Courbes algébriques, surfaces de Riemann compactes

Ulysse Mounoud encadré par Yohan Brunebarbe

2021

Table des matières

1 Introduction

Nous allons étudier les courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$, en utilisant à la fois des outils algébriques et analytiques. Cela permet de donner des preuves assez courtes et élémentaires de résultats fondamentaux comme le théorème de

Riemann-Roch et de faire le lien entre les points de vue courbes algébriques et surfaces de Riemann compactes.

En effet la structure algébrique donne plus facilement des résultats d'existence ; par exemple l'existence de fonctions méromorphes non constantes devient triviale. La structure analytique permet au contraire d'utiliser des obstructions topologiques, et aussi des arguments d'intégration de formes ; éventuellement on pourra aussi utiliser un peu de cohomologie de Cech des faisceaux.

Enfin les résultats obtenus restent valides dans un cadre plus général. En fait l'étude des surfaces de Riemann compactes montre qu'elles s'obtiennent toutes comme des courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$. De plus les résultats obtenus resteront pour la plupart valables si on remplace $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos quelconque.

La première section contient des résultats préliminaires sur les courbes algébriques, et montre comment les courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$ portent naturellement une structure de surface de Riemann. Dans la deuxième section on voit comment définir le genre d'une courbe et démontrer le théorème de Riemann-Roch. Dans la dernière section on définit de manière analytique un objet important associé à une surface de Riemann compacte, sa jacobienne.

2 Préliminaires

Les deux premières sous-sections sont un simple rappel des définitions des variétés complexes et des variétés algébriques ; on peut sauter ce passage si ces notions sont déjà connues. Dans un troisième temps on donne quelques résultats sur les courbes algébriques, d'après [1]. Enfin on voit comment munir les courbes algébriques lisses sur $\mathbb{C}$ d'une structure de surface de Riemann (voir [3] pour plus de détails avec une approche élémentaire).

2.1 Surface de Riemann

2.1.1 Variétés complexes

Définition 1. *Une variété complexe de dimension n est un espace topologique dénombrable à l'infini (c'est-à-dire localement compact et σ-compact) muni d'un atlas de cartes sur $\mathbb{C}^n$, tel que les applications de changement de cartes soient des biholomorphismes, et cet atlas soit maximal pour cette propriété.*

Localement on a des coordonnées complexes $z_j = x_j + iy_j$, pour $1 \leq j \leq n$.

Définition 2. *Une application $f : X \to Y$ entre variétés complexes est holomorphe si elle est continue et holomorphe lue dans des cartes.*

Les fonctions holomorphes sont les applications holomorphes à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1. *Il y a un foncteur d'oubli des variétés complexes vers les variétés réelles orientées.*

Définition 3. *Le faisceau des fonctions holomorphes sur M est noté $\mathcal{O}_M^{an}$; pour tout ouvert $U \subset M$, $\mathcal{O}_M^{an}(U)$ est l'anneau des fonctions holomorphes sur U.*

Définition 4. *La donnée d'un fibré vectoriel holomorphe de rang n sur une variété complexe M est équivalente à la donnée d'un faisceau E en $\mathcal{O}_M^{an}$-module sur M qui est localement un $\mathcal{O}_M^{an}$-module libre de rang n ; i.e. en tout point $P \in M$ il existe un voisinage ouvert U tel que $E(U) \simeq \mathcal{O}_M^{an}(U)^n$ comme $\mathcal{O}_M^{an}(U)$-module.*

Définition 5. *Si M est une variété différentielle réelle on note TM et T^*M ses fibrés tangents et cotangents, et $TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $T^*M^{\mathbb{C}} = T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ leurs complexifiés.*

Si M est une variété complexe, alors son fibré tangent est muni d'une structure complexe, i.e. d'un isomorphisme de fibré vectoriel $J : TM \to TM$ tel que $J^2 = -Id$. Dans des coordonnées $z_j = x_j + iy_j$, J est donné par $J(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial y_j}$ et $J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Par dualité, le fibré cotangent est aussi muni d'une structure complexe.

On note TM^+ le sous-espace propre de J sur $TM^{\mathbb{C}}$ pour la valeur propre i, et TM^- pour la valeur propre $-i$. On définit de même T^*M^+ et T^*M^-. On a donc $T^*M^+ = (TM^-)^\perp$ et $T^*M^- = (TM^+)^\perp$. Ainsi TM^+ et T^*M^+ sont des fibrés vectoriels complexes duaux.

De plus TM^+ et T^*M^+ portent naturellement une structure de fibré vectoriel holomorphe. Les sections holomorphes de T^*M^+ sont localement de la forme fdg avec f et g holomorphes.

Ainsi dans des coordonnées z_j, une base de sections holomorphes de T^*M^+ est donnée par les $dz_j = dx_j + idy_j$, et une base de sections anti-holomorphes de T^*M^- par les $d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$. Les bases duales de TM^+ et TM^- sont $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j})$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})$.

Définition 6. *On note $\mathcal{E}^r$ le faisceau des r-formes différentielles lisses complexes, i.e. des sections de $\bigwedge^r T^*M^{\mathbb{C}}$. On note d la différentielle extérieure sur $\mathcal{E}^\cdot(M)$, et $\mathrm{H}^\cdot_{DR}(M, \mathbb{C})$ les groupes de cohomologie de De Rham associés, obtenus comme quotients des formes fermées par les formes exactes. Le produit extérieur noté $\wedge$ induit une structure d'algèbre graduée sur la cohomologie de De Rham.*

On note aussi Ω^r le faisceau des sections holomorphes du fibré holomorphe $\bigwedge^r T^*M^+$; ses sections sont les r-formes différentielles holomorphes, et on dispose encore de la différentielle extérieure.

On rappelle qu'on peut intégrer les k-formes sur les sous-variétés de dimension k et le long de toute application lisse d'un k-simplexe vers M, permettant de définir un morphisme vers la cohomologie singulière $\mathrm{H}^\cdot_{DR}(M, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^\cdot(M, \mathbb{C})$. C'est en fait un isomorphisme, aussi on identifiera souvent les deux par la suite.

Théorème 1 (De Rham)**.** *Sur une variété différentielle les cohomologie singulière et de De Rham à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont naturellement isomorphes comme algèbres graduées.*

2.1.2 Surfaces de Riemann

On s'intéresse maintenant à la dimension 1.

Définition 7. *Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1.*

Définition 8. *Une fonction méromorphe f sur une surface de Riemann X, est une fonction holomorphe en dehors d'un certain sous-ensemble discret $S \subset X$ et telle que $|f(x)| \to_{x \to S} +\infty$. On note $\mathcal{M}$ le faisceau des fonctions méromorphes.*

Une conséquence du théorème d'effacement des singularités est la suivante.

Proposition 2. *Les fonctions méromorphes sont exactement les applications holomorphes vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

On rappelle le comportement local d'une fonction holomorphe.

Définition/Propriété 1. *Si f est un application holomorphes non constante entre surfaces de Riemann connexes alors en tout point P il existe une carte U centrée en P et une carte V centrée en $f(P)$ dans lesquelles f s'écrit $z \mapsto z^k$. L'entier k est la multiplicité de f en P, notée $e(P)$.*

Si f est une fonction méromorphe, vue comme application vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors la valuation de f en P est $e(P)$ si P est un zéro de f, $-e(P)$ si P est un pôle de f, et nulle sinon. On la note $v_P(f)$.

On définit également :

Définition 9. *Si X est une surface de Riemann, on note simplement $\Omega = \Omega^1$, et les éléments de $\Omega(X)$ sont appelées différentielles holomorphes. On définit aussi $\Omega^{(1)}$ le faisceau des différentielles méromorphes : $\Omega^{(1)} = \Omega \otimes_{\mathcal{O}_X^{an}} \mathcal{M}$. On dispose encore de la dérivation d sur les fonctions méromorphes.*

Dans une coordonnée z, toute différentielle ω s'écrit $f(z)dz$ avec f holomorphe ou méromorphe selon le cas, et on définit la valuation de ω en P par $v_P(\omega) = v_P(f)$.

On s'intéressera par la suite aux surfaces de Riemann compactes. Dans ce cas, le principe du maximum donne :

Proposition 3. *Si X est une surface de Riemann compacte, alors $\mathcal{O}_X^{an}(X) = \mathbb{C}$.*

Par contre certains fibrés en droite comme Ω pourront avoir des sections globales.

2.2 Variétés algébriques

2.2.1 Variétés affines et projectives

Soit k un corps. On va définir les variétés affines et projectives sur k.

Définition 10. *Les espaces affines et projectifs de dimension n sur k sont respectivement les espaces $\mathbb{A}^n(k) = k^n$ et $\mathbb{P}^n(k) = \{$droites de $k^{n+1}\}$. Leurs anneaux de coordonnées (resp. de coordonnées homogènes) sont les anneaux $\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) = k[X_1, \ldots, X_n]$ (resp. $\Gamma_h(\mathbb{P}^n(k)) = k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$). Les zéros d'idéaux de $\Gamma(\mathbb{A}^n(k))$ (resp. d'idéaux homogènes de $\Gamma_h(\mathbb{P}^n(k))$) forment les fermés d'une topologie : la topologie de Zariski.*

L'espace projectif est un recollement d'espaces affines.

Proposition 4. *L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1 : \ldots : x_n, 1]$ est un homéomorphisme entre $\mathbb{A}^n(k)$ et l'ouvert $X_{n+1} \neq 0$ de $\mathbb{P}^n(k)$. Ainsi $\mathbb{P}^n(k)$ est recouvert par $n+1$ ouverts $U_i = \{X_i \neq 0\}$ homéomorphes à $\mathbb{A}^n(k)$.*

On rappelle quelques propriétés de base des anneaux de polynômes.

Théorème 2 (Hilbert)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien et factoriel.*

On précise maintenant la correspondance entre polynômes et lieu de leurs zéros.

