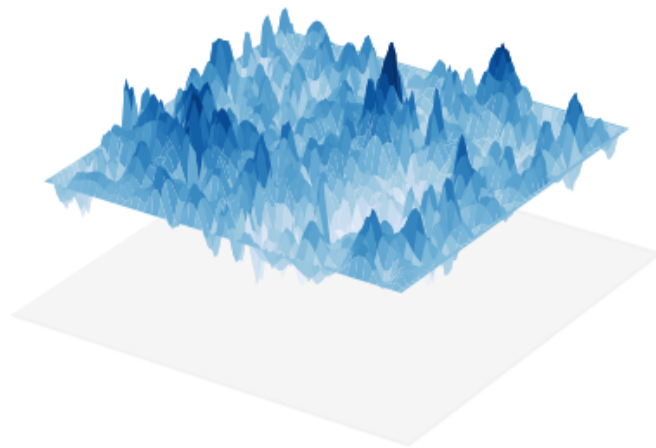


RAPPORT DE STAGE DE M1

Le Champ Libre Gaussien, Propriétés et Applications



Alexis METZ-DONNADIEU
ENS Paris, promo 2019

Maître de Stage : Quentin BERGER
Laboratoire de Probabilités
Statistique et Modélisation,
Sorbonne Université.

15 Février 2021 — 15 Mai 2021

Remerciements

Je tiens à remercier mon maître de stage, Mr Quentin Berger, pour le temps qu'il m'a accordé tout au long de ce stage, et cela malgré la situation sanitaire. Ses réponses à mes questions et son écoute ont été d'une grande aide. Merci !

Je remercie également l'équipe pédagogique du département de mathématique de l'ENS, et particulièrement Mr Giambattista Giacomini dont l'accompagnement m'a permis de trouver rapidement un stage. Ce stage m'a permis d'affiner mes intérêts et mon orientation dans l'avenir de ma scolarité à l'ENS.

Table des matières

1	Le GFF discret, définition et limite d'échelle	4
1.1	Le GFF discret	4
1.1.1	Définition du GFF discret	4
1.1.2	Fonction de Green, représentation comme vecteur Gaussien	5
1.1.3	Espace de Dirichlet et propriété de Markov spatiale	6
1.2	La limite thermodynamique pour $d \geq 3$	8
1.3	La limite d'échelle pour $d = 1$	9
2	Le GFF continu	10
2.1	Limite d'échelle du GFF discret vers le GFF continu	10
2.1.1	Domaines admissibles pour la limite d'échelle	10
2.2	Définition du GFF continu	12
2.3	Espace de Dirichlet continu	13
2.4	Propriétés d'invariance du GFF continu	14
2.4.1	Invariance conforme	14
2.4.2	Propriété de Markov spatiale pour le GFF	15
2.5	Une caractérisation du GFF	16

Introduction

Ce document est le rapport du stage que j'ai effectué du 15 Février au 15 Mai 2021 au Laboratoire de Probabilités Statistiques et Modélisation de Sorbonne Université sous la direction de Monsieur Quentin Berger. L'objectif a été d'étudier et de s'appropriier le Champ Libre Gaussien, un objet d'importance centrale en probabilité. Ce stage a principalement pris la forme de lectures de documents scientifiques portant sur le champ libre gaussien, ponctuées par des séances avec Monsieur Berger pour répondre à mes questions et me guider dans mes lectures. Compte tenu de la situation sanitaire, une partie de ces séances ont eu lieu en vidéoconférence et ont basculées dans une seconde partie vers des séances en présentiel à Jussieu.

Ce rapport présente une partie des outils mathématiques que j'ai pu découvrir à cette occasion et suit globalement le déroulement chronologique de mon stage. Dans la première partie, nous définissons le champ libre gaussien discret sur les sous-réseaux de \mathbb{Z}^d . Celui-ci peut être vu comme un modèle très naturel d'interface aléatoire, et nous décrivons dans ce rapport certaines de ses propriétés centrales.

Dans un second temps, nous regardons les limites éventuelles de la loi du champ libre gaussien discret lorsque l'on augmente la taille du réseau sous jacent. Nous établissons en particulier l'existence d'une limite thermodynamique en dimension supérieure à 3 et d'une limite d'échelle vers un pont Brownien en dimension 1.

La limite en dimension 2 est un cas d'intérêt particulier et son étude a été au cœur de la deuxième partie de mon stage. Elle m'a amené à étudier le champ libre Gaussien continu et à m'approprier certains outils d'analyse fonctionnelle qui ne m'étaient pas familiers jusqu'alors. Le GFF continu peut être vu comme une distribution aléatoire et est une limite naturelle pour le champ libre gaussien discret en dimension 2. Il s'interprète comme un vecteur Gaussien canonique dans l'espace de Sobolev $H_0^1(D)$.

Nous établissons certaines des propriétés d'invariances et de régularités dont bénéficie le GFF continu. Nous présentons en particulier une propriété d'invariance conforme et une propriété de type Markov spatiale. Une attention particulière a été prise pour étudier ces propriétés en analogie avec celles du champ libre gaussien discret. Dans la dernière partie de notre stage, nous avons étudié un résultat récent et relativement délicat de caractérisation du GFF en terme de ses propriétés d'invariances, que nous présentons en fin de rapport.

1 Le GFF discret, définition et limite d'échelle

1.1 Le GFF discret

Dans tout le rapport, les sous ensembles $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ sont munis d'une structure de graphe en prenant pour ensemble d'arêtes $\mathcal{E}_\Lambda := \{\{x, y\} \subset \Lambda, \|x - y\|_1 = 1\}$. Le bord *intérieur* de Λ dans \mathbb{Z}^d est l'ensemble :

$$\partial^- \Lambda := \{u \in \Lambda \mid \exists v \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda \text{ tel que } \|u - v\|_1 = 1\}.$$

Le bord *extérieur* de Λ dans \mathbb{Z}^d est l'ensemble $\partial^+ \Lambda = \partial^-(\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda)$. Les arêtes sortantes de Λ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_{ex}(\Lambda)$ défini par :

$$\mathcal{E}_{ex}(\Lambda) = \{(u, v) \in \partial^- \Lambda \times \partial^+ \Lambda \text{ tel que } \|u - v\|_1 = 1\}$$

On fixe dans cette partie un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ un sous réseau fini.

1.1.1 Définition du GFF discret

On note $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial^+ \Lambda$ l'union de Λ et de son bord extérieur. On souhaite définir un processus aléatoire sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^{\bar{\Lambda}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \bar{\Lambda}})$ qui pénalise les grandes variations le long des arêtes du réseau. Une façon naturelle de construire une telle variable consiste à prendre la mesure de Gibbs associée à une énergie proportionnelle à la variation quadratique totale le long des arêtes de Λ . Plus précisément, on définit :

Définition 1.1 (Énergie de Dirichlet). Le *Hamiltonien* du DGFF ou *énergie de Dirichlet* associé à une configuration $(\omega_i)_{i \in \bar{\Lambda}} \in \mathbb{R}^{\bar{\Lambda}}$ est donnée par :

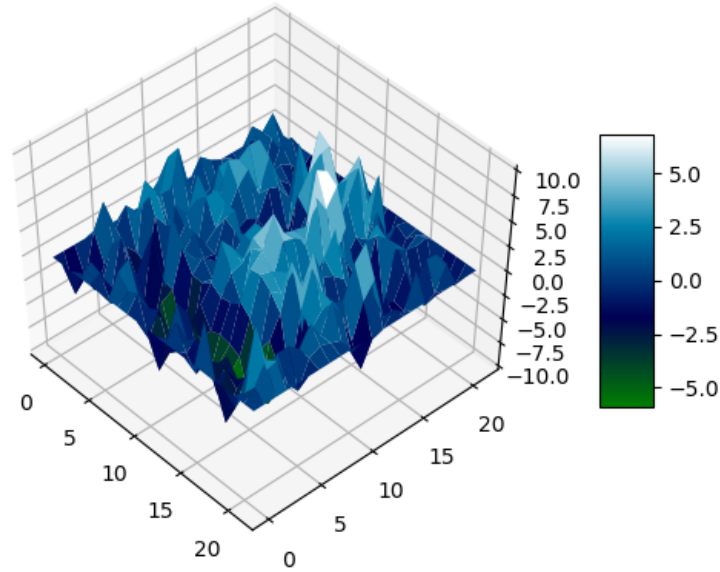
$$\mathcal{H}_{\bar{\Lambda}, \beta}(\omega) = \frac{\beta}{4d} \sum_{(i, j) \in \mathcal{E}_\Lambda} (\omega_i - \omega_j)^2,$$

où $\beta > 0$ est un paramètre du modèle.

Qui nous amène à introduire :

Définition 1.2 (Champ libre Gaussien discret). Un *champ libre Gaussien discret* (ou DGFF) sur Λ est un vecteur aléatoire $\varphi_{\Lambda, \beta}$ dont la densité est définie pour tout Borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\bar{\Lambda}})$ par :

$$\mathbb{P}(\varphi_{\Lambda, \beta} \in B) = \mu_{\Lambda, \beta}(B) = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}} \int_B e^{-\mathcal{H}_{\bar{\Lambda}, \beta}(\omega)} \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i \prod_{j \in \partial^+ \Lambda} \delta_0(d\omega_j),$$

FIGURE 1.1 – Un tirage du DGFF sur $\Lambda = [0, 20]^2$

où la constante $Z_{\Lambda, \beta}$ est une constante de renormalisation appelée *fonction de partition* :

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda, \beta} &= \int_{\mathbb{R}^\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\bar{\Lambda}, \beta}(\omega)} \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i \prod_{j \in \partial^+ \Lambda} \delta_0(d\omega_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^\Lambda} \exp\left(-\frac{\beta}{4d} \sum_{ij \in \mathcal{E}_\Lambda} (\omega_i - \omega_j)^2 - \frac{\beta}{4d} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} \omega_i^2\right) \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i. \end{aligned}$$

Ce sont les termes en ω_i^2 qui assurent que $Z_{\Lambda, \beta} < \infty$.

Remarque. On a $\mathcal{H}_{\bar{\Lambda}, \beta}(\omega) = \mathcal{H}_{\bar{\Lambda}, 1}(\beta^{1/2}\omega)$. En particulier $\varphi_{\Lambda, \beta}$ a la même loi que $\beta^{1/2}\varphi_1$. Quitte à renormaliser, on peut donc supposer que $\beta = 1$ et on note désormais $\varphi_\Lambda = \varphi_{\Lambda, 1}$.

1.1.2 Fonction de Green, représentation comme vecteur Gaussien

L'énergie de Dirichlet $\mathcal{H}_\Lambda : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ étant une forme quadratique définie positive, il est clair que le vecteur φ_Λ est Gaussien. Une version discrète de l'identité de Green-Gauss permet de montrer que l'on a en fait :

$$\mathcal{H}_{\Lambda, 1}(\omega) = \frac{1}{2} \omega^T \left(-\frac{1}{2d} \Delta|_\Lambda\right) \omega =: \|\omega\|_{-\frac{1}{2d} \Delta|_\Lambda}^2,$$

où $\Delta|_\Lambda \in M_\Lambda(\mathbb{R})$ est la restriction de la matrice du Laplacien discret $\Delta_{\mathbb{Z}^d}$ de \mathbb{Z}^d au domaine Λ . Ses coefficients sont explicitement donnés par :

$$\forall i, j \in \Lambda, \quad \Delta|_\Lambda(i, j) = \begin{cases} -2d & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La densité de φ est donc proportionnelle à :

$$A \exp\left(-\frac{1}{2}\|\omega\|_{-\frac{1}{2d}\Delta|_\Lambda}^2\right).$$

On reconnaît la densité d'un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance $(-\frac{1}{2d}\Delta|_\Lambda)^{-1}$. Il existe une expression plus explicite de cet inverse. En effet, remarquons que $-\frac{1}{2d}\Delta|_\Lambda = I - P_\Lambda$, où P_Λ est la matrice de transition d'une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d tuée en sortie du domaine Λ (en particulier P_Λ est sous stochastique). Un résultat classique des chaînes de Markov indique que l'inverse de cette matrice est donné par la fonction de Green :

Définition/Proposition 1.1 (Fonction de Green). *La fonction de Green G_Λ est définie pour tout couple $x, y \in \Lambda$ par :*

$$G_\Lambda(x, y) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_\Lambda} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}} \right],$$

où $(X_n)_n$ est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d partant de x et $\tau_\Lambda = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \notin \Lambda\}$ est le temps de sortie du domaine Λ . Elle est l'inverse de $-\frac{1}{2d}\Delta|_\Lambda$, c'est à dire :

$$\begin{cases} G_\Lambda(\cdot, x) = 0 \text{ sur } \Lambda^c \\ \Delta|_\Lambda G_\Lambda(\cdot, x) = -2d\delta_x(\cdot) \text{ sur } \Lambda \end{cases} ,$$

où δ_x est la fonction delta de Kronecker en x .

On a ainsi :

Théorème 1.1 (Représentation de φ_Λ comme vecteur Gaussien). *Le vecteur φ_Λ est un vecteur Gaussien centré dont la matrice de covariance est donnée par la fonction de Green.*

1.1.3 Espace de Dirichlet et propriété de Markov spatiale

A l'instar de tout vecteur Gaussien, le DGFF s'exprime particulièrement simplement dans la base de vecteurs propres de sa matrice de covariance. Cela nous amène à introduire :

Définition 1.3. Soit $f, g \in \mathbb{R}^\Lambda$, le produit interne de Dirichlet, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla$ est définie par :

$$\langle f, g \rangle_\nabla = -\frac{1}{2d} f^T \Delta|_\Lambda g$$

Il fait de \mathbb{R}^Λ un espace euclidien appelé *espace de Dirichlet* dans lequel le DGFF est le vecteur Gaussien canonique :

Proposition 1.1. Soit $(\varphi_n)_{n \leq |\Lambda|}$ une base orthonormée de l'espace de Dirichlet et $(Z_n)_n$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors le vecteur :

$$\varphi = \sum_{i \leq |\Lambda|} Z_i \varphi_i,$$

a la même loi que le DGFF.

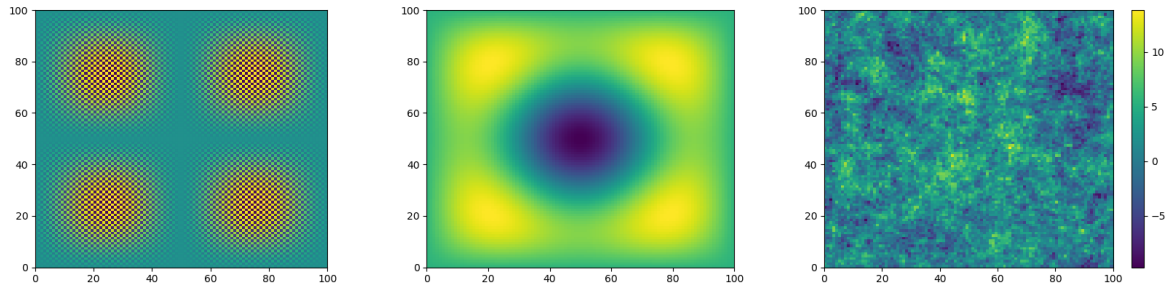


FIGURE 1.2 – Deux vecteurs propres du laplacien, l'un avec grande valeur propre (gauche) l'autre avec petite valeur propre (milieu), et un tirage du DGFF sur $\Lambda = [-100, 100]^2$ (droite).

Les propriétés géométriques de l'espace de Dirichlet nous renseigne sur des propriétés de décompositions du DGFF en composantes indépendantes. Fixons en effet $\Gamma \subset \Lambda$ un sous réseau fini de Λ . Notons S_Γ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^\Lambda$ dont le support est contenu dans Γ et H_Γ l'ensemble des fonctions $g \in \mathbb{R}^\Lambda$ qui sont harmoniques sur Γ (c'est à dire telles que $\Delta|_\Lambda g = 0$ sur Γ). Il n'est pas difficile de voir que S_Γ et H_Γ sont des supplémentaire orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla$:

$$H_\Gamma \overset{\perp_\nabla}{\oplus} S_\Gamma = \mathbb{R}^\Lambda. \quad (1)$$

Comme φ_Λ est un vecteur Gaussien canonique dans l'espace de Dirichlet, toute décomposition orthogonale induit une décomposition de φ_Λ en deux vecteurs Gaussiens indépendants. On déduit de (1) la propriété de Markov spatiale pour le DGFF, qui est fondamentale pour son étude :

Proposition 1.2 (Propriété de Markov spatiale pour le DGFF). *Fixons $\Gamma \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ deux sous réseaux finis de \mathbb{Z}^d et φ^Λ le champ libre Gaussien sur Λ . On a la décomposition :*

$$\varphi^\Lambda = \varphi^\Gamma + h_\Gamma,$$

où φ^Γ et h_Γ sont deux variables Gaussiennes indépendantes telles que :

- φ^Γ est presque sûrement nulle hors de Γ et sa restriction à Γ a la loi d'un DGFF sur Γ .
- h_Γ est presque sûrement harmonique sur Γ .

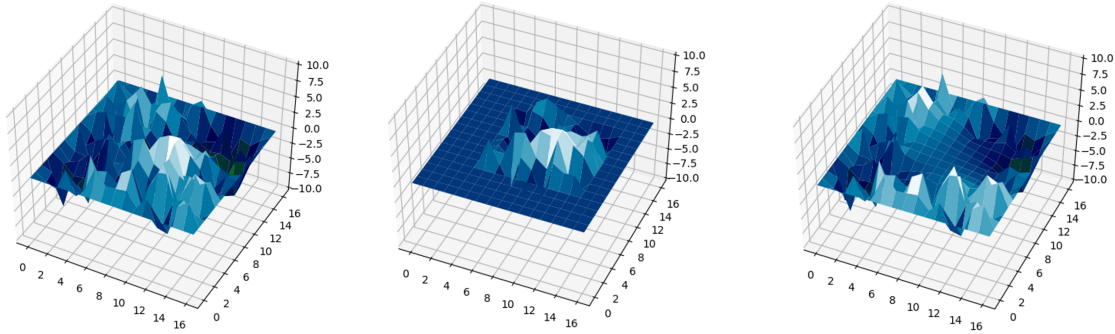


FIGURE 1.3 – Décomposition d'un tirage du DGFF sur $\Lambda = [1, 15]^2$ (gauche) en une composante dont le support est dans $\Gamma = [5, 13]^2$ (milieu) et une composante harmonique sur Γ (droite)

1.2 La limite thermodynamique pour $d \geq 3$

On s'intéresse à présent à la limite éventuelle de la loi du DGFF lorsque la taille du domaine Λ augmente. On commence par le cas plus simple où $d \geq 3$ et on fixe une suite croissante exhaustive $(\Lambda_N)_N$ de sous réseaux finis de \mathbb{Z}^d :

$$\bigcup_{N \geq 0} \Lambda_N = \mathbb{Z}^d.$$

La raison pour laquelle le cas de la dimension ≥ 3 est particulièrement simple provient du fait que les fonctions de Green G_{Λ_N} convergent simplement dans ce cas. En effet, on rappelle que :

Lemme 1.2 (Transcience d'une marche symétrique simple sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$). *Soit $(X_i)_i$ une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$). La fonction de Green globale $G_d(x, y) := \mathbb{E}_x [\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_i=y}]$ est bornée. En particulier par convergence monotone :*

$$G_{\Lambda_n}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_d(x, y).$$

Il en suit alors l'existence d'une limite *thermodynamique* :

Théorème 1.3. Notons $\bar{\varphi}_{\Lambda_N} \in \mathbb{R}^{\Lambda_N}$ un DGFF sur Λ_N que l'on prolonge à 0 sur $\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_N$. Les marginales finies dimensionnelles de la suite $(\bar{\varphi}_{\Lambda_N})_{N \geq 0}$ convergent en loi vers celles d'un champ gaussien centré $(\Phi_d(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ dont la structure de covariance est donnée par G_d .

Démonstration. Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ fini, on a $\varphi_{\Lambda_N}|_{\Lambda} \sim \mathcal{N}(0, G_{\Lambda_N}|_{\Lambda^2})$. Comme on a :

$$\forall (x, y) \in \Lambda^2, \quad G_{\Lambda_N}(x, y) \rightarrow G_d(x, y),$$

le vecteur (fini dimensionnel) $\varphi_{\Lambda_N}|_{\Lambda}$ converge en loi vers un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}(0, G_d|_{\Lambda^2})$ (c'est clair en passant par les transformées de Fourier des variables).

L'existence d'un champ global Φ_d dont la structure de covariance est donnée par G_d est d'autre part assuré par le théorème d'extension de Kolmogorov. \square

Remarque. On peut en fait montrer que la loi de Φ_d est une *mesure de Gibbs en volume infini* pour le champ libre Gaussien. Ce point de vue n'est pas détaillé dans ce rapport.

1.3 La limite d'échelle pour $d = 1$

On prend à présent $d = 1$, et à l'instar du cas précédent on fixe $(\Lambda_N)_N$ une suite exhaustive croissante de sous réseaux finis de \mathbb{Z} . Le cas de la dimension 1 est également facile à étudier puisque l'on dispose de la représentation suivante :

Proposition 1.3 (Représentation comme marche aléatoire Gaussienne). Soit $N \geq 1$ un entier et $(X_i)_{i \leq N}$ une suite i.i.d. de v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ et $S_0 = 0$. Le vecteur

$$\sqrt{2} \left(0, S_1 - \frac{S_N}{N}, S_2 - \frac{2S_N}{N}, \dots, S_{N-1} - \frac{(N-1)S_N}{N}, 0 \right)$$

a la loi d'un DGFF sur $[[1, N-1]]$.

Démonstration. C'est clairement un vecteur Gaussien centré, on vérifie alors juste que pour $i \leq j$:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\sqrt{2} \left(S_i - \frac{iS_N}{N} \right), \sqrt{2} \left(S_j - \frac{jS_N}{N} \right) \right) &= 2 \left(\mathbb{E}[S_i S_j] - \frac{j\mathbb{E}[S_i S_N]}{N} - \frac{i\mathbb{E}[S_j S_N]}{N} + \frac{ij\mathbb{E}[S_N^2]}{N^2} \right) \\ &= 2 \left[i - \frac{ij}{N} - \frac{ij}{N} + \frac{ijN}{N^2} \right] \\ &= \frac{2i(N-j)}{N}, \end{aligned}$$

que l'on identifie à la fonction de Green sur $[0, N]$. \square

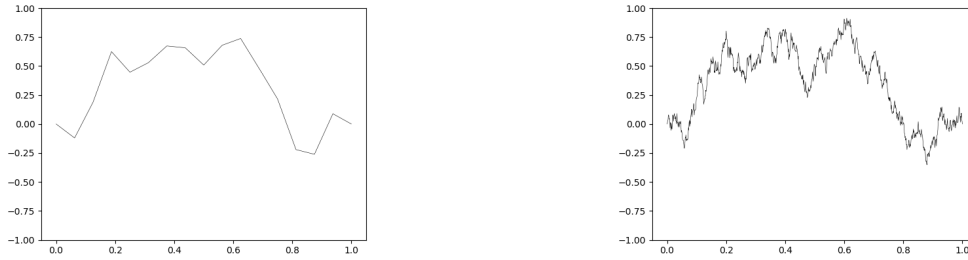


FIGURE 1.4 – Convergence du DGFF en dimension 1 vers un pont Brownien

Une application du théorème de Donsker indique alors que :

Théorème 1.4. Notons φ_N le DGFF sur $[0, N]$, la suite formée des processus $(X_N(t))_{t \in [0,1]}$ définis par :

$$t \in [0, 1], \quad X_N(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} [\varphi_N(\lfloor Nt \rfloor) + (Nt - \lfloor Nt \rfloor) \varphi_N(\lfloor Nt \rfloor)]$$

converge en loi vers un pont Brownien standard sur $[0, 1]$.

