est nécessairement supportée sur le paraboloïde P ![7] Bien que cette manipulation ne soit *a priori* pas légale, on va tout de même pouvoir utiliser les théorèmes de restriction de P développés dans la section précédente pour obtenir le résultat suivant.

Proposition 5.2. *Soit u la solution au problème de Cauchy associé à $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ de l'équation de Schrödinger libre (22). Alors :*

$$\|u\|_{L^{10/3}_{t,x}} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x}.$$

Remarque 5.3. Le résultat dépend cette fois de la dimension, mais il suffit de calculer les exposants obtenus en fonction de celle-ci pour en obtenir une version générale ; on choisit ici la dimension 3 pour faire le rapprochement avec la physique.

Démonstration. On notera $\grave{u}(t,\xi)$ la transformée de Fourier en espace de u, pour éviter toute confusion avec $\mathcal{F}_{t,x}(u) = \hat{u}$. On notera aussi $\grave{u_0}(\xi)$ la transformée de Fourier de u_0, pour garder nos notations cohérentes. En l'appliquant à l'équation (22), on trouve en intervertissant dérivée par rapport au temps et intégrale, une EDO en t :

$$\begin{aligned} i\partial_t\grave{u} + 4\pi^2|\xi|^2\grave{u} &= 0; \\ \grave{u}(0,\xi) &= \grave{u_0}, \end{aligned}$$

dont la solution est donnée par

$$\grave{u}(t,\xi) = e^{4i\pi^2|\xi|^2 t}\grave{u_0}(\xi). \tag{23}$$

Pour retrouver la solution de (22), on réapplique l'inverse de Fourier en espace :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{4i\pi^2|\xi|^2 t + 2i\pi x\cdot\xi}\grave{u_0}(\xi)d\xi = \int_{\mathrm{P}} e^{2i\pi(t\tau + x\cdot\xi)}\grave{u_0}(\xi)\, d\sigma(\tau,\xi),$$

où $d\sigma$ est la mesure sur le paraboloïde P utilisée dans la section précédente. Or ce dernier terme n'est autre que $\mathcal{F}^{-1}_{t,x}\big(\grave{u_0}d\sigma\big)$! Notons qu'on identifie $\grave{u_0}$ à une fonction sur P, par $\grave{u_0}(\tau,\xi) = \grave{u_0}(\xi)$.

7. On prend ici le paraboloïde P$= \{(2\pi|\xi|^2,\xi) \,/\, \xi \in \mathbb{R}^3\}$, qui vérifie donc les mêmes théorèmes de restriction que celui de la section précédente d'après le Corollaire 2.2.

Il nous reste à relier la norme de cette transformée de Fourier inverse aux théorèmes de restriction de P qu'on a établi plus haut. Le cas critique $p = 2\frac{n+1}{n+3}$ du Théorème de Thomas-Stein 1.2 pour $n = 4$, couplé au Théorème 4.1 donne, pour toute fonction test $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$:

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathrm{P})} \lesssim \|f\|_{L^{10/7}(\mathbb{R}^4)}. \tag{24}$$

D'une part, l'identité de Parseval donne, pour toute fonction g définie sur le paraboloïde P :

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^4} \overline{f} \mathcal{F}^{-1}(g d\sigma) \Big| = \Big| \int_{\mathrm{P}} \overline{\hat{f}} g d\sigma \Big|,$$

et d'autre part, l'inégalité de Hölder permet d'écrire

$$\Big| \int_{\mathrm{P}} \hat{f}\, \overline{g} d\sigma \Big| \leq \|\hat{f}\|_{L^2(\mathrm{P})} \cdot \|g\|_{L^2(\mathrm{P})} \lesssim \|f\|_{L^{10/7}(\mathbb{R}^4)} \|g\|_{L^2(\mathrm{P})}.$$

En utilisant la formulation duale de la norme et puisque $(\frac{10}{7})' = \frac{10}{3}$, on obtient par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$:

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g d\sigma)\|_{L^{10/3}(\mathbb{R}^4)} = \sup_{\|f\|_{L^{10/7}} = 1} \Big| \int_{\mathbb{R}^4} f \mathcal{F}^{-1}(g d\sigma) \Big| \lesssim \|g\|_{L^2(\mathrm{P})},$$

dont on déduit, pour $g = \check{u}_0$:

$$\|u\|_{L^4_{t,x}} = \|\mathcal{F}^{-1}_{t,x}\big(\check{u}_0 d\sigma\big)\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \|\check{u}_0\|_{L^2(\mathrm{P})}.$$

Puisque on a identifié $\check{u}_0$ à une fonction sur P par $\check{u}_0(\tau, \xi) = \check{u}_0(\xi)$, on a

$$\|\check{u}_0\|^2_{L^2(\mathrm{P})} = \int_P |\check{u}_0(\tau, \xi)|^2 \, d\sigma = \int_{\mathbb{R}^3} |\check{u}_0(\xi)|^2 \, d\xi = \|\check{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

et avec une dernière utilisation de la formule de Plancherel, on obtient la dépendance de la solution de l'équation de Schrödinger par rapport à la condition initiale :

$$\|u\|_{L^{10/3}_{t,x}} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x}.$$

$\square$

Références

[1] E. Stein. Harmonic analysis on rn. *The Mathematical Association of America Studies in Mathematics*, 13, 1976.

[2] E. Stein. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton University Press, 1993.

[3] P. A. Tomas. A restriction theorem for the fourier transform. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 81, 1975.