Définition 11. *Si J est un idéal de $\Gamma(\mathbb{A}^n(k))$ (resp. un idéal homogène de $\Gamma_h(\mathbb{P}^n(k))$), on note $V(J)$ (resp. $V_h(J)$) leurs lieux des zéros. Si X est inclus dans un espace affine ou projectif, on note $I(X)$ (resp. $I_h(X)$) l'idéal des polynômes s'annulant sur X. Ainsi $V(I(X))$ est l'adhérence de X, et $I(V(J))$ est un idéal radiciel contenant J, et de même dans le cas projectif.*

Dans le cas algébriquement clos le théorème des zéros de Hilbert nous montre que la correspondance entre fermés et idéaux se passe au mieux.

Théorème 3 (Hilbert)**.** *On suppose que k est algébriquement clos.*

Soit X un espace affine et J un idéal de $\Gamma(X)$. Alors $I(V(J))$ est le radical de J.

Soit X un espace projectif et J un idéal homogène de $\Gamma_h(X)$. Si J contient tous les polynômes homogènes de degré assez grand, alors $V_h(J) = \emptyset$. Sinon $I_h(V_h(J))$ est le radical de J.

On suppose dorénavant que k est algébriquement clos.

Corollaire 1. *Soit X un espace affine. Les opérations V et I établissent une correspondance entre :*

1. *points de X et idéaux maximaux de $\Gamma(X)$;*
2. *fermés irréductibles de X et idéaux premiers de $\Gamma(X)$;*
3. *fermés de X et idéaux radiciels de $\Gamma(X)$.*

De même si X est projectif avec $\Gamma_h(X)$, en imposant de plus que les idéaux soient homogènes et ne contiennent pas tous les polynômes homogènes de degré assez grand.

Définition 12. *Soit X un espace affine (resp. projectif). Son corps de fonctions $K(X)$ est le corps $k(X_1, \ldots, X_n)$ (resp. $\{\frac{P}{Q}, P$ et Q homogènes de même degré dans $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]\}$). Si $f \in K(X)$ s'écrit comme une fraction irréductible $\frac{P}{Q}$ alors l'ensemble des pôles de f est $\mathrm{Poles}(f) = V(Q)$ (resp. $V_h(Q)$), et on peut évaluer f en tout point de X qui n'est pas un pôle.*

Les définitions précédentes se copient presque à l'identique pour définir les variétés affines et projectives.

Définition 13. *Une variété affine (resp. projective) intègre X sur k est un fermé irréductible de Zariski d'un espace affine (resp. projectif) Y sur k. Son anneau de coordonnées (resp. de coordonnées homogènes) est $\Gamma(X) = \Gamma(Y)/I(X)$ (resp. $\Gamma_h(X) = \Gamma_h(Y)/I_h(X)$). C'est un anneau intègre. On dispose toujours des applications V et I (resp. V_h et I_h) définis sur les idéaux de $\Gamma(X)$ (resp. idéaux homogènes de $\Gamma_h(X)$) et sur les sous-ensembles de X. La topologie de Zariski définie par V est bien la topologie induite.*

Remarque 1. *On pourrait considérer des fermés réductibles et des idéaux non radiciels, définissant ainsi des variétés non intègres.*

Le théorème 3 et son corollaire 1 restent valables si on remplace le mot espace par variété.

On définit facilement les morphismes de variétés affines ; pour les variétés projectives, on le fera plus tard dans un cadre plus général.

Définition 14. *Un morphisme d'espaces affines $\mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$ est une application polynômiale donnée par m polynômes en n variables.*

Un morphisme de variétés affines $f : X \to Y$ est la restriction et corestriction d'un morphisme entre les espaces affines dans lesquels X et Y sont plongés.

Proposition 5. *Il y a une équivalence de catégorie contravariante entre les k-algèbres intègres de type fini munies des morphismes de k-algèbres et les variétés affines (intègres) ; à toute variété affine on associe son anneau de coordonnées.*

Définition 15. *Soit X une variété affine (resp. projective) intègre. Son corps de fonctions $K(X)$ est le corps $Frac(\Gamma(X))$ (resp. $\{\frac{P}{Q}, P$ et Q homogènes de même degré dans $\Gamma_h(X)\}$). Si $f \in K(X)$, f peut avoir plusieurs écritures comme fraction irréductible. Ainsi l'ensemble de ses pôles est le fermé $\mathrm{Poles}(f) = V(\{Q, Qf \in \Gamma(X)\})$ (resp. $V(\{Q \in \Gamma_h(X), Qf \in \Gamma_h(X)\})$). On peut évaluer f en tout point de X qui n'est pas un pôle.*

Définition 16. *Soit X une variété affine ou projective. Soit U un ouvert de X. Alors l'anneau des fonctions régulières sur U est $\Gamma(U) = \{f \in K(X), \mathrm{Poles}(f) \cap U = \emptyset\}$. Si X est affine, la définition est cohérente.*

Si $P \in X$ alors l'anneau local en P est $\mathcal{O}_P(X) = \bigcap_{P \in U} \Gamma(U) = \{f \in K(X), P \notin \mathrm{Poles}(f)\}$. C'est un anneau local d'idéal maximal $\{f \in K(X), f(P) = 0\}$.

Remarque 2. *Dans le cas non intègre on ne peut pas définir le corps des fonctions rationnelles mais on peut toujours définir les anneaux de fonctions régulières et les anneaux locaux.*

La proposition suivante assure que les variétés projectives ressemblent localement à des variétés affines, et que les structures de faisceau induites sur les sous-variétés sont définies de manière compatible dans le cas affine et projectif.

Proposition 6. *L'homéomorphisme entre $\mathbb{A}^n(k)$ et $U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$ donne un isomorphisme de faisceau. De plus pour toute variété projective $Y \subset \mathbb{P}^n(k)$ la structure induite sur $Y \cap U_i$ par Y et par $\mathbb{A}^n(k) \simeq U_i$ sont les mêmes.*

Remarque 3. *Les variétés affines et projectives sont toutes deux obtenues à partir d'une seule k-algèbre, l'anneau de coordonnées (homogène). Cependant dans le cas projectif, cette anneau contient plus d'informations que la seule structure de variété qu'on va définir dans la section suivante. Ainsi le caractère extrinsèque des définitions qu'on a donné des fonctions régulières sur des variétés projectives expliquent la nécessité de la proposition 6.*

2.2.2 Variétés algébriques

Rappelons quelques définitions algébriques.

Définition 17. *Un espace localement annelé en k-algèbres est un espace topologique X muni d'un faisceau en k-algèbres O_X tel que les germes en tout point de X sont des anneaux locaux, aussi appelés tiges.*

Ainsi les variétés affines et projectives munies du faisceau Γ sont des espaces localement annelés.

Définition 18. *Un anneau local $(A, \mathcal{M}_A)$ domine un anneau local $(B, \mathcal{M}_B)$ si $B \subset A$ et $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}_B$*

Définition 19. *Un morphisme d'anneaux locaux $f : (A, \mathcal{M}_A) \to (B, \mathcal{M}_B)$, est un morphisme d'anneaux tel que B domine $f(A)$.*

Définition 20. *Un morphisme d'espaces localement annelé est la donnée d'une application continue $f : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceaux de k-algèbres $f^\sharp : O_Y \to f_*(O_X)$ qui induit un morphisme d'anneaux locaux sur les tiges.*

Finalement, on aboutit à la définition générale d'une variété algébrique, comme recollement de variétés affines.

Définition 21. *Une variété algébrique (non nécessairement intègre) sur k est un espace localement annelé (X, Γ_X) en k-algèbres qui admet un recouvrement fini par des ouverts X_i isomorphes à des variétés affines (non nécessairement intègres) comme espace localement annelé.*

Une variété algébrique est intègre si c'est un espace topologique irréductible et localement annelé en k-algèbres intègres. Une variété algébrique est réduite si elle est localement annelé en k-algèbres réduites.

On note $\mathcal{O}_{X,P}$ l'anneau local en P, aussi appelé tige en P.

Définition 22. *Un morphisme de variétés algébriques de X vers Y est un morphisme d'espaces localement annelé.*

Notre définition de morphisme étant locale, pour vérifier que $f : X \to Y$ est un morphisme il suffit de le faire sur un recouvrement affine.

Proposition 7. *Si X est une variété réduite, pour tout ouvert $U \subset X$ on dispose d'une injection de $\Gamma(U)$ dans l'ensemble des fonctions de U dans k. En particulier un morphisme de variétés intègres est la donnée d'un application continue $f : X \to Y$ telle que pour tout ouvert $W \subset Y$, la précomposition par f induit un morphisme $\Gamma(W) \to \Gamma(f^{-1}(W))$.*

Proposition 8. *Les variétés affines forment une sous-catégorie pleine des variétés algébriques. Les variétés projectives sont des variétés algébriques.*

Démonstration. La proposition 6 assure que les variétés projectives sont des variétés algébriques. Enfin un morphisme de variétés algébriques $f : X \to Y$ entre variétés affines donne un morphisme entre anneaux de coordonnées $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$. Alors f est nécessairement donné par $\mathrm{Spec}(\varphi)$. $\square$

Corollaire 2. *Comme attendu $Hom(X, \mathbb{A}^1(k)) \simeq \Gamma(X)$.*

On a une notion de sous-variété ouverte évidente. On définit un peu plus tard celle de sous-variété fermée.

Définition 23. *Une sous-variété ouverte de X est un ouvert de X muni du faisceau induit. Un ouvert affine est un ouvert de X isomorphe à une variété affine.*

Proposition 9. *Les ouverts affines forment une base de la topologie de Zariski de X.*

Cela découle du lemme suivant.

Proposition 10. *Soit X une variété affine et $f \in \Gamma(X)$. On note X_f l'ouvert $f \neq 0$. Alors X_f est affine, d'anneau de coordonnées $\Gamma(X_f) = \Gamma(X)[\frac{1}{f}]$.*

Ainsi définir la structure de faisceau sur X revient à la définir seulement sur les ouverts affines. On peut maintenant définir les sous-variétés fermées.

Définition 24. *Une sous-variété fermée réduite Z de X est un fermé de X, et son faisceau est défini ainsi : pour tout ouvert affine U de X, $\Gamma(U \cap Z) = \Gamma(U)/I(U \cap Z)$.*

Une sous-variété est une sous-variété ouverte d'une sous-variété fermée (i.e. l'intersection d'un fermé irréductible et d'un ouvert).