2 Le GFF continu

Il nous reste à traiter le cas de la dimension 2 qui est un cas particulièrement intéressant puisqu'il n'existe dans ce cas ni limite d'échelle ni limite thermodynamique. Pour le voir, commençons par introduire un cadre d'étude précis aux limites d'échelles en dimension 2.

2.1 Limite d'échelle du GFF discret vers le GFF continu

2.1.1 Domaines admissibles pour la limite d'échelle

On se place désormais dans le cas $d = 2$ et on identifiera \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 . On fixe dans toute cette partie $D \subset \mathbb{C}$ un sous domaine bornée simplement connexe. On approxime D par un ensemble de sous réseaux discrets de \mathbb{Z}^2 de la façon suivante :

Définition 2.1 (Approximations discrètes). La suite d'approximations discrètes de D est donnée par la suite $(\Lambda_N)_N$ de sous réseaux de \mathbb{Z}^2 définis par :

$$\Lambda_N := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{dist}_\infty(x/N, D^c) > \frac{1}{N} \right\},$$

où la distance sous-jacente est la distance ℓ_∞ sur \mathbb{Z}^2 .

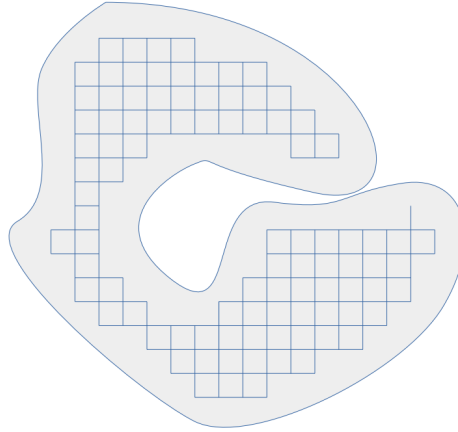


FIGURE 2.1 – Un sous domaine de \mathbb{C} superposé à une de ses approximations discrètes $\frac{1}{N}\Lambda_N$. Remarquons que ce choix d'approximation préserve la topologie de D et ne traverse jamais ∂D .

Notons $\varphi^{\Lambda_N} \in \mathbb{R}^{\Lambda_N}$ une suite de DGFF associés aux approximations Λ_N . On associe à φ^{Λ_N} une fonction h^{Λ_N} en escalier par :

$$h^{\Lambda_N} : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \varphi^{\Lambda_N}(\lfloor Nz \rfloor) \end{cases} ,$$

et on cherche à savoir si il existe une renormalisation de la suite h^{Λ_N} permettant de converger vers une limite non dégénérée. On sait déjà que pour tout $x \in D$, on a $G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Nx \rfloor) \rightarrow \infty$ (c'est le théorème de récurrence des marches aléatoires simples sur \mathbb{Z}^2). En particulier :

$$\forall z \in D, \text{Var}(h^{\Lambda_N}(z)) \xrightarrow[N, \infty]{} \infty.$$

Une étude plus fine des fonctions $G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor)$ permet d'établir une asymptotique beaucoup plus précise qui utilise la notion de mesure harmonique :

Définition 2.2 (Mesure harmonique). Considérons un Brownien bidimensionnel $(B_t)_t$ partant de z et τ_D son temps de sortie du domaine D :

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0, B_t \notin D\}.$$

La *mesure harmonique* sur ∂D vu de z est la mesure Borélienne $\Pi(z, \cdot)$ supportée par ∂D et définie par :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \Pi^D(z, A) = \mathbb{P}_z(B_{\tau_D} \in A).$$

L'asymptotique pour les fonctions de Green discrètes s'exprime alors :

Théorème 2.1. *Il existe une constante c_0 telle que pour tout $x \in D$, on a :*

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Nx \rfloor) \underset{N, \infty}{=} \frac{2}{\pi} \log N + c_0 + \frac{2}{\pi} \int_{\partial D} \log |x - z| \Pi^D(x, dz) + o(1),$$

et pour $x \neq y$,

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) \underset{N, \infty}{\longrightarrow} -\frac{2}{\pi} \log |x - y| + \frac{2}{\pi} \int_{\partial D} \log |y - z| \Pi^D(x, dz),$$

la convergence se faisant localement uniformément en (x, y) .

Le cas de la dimension 2 est donc fondamentalement différent du cas $d = 1$. En effet, les covariances $\text{Cov}(h^{\Lambda_N}(x), h^{\Lambda_N}(y))$ convergent lorsque $x \neq y$ mais divergent pour $x = y$. Cela prohibe l'existence d'une renormalisation des fonctions h^{Λ_N} assurant une convergence vers un champ Gaussien non trivial sur D .

La preuve du théorème 2.1 est omise, évoquons simplement le fait qu'elle utilise la convergence faible vers $\Pi_D(z, \cdot)$ des mesures harmoniques discrètes définies par :

$$\Pi_N(x, \cdot) := \sum_{y \in \partial^+ \Lambda_N} \mathbb{P}_{\lfloor Nz \rfloor}(X_\tau = y) \delta_{y/N}(\cdot),$$

où X_τ est la position de sortie de Λ_N d'une marche aléatoire simple partant de $\lfloor Nz \rfloor$. Cela nécessite certaines propriétés géométriques sur D , que la simple connexité permet en particulier d'assurer.

2.2 Définition du GFF continu

On a vu à la section précédente qu'il n'existe pas de limite d'échelle des DGFF en dimension 2. Notons désormais :

$$G^D(x, y) := -\log |x - y| + \int_{\partial D} \log |y - z| \Pi^D(x, dz).$$

D'après le [théorème 2.2.](#), on a donc :

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) \underset{N, \infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} G^D(x, y).$$

Même si $G^D(x, y) \rightarrow \infty$ lorsque $y \rightarrow x$, la singularité en $y = x$ est intégrable. En particulier, plutôt que de considérer directement les processus ponctuels $h^{\Lambda_N}(z)$, on peut amortir la singularité en intégrant h^{Λ_N} contre des fonctions $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{C}^∞ à support compact. Notons ainsi pour simplifier :

$$(h^{\Lambda_N}, \phi) := \int_D h^{\Lambda_N} \phi.$$

On a approximativement $(h^{\Lambda_N}, \phi) \approx \sum_{x \in \Lambda_N} \frac{1}{N^2} \varphi_{\Lambda_N}(x) \phi(x/N)$ de sorte qu'en regardant la variance, on reconnaît une somme de Riemann :

$$\begin{aligned} \text{Var} [(h^{\Lambda_N}, \phi)] &\approx \frac{1}{N^4} \sum_{x, y \in \Lambda_N} G_{\Lambda_N}(x, y) \phi(x/N) \phi(y/N) \\ &\underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \int_D \int_D \frac{2}{\pi} G^D(x, y) \phi(x) \phi(y) dx dy < \infty. \end{aligned}$$

Cet argument peut être rendu rigoureux en établissant des estimées plus précises et permet d'établir le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.2 (Convergence du GFF discret vers le GFF continu). *Notons $\mathcal{D}(D)$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans D . Les marginales finies dimensionnelles de $((h^{\Lambda_N}, \phi))_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ convergent en loi vers des vecteurs Gaussiens. Plus précisément, pour toute famille finie $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ de fonctions tests :*

$$\left((h^{\Lambda_N}, \phi_1), \dots, (h^{\Lambda_N}, \phi_n) \right) \xrightarrow[N, \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{2}{\pi} \Gamma(\phi_i, \phi_j)_{i, j \leq n} \right),$$

où l'on définit $\Gamma(\phi_i, \phi_j) := \int_{D^2} G^D(x, y) \phi_i(x) \phi_j(y) dx dy$.

A défaut d'une limite ponctuelle, il existe ainsi une limite d'échelle pour les processus amortis contre des fonctions tests. On est donc amené à définir :

Définition 2.3. Le GFF continu sur D est un processus Gaussien centré $(h_\phi^D)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ indexé par $\mathcal{D}(D)$ de structure de covariance Γ .

2.3 Espace de Dirichlet continu

L'espace de Dirichlet continu est défini par analogie au cas discret :

Définition 2.4. Pour $f, g \in \mathcal{D}(D)$, on note :

$$\langle f, g \rangle_\nabla := -\frac{1}{2\pi} \int_D f \Delta g.$$

C'est un produit scalaire sur $\mathcal{D}(D)$ appelé énergie de Dirichlet. Il fait de $\mathcal{D}(D)$ un espace préhilbertien appelé espace de Dirichlet. Son complété est l'espace de Sobolev $H_0^1(D)$. On peut montrer de façon analogue au cas discret que l'on a :

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(D), \quad \Gamma \left(-\frac{1}{2\pi} \Delta f, -\frac{1}{2\pi} \Delta g \right) = \langle f, g \rangle_\nabla.$$

Rappelons d'autre part un résultat classique de décomposition spectrale du Laplacien :

Proposition 2.1. *L'opérateur $-\Delta : H_0^1(D) \rightarrow H_0^1(D), \phi \mapsto -\Delta\phi$ admet une énumération croissante de ses valeurs propres $(\lambda_n)_n$, et il existe une famille $(u_n)_n$ de $H_0^1(D)$ qui vérifie :*

- (u_n) est une base orthonormée de $(H_0^1(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla)$
- $-\Delta u_n = \lambda_n e_n$

Il est alors possible de montrer un analogue continu à la [Proposition 1.2.](#) :

Théorème 2.3. *Soit $(Z_n)_n$ une suite i.i.d de variables $\mathcal{N}(0, 1)$, et notons :*

$$S_n := \sum_{k \leq n} Z_k u_k.$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(D)$, $(S_n, \phi) = \int_D S_n \phi$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire h_ϕ . Le processus $(h_\phi)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ a la loi d'un GFF sur D .

Remarque. Il est en fait possible d'établir la convergence de la suite $(S_n)_n$ dans chaque espace de Sobolev $H_0^s(D)$ pour $s < 0$. En particulier, cela montre qu'il existe une régularisation du GFF qui en fait une *distribution aléatoire*.

2.4 Propriétés d'invariance du GFF continu

2.4.1 Invariance conforme

Il n'est pas très difficile de voir que pour tout $x \in D$, la fonction $G^D(x, \cdot)$ est harmonique sur $D \setminus \{x\}$ et que $G^D(x, y) \underset{y \rightarrow x}{=} -\log|x - y| + O(1)$. D'autre part, l'hypothèse de simple connexité de D suffit pour assurer que les points de ∂D sont réguliers, c'est à dire que pour tout $x_b \in \partial D$:

$$\Pi^D(x, \cdot) \xrightarrow[D \ni x \rightarrow x_b]{faible} \delta_{x_0}(\cdot).$$

On en déduit en particulier que pour tout $y \in D$, on a $G^D(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow x_b]{} 0$. En utilisant ces quelques propriétés, il n'est pas difficile d'établir que :

Proposition 2.2. *La fonction de Green est invariante conforme. Plus précisément, si $T : D \rightarrow D'$ est biholomorphe, où D, D' sont des ouverts simplement connexes de \mathbb{C} , on a :*

$$\forall x, y \in D, \quad G^{D'}(T(x), T(y)) = G^D(x, y).$$

Démonstration. Notons $f(x, y) = G^{D'}(T(x), T(y))$. Comme les applications holomorphes transportent les fonctions harmoniques, il est clair que $f(x, \cdot)$ est harmonique sur $D \setminus \{x\}$ et est prolongeable par continuité en une fonction nulle sur ∂D . D'autre part, on a :

$$f(x, y) \underset{y \rightarrow x}{=} -\log |T(x) - T(y)| + O(1) = -\log |x - y| + O(1).$$

Ainsi $h(\cdot) := G^D(x, \cdot) - f(x, \cdot)$ est une fonction harmonique bornée sur $D \setminus \{x\}$, qui tend vers 0 au bord de D . Un résultat classique sur les fonctions harmoniques permet de conclure que $h = 0$ et donc que $f = G^D$. \square

Un simple calcul montre alors que le GFF hérite de l'invariance conforme de G^D .

Théorème 2.4 (Invariance conforme du GFF). *Soient $D, D' \subset \mathbb{C}$ deux sous-domaines simplement connexes et $T : D \rightarrow D'$ biholomorphe. Notons $(h_\phi)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ le GFF continu sur D . Alors $(|h_{|T'|^2 \phi \circ T})_{\phi' \in \mathcal{D}(D')}$ a la loi d'un GFF sur D' .*

2.4.2 Propriété de Markov spatiale pour le GFF

Il existe un analogue continu à la [proposition 1.3](#). Pour le voir, remarquons qu'en vertu du [théorème 2.3](#), le GFF peut être compris comme une forme de vecteur Gaussien canonique dans l'espace de Dirichlet $(H_0^1(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla)$. A l'instar du cas discret, les décompositions orthogonales de cet espace vont induire des décompositions du GFF en composantes Gaussiennes indépendantes. En particulier, si $U \subset D$ est un ouvert simplement connexe à bord \mathcal{C}^1 , il est facile de voir que :

$$H_0^1(D) = H_0^1(U) \overset{\perp_\nabla}{\bigoplus} \text{Harm}(U),$$

où $\text{Harm}(U)$ est l'ensemble des fonctions dont la restriction à U est une fonction harmonique. On peut alors montrer que :

Théorème 2.5. *Soit h le GFF sur D , on a la décomposition :*

$$h = h_U + \varphi,$$

où h_U et φ sont deux processus indépendants indexés par $\mathcal{D}(D)$ et vérifiant :

- h_U est nul en dehors de U et a la loi d'un GFF sur U à l'intérieur de U .
- φ est harmonique dans U .

2.5 Une caractérisation du GFF

Finissons ce rapport en présentant un résultat récent de caractérisation du GFF en terme de ses propriétés d'invariances. Notons à ce titre \mathcal{B} la classe des domaines bornés et simplement connexes de \mathbb{C} . Nous avons construit un ensemble de processus $((h^D, \phi))_{\phi \in \mathcal{D}(D)}_{D \in \mathcal{B}}$, qui possèdent certaines propriétés d'invariances :

1. **Invariance conforme.** Soit $D, D' \in \mathcal{B}$ et $T : D \rightarrow D'$ biholomorphe. Alors :

$$((h^D, |T'|^2 \phi \circ T))_{\phi \in \mathcal{D}(D')} \stackrel{\mathcal{L}}{=} ((h^{D'}, \phi))_{\phi \in \mathcal{D}(D')}.$$

2. **Markov spatiale** Si $D' \subset D$, alors h^D se décompose de façon unique :

$$h^D = h_D^{D'} + \varphi_D^{D'},$$

où $h_D^{D'}$ et $\varphi_D^{D'}$ sont des processus indépendants, avec $h_D^{D'}|_{\mathcal{D}(D')} \stackrel{\mathcal{L}}{=} h^{D'}$ et $h_D^{D'}|_{\mathcal{D}(D \setminus \bar{D}')} = 0$, et où $\varphi_D^{D'}$ est presque sûrement harmonique sur D' .

Rajoutons aux propriétés 1 et 2 la propriété de 'conditions nulles au bord' :

3. **Condition de Dirichlet** Notons \mathbb{D} le disque unité ouvert et $(f_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ une suite de fonctions tests *radiales* de masse 1 sortant de tout compact :

$$\forall r \in]0, 1[, \exists n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0, \text{Supp}(f_n) \cap B(0, r) = \emptyset.$$

Alors $\text{Var}(\langle h^{\mathbb{D}}, f_n \rangle) \xrightarrow[n, \infty]{} 0$.

Prenons à présent le point de vue inverse. Quels sont les familles de lois qui satisfont à ces conditions ? Il s'avère que ces propriétés sont très contraignantes et caractérisent le GFF si l'on rajoute une propriété de moments. C'est l'objet du théorème récent et relativement délicat à établir qui suit :

Théorème 2.6 (N.Beretsyki, E. Powell, G.Ray). *Soit $(\mu^D)_{D \in \mathcal{D}'}$ une famille de lois de probabilités telles que :*

- *Pour tout $D \in \mathcal{D}'$, une variable h^D de loi μ^D est un processus $(h^D, \phi)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ centré indexé par $\mathcal{D}(D)$, et agissant linéairement sur les fonctions tests :*

$$\forall \phi, \phi' \in \mathcal{D}(D), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (h^D, \lambda \phi + \phi') \stackrel{p.s.}{=} \lambda (h^D, \phi) + (h^D, \phi').$$

- *La structure de covariance de h^D , que l'on note $\tilde{\Gamma}_D$:*

$$\tilde{\Gamma}_D : \begin{cases} \mathcal{D}(D) \times \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi, \psi \mapsto \mathbb{E}[(h^D, \phi)(h^D, \psi)] \end{cases},$$

est une forme bilinéaire continue pour la topologie des fonctions tests.

- *Les conditions d'invariance conforme, de Markov spatiale et de Dirichlet sont vérifiées.*
- $\forall D \in \mathcal{B}, \forall \phi \in \mathcal{D}(D), \quad \mathbb{E}[(h^D, \phi)^4] < \infty$.

Alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $D \in \mathcal{D}'$, μ^D est la loi d'un multiple αh^D du champ libre Gaussien sur D .

Conclusion :

Le but de ce stage était d'introduire et d'étudier les propriétés du champ libre Gaussien discret sur \mathbb{Z}^d et du champ libre Gaussien continu sur \mathbb{C} . Ces objets apparaissant dans de diverses branches des probabilités, ce stage m'a permis de découvrir une grande variété de théories mathématiques.

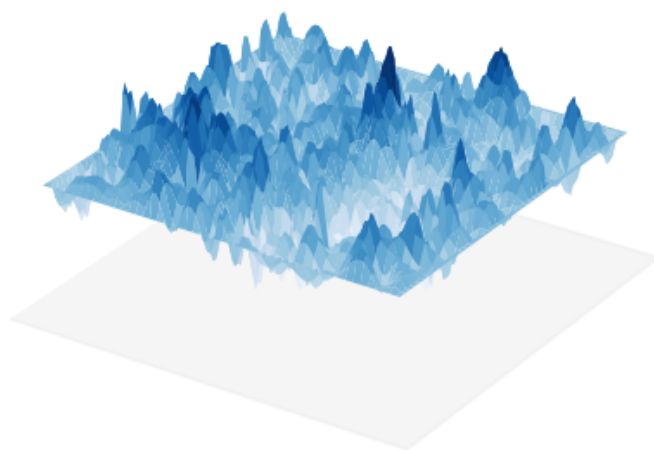
Il a également été l'occasion pour moi de commencer à m'approprier des outils avec lesquels je n'étais pas familier jusqu'alors, en particulier issus du calcul stochastique et de l'analyse fonctionnelle. Ce stage m'a permis d'affiner mes intérêts mathématiques et j'en tire à ce titre un bilan très positif.

Même si j'ai pu m'approprier certains des aspects les plus fondamentaux du champ libre Gaussien, je n'ai en revanche pas eu le temps de m'intéresser à ses aspects plus applicatifs. En particulier, je n'ai pas eu l'occasion de l'étudier en relation avec le modèle de dimères qui avait été le sujet dans mon mémoire de L3 et pour lequel le champ libre Gaussien apparaît comme limite d'échelle en variation. De multiples pistes restent donc encore ouvertes pour me permettre d'approfondir son étude.

Références

- [1] Nathanaël BERESTYCKI. “Introduction to the Gaussian free field and Liouville Quantum Gravity”. In : (). URL : <http://www.statslab.cam.ac.uk/~beresty/Articles/oxford5.pdf>.
- [2] Nathanaël BERESTYCKI, Ellen POWELL et Gourab RAY. “A characterisation of the Gaussian free field”. In : *Probability Theory and Related Fields* 176.3-4 (2019), 1259–1301. ISSN : 1432-2064. DOI : [10.1007/s00440-019-00939-9](https://doi.org/10.1007/s00440-019-00939-9). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00440-019-00939-9>.
- [3] Lawler GREGORY F. *Conformally Invariant Processes in the Plane*. T. 114. American Mathematics Society, 2005. ISBN : 978-1-4704-1341-5.
- [4] Olav KALLENBERG. *Foundations of Modern Probability, 3rd edition*. Springer, 2021. ISBN : 978-1-4757-4015-8.
- [5] Richard KENYON. “Dominos and the Gaussian free field”. In : *Ann. Probab.*, 29(3) :1128–1137 (2001).
- [6] Russell LYONS et Yuval PERES. *Probability on Trees and Networks*. T. 42. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Available at <https://rdlyons.pages.iu.edu/>. Cambridge University Press, New York, 2016, p. xv+699. ISBN : 978-1-107-16015-6. DOI : [10.1017/97811316672815](https://doi.org/10.1017/97811316672815). URL : <http://dx.doi.org/10.1017/97811316672815>.
- [7] Biskup MAREK. “Extrema of the two-dimensional Discrete Gaussian Free Field”. In : *Random Graphs, Phase Transitions, and the Gaussian Free Field, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, arXiv :1712.09972 (2020). ISSN : 2194-1017. DOI : [10.1007/978-3-030-32011-9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-32011-9). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-32011-9>.
- [8] B. RIDER et B. VIRAG. “The Noise in the Circular Law and the Gaussian Free Field”. In : *International Mathematics Research Notices* (2010). ISSN : 1687-0247. DOI : [10.1093/imrn/rnm006](https://doi.org/10.1093/imrn/rnm006). URL : <http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnm006>.
- [9] FRIEDLI SACHA et VELENIK YVAN. *Statistical Mechanics of Lattice Systems, A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 2019. ISBN : 9781107184824, 1107184827.
- [10] Wendelin WERNER et Ellen POWELL. *Lecture notes on the Gaussian Free Field*. 2021. arXiv : [2004.04720](https://arxiv.org/abs/2004.04720) [math.PR].
- [11] Michel WILLEM. *Analyse Fonctionnelle Élémentaire*. Cassini, 2003. ISBN : 978-2-84225-066-9.

Notes de lectures sur le Champ libre Gaussien



Alexis METZ-DONNADIEU
ENS Paris, promo 2019

Maître de Stage : Quentin BERGER
Laboratoire de Probabilités
Statistique et Modélisation,
Sorbonne Université.

15 Février 2021 — 15 Mai 2021

Remerciements

Je tiens à remercier mon maître de stage, Mr Quentin Berger, pour le temps qu'il m'a accordé tout au long de ce stage, et cela malgré la situation sanitaire. Ses réponses à mes questions et son écoute ont été d'une grande aide. Merci !

Je remercie également l'équipe pédagogique du département de mathématique de l'ENS, et particulièrement Mr Giambattista Giacomini dont l'accompagnement m'a permis de trouver rapidement un stage. Ce stage m'a permis d'affiner mes intérêts et mon orientation dans l'avenir de ma scolarité à l'ENS.