Les sous-variétés sont des variétés.

Ces relations de sous-variétés sont transitives. De plus tout cela est compatible avec les notions précédentes comme l'indique la proposition ci-dessous.

Définition/Propriété 2. *Une variété affine (resp. projective) est une sous-variété fermée d'un espace affine (resp. projectif).*

Une variété quasi-affine (resp. quasi-projective) est une sous-variété d'un espace affine (resp. projectif).

Les variétés quasi-affines sont quasi-projectives.

Définition 25. *Le corps de fonctions $K(X)$ d'une variété intègre X est la colimite des k-algèbres intègres $\Gamma(U)$, ou de manière équivalente le corps des fractions de $\Gamma(U)$ pour n'importe quel ouvert affine U non vide. Tout $f \in K(X)$ est défini sur un ouvert maximal, dont le complémentaire est $\mathrm{Poles}(f)$ l'ensemble des pôles de f.*

Tous les anneaux locaux sont des sous-anneaux de $K(X)$, et pour tout ouvert $U \subset K(X)$, on a $\Gamma(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$.

Définition 26. *La dimension d'une variété intègre est le degré de transcendance sur k de son corps de fonctions.*

Comme dans le cas affine, on a :

Proposition 11. *Soient f et g deux morphismes de variétés algébriques intègres. Si f et g coïncident sur un ouvert non vide, alors $f = g$.*

Corollaire 3. *Une sous-variété ouverte a le même corps de fonctions que sa variété d'origine.*

Proposition 12. *La dimension d'une sous-variété ouverte de X est égale à celle de X ; la dimension d'une sous-variété fermée propre est strictement inférieure à celle de X.*

Grâce à la proposition 11 on peut définir les morphismes rationnels.

Définition 27. *Un morphisme rationnel $f : X \to Y$ est un morphisme défini sur un ouvert non vide U de X ; deux morphismes rationnels sont égaux s'ils coïncident sur un ouvert non vide.*

Un morphisme est birationnel s'il admet un inverse comme morphisme rationnel.

Un morphisme (rationnel ou non) est dominant si son image est dense.

Proposition 13. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme rationnel dominant. Alors f induit un morphisme de k-algèbres $f^\sharp : k(Y) \to K(X)$.*

Réciproquement tout morphisme de k-algèbres $k(Y) \to K(X)$ définit un morphisme rationnel dominant $X \to Y$.

De plus f est défini en P si et seulement si il existe Q tel que $\mathcal{O}_P(X)$ domine $f^\sharp(\mathcal{O}_Q(X))$. Un tel Q est unique et $f(P) = Q$.

Proposition 14. *Il y a une équivalence de catégories contravariante entre les variétés algébriques intègres munies des morphismes rationnels dominants et les corps de degré de transcendance fini et de type fini sur k munis des morphismes de k-algèbres.*

2.3 Courbes algébriques

2.3.1 Courbes projectives, courbes lisses, courbes planes

On va s'intéresser spécifiquement aux courbes.

Définition 28. *Une courbe algébrique est une variété algébrique de dimension* 1.

Une courbe projective est un variété projective de dimension 1.

Une courbe affine (resp. projective) plane est une sous-variété fermée de $\mathbb{A}^2(k)$ *(resp.* $\mathbb{P}^2(k)$*) de dimension* 1.

Proposition 15. *La topologie de Zariski sur une courbe algébrique est la topologie cofinie.*

Démonstration. Tout fermé propre s'écrit comme union finie de fermés propres irréductibles. Ceux-ci sont de dimension 0, donc leur corps de fonctions est k, et ce sont des points. De plus, les singletons d'une variété sont toujours des fermés. □

Du théorème de l'élément primitif on déduit la proposition ci-dessous.

Proposition 16. *Toute courbe algébrique intègre est birationnellement équivalente à une courbe algébrique plane.*

Démonstration. Comme k est algébriquement clos, il existe x tel que $K(X)$ est une extension séparable finie de $k(x)$, ce qui permet d'appliquer le théorème de l'élément primitif. On écrit ainsi $K(X) = \mathrm{Frac}(k[x,y])$ et on utilise la proposition 14. □

On obtient facilement la proposition suivante.

Proposition 17. *Toute courbe projective plane C est définie par un polynôme homogène en trois variables non constant F, uniquement déterminé à une constante multiplicative près. Si la décomposition en facteurs irréductibles de F est $F = \prod F_i^{r_i}$ alors les $F_i^{r_i}$ sont les composantes de F. La variété C est intègre si et seulement si F est irréductible, et réduite si et seulement si pour tout i on a $r_i = 1$.*

L'étude locale d'une courbe plane C en un point P se ramène à l'étude en 0 d'une courbe affine plane définie par un polynôme $F(X,Y)$ s'annulant en 0, irréductible si la courbe est intègre. Si on écrit $F = F_m + \cdots + F_n$ avec F_i homogène de degré i, n le degré de F et $F_m \neq 0$, alors le comportement local est principalement dicté par F_m. On appelle m la multiplicité de C en P, et on dit que P est singulier si $m > 1$.

Dans le cas général, on peut poser les définitions suivantes, cohérentes avec ce qui vient d'être dit.

Définition 29. *Un point P d'une courbe C est non-singulier si $\mathcal{O}_P(C)$ est un anneau de valuation discrète (ce qui revient à demander que son idéal maximal soit principal) et singulier sinon. On note C^0 l'ensemble des points non-singuliers de C, et v_P^C la valuation sur $\mathcal{O}_P(C)$.*

Une courbe lisse est une courbe algébrique sans points singuliers.

Lorsqu'on parlera d'anneaux de valuation discrète on supposera toujours qu'ils contiennent k.

Proposition 18. *Si C est une courbe intègre, alors C^0 est un ouvert non-vide.*

Démonstration. Comme C est birationnellement équivalente à une courbe plane, il suffit de le vérifier pour une courbe affine plane définie par un polynôme irréductible $F(X,Y)$. Les points singuliers sont $V(F, F_X, F_Y)$. Or F_X ou F_Y est non nul, donc premier avec F. C'est évident en caractéristique nulle ; en caractéristique positive p on utilise que les polynômes en X^p et Y^p sont réductibles grâce au morphisme de Frobenius. Ainsi $V(F, F_X, F_Y)$ est un fermé propre de $V(F)$, i.e. un ensemble fini. □

Proposition 19. *Une courbe intègre est lisse si et seulement si pour tout ouvert U, l'anneau $\Gamma(U)$ est intégralement clos.*

Démonstration. Les anneaux de valuation discrète sont intégralement clos. De plus, l'intersection d'anneaux intégralement clos est un anneau intégralement clos. Comme $\Gamma(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_X(P)$, si la courbe est lisse les $\Gamma(U)$ sont intégralement clos.

On n'aura pas besoin du sens réciproque. □

La proposition suivante permet d'illustrer l'idée que les courbes projectives correspondent aux surface de Riemann compactes, en cela qu'elles contiennent assez de points.

Proposition 20. *Soit C une courbe projective intègre, L une extension finie de $k(C)$, et $k \subset R$ un anneau de valuation discrète de L. Alors il existe un unique $P \in C$ tel que R domine $\mathcal{O}_P(C)$.*

Démonstration. On note v la valuation induite par R sur L. On suppose que C est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}^n(k)$, et que $C \cap U_i \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$ (sinon C serait plongeable dans $\mathbb{P}^{n-1}(k)$).

Pour l'unicité, si par l'absurde R domine $\mathcal{O}_P(C)$ et $\mathcal{O}_Q(C)$, alors il existe $f \in k(C)$ tel que f s'annule en P et Q n'est pas un pôle de f^{-1}. Comme C est plongé dans un espace projectif, l'existence d'un tel f est claire. On a alors $v(f) > 0$ et $v(1/f) \geq 0$.

Pour l'existence, on écrit $\Gamma_h(C) = k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/I = k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, avec $x_i \neq 0$. Quitte à renommer les variables, on peut supposer qu'il existe i tel que $v(x_i/x_{n+1}) \geq v(x_j/x_k)$ pour tous j et k. Alors pour tout j on a $v(x_j/x_{n+1}) = v(x_i/x_{n+1}) - v(x_i/x_j) \geq 0$. Posons $C_* = C \cap U_{n+1}$. C'est une courbe affine et $\Gamma(C_*) = k[x_1/x_{n+1}, \ldots t, x_n/x_{n+1}]$. Donc $\Gamma(C_*) \subset R$.

Soit M l'idéal maximal de R, et $J = M \cap \Gamma(C_*)$. Alors J est un idéal premier propre donc définit un fermé irréductible non vide W de C_*. Si $J = 0$, alors tout élément non nul de $\Gamma(C_*)$ est inversible dans R, donc $K \subset R$. Mais alors L est entier sur R, et comme R est intégralement clos, $R = L$ ce qui est impossible. Donc J est non nul, W est un point P et $J = I(P)$. Ainsi si $f \in \Gamma(C_*)$ et $f(P) \neq 0$ alors f est inversible dans R. On en déduit que $\mathcal{O}_P(C_*) \subset R$. Puis comme $I(P) \subset M$, on a aussi $M_P(C_*) \subset M$, ce qui conclut. □

On obtient immédiatement les corollaires suivants.

Corollaire 4. *Le domaine de définition d'un morphisme rationnel d'une courbe vers une courbe projective contient tous les points non-singuliers.*

Corollaire 5. *Les morphismes rationnels entre courbes projectives lisses sont des morphismes.*

Corollaire 6. *Les points d'une courbe projective lisse X sont naturellement en bijection avec les anneaux de valuation discrètes de $K(X)$, via $P \mapsto \mathcal{O}_P(X)$.*

Pour ce dernier corollaire on utilise le lemme facile ci-dessous.

Lemme 1. *Si R_1 et R_2 sont deux anneaux de valuation discrète, R_1 domine R_2, et R_1 et R_2 ont même corps de fractions alors $R_1 = R_2$.*

2.3.2 Eclatement de points multiples ordinaires

Dans le cas d'une courbe plane, on peut en dire plus avec l'écriture $F = F_m + \cdots + F_n$. Comme F_m est homogène, il se décompose en produits de polynômes homogènes de degré 1 : $F_m = \prod_i L_i^{r_i}$. Les L_i sont les tangentes en P, de multiplicité r_i ; L_i est une tangente simple si $r_i = 1$. On dit que P est un point multiple ordinaire si toutes ses tangentes sont simples.

Les points multiples ordinaires sont des singularités faciles à traiter. On admet le théorème suivant, ainsi que le raffinement qui suit, obtenus par des transformations quadratiques du plan projectif dans [1].

Théorème 4. *Toute courbe algébrique intègre est birationnellement équivalente à une courbe projective plane à points multiples ordinaires.*

Proposition 21. *Soit X une courbe lisse, et $P_1, \ldots P_s$ des points de X. Alors il existe une courbe projective plane C à points multiples ordinaires et un morphisme birationnel $f : X \to C$ tel que $f(P_1), \ldots f(P_s)$ sont des points non-singuliers de C.*

Si X est une courbe projective lisse, d'après le corollaire 4 il existe donc un morphisme $f : X \to C$ vers une courbe projective plane à points multiples ordinaires, qui est un isomorphisme au dessus de C^0. Pour décrire ce morphisme localement, on va décrire explicitement comment éclater un point d'une courbe dans $\mathbb{A}^2$.

On considère donc C une courbe affine plane irréductible définie par un polynôme irréductible $F(X,Y)$. On pose $P_0=(0,0)$ et on suppose que X n'est pas tangente à C en P_0. On note n le degré de C et r la multiplicité de C en P_0 ,et on suppose que $r \geq 1$. On suppose de plus que P_0 est un point multiple ordinaire de C. Ainsi, si F_r est la forme de degré r de F alors on peut poser $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ distincts tels que $F_r=\prod_{i=1}^{r}(Y-\alpha_i X)$.

On pose $\psi:\mathbb{A}^2\to\mathbb{A}^2$ défini par $\psi(x,z)=(x,xz)$. Ainsi ψ est un application birationnelle du plan dans lui-même qui correspond à paramétrer les points par leurs abscisses et par leur pente $z=\frac{y}{x}$. Soit U le complémentaire de $V(X)$ dans $\mathbb{A}^2$. Alors ψ est isomorphisme de U dans lui-même.

Soit $C_0=C\cap U$. On pose $C'_0=\psi^{-1}(C_0)$, et C' l'adhérence de C'_O. On note $f:C'\to C$ la restriction de ψ à C'. Alors f est une équivalence birationnelle, car il induit un isomorphisme entre C_0 et C'_0.

La proposition suivante précise le comportement de f au dessus de P_0 ; on voit notamment que P a pour préimage l'ensemble de ses tangentes.

Proposition 22. 1. *Le polynôme $F'=\frac{1}{X^r}F(X,XZ)$ est irréductible et $C'=V(F')$.*

2. *Les antécédents de P_0 par g sont les $P_i=(0,\alpha_i)$ pour $1\geq i\geq r$. Les P_i sont des points lisses de C', n'ayant pas X pour tangente.*

3. *Il existe un voisinage ouvert affine C_1 de P_0 tel que $X_1=g^{-1}(C_1)$ est une courbe affine lisse, $f:X_1\to C_1$ est un morphisme surjectif et un isomorphisme au dessus de $C_1\smallsetminus P_0$, et $\Gamma(X_1)$ est un $\Gamma(C_1)$-module de type fini. De plus C_1 peut omettre un ensemble fini de points arbitraire.*

Démonstration. Pour le premier point, si $F'=GH$ alors $F=X^rG(X,\frac{Y}{X})H(X,\frac{Y}{X})$, ce qui contredit l'irréductibilité de F (utiliser la factorialité et le fait que F' et donc G et H ne sont pas divisible par X pour répartir les puissances de X dans l'expression de droite). De plus $C'_0\subset V(F')$, donc $C'=V(F')$, par irréductibilité de F'.

Pour le deuxième point, on voit qu'on a une écriture de la forme $F'=F_r(1,Z)+XG$, avec $F_r(1,Z)=\prod_{i=1}^{r}(Z-\alpha_i)$. Les antécédents de P_0 sont les points de $V(F',X)$ donc les $(0,\alpha_i)$. De plus en P_i on voit qu'on a l'écriture $F'=(Z-\alpha_i)H+XG$ avec $H(P_i)\neq 0$, d'où on déduit que F' n'a qu'une tangente simple en P_i donnée par $(Z-\alpha_i)H(P_i)+XG(P_i)$.

Pour le dernier point, on écrit $F=\sum_{i+j\geq r}a_{ij}X^iY^j$ et on pose $H=\sum a_{0j}Y^{j-r}$ avec h son image dans $\Gamma(C)$. On note S l'ensemble des points singuliers de C distincts de P_0, ainsi que les points de $C\cap V(X)$ distincts de P_0, auxquels on rajoute éventuellement les points qu'on souhaite exclure. On considère $g\in\Gamma(C)$ qui s'annule sur S mais pas en P_0. Avec les notations de la proposition 10 on pose $C_1=C_{gh}$. Comme $gh(P_0)\neq 0$, on voit que C_1 est un voisinage affine de P dans C qui n'intersecte pas S. De plus on pose $X_1=C'_{gh}=f^{-1}(C_1)$, qui est donc aussi affine. Ici gh est vu comme un élément de $\Gamma(C')$ via l'inclusion donnée par f.

On voit que $\Gamma(C') = \Gamma(C)[z]$, et donc d'après la proposition 10 on a $\Gamma(X_1) = \Gamma(C_1)[z]$. De plus $z^n F'(\frac{y}{z}, z) = 0$, ce qui s'écrit $\sum_{i+j\geq r} a_{ij} y^{i+j-r} z^{r+n-i}$. Donc $z^{r+n} + b_1 z^{r+n-1} + \cdots + b_{n+r} = 0$ avec $b_i = (\sum_j a_{ij} y^{i+j-r}) h^{-1}$. Finalement $\Gamma(X_1)$ est un $\Gamma(C_1)$-module de type fini.

De plus comme $C_1 \cap V(X) = P_0$, on sait que $f : X_1 \setminus \{P_1, \ldots, P_r\} \to C_1 \setminus \{P_0\}$ est un isomorphisme. On en déduit que X_1 est lisse, et $f(X_1) = C_1$. □

Revenons à $f : X \to C$. D'après le corollaire 4, comme f est birationnel, f est un isomorphisme au dessus des points non-singuliers de C. En un point multiple ordinaire P, en se plaçant dans un ouvert affine de $\mathbb{P}^2$, on obtient un voisinage de P qui est une courbe affine plane. Alors d'après la proposition 22, il existe un ouvert C_1 contenant P, et une courbe lisse X_1 avec un morphisme surjectif $X_1 \to C_1$ qui est un équivalence birationnelle. Par compositions on obtient alors un morphisme birationnel $i : X_1 \to X$. D'après le corollaire 4 c'est un morphisme. On a donc le diagramme commutatif suivant, où tous les morphismes sont des équivalences birationnelles.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ C_1 & \longrightarrow & C \end{array}$$

En fait on a mieux : X_1 est isomorphe à son image, qui est un ouvert de X. En effet on voit facilement que l'image de $f \circ i$ omet au plus un nombre fini de points de C, donc l'image de i omet au plus un nombre fini de points de $f^{-1}(C^0)$, donc est ouverte. De plus comme i est birationnel on peut identifier $K(X)$ et $k(X_1)$. Pour tout point $P \in X_1$, il existe un unique $Q \in X$ tel que $\mathcal{O}_X(Q)$ domine $\mathcal{O}_{X_1}(P)$. Comme ces deux anneaux sont des anneaux de valuation discrètes de même corps de fractions, on en déduit qu'ils sont égaux d'après le lemme 1. Or les anneaux locaux déterminent totalement la structure d'une courbe algébrique : les ouverts sont les ensembles cofinis et pour tout ouvert U on a $\mathcal{O}(U) = \cap_{P\in U} \mathcal{O}(P)$. Ainsi i est un isomorphisme entre X_1 et l'ouvert $i(X_1)$. Par la suite on identifie C_1 et X_1 à des ouverts de C et de X.

Enfin, $X_1 = f^{-1}(C_1)$. En effet le morphisme f et l'inclusion $X_1 \subset f^{-1}(C_1)$ induisent les inclusions $\Gamma(C_1) \subset \Gamma(f^{-1}(C_1)) \subset \Gamma(X_1)$. Comme $\Gamma(f^{-1}(C_1))$ est intégralement clos d'après la proposition 19, et $\Gamma(X_1)$ est entier sur $\Gamma(C_1)$ d'après la proposition 22, on en déduit que $\Gamma(f^{-1}(C_1)) = \Gamma(X_1)$. Si par l'absurde $Q \in f^{-1}(C_1) \setminus X_1$, on considère $h \in K(X)$ d'ensemble de pôles S tel que $Q \in S$, mais les antécédents de P dans X_1 ne sont pas des pôles. Alors on peut considérer $C_2 \subset C_1$ et $X_2 \subset X_1$ tels que dans la proposition 22 tels que X_2 n'intersecte pas S. Mais alors $h \in \Gamma(X_2) = \Gamma(f^{-1}(C_2)$, mais $Q \in f^{-1}(C_2)$ ce qui est contradictoire.

On résume tout cela dans la proposition ci-dessous.

Proposition 23. *Soit $f : X \to C$ comme précédemment. On suppose que $P = [0 : 0 : 1]$ est un point multiple ordinaire de C. On pose $C_a = C \setminus V(Z) \subset$*

$\mathbb{A}^2$. *Alors, en reprenant les notations de la proposition 22, il existe un ouvert $P \in W \subset C$ tel que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} C'_a \supset X_1 & \xrightarrow{\sim} & f^{-1}(W) \subset X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ C_a \supset C_1 & \xrightarrow{\sim} & W \subset C \end{array}$$

Corollaire 7. *Si P est un point multiple ordinaire de C, alors P a $m_P(C)$ antécédents par f.*

2.3.3 Diviseurs

On se donne X une courbe projective lisse et C une courbe projective plane intègre à points multiples ordinaires avec $f : X \to C$ un morphisme birationnel comme précédemment.