Table des matières

Remerciements	ii
Introduction	v
1 Le GFF discret, définition et limite d'échelle	1
1.1 Le GFF discret	1
1.1.1 Notations et conventions	1
1.1.2 Définition du GFF discret par le Hamiltonien	3
1.1.3 Espérance du DGFF et problème de Dirichlet	5
1.1.4 Fonction de Green, représentation comme vecteur Gaussien	7
1.1.5 Espace de Dirichlet discret	9
1.1.6 Propriété de Markov spatiale pour le DGFF	11
1.2 La limite thermodynamique pour $d \geq 3$	12
1.3 La limite d'échelle pour $d = 1$	15
2 Le GFF continu	18
2.1 Définition du GFF continu	18
2.2 Régularité du GFF	22
2.3 Limite d'échelle du GFF discret vers le GFF continu	25
2.3.1 Domaines admissibles pour la limite d'échelle	25
2.3.2 Asymptotique pour la fonction de Green discrète	28
2.3.3 Démonstration du théorème 2.3.1	31
2.4 Propriétés d'invariances du GFF continu	32
2.4.1 Invariance conforme	32
2.4.2 Propriété de Markov spatiale	33
2.5 Une caractérisation du GFF	35
2.5.1 Moyenne circulaire pour $h^{\mathbb{D}}$	37
2.5.2 Démonstration du théorème 2.5.1	41
A Invariance conforme du mouvement Brownien	46

B Outils d'analyse fonctionnelle	49
B.1 Valeurs propres du laplacien	49
B.2 Espace de Sobolev $H_0^s(D)$	51

Introduction

Le GFF apparaît depuis quelques années comme un objet d'importance centrale en probabilité. Celui-ci peut être vu comme un processus Gaussien canonique dans des espaces de fonctions munis de normes pénalisant les grandes variations locales. Il bénéficie à ce titre de propriétés d'invariances assez fortes et peut être vu comme une manière naturelle de généraliser le mouvement Brownien. En dimension 2 particulièrement, le GFF émerge comme limite d'échelle pour une large classe de modèles, incluant par exemple la limite en variation de la fonction de hauteur associé au modèle de dimères ([5]), ou encore le polynôme caractéristique de certaines matrices aléatoires ([8]). L'objectif de ce stage a été de s'approprier ce nouvel objet, ses variantes discrètes et continues et d'étudier les limites d'échelles entre celles-ci.

Dans le chapitre 1, nous définissons le champ libre gaussien discret (DGFF) sur les sous-réseaux de \mathbb{Z}^d . Notre choix a été de suivre un formalisme emprunté à la mécanique statistique, en commençant par définir le DGFF grâce à son Hamiltonien ([9]). Nous démontrons à posteriori qu'il s'agit en fait d'un vecteur Gaussien dont la matrice de covariance est donnée par la fonction de Green.

Dans la deuxième partie du chapitre 1, nous étudions les limites éventuelles de la loi du DGFF lorsque l'on augmente la taille du réseau. Nous montrons en particulier l'existence d'une limite thermodynamique en dimension supérieure ou égale à 3 et d'une limite d'échelle vers un pont Brownien en dimension 1.

La limite en dimension 2 est un cas d'intérêt particulier et est étudiée en détail dans le chapitre 2. Elle nous amène à introduire le *GFF continu* (cf [1]), que nous définissons premièrement comme un processus stochastique indexé par les fonctions tests $\mathcal{D}(D)$ d'un sous domaine $D \subset \mathbb{C}$. Nous montrons ensuite qu'il peut en fait être vu comme une distribution aléatoire et on explique en quoi il s'interprète comme un vecteur Gaussien canonique dans l'espace de Sobolev $H_0^1(D)$. La section 2.3 présente la preuve de la convergence du DGFF en dimension 2 vers le GFF continu ([7]).

Nous présentons dans la partie 2.4 les propriétés centrales d'invariances et de régularités dont bénéficie le GFF continu. Nous montrons en particulier qu'il vérifie une propriété d'invariance conforme et une propriété de type Markov spatiale.

Une attention particulière a été prise pour présenter ces propriétés en analogie avec celles du DGFF discret. Nous présentons enfin dans la partie 2.5 un résultat récent de caractérisation du GFF en terme de ses propriétés d'invariances.

Chapitre 1

Le GFF discret, définition et limite d'échelle

1.1 Le GFF discret

1.1.1 Notations et conventions

Cette section regroupe les définitions et les notations relatives aux réseaux qui seront utiles pour la suite. Une introduction plus conséquente à la théorie des réseaux peut être trouvée dans [6].

Définition 1.1.1 (Réseau \mathbb{Z}^d). Soit $d \geq 1$ un entier. Le réseau \mathbb{Z}^d est le graphe infini dont les sommets sont les éléments de \mathbb{Z}^d et dont les arêtes sont données par les éléments de :

$$\mathcal{E}^d = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \mid \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}.$$

On note \sim la relation sur \mathbb{Z}^d associée à \mathcal{E}^d :

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{E}^d \Leftrightarrow \|x - y\|_1 = 1.$$

Définition 1.1.2 (Sous réseau de \mathbb{Z}^d). Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ un sous ensemble de sommets, on le munit d'une structure de sous réseau de \mathbb{Z}^d dont les sommets sont les éléments de Λ et les arêtes sont les éléments de $\mathcal{E}_\Lambda := \mathcal{E}^d \cap \Lambda^2$. Fixons \leq un ordre total arbitraire sur \mathbb{Z}^d , on notera :

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Lambda = \{(u, v) \in \mathcal{E}_\Lambda \mid u \leq v\}.$$

Le bord *intérieur* (respectivement *extérieur*) de Λ dans \mathbb{Z}^d est le sous ensemble de \mathbb{Z}^d défini par :

$$\partial^- \Lambda := \{u \in \Lambda \mid \exists v \notin \Lambda, (u, v) \in \mathcal{E}^d\},$$

(resp. $\partial^+ \Lambda := \{u \notin \Lambda \mid \exists v \in \Lambda, (u, v) \in \mathcal{E}^d\} = \partial^- \Lambda^c$). Les arêtes sortantes de Λ sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_{ex}(\Lambda)$ défini par :

$$\mathcal{E}_{ex}(\Lambda) = (\partial^- \Lambda \times \partial^+ \Lambda) \cap \mathcal{E}^d.$$

Gradient et divergence discrètes :

Fixons à présent un tel sous réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. On note $C_0(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ l'espace des fonctions sur les sommets de \mathbb{Z}^d et $C_1(\mathbb{Z}^d) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{E}^d}$ l'espace des fonctions sur les arêtes de \mathbb{Z}^d compatible avec l'orientation :

$$C_1(\mathbb{Z}^d) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}^d} \mid \forall uv \in \mathcal{E}^d, f(uv) = -f(vu) \right\}.$$

Définition 1.1.3. L'opérateur gradient est l'application linéaire définie par :

$$\nabla : \begin{cases} C_0(\mathbb{Z}^d) & \rightarrow & C_1(\mathbb{Z}^d) \\ f & \mapsto & (uv \mapsto f(v) - f(u)) \end{cases}.$$

L'opérateur de divergence est l'application linéaire Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} C_0(\mathbb{Z}^d) & \rightarrow & C_0(\mathbb{Z}^d) \\ f & \mapsto & (u \mapsto \sum_{\substack{v \in \mathbb{Z}^d \\ u \sim v}} \nabla_{uv} f) \end{cases}.$$

On notera $\nabla_{ij} f = f(j) - f(i)$ si f est définie en i et j et par extension $\nabla f(i) \in C_0(\mathbb{Z}^d)$ le vecteur dont la j ème coordonnée vaut $\nabla_{ij} f$ si $i \sim j$ et 0 sinon.

Ces opérateurs sont reliés par les formules suivantes, dites de Green Gauss discrètes :

Lemme 1.1.1 (Formules de Green-Gauss discrètes). *Soit $f, g \in C_0(\mathbb{Z}^d)$ et $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ un sous ensemble fini, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Lambda} \nabla f(i) \cdot \nabla g(i) &= - \sum_{i \in \Lambda} g_i \Delta f_i + \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} g_j \nabla_{ij} f, \\ \sum_{i \in \Lambda} (f_i \Delta g_i - \Delta f_i g_i) &= \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} (f_j \nabla_{ij} g - g_i \nabla_{ij} f). \end{aligned}$$

Elles sont l'équivalent discret des relations de Green Gauss dans le cas continu.

Démonstration. Dans les deux cas, les deux membres sont des formes bilinéaires en f et g qui ne font intervenir que les valeurs de f et g en $\Lambda \cup \partial^+ \Lambda$. Il suffit donc de vérifier que les relations sont vraies lorsque $f = \delta_x(\cdot)$ et $g = \delta_y(\cdot)$, où x et y parcourent $\Lambda \cup \partial^+ \Lambda$. Cela se fait facilement en séparant en les différents cas suivant que x et y appartiennent à Λ ou à $\partial^+ \Lambda$. \square

Pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, on notera $\Delta|_\Lambda \in M_\Lambda(\mathbb{R})$ la restriction de la matrice du Laplacien $\Delta_{\mathbb{Z}^d}$ de \mathbb{Z}^d au domaine Λ . Ses coefficients sont explicitement donnés par :

$$\forall i, j \in \Lambda, \quad \Delta|_\Lambda(i, j) = \begin{cases} -2d & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Signalons que cette matrice *n'est pas égale* à la matrice du Laplacien de Λ en général.

Finissons cette partie en fixant quelques notations probabiliste. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ est muni d'une structure d'espace mesurable par la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{Z}^d}$. A $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$, on associe d'autre part la sous tribu \mathcal{F}_Γ définie par :

$$\mathcal{F}_\Gamma := \{\emptyset, \mathbb{R}\}^{\otimes \Gamma^c} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})^\Gamma \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{Z}^d}.$$

La famille $(\mathcal{F}_\Gamma)_{\Gamma \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d), \subset)}$ forme ainsi une filtration de $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{Z}^d})$. Les événements seront notés ω ou φ et les mesures de probabilités sur ces espaces seront généralement dénotés par μ .

1.1.2 Définition du GFF discret par le Hamiltonien

On fixe à présent un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et on se place sur $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ un sous réseau fini. On souhaite définir un processus aléatoire sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \Lambda})$ qui pénalise les grandes variations le long des arêtes du réseau. On est ainsi amené à introduire :

Définition 1.1.4 (Énergie de Dirichlet). Le *Hamiltonien* du DGFF ou *énergie de Dirichlet* associé à une configuration $(\omega_i)_{i \in \Lambda} \in \mathbb{R}^\Lambda$ est donnée par :

$$\mathcal{H}_{\Lambda, \beta}(\omega) = \frac{\beta}{4d} \sum_{(i, j) \in \mathcal{E}_\Lambda} (\omega_i - \omega_j)^2,$$

où $\beta > 0$ est un paramètre du modèle.

La fonction $\mathcal{H}_{\Lambda, \beta}$ est invariante par translation :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_{\Lambda, \beta}(\omega) = \mathcal{H}_{\Lambda, \beta}(\omega + c).$$

Sans conditions supplémentaires, une configuration a donc la même énergie que ses translatés. En particulier, il n'y a pas de manière de renormaliser une mesure sur $\mathbb{R}^{\otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ proportionnelle à une fonction de l'énergie de Dirichlet pour en faire une mesure de probabilité. Il existe deux solutions pour contourner ce problème :

- Il est possible de rajouter un terme pénalisant les grandes valeurs de ω_i . Ceci amène à la définition du *Hamiltonien pour le champ libre Gaussien massif* :

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,m}(\omega) = \frac{\beta}{4d} \sum_{i \sim j; i,j \in \Lambda} (\omega_i - \omega_j)^2 + \frac{m}{2} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i^2.$$

Cette approche ne sera pas détaillée plus en détail dans ce rapport.

- La deuxième possibilité consiste à imposer les valeurs de ω sur le bord extérieur $\partial^+ \Lambda$, puis de regarder $\mathcal{H}_{\Lambda \cup \partial^+ \Lambda, \beta}$. C'est cette approche que l'on détaille à présent.

Remarque. Les termes quadratiques $(\omega_i - \omega_j)^2$ peuvent être motivés par une interprétation énergétique du Hamiltonien. Supposons en effet que chaque arête du réseau correspond à un petit ressort de raideur β et que chaque point de Λ est autorisé à se déplacer perpendiculairement au réseau. A chaque événement $\omega \in \mathbb{R}^\Lambda$ on associe la configuration fixant chaque point $x \in \Lambda \subset \mathbb{R}^d$ en $(x, \omega_x) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Le Hamiltonien coïncide alors à une constante additive près avec l'énergie potentielle élastique associée aux ressorts.

Évoquons enfin qu'une large classe de champs aléatoires généralisant le DGFF en remplaçant les termes quadratiques par une fonction plus générale $\mathcal{V}(\nabla_{ij}\varphi)$ sont également largement étudiés¹. Le DGFF reste néanmoins un objet d'intérêt en soi car il dispose d'une structure supplémentaire de champ Gaussien qui facilite grandement son étude.

On note désormais $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial^+ \Lambda$ l'union de Λ et de son bord extérieur.

Définition 1.1.5. Soit $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, la *mesure de Gibbs* associée à $\mathcal{H}_{\bar{\Lambda},\beta}$, de condition au bord η , est la mesure de probabilité définie pour tout Borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\bar{\Lambda}})$ par :

$$\mu_{\Lambda,\beta}^\eta(B) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^\eta} \int_B e^{-\mathcal{H}_{\bar{\Lambda},\beta}(\omega)} \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i \prod_{j \in \partial^+ \Lambda} \delta_{\eta_j}(d\omega_j),$$

où la constante $Z_{\Lambda,\beta}^\eta$ est une constante de renormalisation appelée *fonction de partition* et définie par :

$$Z_{\Lambda,\beta}^\eta = \int_{\mathbb{R}^{\bar{\Lambda}}} e^{-\mathcal{H}_{\bar{\Lambda},\beta}(\omega)} \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i \prod_{j \in \partial^+ \Lambda} \delta_{\eta_j}(d\omega_j).$$

Remarque. Si $\eta = 0$ pour simplifier, on peut réécrire :

$$Z_{\Lambda,\beta}^0 = \int_{\mathbb{R}^\Lambda} \exp \left(-\frac{\beta}{4d} \sum_{ij \in \bar{\mathcal{E}}_\Lambda} (\omega_i - \omega_j)^2 - \frac{\beta}{4d} \sum_{i \in \partial^- \Lambda} \omega_i^2 \right) \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i.$$

Ce sont les termes en ω_i^2 qui font perdre la propriété d'invariance par translation du Hamiltonien et assurent que $Z_{\Lambda,\beta}^0 < \infty$.

1. cf par exemple au modèle d'interface $\nabla\varphi$ de Ginzburg-Landau

Définition 1.1.6 (DGFF). Un *champ libre Gaussien discret* (ou DGFF) sur Λ , de condition au bord η , est un vecteur aléatoire φ_β^η de loi $\mu_{\Lambda,\beta}^\eta$.

Remarque. On a $\mathcal{H}_{\Lambda,\beta}(\omega) = \mathcal{H}_{\Lambda,1}(\beta^{1/2}\omega)$. En particulier φ_β^η a la même loi que $\beta^{1/2}\varphi_1^{\beta^{1/2}\eta}$. Quitte à renormaliser, on peut donc supposer que $\beta = 1$ et on note désormais $\varphi^\eta = \varphi_1^\eta$.

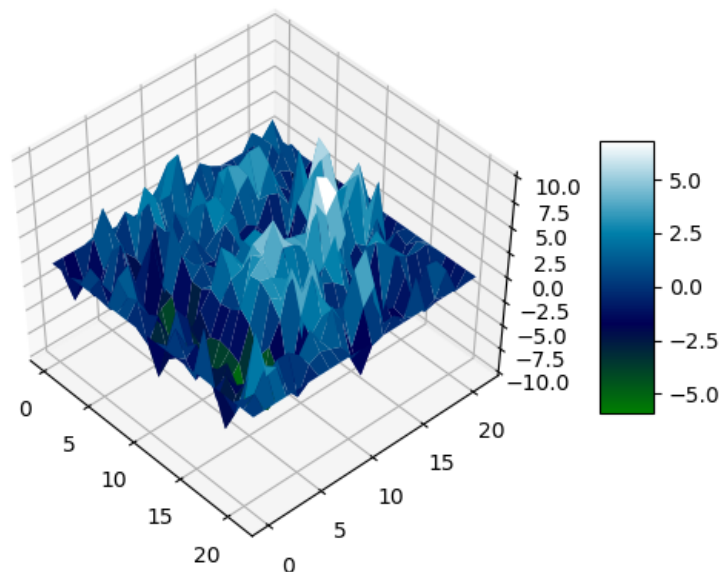


FIGURE 1.1.1 – Un tirage du DGFF sur $\Lambda = [[0, 20]]^2$ avec conditions nulles au bord

1.1.3 Espérance du DGFF et problème de Dirichlet

L'objectif de cette partie est de démontrer la décomposition suivante :

$$\varphi^\eta \stackrel{\mathcal{L}}{=} u^\eta + \varphi^0, \quad (1.1)$$

où u^η est une fonction déterministe dépendant des conditions au bord et φ^0 est un DGFF sur Λ pour $\eta = 0$. Remarquons que par symétrie du Hamiltonien, on a lorsque $\eta = 0$:

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \Lambda \cup \partial^+ \Lambda}, \quad \mu_{\Lambda,1}^0(A) = \mu_{\Lambda,1}^0(-A).$$

On doit donc avoir $\mathbb{E}[\varphi^0(\cdot)] = 0$ sur Λ . En particulier, si la décomposition (1.1) est valable, il vient :

$$\forall i \in \Lambda, u^\eta(i) = \mathbb{E}[\varphi^\eta(i)].$$

Lemme 1.1.2. *La fonction $u^\eta := \mathbb{E}[\varphi^\eta(\cdot)]$ est l'unique solution du problème de Dirichlet :*

$$(P_{\eta,\Lambda}) : \begin{cases} u^\eta(j) = \eta(j) & \forall j \in \partial^+ \Lambda \\ \Delta u^\eta(i) = 0 & \forall i \in \Lambda \end{cases}.$$

Démonstration. Notons h^η la solution du problème de Dirichlet $(P_{\eta,\Lambda})$. On veut montrer que $h^\eta = u^\eta$. Réécrivons pour cela le Hamiltonien en un élément ω coïncidant avec η sur $\partial^+ \Lambda$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{\Lambda}}(\omega) &= \frac{1}{4d} \sum_{ij \in \bar{\mathcal{E}}_{\bar{\Lambda}}} (\omega_i - \omega_j)^2 \\ &= \frac{1}{4d} \sum_{ij \in \bar{\mathcal{E}}_{\bar{\Lambda}}} (\nabla_{ij} \omega)^2 \\ &= -\frac{1}{4d} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i (\Delta \omega)_i + \frac{1}{4d} \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} \omega_j \nabla_{ij} \omega \quad (\text{Green-Gauss}) \\ &= -\frac{1}{4d} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i (\Delta \omega)_i + \frac{1}{4d} \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} (\eta_j^2 - \omega_i \eta_j). \end{aligned}$$

Si $i \in \partial^- \Lambda$, remarquons que l'on a :

$$\omega_i (\Delta \omega)_i = \omega_i (\Delta|_{\Lambda} \omega)_i + \sum_{j \in \partial^+ \Lambda, i \sim j} \omega_i \eta_j,$$

de sorte que l'on peut identifier :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{\Lambda}}(\omega) &= -\frac{1}{4d} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i (\Delta|_{\Lambda} \omega)_i + \frac{1}{4d} \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} (\eta_j^2 - 2\omega_i \eta_j) \\ &= \|\omega\|_{-\frac{1}{4d} \Delta|_{\Lambda}}^2 + \frac{1}{4d} \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} (\eta_j^2 - 2\omega_i \eta_j), \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{-\frac{1}{4d} \Delta|_{\Lambda}}$ est la norme associée au produit scalaire $\langle u, v \rangle_{-\frac{1}{4d} \Delta|_{\Lambda}} := -\frac{1}{4d} u^T \Delta|_{\Lambda} v$ définie sur \mathbb{R}^{Λ} . Remarquons d'autre part que :

$$\begin{aligned} \|\omega - h^\eta\|_{-\Delta|_{\Lambda}}^2 &= \|\omega\|_{-\Delta|_{\Lambda}}^2 - 2\langle \omega, h^\eta \rangle_{-\Delta|_{\Lambda}} + \|h^\eta\|_{-\Delta|_{\Lambda}}^2 \\ &= \|\omega\|_{-\Delta|_{\Lambda}}^2 + 2 \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \Delta|_{\Lambda} h^\eta(i) + \|h^\eta\|_{-\Delta|_{\Lambda}}^2. \end{aligned}$$

Par définition, $\forall i \in \Lambda \setminus \partial^- \Lambda$, on a $\Delta|_{\Lambda} h^{\eta}(i) = \Delta h^{\eta}(i) = 0$, et si $i \in \partial^- \Lambda$:

$$\Delta|_{\Lambda} h^{\eta}(i) = \Delta h^{\eta}(i) - \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} h_j^{\eta} = - \sum_{j \notin \Lambda, i \sim j} \eta_j.$$

De sorte que :

$$\|\omega - h^{\eta}\|_{-\frac{1}{4d}\Delta|_{\Lambda}}^2 = \|\omega\|_{-\frac{1}{4d}\Delta|_{\Lambda}}^2 - \frac{1}{4d} \sum_{ij \in \mathcal{E}_{ex}(\Lambda)} 2\eta_j \omega_i + \|h^{\eta}\|_{-\frac{1}{4d}\Delta|_{\Lambda}}^2,$$

ce qui permet d'identifier $\mathcal{H}_{\bar{\Lambda}}(\omega) = \frac{1}{2}\|\omega - h^{\eta}\|_{-\frac{1}{2d}\Delta|_{\Lambda}}^2 + K(\eta)$, où $K(\eta)$ ne dépend que de η . La densité de φ^{η} est donc proportionnelle à $\exp(-\frac{1}{2}\|\omega - h^{\eta}\|_{-\frac{1}{2d}\Delta|_{\Lambda}}^2)$. Le vecteur φ^{η} est donc Gaussien, et sa moyenne est clairement h^{η} . \square

L'expression $H_{\bar{\Lambda}}(\omega) = \frac{1}{2}\|\omega - h^{\eta}\|_{-\frac{1}{2d}\Delta|_{\Lambda}}^2 + K(\eta)$ permet alors immédiatement de constater que $\varphi^{\eta} + h^{\eta}$ a une densité proportionnelle à $\exp\left(-\frac{1}{2}\|\omega\|_{-\frac{1}{2d}\Delta|_{\Lambda}}^2\right)$, qui est bien celle de φ^0 . La décomposition (1.1) est donc démontrée.

1.1.4 Fonction de Green, représentation comme vecteur Gaussien

On s'est ramené à la section précédente au DGFF $\varphi^0 =: \varphi$ avec conditions au bord nulles. On a vu à la section précédente que la densité de φ est proportionnelle à :

$$A \exp\left(-\frac{1}{2}\|\omega\|_{-\frac{1}{2d}\Delta|_{\Lambda}}^2\right).$$

On cherche à présent à expliciter la matrice de covariance associée. Cela revient à inverser la matrice $-\frac{1}{2d}\Delta|_{\Lambda}$ et nous amène à définir la *fonction de Green*.