Définition 30. *Le groupe des diviseurs sur X noté* $\mathrm{Div}(X)$ *est le groupe abélien libre sur X, ou de manière équivalente le groupe des fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et à support fini. Le degré d'un diviseur D est* $\deg(D) = \sum_{P \in X} D(P)$. *Le diviseur de $g \in K(X)^*$ est défini par* $\mathrm{div}(g)(P) = v_P(f)$ *; les diviseurs de cette forme sont appelés les diviseurs principaux.*

Définition 31. *Pour tout $Q \in X$, et pour tout polynôme homogène non nul $G(X, Y, Z)$, on pose $v_Q^X(G) = v_Q^X(\frac{g}{h})$, où H est n'importe quel polynôme homogène de même degré que G ne s'annulant pas en Q, g et h sont les classes de G et H dans $\Gamma_h(C)$ et $\frac{g}{h} \in k(C) = K(X)$. Le diviseur de G est* $\mathrm{div}(G)(Q) = v_Q^X(G)$

On peut facilement obtenir les lemmes suivants.

Lemme 2. *1.* $\mathrm{div}(gh) = \mathrm{div}(g) + \mathrm{div}(h)$

2. $\mathrm{div}(GH) = \mathrm{div}(G) + \mathrm{div}(H)$

Lemme 3. *Si $Q \in X$ et $P = f(Q)$, alors $v_Q^X(G) \geq m_P(G)$.*

Démonstration. On peut supposer que $P = [0 : 0 : 1]$ et $G = \sum_{i=m_P(G)}^{d} Z^{d-i} G_i(X, Y)$ avec G_i homogène de degré i. On a bien sûr $v_Q(X) > 0$ et $v_Q(Y) > 0$ car P est un zéro de X et de Y. Le comportement de la valuation avec la somme et le produit suffisent à conclure. □

Lemme 4. *Si L est une droite dans $\mathbb{P}^2(k)$ intersectant C en des points non singuliers, et $L \neq C$ alors* $\deg(\mathrm{div}(L)) = n$.

Démonstration. On peut supposer que $L = Z$, et $[0 : 1 : 0] \notin C$. Alors $G(Y) = F(1, Y, 0)$ est de degré n. De plus, si on note $P_a = [1 : a : 0]$, alors $v_{P_a}^X(L) = v_{P_a}^C(L)$ car f est un isomorphisme au dessus de C^0. On vérifie ensuite que $v_{P_a}^C(L) = \dim \mathcal{O}_{P_a}(\mathbb{P}^2)/(F, L) = \dim \mathcal{O}_{P_a}(L)/(F) = m_a(G)$. Finalement $\deg(\mathrm{div}(L))$ est le nombre de racines de G, c'est à dire n. □

Définition 32. *On dit qu'une droite L intersecte transversalement C si leur intersection est constituée d'exactement n points simples de C.*

2.4 Structure analytique d'une courbe algébrique lisse

L'objectif est de montrer la proposition ci-dessous.

Proposition 24. *Soit X une courbe projective lisse intègre. Alors X est naturellement une surface de Riemann compacte connexe.*

Il s'agit principalement de voir que nos définitions algébriques de la lissité et de la dimension correspondent bien à celles analytiques, et que l'irréductibilité pour la topologie de Zariski implique la connexité pour la topologie de variété complexe, dite topologie analytique.

Commençons donc par définir la topologie analytique sur une variété algébrique sur $\mathbb{C}$.

Définition 33. *On appelle topologie analytique la topologie usuelle sur $\mathbb{C}^n$ et sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.*

Lemme 5. *Les morphismes de variétés affines sont continus pour la topologie analytique induite par un plongement dans un espace affine.*

Démonstration. Les morphismes d'espaces affines sont continus pour la topologie analytique comme applications polynômiales ; donc les morphismes de variétés algébriques sont continus pour la topologie analytique. $\square$

Comme corollaire immédiat on obtient la proposition suivante.

Définition/Propriété 3. *Toute variété algébrique sur $\mathbb{C}$ hérite d'une topologie analytique, plus fine que celle de Zariski. Les morphismes de variétés algébriques sont continus pour la topologie analytique. La topologie analytique sur une sous-variété est bien la topologie analytique induite.*

Proposition 25. *Les variétés projectives sont compactes.*

On définit maintenant la structure de variété complexe sur une courbe.

Lemme 6. *Soit X une courbe algébrique lisse. Les ouverts isomorphes à des ouverts lisses de courbes affines planes forment une base de la topologie de Zariski de X.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 21. $\square$

Lemme 7. *Soit C une courbe affine plane, et C^0 l'ensemble de ses points non-singuliers. Alors C^0 est naturellement muni d'une structure de surface de Riemann.*

Démonstration. La courbe C^0 est le lieu des zéros d'un polynôme $F(X,Y)$ restreint à un ouvert de $\mathbb{C}^2$ sur lequel dF ne s'annule pas. Ainsi F est une submersion holomorphe, et C^0 est une sous-variété complexe de dimension 1 d'un ouvert de $\mathbb{C}^2$. $\square$

Lemme 8. *Soient C_1 et C_2 deux ouverts lisses de courbes affines planes, et $f : C_1 \to C_2$ un morphisme de courbes algébriques. Alors f est une application holomorphe.*

Démonstration. Soit $P \in C_1$. Alors chaque coordonnée de f s'écrit comme une fraction rationnelle en deux variables $\frac{Q_1}{Q_2}$ avec $Q_2(P) \neq 0$. Alors la fraction $\frac{Q_1}{Q_2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^2 \setminus V(Q_2)$, et se restreint donc en une application holomorphe sur un voisinage de P dans C_1. $\square$

Proposition 26. *On dispose d'un foncteur des courbes algébriques lisses sur $\mathbb{C}$ vers les surfaces de Riemann. Il se restreint en une équivalence de catégories entre les courbes projectives lisses et les surfaces de Riemann compactes.*

Démonstration. On recouvre X par tous les ouverts U_i isomorphes à des ouverts lisses de courbes affines planes. On munit chaque U_i d'une structure de surface de Riemann. Les applications de transitions entre les U_i sont des biholomorphismes d'après le lemme précédent, donc X est muni d'une structure de surface de Riemann.

Un morphisme de variétés algébriques entre deux courbes algébriques lisses s'écrit localement comme un morphisme entre ouverts lisses de courbes affines planes, donc est holomorphe.

Enfin les courbes projectives sont compactes. Le fait qu'on obtienne une équivalence de catégorie est mentionné, mais non prouvé. On ne l'utilisera pas. $\square$

On peut maintenant relier la notion d'irréductibilité et de connexité.

Proposition 27. *Les variétés algébriques irréductibles sont connexes pour la topologie analytique.*

Démonstration. On donne une preuve pour les courbes projectives lisses. On a besoin pour cela de la forme faible du théorème de Riemann-Roch donnée dans le corollaire 14, qui est démontré dans la section suivante par des moyens uniquement algébriques. Une de ses conséquences est qu'il existe une fonction $f \in K(X)$ non constante ayant un seul pôle. Par l'absurde, si X n'est pas connexe alors on a une écriture $X = M_1 \sqcup X_2$ avec X_1 et X_2 des surfaces de Riemann compactes. Mais alors, f se restreint en une fonction holomorphe sur X_1 ou X_2, donc est constante d'après la proposition 3. Ainsi f coïncide avec une application constante en une infinité de points, donc sur un ensemble dense pour la topologie de Zariski, donc f est constante. $\square$

Remarque 4. *On pourrait sans trop de difficultés définir une notion de variété algébrique lisse et montrer qu'elles sont naturellement munies d'une structure de variété complexe. La définition de point non singulier doit seulement assurer que dans un voisinage affine, la variété s'écrit comme lieu des zéros d'une submersion holomorphe.*

Les fonctions régulières étant les morphismes vers $\mathbb{C}$, et les fonctions rationnelles étant les morphismes vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ d'après le corollaire 5, on a évidemment :

Corollaire 8. *Les fonctions régulières sont holomorphes et les fonctions rationnelles sont méromorphes.*

Lemme 9. *Soit $P \in X$. Il existe $t \in K(X)$ tel que P est un zéro d'ordre analytique 1 en P.*

Démonstration. Localement on est ramené à un ouvert lisse d'une courbe plane, et il suffit de prendre pour t un polynôme de degré 1 s'annulant en P, et qui n'est pas tangent à la courbe en P. □

Corollaire 9. *Les valuations algébriques et analytiques coïncident sur $\mathcal{O}_P(X)$.*

On donne une définition algébrique des différentielles, valable sur k algébriquement clos quelconque.

Définition/Propriété 4. *Soit X une courbe algébrique intègre sur k, et K son corps de fonctions. On note $\Omega_{K/k}$ le K espace vectoriel des différentielles de K sur k. C'est le K espace vectoriel engendré par les éléments df pour $f \in K$ et quotienté par les relations suivantes pour $\lambda \in k, f \in K, g \in K$:*

$$d\lambda = 0 \ ; \ d(f+g) = df + dg \ ; \ d(fg) = fdg + gdf.$$

Alors $\Omega_{K/k}$ est un K espace vectoriel de dimension 1. Pour ω_1 et ω_2 non nul dans $\Omega_{K/k}$ on définit $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in K$ par $\omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}\omega_2$.

Définition/Propriété 5. *On définit la valuation d'un élément ω de $\Omega_{K/k}$ comme suit. Pour tout point $P \in X$, on note v_P la valuation discrète sur K associée, et $t_P \in K$ une uniformisante en P, i.e. telle que $v_P(t_P) = 1$. On pose $v_P(\omega) = v_P(\frac{\omega}{dt_P})$. Cette définition ne dépend pas du choix de l'uniformisante. On dit que P est un pôle de ω si $v_P(\omega) < 0$.*

On note $\Omega[K]$ le k espace vectoriel des différentielles sans pôles.

Proposition 28. *On a une inclusion des différentielles algébriques dans les différentielles méromorphes donnée par : $(fdg)^{an} = f^{an}dg^{an}$.*

Les définitions algébriques et analytiques de l'ordre d'une différentielle en un point coïncident.

Démonstration. La relation de Leibniz montre que le morphisme $\omega \mapsto \omega^{an}$ est bien défini. C'est un morphisme de $K(X)$ espaces vectoriel. Comme ce morphisme est non nul et $\Omega_{K(X)/k}$ est de dimension 1, ce morphisme est injectif

De plus si t est une uniformisante en P alors : $v_P(\omega^{an}) = v_P(\frac{\omega^{an}}{dt^{an}}) = v_P((\frac{\omega}{dt})^{an}) = v_P(\frac{\omega}{dt}) = v_P(\omega)$.

□

On gardera la notation ω plutôt que ω^{an} par la suite.

3 Genre(s)

3.1 Introduction

On a vu que dans le cas où $k = \mathbb{C}$, toute courbe projective lisse X est naturellement une surface de Riemann compacte. En particulier, c'est une variété topologique compacte orientée de dimension 2, lesquelles sont entièrement classées par un invariant topologique, le genre. Cet invariant topologique correspond en fait à un invariant analytique, et même à un invariant algébrique fondamental pour les courbes algébriques sur un corps algébriquement clos k quelconque. On donne ainsi trois définitions du genre. L'objectif de cette section est de montrer qu'elles coïncident lorsque $k = \mathbb{C}$.

Définition 34. *Le genre g_{top} d'une surface topologique compacte orientée X est défini par $g_{top} = \frac{1}{2} \dim H^1(X, \mathbb{Z})$*

Remarque 5. *Toute surface de genre $g \in \mathbb{N}$ est homéomorphe à un tore à g trous tel que $H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$.*

Définition 35. *Le genre g_{an} d'une surface de Riemann compacte X est défini par $g_{an} = \dim_k \Omega(X)$.*

Définition 36. *Le genre g_{al} d'une courbe algébrique intègre sur k de corps de fonctions K est défini par $g_{al} = \dim_k \Omega[K]$.*

Une première manière de voir que ces définitions sont cohérentes lorsque $k = \mathbb{C}$ est de passer par la cohomologie de De Rham, qui est la même que la cohomologie singulière d'après le théorème de De Rham, et par un cas particulier de la décomposition de Hodge : $H^1_{DR}(X, \mathbb{C}) = \Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)}$. Enfin on a l'égalité $\Omega[K] = \Omega(X)$.

Nous allons donner une preuve plus élémentaire de la cohérence des définitions pour X une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$. La stratégie est la suivante. On remarque d'abord que $g_{al} \leq g_{an}$. Puis on montre assez facilement que $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \subset H^1_{DR}(X, \mathbb{C})$. D'après le théorème de De Rham on obtient ainsi $g_{an} \leq g_{top}$. Il reste donc à montrer $g_{top} \leq g_{al}$.
Pour cela on passe par la caractéristique d'Euler, qui est $\chi(X) = 2 - 2g_{top}$. On montre que $\chi(X)$ peut aussi se définir algébriquement en appliquant la formule d'Hurwitz à une fonction méromorphe vue comme revêtement ramifié $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Enfin, en passant par une courbe projective plane birationnellement équivalente à X, on montre que $g_{al} \geq \frac{-1}{2}\chi + 1$, ce qui achève la preuve.

3.2 Premières inégalités

Posons X une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$. Avec la proposition suivante on obtient comme annoncé $g_{al} \leq g_{an} \leq g_{top}$.

Proposition 29. *L'application $\Omega(X) \to \mathrm{H}^1_{DR}(X, \mathbb{C})$ est injective et via cette injection on a $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \subset H^1_{DR}(X, \mathbb{C})$.*

Démonstration. Le produit extérieur de formes différentielles induit le cup product $\mathrm{H}^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{H}^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \to \mathrm{H}^2_{DR}(X,\mathbb{C})$ noté $\alpha \wedge \beta$. De plus comme X est une surface compacte orientée, l'intégration sur X fournit un isomorphisme $\mathrm{H}^2_{DR}(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ défini par $\omega \mapsto \int_X \omega$. Enfin on dispose naturellement d'isomorphismes $\mathrm{H}^i_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^i_{DR}(X,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, qui permettent de définir la conjugaison sur $\mathrm{H}^1_{DR}(X,\mathbb{C})$, notée $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$.

Soit $\alpha \in \Omega(X)$. En coordonnées locales holomorphes $z = x + iy$, on peut écrire $\alpha = f dz$ avec f holomorphe, et $\overline{\alpha} = \overline{f} d\overline{z}$. Alors localement $i\alpha \wedge \overline{\alpha} = i|f|^2 dz \wedge d\overline{z} = 2|f|^2 dx \wedge dy$. En particulier $\int_X i\alpha \wedge \overline{\alpha} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\alpha = 0$. Donc $\Omega(X) \to \mathrm{H}^1_{DR}(X,\mathbb{C})$ est injective.

De plus si $\alpha \in \overline{\Omega(X)}$, alors $\int_X i\alpha \wedge \overline{\alpha} = -\int_X i\overline{\alpha} \wedge \alpha \leq 0$. On en déduit $\Omega(X) \cap \overline{\Omega(X)} = 0$. □

Ainsi par exemple tous les genres de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont nuls car son genre topologique est nul, ce qu'on aurait pu vérifier directement par le calcul.

3.3 Caractéristique d'Euler

On rappelle la notion classique de topologie algébrique de caractéristique d'Euler dans le cas particulier d'une surface compacte orientée.

Définition/Propriété 6. *La caractéristique d'Euler d'une surface compacte orientée X est $\chi(X) = 2 - 2g_{top}$. Si X est muni d'une triangulation ayant S sommets, A arêtes et T triangles, alors $\chi(X) = S - A + T$.*

Les propositions suivantes permettent de faire apparaître la caractéristique d'Euler comme invariant analytique et algébrique.

Proposition 30. *Soit $f : X \to Y$ un application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes connexes. Alors le nombre d'antécédents comptés avec multiplicité est une constante n, appelée le degré de f.*

On appelle points ramifiés les points de Y ayant des antécédents non simples. L'ensemble des points ramifiés est fini, et f est un revêtement au dessus du complémentaire de cet ensemble.

Démonstration. Soit $P \in Y$ d'antécédents $P_1, \dots P_k$ et de multiplicité $e(P_1), \dots, e(P_k)$, et $n(P) = \sum e(P_i)$. Tout d'abord $n(P)$ est bien défini et fini car sinon par compacité de X, il existe un point d'accumulation de $f^{-1}(P)$ et donc f est l'application constante égale à P, d'après le principe des zéros isolés. Ensuite, en utilisant l'écriture locale $z \mapsto z^k$, on voit qu'il existe un voisinage ouvert U de P et un voisinage ouvert V de $f^{-1}(P)$ tel que tout point de U a exactement $n(P)$ antécédents avec multiplicité dans V. Par l'absurde, s'il existe une suite Q_i de points de Y tendant vers P tels que $f^{-1}(Q_i)$ n'est pas inclus dans V, alors par compacité de X on trouve un point d'accumulation de $f^{-1}(Q_i)$ et donc un antécédent de P qui n'est pas dans V.

On en déduit que $P \mapsto n(P)$ est localement constante et donc constante par connexité.

L'ensemble des points ramifiés est un fermé discret d'un ensemble compact, donc est fini. De plus en dehors de ces points f est un homéomorphisme local propre, donc un revêtement. $\square$

Corollaire 10. *Soit* $f \in \mathcal{M}(X)$*. Alors* $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$

Démonstration. En effet f est un morphisme vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et 0 et ∞ ont autant d'antécédents. $\square$

Définition 37. *Si* $\omega \in \Omega^{(1)}(X)$ *on définit le diviseur de* ω *par* $\operatorname{div}(\omega) = \sum_{P \in X} v_P(\omega)P$*, et les diviseurs de cette forme sont appelés les diviseurs canoniques. Ils sont tous de même degré, et on définit donc* $\chi_a = -\deg(W)$*, où* W *est un diviseur canonique.*

Démonstration. Comme $\operatorname{div}(f\omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega)$, la cohérence de cette définition découle du lemme précédent. $\square$

On montre maintenant la formule d'Hurwitz.

Théorème 5 (Formule d'Hurwitz)**.** *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme non constant de surfaces de Riemann compactes. Alors :*

$$\chi(X) = \chi(Y) \times n - \sum_{P \in X} (e(P) - 1)$$

$$\chi_a(X) = \chi_a(Y) \times n - \sum_{P \in X} (e(P) - 1)$$

Démonstration. 1. On fixe une triangulation sur Y telle que les points de ramifications sont des sommets de cette triangulation, et telle que tout 2-simplexe ouvert D de cette triangulation est tel que $f^{-1}(D)$ est homéomorphe à n copies disjointes de D. Plus précisément en un point de ramification P de f, P a des antécédents $Q_1, \dots, Q_r$. Il existe une carte $U \simeq \mathbb{D}$ centrée en P et des voisinages ouverts disjoints $V_i \simeq \mathbb{D}$ des Q_i tels que $f(V_i) \subset U$ et dans les cartes V_i et U, f s'écrive $z \mapsto z^{k_i}$. On prend P comme sommet de la triangulation, et on triangule $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ vu comme inclus dans U en 4 quarts de disques par exemple. Puis on étend cette triangulation en dehors des points de ramification, en prenant des faces assez petites.

Alors cette triangulation se tire en arrière en une triangulation sur X. Il suffit de le vérifier localement où c'est évident vu l'expression de f et de la triangulation.

Enfin si la triangulation sur Y a S sommets, A arêtes et T triangles, alors $\chi(Y) = S - A + T$. La triangulation sur X a alors nT triangles, nA arêtes et $nS - \sum_{P \in X}(e(P) - 1)$, donc $\chi(X) = n\chi(Y) - \sum_{P \in X}(e(P) - 1)$.