Définition 1.1.7 (Fonction de Green). La fonction de Green G_{Λ} est définie pour tout couple $x, y \in \Lambda$ par :

$$G_{\Lambda}(x, y) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\Lambda}} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}} \right],$$

où $(X_n)_n$ est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d partant de x et $\tau_{\Lambda} = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \notin \Lambda\}$ est le temps de sortie du domaine Λ .

Proposition 1.1.1. G_{Λ} est l'inverse de $-\frac{1}{2d}\Delta|_{\Lambda}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} G_{\Lambda}(\cdot, x) = 0 \text{ sur } \Lambda^c \\ \Delta G_{\Lambda}(\cdot, x) = -2d\delta_x(\cdot) \text{ sur } \Lambda \end{cases},$$

où δ_x est la fonction delta de Kronecker en x .

Démonstration. Soit $x \in \Lambda$, notons $G_x = G_\Lambda(\cdot, x)$ et Q la matrice de transition associée à la marche aléatoire sur Λ tuée sur $\partial^+\Lambda$ (i.e. telle que $Q(z, z) = 1$ si $z \in \partial^+\Lambda$). Vu la forme de Q , on a :

$$\forall x, y \in \Lambda, \quad Q^{n+1}(x, y) = \sum_{z \sim y} Q(z, y)Q^n(x, z) = \frac{1}{2d} \sum_{z \sim y} Q^n(x, z).$$

Et donc $\sum_{z \sim y} [Q^n(x, z) - Q^{n+1}(x, y)] = 0$, en particulier :

$$\begin{aligned} \Delta G_x(y) &= \sum_{z \sim y} G_x(z) - G_x(y) \\ &= \sum_{z \sim y} \sum_{n=0}^{\infty} [Q^n(x, z) - Q^n(x, y)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{z \sim y} [Q^n(x, z) - Q^{n+1}(x, y)] - \sum_{z \sim y} Q^0(x, y) \\ &= 0 - 2d\delta_x(y). \end{aligned}$$

Qui nous donne bien l'expression recherchée. □

On a donc démontré :

Théorème 1.1.3 (Représentation de φ comme vecteur Gaussien :). *Le vecteur φ^n est un vecteur Gaussien de moyenne l'unique solution du problème de Dirichlet de condition au bord η et de matrice de covariance donnée par la fonction de Green.*

Représentation de la fonction de Green par les mesures harmoniques

Finissons cette section par présenter une autre forme pour la fonction de Green dans le cas $d = 2$, qui sera utile dans le chapitre 2.

Définition 1.1.8. Notons $\mathbf{a} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la solution fondamentale du problème du Poisson :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{a}(\cdot) = 4\delta_0(\cdot) \text{ sur } \mathbb{Z}^2 \\ \mathbf{a}(0) = 0 \end{cases} .$$

Sous forme intégrale, on a :

$$\mathbf{a}(v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(xv_1 + yv_2)}{\sin(x/2)^2 + \sin(y/2)^2} dx dy.$$

Soit alors $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ un sous réseau fini, vu la définition de \mathbf{a} et la [proposition 1.1.1.](#), il vient que pour tout $x \in \Lambda$:

$$\forall y \in \Lambda \setminus \{x\}, \quad \Delta[G_\Lambda(x, \cdot) + \mathbf{a}(x - \cdot)](y) = 0.$$

Par ailleurs \mathbf{a} a été choisie pour compenser le Laplacien en x :

$$\Delta[G_\Lambda(x, y) + \mathbf{a}(x - \cdot)](x) = -4 + 4 = 0.$$

Autrement dit $G_\Lambda(x, \cdot) + \mathbf{a}(x - \cdot)$ est harmonique sur Λ tout entier et est donc solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta\phi(z) = 0 & \forall z \in \Lambda \\ \phi(z) = G_\Lambda(x, z) + \mathbf{a}(x - z) = \mathbf{a}(x - z), & \forall z \in \partial^+\Lambda \end{cases} .$$

Il est bien connu que la solution du problème de Dirichlet est donnée par la valeur moyenne au temps de sortie de Λ d'une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 :

$$\forall y \in \Lambda, \quad \phi(y) = \mathbb{E}_y[X_{\tau_\Lambda}] = \sum_{z \in \partial^+\Lambda} \mathbb{P}_y(X_{\tau_\Lambda} = z) \mathbf{a}(x - z),$$

où (X_k) est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 partant de y et :

$$\tau_\Lambda = \inf\{k \geq 0, X_k \notin \Lambda\}.$$

On a donc démontré le :

Lemme 1.1.4. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ un sous réseau fini, alors pour tout $x, y \in \Lambda$, on a :*

$$G_\Lambda(x, y) = -\mathbf{a}(x - y) + \sum_{z \in \partial^+\Lambda} \mathbf{a}(z - y) \mathbb{P}_x(X_{\tau_\Lambda} = z)$$

1.1.5 Espace de Dirichlet discret

A l'instar de tout vecteur Gaussian, le DGFF s'exprime particulièrement simplement dans la base de vecteurs propres de sa matrice de covariance. Cela nous amène à introduire :

Définition 1.1.9. Soit $f, g \in \mathbb{R}^\Lambda$, le produit interne de Dirichlet, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla$ est définie par :

$$\langle f, g \rangle_\nabla = \frac{1}{2d} \sum_{u \sim v} \nabla_{uv} f \nabla_{uv} g.$$

La somme est prise sur toutes les arêtes de \mathbb{Z}^d , avec f et g complétées par $f|_{\Lambda^c} = g|_{\Lambda^c} = 0$. Ce produit scalaire coïncide en vertu de l'identité de [Green Gauss](#) avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2d}\Delta|_\Lambda}$ définie précédemment. Il fait de \mathbb{R}^Λ un espace euclidien appelé *espace de Dirichlet* dans lequel le DGFF est le vecteur Gaussian canonique.

Proposition 1.1.2. Soit $(\varphi_n)_{n \leq |\Lambda|}$ une base orthonormée de l'espace de Dirichlet et $(Z_n)_n$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors le vecteur :

$$\varphi = \sum_{i \leq |\Lambda|} Z_i \varphi_i,$$

a la même loi que le DGFF.

Démonstration. Il est clair que φ est un vecteur Gaussien centré, il suffit donc de vérifier que la matrice de covariance coïncide avec la fonction de Green. Notons $I(x, y) = \mathbb{E}[\varphi(x)\varphi(y)]$, on a :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \sum_{i, j \leq |\Lambda|} \mathbb{E}[Z_i Z_j] \varphi_i(x) \varphi_j(y) \\ &= \sum_{i \leq |\Lambda|} \varphi_i(x) \varphi_i(y). \end{aligned}$$

Notons $\Lambda = \{x_1, \dots, x_{|\Lambda|}\}$ et $P = (\varphi_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq |\Lambda|} \in GL_{|\Lambda|}(\mathbb{R})$ la matrice dont les lignes sont les φ_j . Notons aussi $D = -\frac{1}{2d} \Delta|_{\Lambda}$, on a alors pour tout i, j :

$$(P^\perp D P)_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\nabla} = \delta_{ij}.$$

On a ainsi $P^\perp D P = I$, puis $P P^\perp D P P^{-1} = P P^{-1} = I$ et donc $P P^\perp D = I$. Comme D est symétrique, il vient :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= (P P^\perp D)_{ij} = (P (D P)^\perp)_{ij} = \sum_{k \leq |\Lambda|} P_{ik} (D P)_{jk} \\ &= -\frac{1}{2d} \sum_{k \leq |\Lambda|} \varphi_k(x_i) \Delta|_{\Lambda} \varphi_k(x_j) \\ &= -\frac{1}{2d} \Delta|_{\Lambda} I(x_i, \cdot)(x_j). \end{aligned}$$

On a donc $\Delta|_{\Lambda} I(x, \cdot) = -2d \delta_x(\cdot)$, en utilisant la [proposition 1.1.1.](#), on peut donc identifier $I = G_{\Lambda}$. \square

Remarque. Considérons $(\lambda_n)_{n \leq |\Lambda|}$ une énumération des valeurs propres de $-\Delta|_{\Lambda}$ et $(\phi_n)_{n \leq |\Lambda|}$ une famille de vecteurs propres associés que l'on choisie orthonormale pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^{Λ} (ce que l'on peut faire grâce au théorème spectral). Alors en utilisant Green Gauss :

$$\begin{aligned} \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\nabla} &= \langle \phi_i, -\frac{1}{2d} \Delta|_{\Lambda} \phi_j \rangle \\ &= \frac{\lambda_j}{2d} \langle \phi_i, \phi_j \rangle \\ &= \frac{\lambda_j}{2d} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

En particulier, $\left(\left(\frac{2d}{\lambda_i}\right)^{1/2} \phi_i\right)_i$ forme une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla$. D'après le théorème précédent, $\sum_i Z_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \phi_i$ a la loi d'un DGFF sur Λ . Remarquons alors que si l'un des ϕ_i a de grandes variations le long des arêtes, alors λ_i est élevé et assure que $\left(\frac{2d}{\lambda_i}\right)^{1/2} \phi_i$ reste de taille raisonnable. On retrouve donc un effet de pénalisation des grandes variations le long des arêtes.

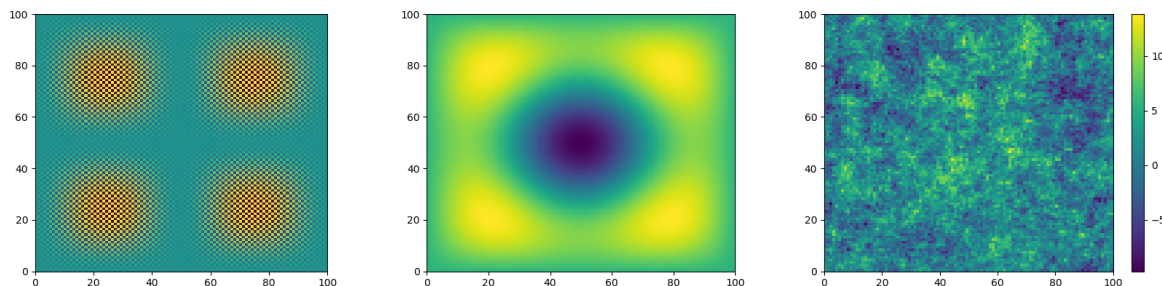


FIGURE 1.1.2 – Deux vecteurs propres du laplacien, l'un avec grande valeur propre (gauche) l'autre avec petite valeur propre (milieu), et un tirage du DGFF sur $\Lambda = [-100, 100]^2$ (droite).

1.1.6 Propriété de Markov spatiale pour le DGFF

Cette section a pour but de présenter une propriété importante du champ libre Gaussien :

Proposition 1.1.3 (Propriété de Markov spatiale pour le GFF). *Fixons $\Gamma \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ deux sous réseaux finis de \mathbb{Z}^d et φ_0^Λ le champ libre Gaussien sur Λ . On a la décomposition :*

$$\varphi_0^\Lambda = \varphi_0^\Gamma + h_\Gamma,$$

où φ_0^Γ et h_Γ sont deux variables Gaussiennes indépendantes telles que :

- φ_0^Γ est presque sûrement nulle hors de Γ et a la loi d'un GFF de conditions au bord nulles sur Γ .
- h_Γ est presque sûrement harmonique sur Γ .

Démonstration. Notons S_Γ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^\Lambda$ dont le support est contenu dans Γ et H_Γ l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^Λ qui sont harmoniques sur Γ .

Ce sont deux espaces vectoriels de dimension $|\Gamma|$ et $|\Lambda \setminus \Gamma|$ respectivement et on constate que pour $g \in H_\Gamma$ et $f \in S_\Gamma$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\nabla &= \sum_{uv \in \mathcal{E}^d} \nabla_{uv} f \nabla_{uv} g \\ &= - \sum_{u \in \Lambda} f(u) \Delta g(u) \quad (\text{Green Gauss}) \\ &= - \sum_{u \in \Gamma} f(u) \Delta g(u) - \sum_{u \notin \Gamma} f(u) \Delta g(u) \\ &= 0 + 0, \end{aligned}$$

La première somme étant nulle car $\Delta g = 0$ sur Γ et la deuxième étant nulle car $\text{Supp}(f) \subset \Gamma$. En particulier on trouve $H_\Gamma \subset S_\Gamma^\perp$, et un argument de dimension conclut que :

$$H_\Gamma \oplus^\perp S_\Gamma = \mathbb{R}^\Lambda$$

On utilise à présent la représentation du GFF donnée par la [proposition 1.1.2](#). Considérons une base orthonormée $\mathcal{B} = (h_1, \dots, h_{|\Lambda \setminus \Gamma|}, s_1, \dots, s_{|\Gamma|})$ de $(\mathbb{R}^\Lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla)$ adaptée à la décomposition $H_\Gamma \oplus^\perp S_\Gamma = \mathbb{R}^\Lambda$. On a vu que les variables

$$\begin{aligned} Z_i^H &= \langle \varphi_0^\Lambda, h_j \rangle_\nabla, \quad 1 \leq j \leq |\Lambda| - |\Gamma|, \\ Z_k^S &:= \langle \varphi_0^\Lambda, s_k \rangle_\nabla, \quad 1 \leq k \leq |\Gamma|, \end{aligned}$$

sont des variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et que $\varphi_0^\Gamma := \sum_{k=1}^{|\Gamma|} Z_k^S s_k$ a la loi d'un DGFF sur Γ . Le vecteur φ_0^Γ est d'autre part indépendant de $h_\Gamma := \sum_{j=1}^{|\Lambda \setminus \Gamma|} Z_j^H h_j$ et est harmonique sur Γ comme somme de fonctions harmoniques. On obtient bien la décomposition voulue. \square

1.2 La limite thermodynamique pour $d \geq 3$

On s'intéresse à présent à la limite éventuelle de la loi du GFF lorsque la taille du domaine Λ augmente. Il est nécessaire de séparer le cas $d \geq 3$ (pour lequel il existe une limite *thermodynamique*) du cas $d = 1$ ou $d = 2$. La dimension 1 est traité dans la section suivante et le cas $d = 2$ fait l'objet du chapitre 2.

Fixons à présent $d \geq 3$ et prenons $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ une fonction *harmonique*. On se donne enfin une suite croissante exhaustive $(\Lambda_N)_N$ de sous réseaux finis de \mathbb{Z}^d :

$$\bigcup_{N \geq 0} \Lambda_N = \mathbb{Z}^d.$$

Le but de cette partie est de montrer que $\varphi_{\Lambda_N}^\eta$ converge dans un certain sens vers un champ Gaussien μ_η défini sur \mathbb{Z}^d tout entier. Le sens précis de l'objet limite est donné par la définition suivante :

Définition 1.2.1 (Mesure de Gibbs en volume infini). Soit μ une probabilité sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{Z}^d})$. On dit que μ est une mesure de Gibbs en volume infini pour le champ libre Gaussien si pour tout Λ sous réseau fini de \mathbb{Z}^d , on a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{Z}^d}$:

$$\mu(A) = \int \mu_\Lambda^{\omega|_{\Lambda^c}}(A|_{\bar{\Lambda}}) \mu(d\omega),$$

où $A|_{\bar{\Lambda}} = \{\omega|_{\bar{\Lambda}}, \omega \in A\}$. On rappelle que $\mu_\Lambda^{\omega|_{\Lambda^c}}$ est la mesure associée au champ libre Gaussien sur Λ de condition au bord $\omega|_{\Lambda^c}$. On réécrira abusivement l'identité ci dessus par $\mu(A) = \mathbb{E}_\mu[\mu_\Lambda^{\omega|_{\Lambda^c}}(A)]$.

Remarque. Soit μ une mesure, pour vérifier que μ est une mesure de Gibbs, il suffit de vérifier la relation lorsque A parcourt les cylindres. On utilise ensuite le fait que deux mesures coïncidant sur un π -système doivent être égales.

L'objectif de cette partie est de montrer l'existence d'une mesure de Gibbs en volume infini de moyenne η . On utilise pour cela le théorème suivant, qui traduit une certaine rigidité des champs Gaussiens :

Théorème 1.2.1. *Supposons donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ un vecteur Gaussien h_n de support Λ_n :*

$$h_n \sim \mathcal{N}((m_n(x))_{x \in \Lambda_n}, (\Sigma_n(x, y))_{x, y \in \Lambda_n}).$$

On étend arbitrairement h_n en dehors de Λ_n et on suppose que pour tout $x, y \in \Lambda_n$:

$$m_n(x) \xrightarrow[n, \infty]{} m(x) \text{ et } \Sigma_n(x, y) \xrightarrow[n, \infty]{} \Sigma(x, y).$$

Alors il existe un champ Gaussien \tilde{h} de moyenne m et de structure de covariance Σ tel que pour tout Λ sous ensemble fini de \mathbb{Z}^d :

$$h_n|_\Lambda \xrightarrow[n, \infty]{\mathcal{L}} \tilde{h}|_\Lambda.$$

Démonstration. Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ fini, on a $h_n|_\Lambda \sim \mathcal{N}((m_n(x))_{x \in \Lambda}, \Sigma_n(x, y)_{x, y \in \Lambda})$. Comme $m_n \rightarrow m$ et $\Sigma_n \rightarrow \Sigma$, le vecteur (fini dimensionnel) $h_n|_\Lambda$ converge en loi vers un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}(m(x)_{x \in \Lambda}, \Sigma(x, y)_{x, y \in \Lambda})$.

L'existence d'un champ global dont les lois des restrictions coïncident avec les lois limites est alors assuré par le théorème d'extension de Kolmogorov, les lois limites étant par construction cohérentes les unes avec les autres. \square

On souhaite à présent établir la convergence de la suite $(\varphi_{\Lambda_n}^\eta)_n$ au sens du [théorème 1.2.1](#). Remarquons que comme η est supposé harmonique, on a directement grâce au [lemme 1.1.2](#) que :

$$\forall x \in \Lambda_n, \quad \mathbb{E}[\varphi_{\Lambda_n}^\eta(x)] = \eta(x).$$

La convergence des espérances dans le théorème 1.2.1 est donc immédiatement assurée. Il reste à établir la convergence des coefficients de la matrice de covariance. Cette convergence est en fait une conséquence de la transience des marches symétriques simples sur \mathbb{Z}^d . On rappelle on effet :

Lemme 1.2.2 (Transience d'une marche symétrique simple sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 3$). *Soit $(X_i)_i$ une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$). La fonction de Green globale $G(x, y) := \mathbb{E}_x [\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_i=y}]$ est bornée. En particulier par convergence monotone :*

$$G_{\Lambda_n}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x, y).$$

Le [théorème 1.2.1](#) établit donc l'existence d'un champ Gaussien φ^η sur \mathbb{Z}^d tout entier de moyenne η harmonique. Remarquons que l'on récupère la décomposition :

$$\varphi^\eta = \varphi^0 + \eta,$$

où φ^0 est un champ gaussien de moyenne nulle et de structure de covariance G . Notons à présent μ_0 la distribution de φ_0 . Il reste à présent à montrer la :

Proposition 1.2.1. μ_0 est une mesure de Gibbs en volume infini pour le champ libre Gaussien.

Démonstration. Fixons $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ un sous réseau fini, et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ un cylindre. Prenons $N \geq 0$ tel que $\Lambda \subset \Lambda_N$, la propriété de Markov spatiale ([proposition 1.1.3](#)) indique en particulier que :

$$\mu_{\Lambda_N}^0(A) = \mathbb{E}_{\mu_{\Lambda_N}^0} [\mu_{\Lambda}^{\varphi|_{\Lambda^c}}(A)].$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mu_0(A) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{\Lambda_N}^0(A) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_{\Lambda_N}^0} [\mu_{\Lambda}^{\varphi|_{\Lambda^c}}(A)] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_0} [\mu_{\Lambda}^{\varphi|_{\Lambda^c}}(A)]. \end{aligned}$$

Qui est exactement la relation définissant les mesures de Gibbs. La première et la troisième égalités utilisent la convergence en loi des marginales finies dimensionnelles de μ_{Λ_N} vers μ_0 et le fait que A est un cylindre. \square

1.3 La limite d'échelle pour $d = 1$

On prend à présent $d = 1$, et à l'instar du cas précédent on fixe $(\Lambda_N)_N$ une suite exhaustive croissante de sous réseaux finis de \mathbb{Z} . Commençons par établir qu'il ne peut pas exister de limite thermodynamique dans ce cas et dans le cas $d = 2$ qui sera traité dans le chapitre 2 :

Lemme 1.3.1. *Dans le cas $d = 1$ ou $d = 2$, le champ libre Gaussien n'admet pas de mesure de Gibbs en volume infini.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une mesure de Gibbs μ et prenons φ de loi μ . En particulier on aurait pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, que :

$$\mu(\varphi(0) \in [a, b]) = \int_{\Omega} \mu_{\Lambda_N}^{\eta}(\varphi(0) \in [a, b]) \mu(d\eta).$$

Mais fixant η , on a $\mu_{\Lambda_N}^{\eta}(\varphi(0) \in [a, b])$ qui est la probabilité qu'une Gaussienne de variance $G_{\Lambda_N}(0, 0)$ centrée en $h_{\Lambda_N}^{\eta}(0)$ soit dans $[a, b]$, où $h_{\Lambda_N}^{\eta}$ est la solution du problème de Dirichlet sur Λ_N de condition au bord η .