2. Soit ω une différentielle méromorphe sur Y. Alors $f^*\omega$ est une différentielle méromorphe sur X. De plus si z et z' sont des coordonnées holomorphes centrée en $P \in X$ et $f(P)$, telles que $z' \circ f = z^k$ alors localement $\omega = g(z')dz'$ avec g méromorphe, et $f^*\omega = g(z^k)d(z^k) = kz^{k-1}g(z^k)dz$ donc $\mathrm{ord}_P(f^*\omega) = k\,\mathrm{ord}_{f(P)}(\omega) + e(P) - 1$.

$\square$

Corollaire 11. $\chi = \chi_a$

Démonstration. On applique la formule d'Hurwitz à une fonction méromorphe non constante $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Comme X est une courbe algébrique, $K(X)$ est une extension propre de $\mathbb{C}$ et un tel f existe. Enfin on peut vérifier par un calcul direct que $\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \chi_a(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 2$. En effet, si on voit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C} \cup \infty$ la différentielle dz a un pôle en ∞ d'ordre 2, car $dz = z^2 dz^{-1}$. On en déduit que $\chi(X) = \chi_a(X)$. $\square$

Il reste à relier χ_a et g_{al}. Pour cela on passe par une courbe algébrique plane pour pouvoir faire des calculs.

3.4 Genre d'une courbe algébrique plane

En utilisant le théorème 4 on fixe un morphisme $f : X \to C$ qui est une équivalence birationnelle, avec $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe projective plane intègre de degré n à points multiples ordinaires. On peut supposer $n \geq 3$; en effet sinon on a $X \simeq C \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Pour tout point $Q \in X$ on note $r_Q = r_{f(Q)} = m_{f(Q)}(C)$ la multiplicité de $f(Q)$. On définit le diviseur $E = \sum_{Q \in X}(r_Q - 1)Q$. D'après la proposition 7 chaque point $P \in C$ a r_P antécédents dans X, donc $\deg(E) = \sum_{P \in C} r_P(r_P - 1)$.

On pose aussi $F(X, Y, Z)$ un polynôme homogène irréductible définissant C et F_X, F_Y, F_Z ses dérivées partielles.

La proposition suivante donne une expression des diviseurs canoniques.

Proposition 31. *Les diviseurs de la forme* $\mathrm{div}^X(G) - E$ *où* $G(X, Y, Z)$ *est un polynôme homogène de degré* $n - 3$ *sont des diviseurs canoniques sur* X*.*

Démonstration. Soient X, Y, Z des coordonnées sur $\mathbb{P}^2$ telles que : Z et X intersectent C transversalement, $[0 : 1 : 0] \notin C$, et aucune des tangentes en les points multiples ne passe par $[0 : 1 : 0]$.

De telles coordonnées existent ; il suffit de choisir d'abord le point de coordonnées $[0 : 1 : 0]$, en le prenant en dehors de C et des tangentes indiquées. Puis on choisit deux droites distinctes passant par ce point et correspondant à Z et X. Elles doivent intersecter C transversalement, ce qui est en fait le cas de presque toutes les droites d'après le lemme 10 donné ci-dessous.

En accord avec le lemme 4 on pose alors $Z.C = \sum_{i=1}^n R_i$, où les R_i sont distincts. On note aussi $x = \frac{X}{Z}$ et $y = \frac{Y}{Z}$. On pose aussi $f_x = F_X(x, y, 1)$ et $f_y = F_Y(x, y, 1)$. Enfin $E_{n-3} = \mathrm{div}(Z^{n-3}) - E = (n-3)\sum_{i=1}^n R_i - E$.

Clairement les diviseurs $\mathrm{div}^X(G) - E$ sont tous linéairement équivalents. Il suffit donc de vérifier en tout point de X une des trois égalités équivalentes suivantes :

$$\begin{array}{rl} \mathrm{div}(dx) = E_{n-3} + \mathrm{div}(f_y) & (1) \\ \mathrm{div}(dx) = \mathrm{div}(F_Y) - E - 2\sum_{i=1}^n R_i & (2) \\ \mathrm{div}(dy) = \mathrm{div}(F_X) - E - 2\sum_{i=1}^n R_i & (3) \end{array}$$

Pour passer de (2) à (3) on utilise l'égalité $F(x,y,1) = 0$ qui donne $f_x dx + f_y d_y = 0$ et donc $\mathrm{div}(dx) - \mathrm{div}(F_y) = \mathrm{div}(dy) - \mathrm{div}(F_x)$.

On se place en $Q \in X$ tel que $f(Q) = R_i$. En R_i, on sait que Z n'est pas une tangente et que $X(R_i) \neq 0$. Donc x^{-1} est une uniformisante en $\mathcal{O}_Q(X)$. De plus $dx = -x^2 dx^{-1}$ donc $\mathrm{ord}_Q(dx) = -2$. De plus, $F_Y(R_i) \neq 0$. En effet $XF_X + YF_Y + ZF_Z = nF$, donc comme $Z(R_i) = 0$ et $X(R_i) \neq 0$, si $F_Y(R_i) = 0$, alors $F_X(R_i) = 0$, donc, comme R_i est un point simple, Z est une tangente à R_i, ce qui est faux. Finalement l'égalité (2) est vérifiée en Q.

On se place en $Q \in X$ tel que $f(Q) = P = [a : b : 1] \in C$.

Si $X - aZ$ est une tangente à P, alors par hypothèse P n'est pas un point multiple. Donc $y - b$ est une uniformisante, et $F_X(P) \neq 0$. Ainsi $\mathrm{ord}_Q(dy) = \mathrm{ord}_Q(F_X) = 0$, et l'égalité (3) est vérifiée en Q.

Si $X - aZ$ n'est pas une tangente à P alors $x - a$ est une uniformisante en Q, donc $\mathrm{ord}_Q(dx) = 0$. De plus d'après le lemme 11 ci-dessous, $\mathrm{ord}_Q(f_y) = r_Q - 1$. L'égalité (1) est vérifiée. □

Lemme 10. *On suppose que C ne contient pas $P = [0 : 1 : 0]$. Seul un nombre fini de droites passant par P n'intersectent pas C transversalement.*

Démonstration. Les droites passant par P sont les $L_a = V(X - aZ)$ pour $a \in k$ ainsi que $V(Z)$. On note $F(X,Y,Z)$ un polynôme définissant C. Alors le nombre d'intersection de C et L_a en $[a : b : 1]$ est égal à la multiplicité de $F(a,Y,1)$ en b. Ainsi l'intersection est transverse si et seulement si $F(a,Y,1)$ et $F_Y(a,Y,1)$ n'ont pas de zéros commun. Or F est irréductible donc F_Y est premier avec F, et donc $V(F,F_Y)$ est un fermé propre de C donc un ensemble fini. Ainsi seuls un nombre fini de points sont à éviter, donc presque toutes les droites passant par P intersectent C transversalement. □

Lemme 11. *Si $Q \in X$ est tel que $f(Q) = P_0 = [0 : 0 : 1]$ et X n'est pas tangent à C en $[0 : 0 : 1]$, alors $v_Q^F(F_Y) = r_Q - 1$.*

Démonstration. Si on pose $F_*(X,Y) = F(X,Y,1)$ et $F'(X,W) = \frac{1}{X^{r_P}} F(X,XW)$ alors on est ramené au cas affine d'après la proposition 23. On doit montrer que $v_{P_i}^{F'}(F_Y(X,XW)) = r_{P_0} - 1$.

On remarque que comme P_0 est un point multiple ordinaire et X n'est pas une tangente, F et F_Y n'ont aucune tangente en commun en P et P est un zéro de F_Y d'ordre $r_{P_0} - 1$. Or si on écrit $F_Y^*(X,XW) = X^{r_{P_0}-1} F'_Y(X,W)$ comme dans la proposition 22, alors $V(F'_Y \cap X)$ correspond à l'ensemble des tangentes de F'_Y. On en déduit que pour tout $1 \leq i \leq r_{P_0}$ on a $F'_Y(P_i) \neq 0$.

Finalement $v_{P_i}^{F'}(F_Y(X,XW)) = rv_{P_i}^{F'}(X)$. Mais d'après la proposition 22 la tangente en P_i de F' n'est pas X, donc $v_{P_i}^{F'}(X) = 1$. □

On obtient maintenant deux corollaires qui vont permettre de conclure.

Corollaire 12. $\chi(X) = n(n-3) - \sum_{P\in C} r_P(r_P - 1)$.

Démonstration. C'est évident en considérant le diviseur canonique $E_{n-3} - E$ de la preuve. □

Le lemme suivant indique que considérer les diviseurs de fonctions revient à projectiviser.

Lemme 12. *Si f vérifie* $\mathrm{div}(f) = 0$ *alors f est constante.*

Démonstration. Une fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte est constante. □

Corollaire 13. $g_{al} \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P\in C} \frac{r_P(r_P-1)}{2} = \frac{\chi+2}{2}$

Démonstration. Soit A_{n-3} l'ensemble des polynômes homogènes G de degré $n-3$ tels que $\mathrm{div}(G) \geq E$. Alors $g_{al} \geq \dim A_{n-3}$. En effet d'après la proposition 31, on peut associer à tout $G \in V$ une forme $\omega \in \Omega[K(X)]$ tel que $\mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(G) - E$. Cette forme est bien définie à une constante multiplicative près. En effet si $\mathrm{div}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) = 0$ alors $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in k$ d'après le lemme 12. De plus, si $\mathrm{div}(G_1) = \mathrm{div}(G_2)$ alors il existe $\lambda \in k$ tel que $\frac{G_1}{G_2} = \lambda$ sur C, donc F divise $G_1 - \lambda G_2$, et comme $\deg(G_1 - \lambda G_2) < \deg(F)$ on voit que $G_1 = \lambda G_2$. On a donc défini une injection d'espaces projectifs $\mathbb{P}(A_{n-3}) \to \mathbb{P}(\Omega[K(X)])$.