Comme en dimension 1 et 2, on a $G_{\Lambda_N}(0, 0) \xrightarrow[N, \infty]{} \infty$, cette quantité converge uniformément en η vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. On doit donc avoir :

$$\mu(\varphi(0) \in [a, b]) = 0.$$

Ceci étant vérifié pour tout $[a, b]$, on obtient une absurdité. □

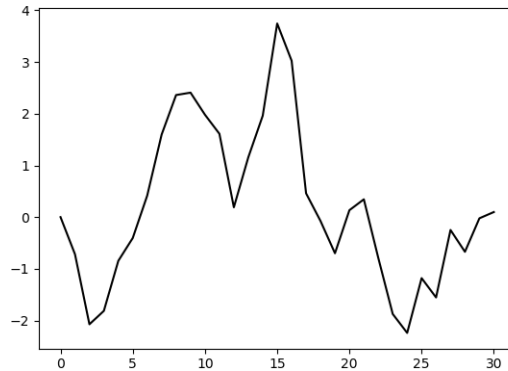


FIGURE 1.3.1 – Le DGFF en dimension 1

On se propose à présent d'établir une limite *d'échelle* pour le champ libre Gaussien en dimension 1. Proprement renormalisé, le DGFF converge vers un pont Brownien, montrons en effet :

Théorème 1.3.2 (Convergence des marginales finies dimensionnelles). *Soit $\varphi^{(N)}$ un champ libre Gaussien sur $[[0, N]]$ avec conditions nulles au bord. Soit $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$ des réels, on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{2N}}(\varphi^{(N)}(\lfloor Nt_1 \rfloor), \dots, \varphi^{(N)}(\lfloor Nt_n \rfloor)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

où Σ est la matrice de covariance associée à un pont Brownien :

$$\forall i \leq j, \quad \Sigma(i, j) = t_i(1 - t_j).$$

Démonstration. Fixons $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$, on a vu que pour tout $x \in [0, N]$, $G_{[[1, N-1]]}(x, \cdot)$ est solution du problème de Poisson :

$$\begin{cases} \Delta G(x, \cdot) = -2\delta_x(\cdot) & \text{sur } [[1, N-1]] \\ G(x, \cdot) = 0 & \text{sur } \{0, N\} \end{cases}.$$

La fonction $G(x, \cdot)$ est donc linéaire par morceaux et on résout explicitement :

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{2y(N-x)}{N} & \text{si } y \in [[0, x]] \\ \frac{2(N-y)x}{N} & \text{si } y \in [[x, N]] \end{cases}.$$

Pour établir la convergence en loi de vecteurs Gaussiens centrés, il suffit de vérifier la convergence de la matrice de covariance. Mais pour $i \leq j$, on a :

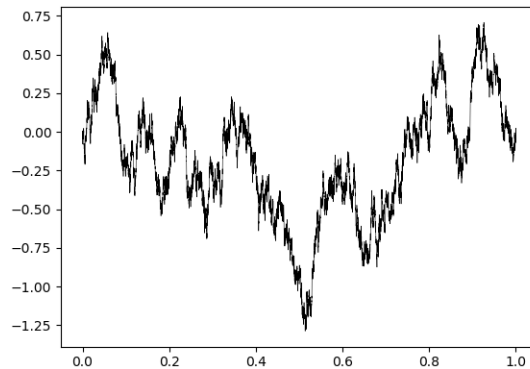
$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{2N}}\varphi_N(\lfloor Nt_i \rfloor), \frac{1}{\sqrt{2N}}\varphi_N(\lfloor Nt_j \rfloor) \right) &= \frac{1}{2N}G(\lfloor Nt_i \rfloor, \lfloor Nt_j \rfloor) \\ &= \frac{2\lfloor Nt_i \rfloor(N - \lfloor Nt_j \rfloor)}{2N^2} \\ &= \frac{\lfloor Nt_i \rfloor}{N} \left(1 - \frac{\lfloor Nt_j \rfloor}{N} \right) \\ &\xrightarrow[N, \infty]{} t_i(1 - t_j). \end{aligned}$$

On a donc bien convergence des marginales finies dimensionnelles vers celle d'un pont Brownien. \square

La convergence est en fait beaucoup plus forte que ça. Pour le voir, montrons que l'on dispose d'une représentation du DGFF comme marche aléatoire. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 1.3.1 (Représentation comme marche aléatoire Gaussienne). *Soit $N \geq 1$ un entier et $(X_i)_{i \leq N}$ une suite i.i.d. de v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ et $S_0 = 0$, alors le vecteur*

$$\sqrt{2} \left(0, S_1 - \frac{S_N}{N}, S_2 - \frac{2S_N}{N}, \dots, S_{N-1} - \frac{(N-1)S_N}{N}, 0 \right)$$

FIGURE 1.3.2 – Un pont Brownien sur $[0, 1]$

a la même loi que le DGFF sur $[[1, N - 1]]$ avec conditions nulles sur le bord $\{0, N\}$.

Démonstration. C'est clairement un vecteur Gaussien centré, on vérifie alors juste que pour $i \leq j$:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov} \left(\sqrt{2} \left(S_i - \frac{iS_N}{N} \right), \sqrt{2} \left(S_j - \frac{jS_N}{N} \right) \right) &= 2(\text{Cov}(S_i, S_j) - \frac{j}{N} \text{Cov}(S_i, S_N) \\
 &\quad - \frac{i}{N} \text{Cov}(S_j, S_N) + \frac{ij}{N^2} \text{Cov}(S_N, S_N)) \\
 &= 2 \left[i - \frac{ij}{N} - \frac{ij}{N} + \frac{ijN}{N^2} \right] \\
 &= \frac{2i(N-j)}{N},
 \end{aligned}$$

que l'on identifie à la fonction de Green sur $[0, N]$. \square

La convergence du GFF en dimension 1 vers le pont Brownien se fait donc dans la topologie de Skorokhod en vertu du théorème central limite fonctionnelle de Donsker.

Chapitre 2

Le GFF continu

On se place à présent dans le cas $d = 2$ et on identifiera \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 .

2.1 Définition du GFF continu

Définition 2.1.1. Soit D un domaine ouvert propre simplement connexe de \mathbb{C} , la fonction de Green sur D , noté G^D est définie par :

$$G^D(x, y) = \pi \int_0^\infty p_t(x, y) \pi_t^D(x, y) dt,$$

où $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp(-|x - y|^2/2t)$ est la probabilité de transition d'un Brownien et $\pi_t^D(x, y)$ est la probabilité qu'un pont Brownien entre x et y de durée t sorte de D .

Remarque. La condition de simple connexité assure que G^D est bien définie. Évoquons néanmoins que la condition nécessaire et suffisante pour assurer que G^D est bien définie est que D est un domaine *Greenien*, c'est à dire que le temps de sortie d'un Brownien partant de tout point de D (ou même d'un seul point de D) est presque sûrement fini.

Proposition 2.1.1. *La fonction de Green est invariante conforme. Plus précisément, si $T : D \rightarrow D'$ est biholomorphe, où D, D' sont des ouverts de \mathbb{C} , on a :*

$$\forall x, y \in D, \quad G^{D'}(T(x), T(y)) = G^D(x, y).$$

Démonstration. C'est essentiellement une conséquence de l'invariance conforme du mouvement Brownien. Prenons $x \in D$ et $x' := T(x) \in D'$, et soit $\phi \in \mathcal{D}(D)$ une

fonction test, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{D'} G^{D'}(x', y') \phi(y') dy' &\stackrel{\text{def}}{=} \pi \int_{D'} \int_0^\infty p_t^{D'}(x', y') dt \phi(y') dy' \\
&= \pi \int_0^\infty \int_{D'} p_t^{D'}(x', y') \phi(y') dy' dt \\
&= \pi \int_0^\infty \mathbb{E}_{x'} [\mathbb{1}_{B'_t \in D'} \phi(B'_t)] dt,
\end{aligned}$$

où B' est un Brownien partant de x' . Notons τ' le temps de sortie de D' de ce Brownien, on a par Fubini :

$$\int_{D'} G^{D'}(x', y') \phi(y') dy' = \pi \mathbb{E}_{x'} \left[\int_0^{\tau'} \phi(B'_t) dt \right]. \quad (*)$$

Soit $(B_t)_t$ un mouvement Brownien issu de x et $\tau = \inf\{t | B_t \notin D\}$. Par invariance conforme du mouvement Brownien ([Annexe 1](#)), $(B'_t)_{t \leq \tau'}$ a la même loi que $(T(B_{\sigma(t)}))_{t \leq \tau}$, où σ est définie par :

$$t = \int_0^{\sigma(t)} |T'(B_s)|^2 ds.$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
\pi \mathbb{E}_{x'} \left[\int_0^{\tau'} \phi(B'_t) dt \right] &= \pi \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau \phi(T(B_{\sigma(t)})) dt \right] \\
&\stackrel{u=\sigma(t)}{=} \pi \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau \phi(T(B_u)) |T'(B_u)|^2 du \right] \\
&= \int_D G^D(x, y) \phi(T(y)) |T'(y)|^2 dy.
\end{aligned}$$

D'autre part on a par changement de variable $y = T(y')$ dans le membre de gauche de (*) que :

$$\int_{D'} G^{D'}(x', y') \phi(y') dy' = \int_D G^{D'}(T(x), T(y)) \phi(T(y)) |T'(y)|^2 dy,$$

où $|T'(y)|^2$ apparaît comme Jacobien du changement de variables. Finalement, pour tout ϕ , on a :

$$\int_{D'} G^{D'}(T(x), T(y)) \phi(T(y)) |T'(y)|^2 dy = \int_D G^D(x, y) \phi(T(y)) |T'(y)|^2 dy.$$

Comme $|T'|^2$ est strictement positive, on peut identifier les fonctions (*qui sont continues*) :

$$\forall y \in D, G^D(x, y) = G^{D'}(T(x), T(y)),$$

ce qui conclut. \square

Remarque. En vertu du théorème de l'application conforme de Riemann, la proposition précédente montre qu'il suffit de connaître la fonction de Green sur un domaine propre simplement connexe pour la connaître sur tout domaine propre simplement connexe. Pour $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) \geq 0\}$ on a explicitement

$$G^{\mathbb{H}}(x, y) = \log \left(\frac{|x - \bar{y}|}{|x - y|} \right).$$

Cette fonction est harmonique, on en déduit en particulier l'équivalent continu de la [proposition 1.1.1](#) :

Proposition 2.1.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine propre simplement connexe de \mathbb{C} , on a pour tout $x \in D$:*

- $G^D(x, \cdot)$ est harmonique sur $D \setminus \{x\}$, et en tant que distribution, on a :

$$\Delta G^D(x, \cdot) = -2\pi\delta_x(\cdot).$$

- $G^D(x, y) \underset{y \rightarrow x}{=} -\log|x - y| + O(1)$, la constante $O(1)$ dépendant de x .

Démonstration. Le premier point est une conséquence de l'invariance conforme des fonctions harmoniques, de l'harmonicité de $G^{\mathbb{H}}$ et de la [proposition 2.1.1](#) combinée avec le théorème de l'application conforme de Riemann. Pour le deuxième point, remarquons que l'estimée est clair pour $G^{\mathbb{H}}$. Si $T : D \rightarrow \mathbb{H}$ est biholomorphe, on a alors :

$$\begin{aligned} G^D(x, y) &= G^{\mathbb{H}}(T(x), T(y)) = -\log|T(x) - T(y)| + O(1) \\ &= -\log|x - y| - \log|T'(x)| + O(1) = -\log|x - y| + O(1), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $|T(x) - T(y)| \underset{x \rightarrow y}{=} (|T'(x)| + o(1))|x - y|$. \square

Dans une certaine mesure, la proposition 2.1.2. caractérise la fonction de Green, on a en effet :

Proposition 2.1.3. *Soit $z_0 \in D$ et $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique tendant vers 0 au bord de D . On suppose que :*

$$f(z) \underset{z \rightarrow z_0}{=} -\log|z - z_0| + O(1).$$

Alors $f(z) = G^D(z_0, z)$.

Démonstration. Posons $\psi(z) = f(z) - G^D(z_0, z)$, la fonction ψ est harmonique sur $D \setminus \{z_0\}$ et tend vers 0 au bord de ∂D . D'autre part, on a :

$$\psi(z) \underset{z \rightarrow z_0}{=} O(1).$$

Par principe du maximum, on en déduit que ψ est bornée. Fixons $z \in D \setminus \{z_0\}$ et prenons $(B_t)_t$ un mouvement Brownien issu de z . Notons :

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0, B_t \notin D \setminus \{z_0\}\} \stackrel{p.s.}{=} \inf\{t \geq 0, B_t \notin D\}.$$

Alors $(\psi(B_{t \wedge \tau_D}))_t$ est une martingale bornée, d'après le théorème d'arrêt de Doob :

$$\psi(z) = \mathbb{E}[\psi(B_0)] = \mathbb{E}[\psi(B_{\tau_D})] = 0.$$

La dernière inégalité utilisant le fait que $B_{\tau_D} \in \partial D$ *p.s.* et que $\psi|_{\partial D}$ est nulle. \square

On note à présent $\mathcal{D}(D)$ l'ensemble des fonctions de $C^\infty(D, \mathbb{R})$ dont le support est compact dans D . On admet que cet espace peut être muni d'une topologie telle qu'une suite ϕ_n tend vers 0 dans $\mathcal{D}(D)$ si il existe un compact K contenant tout les $\text{supp}(\phi_n)$, et tel que ϕ_n et toutes ses dérivées tendent vers 0 uniformément dans K . Les éléments de $\mathcal{D}(D)$ s'appellent les *fonctions tests*.

Définition 2.1.2 (Structure de covariance du GFF). Soit $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(D)$ deux fonctions tests, on définit :

$$\Gamma(\phi_1, \phi_2) := \int_{x \in D} \int_{y \in D} G^D(x, y) \phi_1(x) \phi_2(y) dy dx.$$

Commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 (Γ comme structure préhilbertienne dans l'espace de Dirichlet). Soient $f, g \in \mathcal{D}(D)$, on a :

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2\pi}\Delta f, -\frac{1}{2\pi}\Delta g\right) = \frac{1}{2\pi} \int_D \langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Démonstration. En utilisant la formule de Gauss-Green 2 fois :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{1}{2\pi}\Delta f, -\frac{1}{2\pi}\Delta g\right) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_D \int_D G^D(x, y) \Delta f(x) dx \Delta g(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_D \int_D \Delta_x G^D(x, y) f(x) dx \Delta g(y) dy. \end{aligned}$$

Puis par la [proposition 2.1.2](#), comme $\Delta_x G^D(x, y) = -2\pi\delta_y(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{1}{2\pi}\Delta f, -\frac{1}{2\pi}\Delta g\right) &= -\frac{1}{2\pi} \int_D f(y) \Delta g(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_D \langle \nabla f(y), \nabla g(y) \rangle dy, \end{aligned}$$

où la dernière ligne réutilise la formule de Green Gauss. \square

Définition 2.1.3. Pour $f, g \in \mathcal{D}(D)$, on note désormais :

$$\langle f, g \rangle_{\nabla} := \frac{1}{2\pi} \int_D \langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

C'est un produit scalaire sur $\mathcal{D}(D)$ appelé énergie de Dirichlet. Il fait de $\mathcal{D}(D)$ un espace préhilbertien appelé espace de Dirichlet. Son complété est l'espace de Sobolev $H_0^1(D)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir rigoureusement le GFF continu en dimension 2 :

Théorème/Définition 2.1.1. *Le GFF continu sur $D \subset \mathbb{C}$ est l'unique processus stochastique Gaussien centré $(h_\phi)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ indexé par $\mathcal{D}(D)$ et de structure de covariance Γ .*

Démonstration. Le théorème d'extension de Kolmogorov indique qu'un tel processus existe si on a consistance de la structure de covariance :

- Γ est symétrique,
- Γ est semi définie positive.

Comme $-\frac{1}{2\pi}\Delta : \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathcal{D}(D)$ est inversible, remarquons Γ est entièrement caractérisé par l'identité du [lemme 2.1.1.](#) Mais alors Γ d'identifie à un produit scalaire, et les deux points précédents sont immédiats. \square

2.2 Régularité du GFF

Observons tout d'abord que pour tout couple $\phi, \psi \in \mathcal{D}(D)$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a par bilinéarité de Γ et de la covariance que :

$$\begin{aligned} \text{Var}(h_{t\phi+\psi} - th_\phi - h_\psi) &= \Gamma_{t\phi+\psi, t\phi+\psi} - 2t\Gamma_{t\phi+\psi, \phi} - 2\Gamma_{t\phi+\psi, \psi} + t^2\Gamma_{\phi, \phi} + \Gamma_{\psi, \psi} + 2t\Gamma_{\phi, \psi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, les variables étant gaussiennes centrées, on a :

$$h_{t\phi+\psi} \stackrel{p.s.}{=} th_\phi + h_\psi.$$

Le GFF se comporte donc comme une forme linéaire sur les familles finies (ou dénombrables) de fonctions tests. De même, on montre que pour toute famille convergente $\phi_n \rightarrow \phi$ de fonctions tests (pour la topologie sur $\mathcal{D}(D)$), on doit avoir :

$$h_{\phi_n} \xrightarrow{p.s.} h_\phi.$$

Il suit donc que h se comporte comme une *distribution aléatoire*¹ sur toute sous famille dénombrable de fonctions tests. Il n'est en revanche pas tout à fait clair qu'il existe un GFF *au sens fort*, au sens où h est effectivement une distribution aléatoire. La difficulté est du même ordre que lorsque l'on cherche à construire un Brownien dont toutes les trajectoires sont continues. Le but de cette section est de montrer qu'il existe effectivement un tel GFF (on pourrait parler de GFF au sens fort, ou de GFF régularisé).

Quelques éléments d'analyse fonctionnelle sont évoqués dans l'[annexe B](#), on y définit en particulier les espaces de Sobolev $(H_0^s(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$. On montre également que l'application $-\Delta : H_0^1(D) \rightarrow H_0^1(D)$ compris au sens faible (cf annexe B) admet une énumération croissante $(\lambda_n)_n$ de ses valeurs propres, et que celles ci sont positives. On admet que l'on a l'estimation suivante :

Lemme 2.2.1 (Équivalent des valeurs propres du Laplacien). *La suite (λ_n) est équivalente à une suite linéaire, plus précisément, on a $\lambda_n \underset{n, \infty}{\sim} n \left(\frac{2\pi}{\ell(D)} \right)$, où $\ell(D)$ dénote la mesure de Lebesgue du domaine D .*

On montre également dans l'[annexe B](#) qu'il existe une base orthonormée $(e_k)_k$ de $L_2(D)$, composées de vecteurs propres de $-\Delta$:

$$-\Delta e_k = \lambda_k e_k.$$

De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$, la famille $\left(\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} \right)^{s/2} e_k \right)_k$ est une base Hilbertienne de l'espace de Sobolev $(H_0^s(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$.

Notons désormais $u_n = \left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \right)^{1/2} e_n$, de sorte que $(u_n)_n$ forme une base Hilbertienne de $H_0^1(D)$. Le résultat permettant de voir le GFF comme distribution, que l'on peut voir comme un équivalent continu de la [proposition 1.1.2](#), est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2.2. *Soit $(Z_n)_n$ une suite i.i.d de variables $\mathcal{N}(0, 1)$, et notons :*

$$S_n := \sum_{k \leq n} Z_k u_k.$$

Pour tout $s < 0$, S_n converge presque sûrement dans $H_0^s(D)$ vers un vecteur h . Le processus $(\langle h, \phi \rangle_{L_2})_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ a la même loi que le GFF sur D .

1. Une distribution aléatoire est une forme linéaire continu sur $\mathcal{D}(D)$, pour la topologie des fonctions tests. On note l'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(D)$ et on le muni en première approche de la topologie faible- \star . En particulier :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(D)} T \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(D), T_n(\phi) \rightarrow T(\phi).$$

Remarque. Si l'on considère $(v_n)_n$ n'importe quelle autre base orthonormée de $H_1^0(D)$ (plus forcément composée de fonctions propres du Laplacien), alors le résultat du théorème 2.2.2 reste valable lorsque l'on remplace les occurrences $(u_n)_n$ par $(v_n)_n$.

Démonstration. Soit $f \in H_0^1(D)$, on a :

$$\langle S_N, f \rangle_{\nabla} = \sum_{k \leq N} Z_k \langle f, u_k \rangle_{\nabla}.$$

La suite $(\langle S_N, f \rangle_{\nabla})_N$ définit une martingale, et par l'identité de Parseval :

$$\text{Var} \langle S_N, f \rangle_{\nabla} = \sum_{k \leq N} \langle f, u_k \rangle_{\nabla}^2 \xrightarrow{N, \infty} \|f\|_{\nabla}^2.$$

En particulier $\sup_N \mathbb{E}[\langle S_N, f \rangle_{\nabla}^2] < \infty$, le théorème de convergence des martingales nous fournit l'existence d'une variable aléatoire $h_f \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_{\nabla})$ vérifiant :

$$\langle S_N, f \rangle_{\nabla} \xrightarrow{N, \infty} h_f \text{ p.s. et dans } L_2.$$

Fixons $f, g \in H_0^1(D)$, la convergence dans L_2 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(h_f, h_g) &= \lim_{N, \infty} \text{Cov}(\langle S_N, f \rangle_{\nabla}, \langle S_N, g \rangle_{\nabla}) \\ &= \lim_{N, \infty} \sum_{i, j \leq N} \mathbb{E}[Z_i Z_j] \langle u_i, g \rangle_{\nabla} \langle u_j, f \rangle_{\nabla} \\ &= \lim_{N, \infty} \sum_{k \leq N} \langle u_k, g \rangle_{\nabla} \langle u_k, f \rangle_{\nabla} \\ &= \langle f, g \rangle_{\nabla}. \end{aligned}$$

On a défini de cette façon un champ Gaussien $(h_f)_{f \in H_0^1}$ de structure de covariance associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla}$.

Soit $s < 0$, montrons que l'on a en fait convergence presque sûre de S_N vers un certain h dans $H_0^s(\mathcal{D})$. Remarquons pour cela que la famille $(\left(\frac{2\pi}{\lambda_k}\right)^{\frac{s-1}{2}} u_k)_k$ est une base orthonormée de $H_0^s(\mathcal{D})$, on sait alors que :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} Z_k u_k \text{ converge p.s. dans } H_0^s(D) &\Leftrightarrow \sum_{k \geq 1} Z_k \lambda_k^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{2\pi}{\lambda_k}\right)^{\frac{s-1}{2}} u_k \text{ converge p.s. dans } H_0^s(D) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k \geq 1} Z_k^2 \lambda_k^{s-1} \text{ converge p.s.} \end{aligned}$$

Mais les (Z_k^2) sont des variables i.i.d. positives et intégrables, il suffit donc de vérifier que $\sum_k \lambda_k^{s-1} < \infty$. En utilisant le fait que $\lambda_k \sim k(2\pi/\ell(D))$ (estimée du

lemme 2.2.1.), cette somme converge effectivement dès que $s < 0$ vers un certain h . En identifiant les limites, on a de plus $\langle h, f \rangle_{\nabla} \stackrel{p.s.}{=} h_f$ pour tout $f \in H_0^1(D)$.

Montrons alors que $(\langle h, \phi \rangle_{L_2})_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ a la loi d'un GFF. Fixons pour cela $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(D)$ et prenons $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(D)$ tels que :

$$2\pi\phi_i = -\Delta f_i, \quad i = 1, 2.$$

On a alors $\langle h, \phi_i \rangle_{L_2} = -\frac{1}{2\pi} \int_D h \Delta f_i = \langle h, f_i \rangle_{\nabla}$, et en particulier :

$$\text{Cov}(\langle h, \phi_1 \rangle_{L_2}, \langle h, \phi_2 \rangle_{L_2}) = \langle f_1, f_2 \rangle_{\nabla} = \Gamma(\phi_1, \phi_2),$$

où l'on a utilisé le lemme 2.1.1. La famille $(\langle h, \phi \rangle_{L_2})_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ est un champ gaussien de structure de covariance Γ , ce qu'il fallait démontrer. \square

Remarque. Il existe un résultat similaire en dimension 1 donnant une construction du mouvement Brownien par une série de Fourier. Si $(N_k)_k$ et (N'_k) sont deux suites de variables i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$, le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$B_t := tN_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\pi k} (N_k(\cos(2\pi kt) - 1) + N'_k \sin(2\pi kt))$$

est un mouvement Brownien.

2.3 Limite d'échelle du GFF discret vers le GFF continu

Le but de cette section est de préciser en quoi le DGFF sur des discrétisations $(\Lambda_N)_N$ d'un domaine $D \subset \mathbb{C}$ converge après renormalisation vers le GFF continu de D . Commençons par préciser les hypothèses sur la suite $(\Lambda_N)_N$ et sur le domaine D .

2.3.1 Domaines admissibles pour la limite d'échelle

Considérons D un domaine Greenien, $(h_\phi)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ un GFF continu sur D et fixons $x \in D$. Un mouvement Brownien partant de $y \neq x$ a une probabilité nulle de passer par x avant de quitter le domaine D . On en déduit que :

$$\forall y, z \in D \setminus \{x\}, \quad G^D(y, z) = G^{D \setminus \{x\}}(y, z).$$

En particulier $(h_\phi)_{\phi \in \mathcal{D}(D \setminus \{x\})}$ a la loi d'un GFF continu sur $D \setminus \{x\}$. Moralement, retirer un point d'un domaine ne change pas la loi du GFF continu. Ceci est très différent du cas discret, et il faut donc faire attention aux domaines que l'on autorise

pour la limite d'échelle. Commençons par définir une condition de régularité sur le bord du domaine ∂D , la condition que l'on va prendre est plus forte que nécessaire, mais elle simplifiera les arguments.

Définition 2.3.1. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine Greenien, un point $x \in \partial D$ est dit *régulier* si pour toute fonction $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée et tout $x_b \in \partial D$, on a :

$$\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})] \xrightarrow{x \in D \rightarrow x_b} f(x_b),$$

où B_t est un Brownien issu de x et τ_D est le temps de sortie du domaine D . En particulier, les points isolés ne sont pas réguliers.

Remarque. Un résultat de Doob montre que la condition ci dessus est en fait équivalente à $\mathbb{P}_x(\tau_D = 0) = 1$. En particulier, on montre que si $x \in \partial D$ vérifie que $C \cap G \subset D^c$ pour un cône C de sommet x et un certain voisinage G de x , alors x est un point régulier (on parle parfois de condition de Zaremba). Plus d'informations peuvent être trouvées dans [4].



FIGURE 2.3.1 – Condition de Zaremba satisfaite (gauche) et non satisfaite (droite)

On définit à présent les domaines que l'on va considérer pour la limite d'échelle.

Définition 2.3.2 (Domaines admissibles). La classe \mathcal{D} des domaines admissibles est l'ensemble des *ouverts bornés* $D \subset \mathbb{C}$ tels que :

- ∂D est composé de points réguliers.
- ∂D est composé d'un nombre *fini* de composantes connexes qui sont toutes de *diamètre strictement positif*.

Remarque. Les domaines bornés simplement connexes sont dans \mathcal{D} .

Définition 2.3.3 (Approximations discrètes). Fixons $D \in \mathcal{D}$. La suite d'approximations discrètes de D est donnée par la suite $(\Lambda_N)_N$ de sous réseaux de \mathbb{Z}^2 définis par :

$$\Lambda_N := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{dist}_\infty(x/N, D^c) > \frac{1}{N} \right\},$$

où la distance sous-jacente est la distance ℓ_∞ sur \mathbb{Z}^2 .

Prenons un tel domaine D avec sa suite d'approximations $(\Lambda_N)_N$. Notons φ^{Λ_N} les DGFF discrets associés :

$$\varphi^{\Lambda_N} \in \mathbb{R}^{\Lambda_N}.$$

On associe à φ^{Λ_N} un processus stochastique h^{Λ_N} (en fait une distribution aléatoire) indexé par $\mathcal{D}(D)$ en définissant :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(D), \quad \langle h^{\Lambda_N}, \phi \rangle = \int_D \phi(x) \varphi^{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor) dx.$$

Cela revient à regarder la suite de fonctions en escalier :

$$h^{\Lambda_N} : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \varphi^{\Lambda_N}(\lfloor Nz \rfloor) \end{cases},$$

puis à les identifier par dualité à des éléments de $\mathcal{D}'(D)$.

Remarque. La façon d'identifier φ^{Λ_N} à un élément de $\mathcal{D}'(D)$ est assez souple. On pourrait également prendre :

$$h^{\Lambda_N} := \sum_{x \in \Lambda_N} \varphi^{\Lambda_N}(x) \delta_{x/N}(\cdot),$$

ou encore une fonction linéaire par morceaux et continue, prenant la valeur $\varphi^{\Lambda_N}(x)$ en x/N pour $x \in \Lambda_N$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème central dans cette section. Il sera démontré dans les parties 2.3.2. et 2.3.3.

Théorème 2.3.1 (Convergence du GFF discret vers le GFF continu). *Les marginales finis dimensionnelles de $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(h_\phi^{\Lambda_N})_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ convergent en loi vers celles du GFF continu $(h_\phi^D)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ de D . Plus précisément, pour toute famille finie $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ de fonctions tests, on a :*

$$\left(\langle h^{\Lambda_N}, \phi_1 \rangle, \dots, \langle h^{\Lambda_N}, \phi_n \rangle \right) \xrightarrow[N, \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma(\phi_i, \phi_j)_{i,j \leq n}),$$

où l'on rappelle que :

$$\Gamma(\phi_i, \phi_j) := \int_{D^2} G^D(x, y) \phi_i(x) \phi_j(y) dx dy.$$

2.3.2 Asymptotique pour la fonction de Green discrète

Définition 2.3.4 (Mesure harmonique). Soit $D \in \mathcal{D}$ de suite d'approximation $(\Lambda_n)_n$ et $z \in D$. Considérons un Brownien bidimensionnel $(B_t)_t$ partant de z et τ_D son temps de sortie du domaine D :

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0, B_t \notin D\}.$$

La *mesure harmonique* sur ∂D vu de z est la mesure Borélienne $\Pi(z, \cdot)$ supportée par ∂D et définie par :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \quad \Pi^D(z, A) = \mathbb{P}_z(B_{\tau_D} \in A).$$

On admet le lemme suivant :

Lemme 2.3.2 (Convergence des mesures harmoniques discrètes vers $\Pi^D(x, \cdot)$). Soit $D \in \mathcal{D}$ de suite d'approximation $(\Lambda_N)_N$. Pour $x \in \Lambda_N$ et $y \in \partial^+ \Lambda_N$, on note :

$$\Pi_N(x, y) = \mathbb{P}_x(X_{\tau_{\Lambda_N}} = y).$$

C'est la probabilité qu'une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 issue de x sorte de Λ_N en y . Pour $x \in D$, on a alors :

$$\sum_{z \in \partial^+ \Lambda_N} \Pi_N(x, z) \delta_{z/N}(\cdot) \xrightarrow[N, \infty]{\text{faible}} \Pi^D(x, \cdot).$$

La convergence faible portant sur la topologie usuelle sur \mathbb{R}^2 .

Le cœur de cette section est l'estimation suivante :

Théorème 2.3.3. Il existe deux constantes c_0 et $g = \frac{2}{\pi}$ telles que, pour tout $D \in \mathcal{D}$ de suite d'approximation $(\Lambda_n)_n$ et pour tout $x \in D$, on a :

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Nx \rfloor) \underset{N, \infty}{=} g \log N + c_0 + g \int_{\partial D} \log |x - z| \Pi^D(x, dz) + o(1),$$

et pour $x \neq y$,

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) \underset{N, \infty}{\longrightarrow} -g \log |x - y| + g \int_{\partial D} \log |y - z| \Pi^D(x, dz),$$

la convergence se faisant localement uniformément en (x, y) .

Démonstration. D'après le [lemme 1.1.4.](#), on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in D$:

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) = -\mathbf{a}(\lfloor Nx \rfloor - \lfloor Ny \rfloor) + \sum_{z \in \partial^+ \Lambda} \mathbf{a}(z - \lfloor Ny \rfloor) \Pi_N(\lfloor Nx \rfloor, z).$$

On dispose d'autre part de l'expression explicite :

$$\mathbf{a}(v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(xv_1 + yv_2)}{\sin(x/2)^2 + \sin(y/2)^2} dx dy,$$

dont on vérifie le comportement asymptotique suivant :

$$\mathbf{a}(v) \underset{|v| \rightarrow \infty}{=} g \log |v| + c_0 + O(|v|^{-2}).$$

Si $x \neq y$, on a alors :

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) = -g \log |\lfloor Nx \rfloor - \lfloor Ny \rfloor| - c_0 + O(1/N^2) + \sum_{z \in \partial^+ \Lambda} \left(g \log |z - \lfloor Ny \rfloor| + c_0 + O(1/N^2) \right) \Pi_N(\lfloor Nx \rfloor, z).$$

Puis en utilisant le fait que les $\Pi_N(\lfloor Nx \rfloor, z)$ somment à 1 :

$$\begin{aligned} G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) &= -g \log |\lfloor Nx \rfloor - \lfloor Ny \rfloor| + g \sum_{z \in \partial^+ \Lambda} \log |z - \lfloor Ny \rfloor| \Pi_N(\lfloor Nx \rfloor, z) + O(1/N^2) \\ &= -g \log \left| \frac{\lfloor Nx \rfloor}{N} - \frac{\lfloor Ny \rfloor}{N} \right| + g \sum_{z \in \partial^+ \Lambda} \log \left| \frac{z}{N} - \frac{\lfloor Ny \rfloor}{N} \right| \Pi_N(\lfloor Nx \rfloor, z) \\ &\quad + g \log N - g \log N + O(1/N^2) \\ &= -g \log |x - y| + g \sum_{z \in \partial^+ \Lambda} \log |z/N - y| \Pi_N(\lfloor Nx \rfloor, z) + O(1/N). \end{aligned}$$

On reconnaît dans le second terme l'espérance de la fonction $f(z) = \log |z - y|$ contre la mesure harmonique discrète sur $\partial \Lambda_N$ vu de $\lfloor Nx \rfloor$. Cette espérance converge donc en vertu du [lemme 2.3.2](#) vers l'espérance de f contre $\Pi^D(x, \cdot)$, en particulier on trouve bien :

$$G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) \xrightarrow{N, \infty} -g \log |x - y| + g \int_{\partial D} \log |y - z| \Pi^D(x, dz).$$

La limite lorsque $x = y$ se traite de la même façon. □

On relie alors la limite à la fonction de Green G^D :

Lemme 2.3.4. *On peut identifier*

$$-\log|x-y| + \int_{\partial D} \log|y-z|\Pi^D(x, dz) = G^D(x, y),$$

où G^D est la fonction de Green associée à D de la [définition 2.1.1](#). En particulier, le théorème précédent se réécrit :

$$\forall x \neq y \in D, \quad G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) \xrightarrow[N, \infty]{} gG^D(x, y) = \frac{2}{\pi} G^D(x, y).$$

Démonstration. Notons $F^D(x, y) = -\log|x-y| + \int_{\partial D} \log|y-z|\Pi^D(x, dz)$, et fixons $x_0 \in D$. On a par théorème de dérivation sous le signe intégrale et par harmonicité de la fonction $\log|\cdot|$ que pour tout $y \in D \setminus \{x_0\}$:

$$\begin{aligned} \Delta_y F^D(x_0, y) &= -\Delta_y[\log|x_0 - y|] + \Delta_y \left[\int_{\partial D} \log|y-z|\Pi^D(x_0, dz) \right] \\ &= 0 + \int_{\partial D} \Delta_y[\log|y-z|]\Pi^D(x_0, dz) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $F^D(x_0, \cdot)$ est harmonique sur $D \setminus \{x_0\}$. De plus, pour $x_b \in \partial D$, la mesure $\Pi^D(x, \cdot)$ converge faiblement vers $\delta_{x_b}(\cdot)$ lorsque $x \rightarrow x_b$ (c'est la conséquence de la régularité des points du bord dans la [définition 2.3.1](#)). En particulier :

$$F^D(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow x_b]{} -\log|x_b - y| + \log|y - x_b| = 0.$$

Remarquons d'autre part que comme F^D est la limite simple des fonctions *symétriques* G_{Λ_N} , F^D doit aussi être symétrique :

$$\forall x, y \in D, \quad F^D(x, y) = F^D(y, x).$$

Et en particulier, on a $F^D(x_0, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_b]{} 0$ pour $y_b \in \partial D$. Enfin, on a clairement :

$$F^D(x_0, y) \underset{y \rightarrow x_0}{=} -\log|x_0 - y| + O(1).$$

Pour résumer, $y \mapsto F^D(x_0, y)$ est une fonction harmonique sur $D \setminus \{x_0\}$ tendant vers 0 près du bord de D et équivalente à $-\log|x_0 - y|$ près de x_0 . En utilisant la caractérisation de la [proposition 2.1.3](#), on en déduit bien que :

$$\forall y \in D \setminus \{x_0\}, \quad F^D(x_0, y) = G^D(x_0, y).$$

□

2.3.3 Démonstration du théorème 2.3.1

On est maintenant en mesure de démontrer le [théorème 2.3.1](#) :

Démonstration. Fixons $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ une famille de fonctions tests, le vecteur $(\langle h^{\Lambda_N}, \phi_i \rangle)_{i \leq n}$ est un vecteur Gaussien centré. Pour montrer la convergence en loi de ce vecteur vers $\mathcal{N}(0, (\Gamma(\phi_i, \phi_j))_{i,j})$, il suffit donc de montrer que pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\text{Cov}(\langle h^{\Lambda_N}, \phi_i \rangle, \langle h^{\Lambda_N}, \phi_j \rangle) \xrightarrow[n, \infty]{} \frac{2}{\pi} \Gamma(\phi_i, \phi_j).$$

Par Fubini,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\langle h^{\Lambda_N}, \phi_i \rangle, \langle h^{\Lambda_N}, \phi_j \rangle) &= \mathbb{E} \left[\int_{D^2} \phi_i(x) \phi_j(y) \varphi_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor) \varphi_{\Lambda_N}(\lfloor Ny \rfloor) dx dy \right] \\ &= \int_{D^2} \phi_i(x) \phi_j(y) \mathbb{E}[\varphi_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor) \varphi_{\Lambda_N}(\lfloor Ny \rfloor)] dx dy \\ &= \int_{D^2} \phi_i(x) \phi_j(y) G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) dx dy. \end{aligned}$$

Et d'après le [lemme 2.3.4](#), on a la convergence simple :

$$\phi_i(x) \phi_j(y) G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) \xrightarrow[N, \infty]{} \frac{2}{\pi} \phi_i(x) \phi_j(y) G^D(x, y).$$

Prenons $\varepsilon > 0$, et considérons $\Delta_\varepsilon := \{x, y \in D, |x - y| < \varepsilon\}$. Sur $D^2 \setminus \Delta_\varepsilon$, on a :

$$G^D(x, y) \leq \sup_{x, y \in D^2, |x-y| \geq \varepsilon} G^D(x, y) =: K_1 < \infty,$$

où l'on a utilisé la continuité de G^D sur le compact $\bar{D}^2 \setminus \Delta_\varepsilon$ pour assurer l'existence de cette borne uniforme. D'autre part, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) &= -\mathbf{a}(\lfloor Nx \rfloor - \lfloor Ny \rfloor) + \sum_{z \in \partial \Lambda_N} H_N(\lfloor Nx \rfloor, z) \mathbf{a}(z - \lfloor Ny \rfloor) \\ &\leq -g \log |Nx - Ny| + g \log \left(\sup_{z \in \partial \Lambda_N} |Ny - z| \right) + K_2, \end{aligned}$$

où K_2 est choisi suffisamment grand. Il vient ensuite :

$$\begin{aligned} G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) &\leq -g \log N - g \log |x - y| + g \log N \\ &\quad + g \log \left(\sup_{z \in \partial \Lambda_N} |y - z/N| \right) + K_2 \\ &\leq -g \log \varepsilon + g \log \left(\text{diam} D + \frac{1}{N} \right) + K_2 \quad (\text{car } |x - y| \geq \varepsilon) \\ &\leq \tilde{K}_2, \end{aligned}$$

avec \tilde{K}_2 une constante indépendante de $(x, y) \in D^2 \setminus \Delta_\varepsilon$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient alors :

$$\int_{D^2 \setminus \Delta_\varepsilon} \phi_i(x) \phi_j(y) G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) dx dy \xrightarrow{N, \infty} \frac{2}{\pi} \int_{D^2 \setminus \Delta_\varepsilon} \phi_i(x) \phi_j(y) G^D(x, y) dx dy.$$

Il nous reste à contrôler ce qu'il se passe sur Δ_ε . Comme G^D est intégrable, on a :

$$\frac{2}{\pi} \int_{\Delta_\varepsilon} \phi_i(x) \phi_j(y) G^D(x, y) dx dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'autre part, en réutilisant le fait que :

$$\forall N, \quad G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) \leq -g \log |x - y| + g \log (\text{diam} D + 1/N) + K_2,$$

on montre que *uniformément en* $N \in \mathbb{N}$, on doit avoir :

$$\int_{\Delta_\varepsilon} \phi_i(x) \phi_j(y) G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) dx dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Les convergences précédentes nous donnent alors en intervertissant les limites $\varepsilon \rightarrow 0$ et $N \rightarrow \infty$ que :

$$\int_{D^2} \phi_i(x) \phi_j(y) G_{\Lambda_N}(\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor) dx dy \xrightarrow{N, \infty} \frac{2}{\pi} \int_{D^2} \phi_i(x) \phi_j(y) G^D(x, y) dx dy,$$

ce que l'on voulait démontrer. □

2.4 Propriétés d'invariances du GFF continu

2.4.1 Invariance conforme

Commençons par remarquer que l'invariance conforme de la fonction de Green entraîne l'invariance conforme du GFF. Plus précisément :

Théorème 2.4.1 (Invariance conforme du GFF). *Soit D, D' sont deux sous-domaines Greeniens de \mathbb{C} et $T : D \rightarrow D'$ un biholomorphisme. Notons $(h_\phi)_{\phi \in (D)}$ le GFF continu sur D . Alors $(|h_{|T'|^2 \phi \circ T})_{\phi' \in \mathcal{D}(D')}$ a la loi d'un GFF sur D' .*

Démonstration. Le processus $(h_{\phi' \circ T})_{\phi' \in \mathcal{D}(D')}$ est un champ Gaussien centré, il suffit donc de vérifier que sa structure de covariance est donnée par $\Gamma^{D'}$. Plus précisément, il faut vérifier que pour tout couple ϕ_1 et ϕ_2 de fonctions tests sur D' , on a :

$$\text{Cov}(h_{\phi_1 \circ T}, h_{\phi_2 \circ T}) = \Gamma^{D'}(|T'|^2 \phi_1 \circ T, |T'|^2 \phi_2 \circ T).$$

C'est à dire encore :

$$\Gamma^D(|T'|^2\phi_1 \circ T, |T'|^2\phi_2 \circ T) = \Gamma^{D'}(\phi_1, \phi_2).$$

Mais on calcule explicitement :

$$\begin{aligned} \Gamma^D(|T'|^2\phi_1 \circ T, |T'|^2\phi_2 \circ T) &= \int_{D^2} |T'(x)|^2\phi_1(T(x))|T'(y)|^2\phi_2(T(y))G^D(x, y)dx dy \\ &= \int_{\substack{x'=T(x) \\ y'=T(y)}} \phi_1(x')\phi_2(y')G^D(T^{-1}(x'), T^{-1}(y'))dx' dy', \end{aligned}$$

où l'on a identifié $|T'(x)|^2$ et $|T'(y)|^2$ aux Jacobiens des transformations $x' = T(x)$ et $y' = T(y)$. En utilisant l'invariance conforme de la fonction de Green ([proposition 2.1.1.](#)), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \Gamma^D(|T'|^2\phi_1 \circ T, |T'|^2\phi_2 \circ T) &= \int_{D'^2} \phi_1(x')\phi_2(y')G^{D'}(x', y')dx' dy' \\ &= \Gamma^{D'}(\phi_1, \phi_2). \end{aligned}$$

□

2.4.2 Propriété de Markov spatiale

Soit B_t un mouvement Brownien (ou même un pont Brownien) et $s \leq t \leq u$. Rappelons que la loi de B_t conditionnée à prendre les valeurs B_s en s et B_u en u est :

$$B_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{(u-t)B_u + (t-s)B_s}{u-s}, \frac{(u-t)(t-s)}{u-s}\right).$$

On peut interpréter cette formule comme une propriété de type Markov pour le mouvement Brownien. L'objectif de cette section est de montrer que l'on dispose d'une propriété du même type pour le GFF en deux dimensions. L'énoncé précis est le suivant :

Théorème 2.4.2. *Soit D un domaine Greenien et $U \subset D$ un sous domaine ouvert de bord C^1 . Soit h le GFF sur D , on a la décomposition :*

$$h = h_U + \varphi,$$

où h_U et φ sont deux processus stochastiques indexés par $\mathcal{D}(D)$ et vérifiant :

- h_U est nul en dehors de U et a la loi d'un GFF sur U à l'intérieur de U .

- φ est harmonique dans U .
- h_U et φ sont indépendants.

Remarque. Précisons un peu le sens à accorder à ces conditions, les deux premiers points doivent être compris *au sens des distributions*. Plus précisément, la première condition se réécrit :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{D}(D \setminus \bar{U}), h_U(\phi) &= 0, \\ h_U|_{\mathcal{D}(U)} &\text{ à la loi d'un GFF sur } U. \end{aligned}$$

Ici, $\mathcal{D}(U)$ et $\mathcal{D}(D \setminus \bar{U})$ doivent être compris comme des sous ensembles de $\mathcal{D}(D)$ en prolongeant à zéro les fonctions tests pour en faire des fonctions tests sur D . La seconde condition s'interprète par l'existence d'une fonction harmonique u (aléatoire) telle que :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(U), \quad \varphi_\phi = \int_U u(x)\phi(x)dx.$$

Démonstration. Commençons par démontrer que dans l'espace Hilbertien $(H_0^1(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla)$ on a la décomposition :

$$H_0^1(D) = H_0^1(U) \oplus^\perp \text{Harm}(U),$$

où $\text{Harm}(U)$ est l'ensemble des fonctions dont la restriction à U est une fonction harmonique. Signalons ici qu'il n'est pas tout à fait évident que $H_0^1(U)$ s'identifie à un sous ensemble de $H_0^1(D)$ en prolongeant à zéros les fonctions de $H_0^1(U)$ en dehors de U . C'est effectivement le cas et cela fait l'objet d'un théorème d'extension qui *utilise le fait que U est à bord \mathcal{C}^1* , c'est donc ici que l'on utilise cette hypothèse. Commençons par remarquer que pour $f \in \mathcal{D}(U)$ et $g \in \text{Harm}(U)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\nabla &= \frac{1}{2\pi} \int_D \langle \nabla f, \nabla g \rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_D f \Delta g = 0. \end{aligned}$$

Puis en passant au complété, on trouve bien que $H_0^1(U)$ et $\text{Harm}(U)$ sont orthogonaux. Réciproquement, $H_0^1(U)$ est un sous espace fermé de $H_0^1(D)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi \in H_0^1(U)^\perp &\Rightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(U) \int_D \langle \nabla \varphi(x), \nabla \phi(x) \rangle dx = 0 \\ &\Rightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(U) \int_D \Delta \varphi(x) \phi(x) dx = 0 \quad (\text{Green Gauss}) \\ &\Rightarrow \Delta \varphi = 0 \text{ sur } U \text{ au sens des distributions.} \end{aligned}$$

Un résultat classique de régularité des distributions harmoniques permet alors d'affirmer que φ s'identifie en fait à une fonction C^∞ sur U . C'est à dire que l'on a bien $\varphi \in \text{Harm}(U)$. Considérons alors $(u_n)_{n \geq 0}$ une base orthonormée de $H_0^1(U)$ et $(\psi_m)_{m \geq 0}$ une base orthonormée de $\text{Harm}(U)$. On a vu au [théorème 2.2.2](#) que pour $(X_n)_n$ et (Y_n) deux suites de variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes, on a :

$$\sum_{k=0}^n X_k u_k \xrightarrow[n, \infty]{p.s.} h^U \quad \text{dans } \mathcal{D}'(U) \text{ et donc dans } \mathcal{D}'(D),$$

$$\sum_{k=0}^n X_k u_k + \sum_{k=0}^n Y_n \psi_n \xrightarrow[n, \infty]{p.s.} h^D \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D),$$

où h^U et h^D ont la loi d'un GFF sur U et D respectivement. En particulier, notons $\varphi := h^D - h^U$, on doit avoir :

$$\sum_{k=0}^n Y_n \psi_n \xrightarrow[n, \infty]{p.s.} \varphi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D).$$

Comme $\text{Harm}(U)$ est un sous espace fermé, la convergence a même lieu dans $\text{Harm}(U)$, φ est donc une fonction harmonique sur U . On a bien la décomposition recherchée, car φ et h^U sont clairement indépendants. \square

Remarque. L'hypothèse de régularité sur le bord de U n'est en fait pas nécessaire, et on admettra pour la section suivante que la propriété de Markov spatiale est valable dans le cas général.

2.5 Une caractérisation du GFF

Restreignons nous à présent à la sous classe $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ des sous-domaines propres et simplement connexes de \mathbb{C} . Notons μ^D la mesure associée à la loi du GFF h^D . On rappelle que l'on a les deux propriétés suivantes :

1. **Invariance conforme.** Soit $D, D' \in \mathcal{D}'$ et $T : D \rightarrow D'$ une application conforme. Si $h^D \sim \mu^D$ alors :

$$(\langle h^D, |T'|^2 \phi \circ T \rangle)_{\phi \in \mathcal{D}(D')} \sim \mu^{D'}.$$

2. **Markov spatiale** Si $D' \subset D$ est un sous domaine simplement connexe, alors $h^D \sim \mu^D$ se décompose de façon unique :

$$h^D = h_D^{D'} + \varphi_D^{D'},$$

où $h_D^{D'}$ et $\varphi_D^{D'}$ sont des processus indépendants, avec $h_D^{D'}|_{\mathcal{D}(D')} \sim \mu^{D'}$ et $h_D^{D'}|_{\mathcal{D}(D \setminus D')} = 0$, et où $\varphi_D^{D'}$ est presque sûrement harmonique sur D' .

Rajoutons aux propriétés 1 et 2 la propriété de 'conditions nulles au bord' :

3. **Condition de Dirichlet** Notons \mathbb{D} le disque unité ouvert et $(f_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ une suite de fonctions tests *radiales* de masse 1 dont le support sort de tout compact de \mathbb{D} :

$$\forall r \in]0, 1[, \exists n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0, \text{Supp}(f_n) \cap B(0, r) = \emptyset.$$

$$\text{Alors } \text{Var}(\langle h^{\mathbb{D}}, f_n \rangle) \xrightarrow[n, \infty]{} 0.$$

Remarque. Il n'est pas vrai que pour toute suite $(f_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ de fonctions tests de masse 1 dont les supports sortent de tout compact, alors $\text{Var}(\langle h^{\mathbb{D}}, f_n \rangle) \xrightarrow[n, \infty]{} 0$. Fixons en effet $\rho_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ radiales approximant δ_0 :

$$\int \rho_n = 1, \quad \text{Supp}(\rho_n) = \bar{B}(0, 2^{-n}).$$

Il est facile de voir grâce aux équivalents de la fonction de Green que pour tout point $x \in \mathbb{D}$, on a $\langle h^{\mathbb{D}}, \rho_n(x - \cdot) \rangle$ bien définie à partir d'un certain rang et :

$$\text{Var}(\langle h^{\mathbb{D}}, \rho_n(x - \cdot) \rangle) \xrightarrow[n, \infty]{} \infty.$$

En particulier, prenons une suite $x_m \in \mathbb{D}$ telle que $x_m \rightarrow 1$. Pour chaque m , il existe $n_m \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_{n_m}(x_m - \cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$ et $\text{Var}(\langle h^{\mathbb{D}}, \rho_{n_m}(x_m - \cdot) \rangle) \geq m$. La suite $(\rho_{n_m}(x_m - \cdot))_m$ nous fournit une suite de fonctions tests de masse 1 dont le support sort de tout compact mais telle que :

$$\text{Var}(\langle h^{\mathbb{D}}, \rho_{n_m}(x_m - \cdot) \rangle) \xrightarrow[m, \infty]{} \infty.$$

Il est donc bien nécessaire de rajouter une condition supplémentaire, c'est pour cela que l'on choisit de supposer que les f_n sont des fonctions radiales dans la condition 3.

Prenons à présent le point de vue inverse. Quels sont les familles de lois qui satisfont aux conditions 1, 2, 3? Il s'avère en fait que ces propriétés sont très contraignantes et caractérisent quasiment le GFF. On se propose pour le voir de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. Soit $(\mu^D)_{D \in \mathcal{D}'}$ une famille de lois de probabilités telles que :

- Pour tout $D \in \mathcal{D}'$, une variable h^D de loi μ^D est un processus $(h^D, \phi)_{\phi \in \mathcal{D}(D)}$ indexé par $\mathcal{D}(D)$, centré ($\mathbb{E}[h^D, \phi] = 0$), et agissant linéairement sur les fonctions tests :

$$\forall \phi, \phi' \in \mathcal{D}(D), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (h^D, \lambda\phi + \phi') \stackrel{p.s.}{=} \lambda(h^D, \phi) + (h^D, \phi').$$

- La structure de covariance de h^D , que l'on note $\tilde{\Gamma}_D$:

$$\tilde{\Gamma}_D : \begin{cases} \mathcal{D}(D) \times \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi, \psi \mapsto \mathbb{E}[(h^D, \phi)(h^D, \psi)] \end{cases} ,$$

est une forme bilinéaire continue pour la topologie des fonctions tests.

- Les conditions d'invariance conforme, de Markov spatiale et de Dirichlet sont vérifiées.

Alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $D \in \mathcal{D}'$ et tout couple de fonctions tests ϕ et ψ , on a :

$$\tilde{\Gamma}(\phi, \psi) = \alpha \int_{D^2} G^D(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy.$$

Corollaire 2.5.1.1. La loi des GFF est l'unique processus Gaussien vérifiant les conditions du [théorème 2.5.1](#).

Remarque. En réalité, il est inutile de supposer que les lois des (h^D, ϕ) sont Gaussiennes pour que les conditions du théorème 2.5.1 assurent que les μ_D sont les lois de GFF. Il suffit pour cela que l'on rajoute une condition de finitude des moments d'ordre 4 :

$$\forall D, \forall \phi \in \mathcal{D}(D), \quad \mathbb{E}[(h^D, \phi)^4] < \infty.$$

En effet, sous les conditions du théorème 2.5.1, la condition de moments ci dessus suffit pour assurer que les lois des (h^D, ϕ) sont nécessairement Gaussiennes. On ne montrera pas ce résultat ici (voir [\[2\]](#) pour une démonstration) et on se contente de montrer la conclusion plus modeste du théorème 2.5.1.

On fixe à présent $(h^D, \phi)_{D \in \mathcal{D}', \phi \in \mathcal{D}(D)}$ une famille de variables aléatoires vérifiant les conditions du théorème 2.5.1.. La section qui suit introduit un outil important qui sera utile dans la démonstration.

2.5.1 Moyenne circulaire pour $h^{\mathbb{D}}$

Définition 2.5.1 (Moyenne circulaire de $h^{\mathbb{D}}$). Soit $t \in]0, 1]$, on considère la décomposition provenant de la propriété de Markov spatiale :

$$h^{\mathbb{D}} = h_{\mathbb{D}}^{B(0,t)} + \varphi_{\mathbb{D}}^{B(0,t)}.$$

La variable aléatoire $X_t := \varphi_{\mathbb{D}}^{B(0,t)}(0)$ s'appelle la moyenne circulaire de $h^{\mathbb{D}}$ sur $\partial B(0, t)$. Pour tout t , le processus $h_{\mathbb{D}}^{B(0,t)}$ est indépendant de la famille $(X_s)_{s \in [t, 1]}$.

La dénomination de *moyenne circulaire* est justifiée par le lemme suivant :

Lemme 2.5.2. Soit $(\phi_t^\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[} \subset \mathcal{D}(\mathbb{D})$ une famille de fonctions radiales de masse 1 vérifiant :

$$\text{Supp}(\phi_t^\varepsilon) \subset \{z \in \mathbb{D} \mid t - \varepsilon \leq |z| \leq t\}.$$

Alors les processus $(h^\mathbb{D}, \phi_t^\varepsilon)$ convergent en probabilité et dans \mathbb{L}_2 vers X_t lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En particulier, les X_t sont dans \mathbb{L}_2 .

Remarque. Les hypothèses du lemme impliquent que la famille ϕ_t^ε converge au sens des distributions vers π_t la mesure de la moyenne uniforme le long de $\partial B(0, t)$:

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{D}), \quad \langle \pi_t, \psi \rangle = \int_D \psi(x) \pi_t(dx) = \frac{1}{2\pi t} \int_{\partial B(0,t)} \psi(w) dw.$$

Le lemme affirme que les évaluations de $h^\mathbb{D}$ en les ψ_t^ε convergent vers X_t . On pourrait donc écrire abusivement $X_t = (h^\mathbb{D}, \pi_t)$.

Dans la démonstration qui suit et dans toute la suite de cette partie, on note pour simplifier $h^s = h_{\mathbb{D}}^{B(0,s)}$ et $\varphi^s = \varphi_{\mathbb{D}}^{B(0,s)}$ les termes de la décomposition associée à la propriété de Markov spatiale.

Démonstration. Comme φ^t est harmonique sur $B(0, t)$, on a :

$$(\varphi^t, \phi_\varepsilon^t) = \int_{B(0,t)} \phi_\varepsilon^t \varphi^t = \varphi^t(0) = X_t.$$

Puis en utilisant la décomposition $h^\mathbb{D} = h^t + \varphi^t$, on obtient :

$$(h^\mathbb{D}, \phi_t^\varepsilon) = (h^t, \phi_t^\varepsilon) + (\varphi^t, \phi_t^\varepsilon) = (h^t, \phi_t^\varepsilon) + X_t.$$

En appliquant la condition de Dirichlet à $h^t|_{\mathcal{D}(B(0,t))} \sim \mu_{B(0,t)}$, on sait alors que :

$$\text{Var}((h^t, \phi_t^\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On en déduit donc bien que $(h^\mathbb{D}, \phi_t^\varepsilon) \rightarrow X_t$ dans \mathbb{L}^2 et en probabilité. \square

On en déduit en particulier le résultat suivant :

Lemme 2.5.3 (Relation fonctionnelle sur les $(X_s)_s$). Soit $0 < r, s \leq 1$, la variable aléatoire $\tilde{X}_r := X_{rs} - X_s$ est une variable de même loi que X_r et indépendante de la famille $(X_t)_{t \in [s,1]}$.

Démonstration. Soit $0 < r, s \leq 1$. Comme on a $h^{\mathbb{D}} = h^s + \varphi^s$, on déduit que :

$$(h^{\mathbb{D}}, \phi_{rs}^\varepsilon) = (h^s, \phi_{rs}^\varepsilon) + (\varphi^s, \phi_{rs}^\varepsilon) = (h^s, \phi_{rs}^\varepsilon) + X_s,$$

où l'on a utilisé le fait que φ^s est harmonique et que ϕ_{rs}^ε est radiale de masse 1. Considérons alors l'application $T_s : z \in \mathbb{D} \mapsto sz \in B(0, s)$. C'est un biholomorphisme entre \mathbb{D} et $B(0, s)$. En particulier, d'après la propriété d'invariance conforme on a :

$$((h^s, \phi_{rs}^\varepsilon))_{\varepsilon > 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} ((h^{\mathbb{D}}, s^2 \phi_{rs}^\varepsilon \circ T_s))_{\varepsilon > 0},$$

où l'on rappelle que l'égalité en loi d'une famille de v.a.r. signifie l'égalité en loi des marginales finie dimensionnelles. Comme $s^2 \phi_{rs}^\varepsilon \circ T_s$ est une fonction radiale de masse 1 dont le support est contenu dans l'anneau $\{z \mid r - \varepsilon/s \leq |z| \leq r\}$, on a d'après le lemme précédent que :

$$(h^{\mathbb{D}}, s^2 \phi_{rs}^\varepsilon \circ T_s) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\mathbb{L}_2} X_r.$$

Donc $((h^s, \phi_{rs}^\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ est aussi de Cauchy dans \mathbb{L}_2 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Il existe donc une variable aléatoire \tilde{X}_r , qui est bien indépendante de $(X_t)_{t \in [s, 1]}$ et qui vérifie

$$\tilde{X}_r = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{\mathbb{L}_2} (h^s, \phi_{rs}^\varepsilon) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{\mathbb{L}_2} (h^{\mathbb{D}}, s^2 \phi_{rs}^\varepsilon \circ T_s) = X_r,$$

ce qui permet de conclure. □

Une conséquence immédiate de cette relation est l'explicitation des variances du processus $(X_s)_s$:

Corollaire 2.5.3.1 (Variances du processus $(X_s)_s$). *Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :*

$$\forall s \in]0, 1], \quad \text{Var}(X_s) = -\alpha \log(s).$$

Démonstration. Notons $g(s) = \text{Var}(X_s)$. On a vu que $X_{sr} = X_s + \tilde{X}_r$, avec X_s et \tilde{X}_r indépendants, en particulier :

$$\forall r, s \in]0, 1], \quad g(rs) = \text{Var}(X_s + \tilde{X}_r) = \text{Var}(X_s) + \text{Var}(\tilde{X}_r) = g(s) + g(r).$$

Il est bien connu que cette relation caractérise les multiples du logarithme dès lors que g est continue en 1. Montrons donc que c'est effectivement le cas. Fixons $\eta > 0$ et prenons $(s_k)_k$ une suite de réels dans $]0, 1[$ qui tend vers 1. Comme $(h^{\mathbb{D}}, \phi_{s_k}^{\varepsilon_k}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\mathbb{L}_2} X_{s_k}$, on en déduit que pour chaque $k > 0$ il existe $\varepsilon_k > 0$ tel que :

$$|\text{Var}(h^{\mathbb{D}}, \phi_{s_k}^{\varepsilon_k}) - \text{Var}(X_{s_k})| \leq \eta/2.$$

Mais d'après la condition de Dirichlet, et quitte à supposer que ε_k tend vers 0, on a $\text{Var}(h^{\mathbb{D}}, \phi_{s_k}^{\varepsilon_k}) \xrightarrow[k, \infty]{} 0$. Il existe donc $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on a :

$$|\text{Var}(h^{\mathbb{D}}, \phi_{s_k}^{\varepsilon_k})| \leq \eta/2.$$

Et en particulier :

$$\forall k \geq k_0, \quad |\text{Var}(X_{s_k})| \leq \eta,$$

ceci étant vrai pour tout η , on a bien $\text{Var}(X_{s_k}) \xrightarrow[k, \infty]{} 0$ et g est continue en 1. \square

Une deuxième conséquence du lemme 2.5.3 est que le processus $(X_{1-s})_{s \in [0,1[}$ est en fait une martingale.

Corollaire 2.5.3.2. *Le processus $(X_{1-s})_{s \in [0,1[}$ est une martingale pour la filtration canonique $\mathcal{F}_s = \sigma(X_t, t \in [1-s, 1])$.*

Démonstration. Les X_{1-s} sont intégrables et si $r < s$, on sait d'après le lemme 2.5.3 que $X_{1-s} = X_{1-r} + \tilde{X}_{(1-r)/(1-s)}$. On calcule donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{1-s} | \mathcal{F}_r] &= \mathbb{E}[X_{1-r} + \tilde{X}_{(1-r)/(1-s)} | \mathcal{F}_r] \\ &= X_{1-r} + \mathbb{E}[\tilde{X}_{(1-r)/(1-s)} | \mathcal{F}_r] \\ &= X_{1-r} + \mathbb{E}[\tilde{X}_{(1-r)/(1-s)}] \\ &= X_{1-r}, \end{aligned}$$

car les X_s sont centrées comme limite dans \mathbb{L}_2 de variables centrées. \square

Remarque. En particulier, si l'on arrive à montrer que la famille $(X_{1-s})_{s \in [0,1[}$ admet une modification continue, le théorème de Dubins Schwarz permettra de conclure que $(X_{1-s})_s$ est en fait un processus Gaussien. C'est effectivement le cas si l'on suppose que $\mathbb{E}[(h^{\mathbb{D}}, \phi)^4] < \infty$, et cela fait l'objet du résultat (admis) suivant :

Théorème 2.5.4. Supposons que les moments d'ordre 4 des variables $(h^{\mathbb{D}}, \phi)$ sont finis. Alors le processus $(X_{1-s})_s$ admet une modification qui en fait une martingale continue.

D'après le théorème de Dubins Schwarz, c'est donc un mouvement Brownien faible à changement d'échelle temporelle près (en particulier les X_s sont Gaussiens).

En pratique la démonstration demande d'établir certaines estimées sur les moments des variations du processus puis d'appliquer le théorème de continuité de Kolmogorov. C'est exactement à ce moment là que l'hypothèse de finitude des moments d'ordre 4 est utile.

2.5.2 Démonstration du théorème 2.5.1

On est maintenant en mesure de démontrer le [théorème 2.5.1](#). La démonstration se fait en 2 étapes :

- On commence par montrer qu'il existe une fonction $K_D : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant :

$$\tilde{\Gamma}(\phi, \psi) = \int_{D^2} \phi(x)\psi(y)K_D(x, y)dxdy.$$

- On montre que $K_D(x, \cdot)$ est harmonique et a un comportement logarithmique au voisinage de x . On peut alors utiliser le [lemme 2.3.2](#) pour conclure que K_D est un multiple de G^D .

Construction de K_D Fixons $D \in \mathcal{D}'$ et $x, y \in D$. Il existe D_x et D_y deux sous domaines simplement connexe de D tels que $x \in D_x$, $y \in D_y$ et $\bar{D}_x \cap \bar{D}_y = \emptyset$. En utilisant la proposition de Markov spatiale à D_x et D_y , on obtient les décompositions :

$$h^D = h^x + \varphi^x = h^y + \varphi^y,$$

où l'on a noté pour simplifier $h^z = h_D^{B_z}$ et $\varphi^z = \varphi_D^{B_z}$ pour $z = x, y$. Posons alors $\varphi = h^x - \varphi^y = h^y - \varphi^x$, on obtient que :

$$h^D = h^x + h^y + \varphi,$$

où h^x, h^y et φ sont deux à deux indépendants.

Fixons à présent ρ une fonction test radiale de masse 1 dont le support est contenu dans $B(0, 1)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $\varepsilon > 0$, on note :

$$\rho_z^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{\cdot - z}{\varepsilon}\right).$$

Si ε est choisit suffisamment petit, on a $\text{Supp}(\rho_y^\varepsilon) \cap D_x = \emptyset$ et $\text{Supp}(\rho_x^\varepsilon) \cap D_y = \emptyset$. En particulier $(h^y, \rho_x^\varepsilon) = (h^x, \rho_y^\varepsilon) = 0$ et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(h^D, \rho_x^\varepsilon), (h^D, \rho_y^\varepsilon)] &= \mathbb{E}[(h^x + h^y + \varphi, \rho_x^\varepsilon)(h^x + h^y + \varphi, \rho_y^\varepsilon)] \\ &= \mathbb{E}[(h^x + \varphi, \rho_x^\varepsilon)(h^y + \varphi, \rho_y^\varepsilon)] \\ &= \mathbb{E}[(\varphi, \rho_x^\varepsilon)(\varphi, \rho_y^\varepsilon)], \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété d'indépendance sur φ , h^x et h^y . La fonction φ est harmonique et ρ_x^ε est de masse unitaire distribuée radialement autour de x . En utilisant la formule de la moyenne on obtient donc que :

$$(\varphi, \rho_x^\varepsilon) = \varphi(x) = \varphi^x(x),$$

et de même $(\varphi, \rho_y^\varepsilon) = \varphi^y(y)$. Il suit donc que :

$$\mathbb{E}[(h^D, \rho_x^\varepsilon), (h^D, \rho_y^\varepsilon)] = \mathbb{E}[\varphi^x(x)\varphi^y(y)]$$

qui est donc indépendant de ε dès lors que celui ci est choisi suffisamment petit. On peut donc légitimement définir :

$$K_D(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}_D(\rho_\varepsilon^x, \rho_\varepsilon^y).$$

Lemme 2.5.5. *Cette fonction K_D s'identifie à la structure de covariance $\tilde{\Gamma}_D(\cdot, \cdot)$. Plus précisément, pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{D}(D)$ on a :*

$$\tilde{\Gamma}_D(\phi, \psi) = \int_{D^2} \phi(x)\psi(y)K_D(x, y)dxdy.$$

Démonstration. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{D}(D)$ deux fonctions tests. Par hypothèse, la forme linéaire $T^\phi := \tilde{\Gamma}(\phi, \cdot)$ est continue pour la topologie sur $\mathcal{D}(D)$, et c'est donc une distribution. Par convolution par ρ_ε on obtient alors que :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\phi, \psi) &= T^\phi(\psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\rho_\varepsilon^\varepsilon * \tilde{T}^\phi)(\psi) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D \psi(x)\tilde{\Gamma}(\phi, \rho_\varepsilon^x)dx. \end{aligned}$$

Puis en appliquant le même raisonnement à $T^{\rho_\varepsilon^x} = \tilde{\Gamma}(\cdot, \rho_\varepsilon^x)$, on obtient :

$$\tilde{\Gamma}(\phi, \psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D \psi(x) \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_D \phi(y)\tilde{\Gamma}(\rho_\eta^y, \rho_\varepsilon^x)dydx.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, il vient finalement en échangeant limites et intégrales que :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\phi, \psi) &= \int_D \int_D \psi(x)\phi(y) \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}(\rho_\eta^y, \rho_\varepsilon^x)dydx \\ &= \int_D \int_D \psi(x)\phi(y)K_D(x, y)dydx, \end{aligned}$$

qui est l'expression recherchée. □

Identification de K_2 comme multiple de G^D On cherche à présent à identifier K_D à un multiple de G^D et on se propose d'utiliser pour cela la caractérisation de la [proposition 2.1.3](#). Commençons donc par montrer que K_D est harmonique :

Lemme 2.5.6. *Pour tout domaine D et tout $x_0 \in D$, on a :*

$$\Delta K_D(x_0, \cdot) = 0 \text{ sur } D \setminus \{x_0\}.$$

Démonstration. Soit $y \neq x_0$, il existe $D_{x_0} \ni x_0$ et $D_y \ni y$ deux sous domaines disjoints simplement connexes de D pour lesquels :

$$\forall z \in D_y, \quad K_D(x_0, z) = \mathbb{E}[\varphi_D^{D_{x_0}}(x_0)\varphi_D^{D_y}(z)].$$

Comme $\varphi_D^{D_y}$ est harmonique, on obtient par théorème de dérivation sous le signe intégrale que $K_D(x_0, \cdot)$ est harmonique au voisinage de y . Ceci étant vrai pour tout y , on en déduit bien que $\Delta K_D(x_0, \cdot) = 0$ sur $D \setminus \{x_0\}$. \square

Pour conclure que K_D est un multiple de G^D il suffit maintenant de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D$, on a :

$$K_D(x, y) \underset{y \rightarrow x}{=} -\alpha \log |x - y| + O(1),$$

puis d'appliquer la [proposition 2.1.3](#). Commençons par nous ramener au cas $D = \mathbb{D}$ et $x_0 = 0$ en remarquant que K_D a une propriété d'invariance conforme.

Lemme 2.5.7 (Invariance conforme de K_D). *Soit $T : D \mapsto \mathbb{D}$ un biholomorphisme, on a :*

$$\forall x, y \in D, \quad K_D(x, y) = K_{\mathbb{D}}(T(x), T(y)).$$

Démonstration. Fixons D_x et D_y de façon usuelle. Par unicité dans la décomposition de Markov spatiale et d'après la propriété d'invariance conforme, on a :

$$\left(\varphi_D^{D_x}(x), \varphi_D^{D_y}(y)\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\varphi_{\mathbb{D}}^{T(D_x)}(T(x)), \varphi_{\mathbb{D}}^{T(D_y)}(T(y))\right).$$

En particulier, on obtient que :

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{D}}(T(x), T(y)) &= \mathbb{E} \left[\varphi_{\mathbb{D}}^{T(D_x)}(T(x)) \varphi_{\mathbb{D}}^{T(D_y)}(T(y)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\varphi_D^{D_x}(x) \varphi_D^{D_y}(y) \right] = K_D(x, y), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

On s'est donc ramené de cette façon à démontrer que $K_{\mathbb{D}}(0, y) \underset{y \rightarrow x}{=} -\alpha \log |y| + O(1)$. Soit donc $y \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, par invariance conforme et en particulier par invariance par rotation, on a $K_{\mathbb{D}}(0, y) = K_{\mathbb{D}}(0, |y|)$. D'autre part, on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{|y|}^2] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}(\phi_{|y|}^{\eta}, \phi_{|y|}^{\varepsilon}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \int_{D^2} K_D(x, w) \phi_{|y|}^{\varepsilon}(x) \phi_{|y|}^{\eta}(w) dx dw. \end{aligned}$$

Mais si l'on commence par fixer ε , alors pour η suffisamment petit de sorte que $\text{Supp}(\phi_{|y|}^\varepsilon) \cap \text{Supp}(\phi_{|y|}^\eta) = \emptyset$, on obtient par harmonicité de $K_D(\cdot, y)$ que :

$$\begin{aligned} \int_{D^2} K_{\mathbb{D}}(x, w) \phi_{|y|}^\varepsilon(x) \phi_{|y|}^\eta(w) dx dw &= \int_D \int_D K_{\mathbb{D}}(x, w) \phi_{|y|}^\varepsilon(x) dx \phi_{|y|}^\eta(w) dw \\ &= \int_D K_{\mathbb{D}}(0, w) \phi_{|y|}^\eta(w) dw. \end{aligned}$$

Puis en utilisant la continuité de K_D , on obtient en passant à la limite :

$$\mathbb{E}[X_{|y|}^2] = K_{\mathbb{D}}(0, |y|).$$

Et donc d'après le [corollaire 2.5.3.1](#) sur la variance de X_t :

$$K_{\mathbb{D}}(0, |y|) = -\alpha \log |y|.$$

Par invariance conforme, on en déduit que pour tout D et $x \in D$, on a bien

$$K_D(x, y) \underset{y \rightarrow x}{=} -\alpha \log |x - y| + O(1).$$

En utilisant la [proposition 2.1.3](#), on en déduit finalement bien que $K_D = \alpha G_D$. Le [théorème 2.5.1](#) est donc démontré.

Conclusion :

Le but de ce stage était d'introduire et d'étudier les propriétés du champ libre Gaussien discret sur \mathbb{Z}^d et du champ libre Gaussien continu sur \mathbb{C} . Ces objets apparaissent dans des branches variées des probabilités, et leurs applications sont multiples. Notre choix a été de se concentrer sur ses aspects les plus fondamentaux.

Dans le cas discret, nous avons vu que le champ libre Gaussien sur \mathbb{Z}^d peut être interprété comme un modèle relativement élémentaire d'interface aléatoire. Il est notamment un exemple particulièrement simple de modèle d'interface $\nabla\varphi$ de Ginzburg Landau et fait à ce titre partie de la famille des *effective interface models*. Le DGFF est en particulier un objet d'étude de choix pour approximer les modèles d'interfaces plus compliqués provenant de la physique statistique.

Dans un second temps, nous avons défini et étudié le GFF continu sur \mathbb{C} . En particulier, nous avons montré qu'il s'agit d'une famille de processus invariants conformes possédant une propriété de type Markov spatiale, et nous avons expliqué en quoi le GFF est en fait essentiellement le seul processus possédant ces propriétés. Nous avons motivé son étude en faisant le lien avec sa variante discrète, en expliquant en quoi le GFF continu est une limite d'échelle du DGFF. Comme nous l'avons déjà évoqué, il est en fait conjecturé (et dans certains cas démontré) que le GFF est la limite d'échelle d'une classe beaucoup plus large de modèles.

Mentionnons enfin le fait que le GFF continu est aussi apparenté à d'autres objets ayant une importance centrale en probabilité. Nous pourrions par exemple évoquer sa proche relation avec l'évolution de Schramm Loewner et particulièrement le processus SLE_4 , ou encore son interconnexion avec la théorie du chaos multiplicatif Gaussien de Kahane.

Ce stage nous a permis d'appréhender un peu mieux la théorie entourant le champ libre Gaussien. De multiples pistes restent encore ouvertes pour nous permettre d'approfondir son étude et de comprendre quelles sont ses applications.

Annexe A

Invariance conforme du mouvement Brownien

Fixons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ un espace filtré. On supposera que $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continue à droite ($\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$) et que \mathcal{F}_0 contient tout les événements de probabilité nulles. Un processus H_t est dit adapté et continu (sous entendu par rapport à \mathbb{F}) si :

- pour tout $t \geq 0$, H_t est \mathcal{F}_t mesurable.
- avec probabilité 1, $t \mapsto H_t$ est continu.

On fixe à présent B_t un mouvement Brownien adapté et continu. Commençons par rappeler une forme assez générale de la formule d'Itô :

Proposition A.0.1 (Formule d'Itô). *Supposons que $F(x, t)$ est une collection de variables aléatoires indexées par $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ telles que :*

- Avec probabilité 1, la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et ses dérivées $\partial_x F, \partial_{xx} F$ et $\partial_t F$ existes et sont continues.
- Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, les fonctions $F(x, \cdot), \partial_x F(x, \cdot), \partial_{xx} F(x, \cdot)$ et $\partial_t F(x, \cdot)$ sont adaptés.

Prenons alors H_t un processus adapté et continu et notons $Z_t = \int_0^t H_s dB_s$ au sens d'Itô. On a alors :

$$F(Z_t, t) - F(Z_0, 0) = \int_0^t \partial_x F(Z_s, s) H_s dB_s + \int_0^t \left(\partial_t F(Z_s, s) + \frac{1}{2} \partial_{xx} F(Z_s, s) H_s^2 \right) ds.$$

La démonstration est omise et peut être par exemple trouvée dans [3]. On l'utilise ici pour démontrer le lemme suivant, que l'on peut voir comme une version un peu plus faible du théorème de Dubins-Schwarz.

Lemme A.0.1. Soit $(H_t)_t$ un processus adapté et continu et $Z_t = \int_0^t H_s dB_s$. On note :

$$\sigma(t) = \inf \left\{ u \geq 0 \mid \int_0^u H_s^2 ds \geq t \right\},$$

alors $(Z_{\sigma(t)})_t$ a la loi d'un Brownien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_{\sigma(t)})_t$.

Démonstration. On a $W_0 = 1$ p.s. et $t \mapsto W_t$ est presque sûrement continu. Il reste à vérifier que $W_t - W_r$ conditionné à $\mathcal{F}_{\sigma(r)}$, a une loi Gaussienne centrée de variance $t - r$. Par la propriété de Markov forte pour le temps d'arrêt $\sigma(r)$, il suffit de le montrer pour $r = 0$. De façon équivalente, on va donc montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \mathbb{E} \left[\exp \left(iyW_t + \frac{t}{2}y^2 \right) \right] = 1.$$

Fixons $y \in \mathbb{R}$ et posons $M_u = \exp \left(iyZ_u - \frac{y^2}{2} \int_0^u H_s^2 ds \right)$. Au temps d'arrêt $\sigma(t)$ on retrouve donc :

$$M_{\sigma(t)} = \exp \left(iyW_t + \frac{t}{2}y^2 \right).$$

On a $M_t(\omega) = F(Z_t, t)$, où $F(x, t) = \exp \left(ixy + \frac{y^2}{2} \int_0^t H_u^2 du \right)$ est une famille de variables aléatoire indexés par (x, t) et vérifiant les conditions du lemme d'Itô. On a alors :

$$dM_t = \partial_x F(Z_t, t) dZ_t + \left(\partial_t F(Z_t, t) + \frac{H_t^2}{2} \partial_{xx} F(Z_t, t) \right) dt.$$

Le terme $\partial_x F(Z_t, t) dZ_t$ est une martingale et on calcule :

$$\partial_t F(Z_t, t) + \frac{H_t^2}{2} \partial_{xx} F(Z_t, t) = \left(\frac{y^2 H_t^2}{2} + i^2 y^2 \frac{H_t^2}{2} \right) Z_t = 0.$$

Donc $(M_u)_u$ est une martingale bornée et par le théorème d'arrêt de Doob on a $\mathbb{E}[M_{\sigma(t)}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$, ce qui conclut. \square

On va à présent appliquer ce résultat pour démontrer l'invariance conforme du mouvement Brownien.

Théorème A.0.2 (Invariance conforme du mouvement Brownien). Soit $B_t := (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_t$ un mouvement Brownien bidimensionnel tué en sortie d'un domaine $D \subset \mathbb{C}$ ouvert contenant $B_0 \stackrel{\text{p.s.}}{=} x$. Soit $f : D \xrightarrow{\sim} D'$ un biholomorphisme, et soit $\sigma(t)$ définie par :

$$\int_0^{\sigma(t)} |f'(B_u)|^2 du = t.$$

Alors $(f(B_{\sigma(t)}))_t$ a la loi d'un Brownien issu de $f(x)$ tué en sortie de D' .

Démonstration. Notons $f = u + iv$ avec $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmoniques. La formule d'Itô (dans sa version bidimensionnelle), nous donne :

$$\begin{aligned} du(B_t) &= (\nabla_{B_t} u)^T dB_t + \frac{1}{2} \text{Tr}(H_{B_t} u) dt \\ &= (\nabla_{B_t} u)^T dB_t + 0. \end{aligned}$$

Car $\text{Tr}(H_{B_t} u) = \Delta_{B_t} u = 0$ avec u harmonique, en particulier :

$$u(B_t) - u(x) = \int_0^t (\nabla_{B_s} u)^T dB_s.$$

D'après le lemme A.0.1, si l'on note $\tau(t) = \inf\{u \geq 0, \int_0^u \|\nabla_{B_s} u\|^2 ds \geq t\}$, alors $u(B_{\tau(t)})_t$ a la loi d'un Brownien. Mais par les équations de Cauchy-Riemann, on a $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$ et donc $|f'|^2 = \partial_x u(B_s)^2 + \partial_y u(B_s)^2 = \partial_x v(B_s)^2 + \partial_y v(B_s)^2$. En particulier :

$$\int_0^t \|\nabla_{B_s} u\|^2 ds = \int_0^t (\partial_x u(B_s)^2 + \partial_y u(B_s)^2) ds = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds.$$

On peut donc identifier $\sigma(t) = \tau(t)$ et $u(B_{\sigma(t)})_t, v(B_{\sigma(t)})_t$ ont la loi de deux Browniens. On peut montrer de façon analogue que ces deux Browniens sont indépendants. \square

Annexe B

Outils d'analyse fonctionnelle

Cette annexe a pour but d'introduire les outils d'analyse fonctionnelle et en particulier d'analyse spectrale utiles à l'étude du champ libre Gaussien continu.

B.1 Valeurs propres du laplacien

Commençons par rappeler le *principe de Poincaré* pour les opérateurs symétriques compacts dans les espaces pré-hilbertiens :

Théorème B.1.1 (Principe de Poincaré). *Soit X un espace préhilbertien et $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un opérateur symétrique compact. Alors il existe $(\lambda_k)_k$ une suite de valeurs propres de A , telles que $(|\lambda_k|)_k$ décroisse vers 0 et :*

- *Il existe une base orthonormée $(e_k)_k$ de vecteurs propres associés :*

$$Ae_k = \lambda_k e_k.$$

- $\forall v \in X$, on a $Av = \sum_k \lambda_k \langle v, e_k \rangle e_k$.

Une démonstration est donnée dans [11]. Fixons à présent $D \subset \mathbb{C}$ un sous domaine ouvert borné et suffisamment régulier de \mathbb{C} . On rappelle que l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(D)$ est muni d'une structure d'espace préhilbertien grâce au produit interne de Dirichlet (définition 2.1.2).

Définition B.1.1. L'espace de Sobolev $H_0^1(D)$ est défini comme le complété de $\mathcal{D}(D)$ pour la structure induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla}$. C'est un espace Hilbertien dont les éléments admettent des représentants dans $L_2(D)$.

Remarquons que l'espace $H_0^1(D) \subset \mathcal{D}'(D)$ est stable sous l'action du Laplacien Δ compris au sens faible :

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{D}'(D) \rightarrow \mathcal{D}'(D) \\ T \mapsto (\phi \mapsto T(\Delta\phi)) \end{cases} .$$

On notera désormais également $\Delta : H_0^1(D) \rightarrow H_0^1(D)$. D'autre part, si $u \in H_0^1(D)$, on constate que :

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda u \text{ au sens faible} &\Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(D), \int u \Delta \phi = -\lambda \int u \phi \\ &\Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(D), -2\pi \langle u, \phi \rangle_{\nabla} = -\lambda \int u \phi \\ &\Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(D), 2\pi \langle u, \phi \rangle_{\nabla} = \lambda \langle u, \phi \rangle_{L_2}, \end{aligned}$$

où la deuxième ligne utilise un argument de densité des fonctions tests dans $H_0^1(D)$ pour pouvoir appliquer l'identité de Green Gauss à $u \in H_0^1(D)$. On déduit alors également par densité que u est une fonction propre associée à l'opérateur $-\Delta$ si et seulement si :

$$\forall v \in H_0^1(D), \frac{2\pi}{\lambda} \langle u, v \rangle_{\nabla} = \langle u, v \rangle_{L_2}.$$

La fonction $f_u : v \mapsto \langle u, v \rangle_{L_2}$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(D)$. On déduit par théorème de représentation de Riesz qu'il existe un vecteur A_u tel que :

$$\langle u, v \rangle_{L_2} = \langle A_u, v \rangle_{\nabla}.$$

Remarquons que $A : u \mapsto A_u$ est clairement linéaire. Il vient finalement que u est une fonction propre associée à l'opérateur $-\Delta$ si et seulement si :

$$\forall v \in H_0^1(D), \langle \frac{2\pi}{\lambda} u - Au, v \rangle_{\nabla} = 0 \Leftrightarrow Au = \frac{2\pi}{\lambda} u.$$

L'application A est symétrique car $\langle Au, v \rangle_{\nabla} = \langle u, v \rangle_{L_2} = \langle Av, u \rangle_{\nabla}$ et injective car $\langle Au, u \rangle_{\nabla} = \|u\|_{L_2}^2$. On a d'autre part :

$$\|Au\|_{\nabla}^2 = \int_D u Au \leq \|u\|_{L_2} \|Au\|_{L_2},$$

comme l'ouvert D est borné, on peut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $\forall u \in H_0^1(D), \|u\|_{L_2} \leq C \|\nabla u\|_{L_2} = C \|u\|_{\nabla}$ (on parle parfois d'inégalité de Poincaré). En particulier, on en déduit ici que :

$$\|Au\|_{\nabla}^2 = \int_D u Au \leq C \|u\|_{L_2} \|Au\|_{\nabla}.$$

Et donc $\|Au\|_{L_2} \leq C \|u\|_{L_2} \leq C^2 \|u\|_{\nabla}$. L'opérateur A est donc continu, on admet d'autre part que $H_0^1(D)$ s'injecte de façon compact dans $L_2(D)$ (théorème de Rellich Kondrachov). En particulier comme $\|Au\|_{\nabla} \leq C \|u\|_{L_2}$, on en déduit que A est compact. En appliquant le principe de Poincaré à A , et en utilisant le fait que les valeurs propres de A sont les inverses des valeurs propres de $-\Delta$ avec les mêmes vecteurs propres, on a donc montrer que :

Théorème B.1.2. *Il existe une énumération croissante $(\lambda_k)_k$ des valeurs propres de $-\Delta$ sur $H_0^1(D)$ et $(u_k)_k$ une famille orthonormée (pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla$) de vecteurs propres associés, tels que :*

$$\forall u \in H_0^1(D), -\Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, u_k \rangle_\nabla u_k.$$

On admettra que $\lambda_k \sim k^{\frac{2\pi}{\ell(D)}}$, où $\ell(D)$ est la mesure de Lebesgue de D .

Enfin constatons que pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\langle u_k, u_l \rangle_\nabla = -\frac{1}{2\pi} \langle u_k, \Delta u_l \rangle_{L_2} = \frac{\lambda_k}{2\pi} \langle u_k, u_l \rangle_{L_2}.$$

Autrement dit $\frac{\lambda_k}{2\pi} \langle u_k, u_l \rangle_{L_2} = \delta_{kl}$, on en déduit que la famille $((\lambda_k/2\pi)^{1/2} u_k)_k$ est orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2}$ et engendre $L_2(D)$ (par densité de $H_0^1(D)$ dans $L_2(D)$). C'est donc une base orthonormée de $(L_2(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2})$. On notera désormais :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, e_k = (\lambda_k/2\pi)^{1/2} u_k.$$

B.2 Espace de Sobolev $H_0^s(D)$

Soit $f \in \mathcal{D}(D)$ une fonction test, alors $(-\Delta)^n f$ est également une fonction test, d'après le théorème B.1.2., on a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} (-\Delta)^n f &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (-\Delta)^n f, u_k \rangle_\nabla u_k \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \langle f, u_k \rangle_\nabla u_k \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \langle f, e_k \rangle_{L_2} e_k. \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_k \lambda_k^{2n} \langle f, e_k \rangle_{L_2}^2 < \infty$ puis que :

$$\forall f \in \mathcal{D}(D), \forall s \in \mathbb{R}, \sum_k \lambda_k^{2s} \langle f, e_k \rangle_{L_2}^2 < \infty.$$

On peut donc légitimement définir :

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(D), \langle f, g \rangle_s := \frac{1}{(2\pi)^s} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \langle f, e_k \rangle_{L_2} \langle g, e_k \rangle_{L_2}.$$

Cela définit un nouveau produit scalaire sur $\mathcal{D}(D)$. Il coïncide avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2}$ si $s = 0$ et avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla}$ si $s = 1$:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_1 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle f, e_k \rangle_{L_2} \langle g, e_k \rangle_{L_2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \langle -\Delta f, e_k \rangle_{L_2} \langle g, e_k \rangle_{L_2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle -\Delta f, g \rangle_{L_2} = \langle f, g \rangle_{\nabla}, \end{aligned}$$

où la dernière ligne utilise la formule de Green Gauss. Les espaces de Sobolev sont alors définis comme les complétés de $\mathcal{D}(D)$ pour ces structures pré-hilbertiennes :

Définition B.2.1. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev $H_0^s(D)$ est le complété de $\mathcal{D}(D)$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$. Les $(H_0^s(D))_{s \in \mathbb{R}}$ forment une famille décroissante d'espaces et pour toute suite x_k de nombres réels, on a :

$$\sum_k x_k e_k \text{ converge dans } H_0^s(D) \Leftrightarrow \sum_k \lambda_k^s x_k^2 < \infty.$$

En particulier, on identifie $H_0^0(D) = L_2(D)$.

Considérons $f, g \in \mathcal{D}(D)$, et notons $f_k = \langle f, e_k \rangle_{L_2}$ et $g_k = \langle g, e_k \rangle_{L_2}$. On a :

$$\langle f, g \rangle_{L_2} \leq \left(\sum_k \lambda_k^s f_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k \lambda_k^{-s} g_k^2 \right)^{1/2}.$$

En particulier, si on fait tendre f vers un élément $\bar{f} = \sum_k x_k e_k \in H_0^s(D)$, on en déduit que l'on peut définir la forme linéaire :

$$T_{\bar{f}} : g \in \mathcal{D}(D) \mapsto \langle \bar{f}, g \rangle_{L_2} := \sum_k x_k g_k.$$

Comme $T_{\bar{f}}(g) \leq \|f\|_s \|g\|_{-s}$, et que la topologie induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ est clairement moins fine que la topologie usuelle sur $\mathcal{D}(D)$, on en déduit que $T_{\bar{f}}$ est une distribution. Les $H_0^s(D)$ s'identifient donc à des sous espaces de $\mathcal{D}'(D)$.

Bibliographie

- [1] Nathanaël BERESTYCKI. “Introduction to the Gaussian free field and Liouville Quantum Gravity”. In : (). URL : <http://www.statslab.cam.ac.uk/~beresty/Articles/oxford5.pdf>.
- [2] Nathanaël BERESTYCKI, Ellen POWELL et Gourab RAY. “A characterisation of the Gaussian free field”. In : *Probability Theory and Related Fields* 176.3-4 (2019), 1259–1301. ISSN : 1432-2064. DOI : [10.1007/s00440-019-00939-9](https://doi.org/10.1007/s00440-019-00939-9). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00440-019-00939-9>.
- [3] Lawler GREGORY F. *Conformally Invariant Processes in the Plane*. T. 114. American Mathematics Society, 2005. ISBN : 978-1-4704-1341-5.
- [4] Olav KALLENBERG. *Foundations of Modern Probability, 3rd edition*. Springer, 2021. ISBN : 978-1-4757-4015-8.
- [5] Richard KENYON. “Dominos and the Gaussian free field”. In : *Ann. Probab.*, 29(3) :1128–1137 (2001).
- [6] Russell LYONS et Yuval PERES. *Probability on Trees and Networks*. T. 42. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Available at <https://rdlyons.pages.iu.edu/>. Cambridge University Press, New York, 2016, p. xv+699. ISBN : 978-1-107-16015-6. DOI : [10.1017/9781316672815](https://doi.org/10.1017/9781316672815). URL : <http://dx.doi.org/10.1017/9781316672815>.
- [7] Biskup MAREK. “Extrema of the two-dimensional Discrete Gaussian Free Field”. In : *Random Graphs, Phase Transitions, and the Gaussian Free Field, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, arXiv :1712.09972 (2020). ISSN : 2194-1017. DOI : [10.1007/978-3-030-32011-9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-32011-9). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-32011-9>.
- [8] B. RIDER et B. VIRAG. “The Noise in the Circular Law and the Gaussian Free Field”. In : *International Mathematics Research Notices* (2010). ISSN : 1687-0247. DOI : [10.1093/imrn/rnm006](https://doi.org/10.1093/imrn/rnm006). URL : <http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnm006>.

- [9] FRIEDLI SACHA et VELENIK YVAN. *Statistical Mechanics of Lattice Systems, A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 2019. ISBN : 9781107184824, 1107184827.
- [10] Wendelin WERNER et Ellen POWELL. *Lecture notes on the Gaussian Free Field*. 2021. arXiv : [2004.04720](https://arxiv.org/abs/2004.04720) [[math.PR](#)].
- [11] Michel WILLEM. *Analyse Fonctionnelle Élémentaire*. Cassini, 2003. ISBN : 978-2-84225-066-9.