Il reste à montrer que $\dim A_{n-3} \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{Q\in X} \frac{r_Q(r_Q-1)}{2}$. On voit que la condition $m_P(G) \geq m_P(C) - 1$ en tout point P est suffisante pour assurer $\mathrm{div}(G) \geq E$. Les polynômes homogènes G de degré $n-3$ forment un espace de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Or la condition $m_P(G) \geq r_P - 1$ équivaut à la nullité des $\frac{r_P(r_P-1)}{2}$ formes linéaires qui donnent les premiers termes du développement linéaire de G en P. D'où l'inégalité voulue. □

On conclut finalement que $g_{al} = g_{an} = g_{top}$. On obtient aussi une expression de g pour une courbe projective plane à points multiples ordinaires qui reste en fait valable pour k algébriquement clos quelconque. On trouve aussi que les différentielles holomorphes sont algébriques.

3.5 Théorème de Riemann-Roch

Une fois qu'on sait que nos différentes définitions du genre coïncident il n'est pas difficile de donner une preuve du théorème de Riemann-Roch pour une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$. Le théorème reste en fait valide pour n'importe quel corps k algébriquement clos. La preuve présentée ici provient de celle entièrement analytique de [2], à l'exception de la preuve de la proposition 14 qui est simplifiée par la structure algébrique.

Commençons par quelques définitions, pour pouvoir énoncer le théorème.

Définition 38. *On note* $\operatorname{Pic}(X)$ *le quotient du groupe* $\operatorname{Div}(X)$ *par le sous-groupe des diviseurs principaux d'éléments de* $K(X)$*, et on note* $\equiv$ *la relation d'équivalence associée. On dit que des diviseurs* D *et* D' *sont linéairement équivalents si* $D \equiv D'$*, i.e. s'il existe* $f \in K(X)$ *tel que* $D = D' + \operatorname{div}(f)$*.*

On dit que D *est un diviseur effectif si pour tout* $P \in X$ *on a* $D(P) \geq 0$*, et on définit la relation d'ordre* $D \preceq D'$ *si* $D' - D$ *est un diviseur effectif.*

On pose $|D| = \{D' \in \operatorname{Div}(X) \; ; \; D' \equiv D \text{ et } D' \succeq 0\}$ *et* $L(D) = \{f \in K(X) \; ; \; D + \operatorname{div}(f) \succeq 0\}$*, de sorte que* $|D|$ *est naturellement identifié à* $\mathbb{P}(L(D))$*, le projectivisé de* $L(D)$*. On pose* $l(D) = \dim_{\mathbb{C}} L(D) = \dim_{\mathbb{C}} |D| + 1$*.*

On définit de même les relations $\equiv^{an}$ *et* $\preceq^{an}$*, ainsi que les espaces* $|D|^{an}$ *et* $L^{an}(D)$ *et le nombre* $l^{an}(D)$*, en remplaçant le corps de fonctions* $K(X)$ *par* $\mathcal{M}(X)$ *dans les définitions.*

Théorème 6 (Riemann-Roch)**.** *Soit* X *une courbe projective lisse sur* $\mathbb{C}$*,* $D \in \operatorname{Div}(X)$*,* W *un diviseur canonique et* g *son genre. Alors* $l^{an}(D) = l(D)$ *et :*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(W - D).$$

On commence par des propriétés faciles.

Proposition 32. *On a les propriétés suivantes, aussi valables pour* $l^{an}(D)$ *:*

1. *la quantité* $l(D) - \deg D$ *est décroissante en* D *;*
2. *si* $\deg(D) < 0$ *alors* $l(D) = 0$*.*

Démonstration. En effet, il existe une injection de $L(D + P)/L(D)$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $f \mapsto (t^k f)(P)$ où t est une uniformisante en P est $k = D(P) + 1$. Ainsi $l(D + P) \leq l(D) + 1$.

Le deuxième point découle du fait que si $D \equiv D'$ alors $\deg(D') < 0$ donc D' n'est pas effectif. □

En reprenant les notations de la sous-section précédente, avec C une courbe projective plane à points multiples ordinaires birationnellement équivalente à X, et $r_Q = r_{f(Q)} = m_{f(Q)}(C)$ et $E = \sum_{Q \in X} (r_Q - 1)Q$, on obtient la proposition suivante, de manière similaire au corollaire 13.

Proposition 33. *Pour tout polynôme homogène* G *on a* $l(\operatorname{div}(G) - E) \geq \deg(\operatorname{div}(G) - E) - g + 1$*.*

Avant de faire la preuve fixons quelques notations. Pour tout entier $m \geq 0$ on pose Γ_m l'espace vectoriel des polynômes en deux variables de degré au plus m. Il est naturellement isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes homogènes en trois variables de degré m. De plus on a $\dim \Gamma_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Démonstration. Fixons $m \geq n$ un entier, et notons $V_m = L(\operatorname{div}(G) - E)$ pour n'importe quel polynôme homogène G de degré m. Notons aussi A_m l'espace vectoriel des polynômes homogènes G de degré m tels que $m_P(G) \geq r_P - 1$ pour tout $P \in C$, et B_m le quotient de A_m par les multiples de F. Alors on dispose d'une injection d'espaces projectifs de $\mathbb{P}(B_m)$ dans $\mathbb{P}(V_m)$ donnée par $G \mapsto \mathrm{div}(G) - E$. De plus :

$$\begin{array}{rcl} \dim B_m & = & \dim A_m - \dim \Gamma_{m-n} \\ & \geq & \dim \Gamma_m - \sum_{P \in C} \dim \Gamma_{r_P - 2} - \dim \Gamma_{m-n} \\ & = & (m+1)(m+2)/2 - \deg(E)/2 - (m-n+1)(m-n+2)/2 \\ & = & nm - \deg(E)/2 - (n-1)(n-2)/2 + 1 \end{array}$$

On en déduit que $l(\mathrm{div}(G) - E) \geq \deg(\mathrm{div}(G) - E) - g + 1$ pour tout polynôme homogène de degré $m \geq n$, et même pour tout $m > 0$ par croissance de $l(D) - \deg D$. □

Corollaire 14. *Pour tout diviseur D on a $l^{an}(D) \geq l(D) \geq \deg(D) + 1 - g$.*

Démonstration. La première inégalité est évidente. La deuxième est une conséquence de la proposition précédente et de la croissance de $l(D) - \deg D$. Il suffit de vérifier que pour tout diviseur D, il existe G tel que $\mathrm{div}(G) \succeq D + E$. Il suffit de prendre pour G une union de droites passant par les points voulus autant de fois que nécessaire. □

On va faire le lien entre $l^{an}(D)$ et $l^{an}(W - D)$. On rappelle d'abord la définition du résidu d'une 1-forme méromorphe.

Définition 39. *Soient $\omega \in \Omega^{(1)}(X)$ et $P \in X$. Si z est une coordonnée centrée en P, et $\omega = f(z)dz$ au voisinage de P, alors le résidu de ω en P est égal au coefficient d'ordre -1 du développement en série de Laurent de f en P. Cette définition ne dépend pas du choix de z.*

On dispose de la classique formule des résidus.

Proposition 34. *Pour tout compact $K \subset X$ à bord C^1 tel que ∂K ne contient aucun pôle de ω, on a $\int_{\partial K} \omega = 2i\pi \sum_{P \in K} \mathrm{res}_P(\omega)$, où ∂K est orienté dans le sens trigonométrique.*

En prenant $K = X$ on obtient :

Corollaire 15. *Soit $\omega \in \Omega^{(1)}(X)$. Alors $\sum_{P \in C} \mathrm{res}_P(C) = 0$. En particulier ω ne peut pas avoir exactement un pôle simple.*

On en déduit enfin le résultat qui nous intéresse.

Lemme 13. *Soit W un diviseur canonique. La quantité $l^{an}(D) - \deg(D) - l^{an}(W - D)$ est décroissante en D.*

Démonstration. On se donne D un diviseur, $P \in X$, et $\omega \in \Omega(X)$ tel que $W = \mathrm{div}(\omega)$. On suppose par l'absurde qu'il existe $f_1 \in L^{an}(D + P) \smallsetminus L^{an}(D)$ et $f_2 \in L^{an}(W - D) \smallsetminus L^{an}(W - D - P)$. Alors $\mathrm{div}(f_1 f_2 \omega) \succeq -P$, et même la forme $f_1 f_2 \omega$ a exactement un pôle simple en P. Or la somme de ses résidus doit être nulle, donc c'est impossible. □

On peut maintenant finir la preuve.

Riemann-Roch. Pour un diviseur D de degré assez grand, d'après la proposition 32 et le corollaire 14 on a $l^{an}(D) - \deg(D) - l^{an}(W-D) = l^{an}(D) - \deg(D) \geq 1-g$. Ainsi d'après le lemme précédent, pour tout diviseur D on a $l^{an}(D) - \deg(D) - l^{an}(W-D) \geq 1-g$, et en remplaçant D par $W-D$ on a aussi $l^{an}(W-D) - \deg(W-D) - l^{an}(D) \geq 1-g$. En sommant ces deux inégalités on obtient l'inégalité $-\deg(W) \geq 2g-2$. Or cette inégalité est une égalité, donc les deux inégalités qu'on a sommées étaient des égalités, ce qui prouve le théorème de Riemann-Roch. Au passage on obtient aussi que l'inégalité $l^{an}(D) \geq l(D)$ du corollaire 14 est une égalité, donc toutes les fonctions méromorphes sont algébriques. $\square$

Remarque 6. *Toutes les fonctions méromorphes sont algébriques. En particulier une application holomorphe entre courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$ induit un morphisme contravariant de leurs corps de fonctions, et donc un morphisme de courbes projectives lisses. Ainsi le foncteur des courbes projectives lisses vers les surfaces de Riemann compactes est pleinement fidèle. On peut voir dans [2] qu'il est même essentiellement surjectif.*

Remarque 7. *L'égalité* $\deg(\omega) = 2g_{al/an} - 2$ *est incluse dans le théorème de Riemann-Roch. Avec la formule d'Hurwitz, ils permettent de retrouver l'égalité des genres sans passer par la cohomologie de De Rham ni par les courbes algébriques planes.*

4 Jacobienne

Dans cette section, on adopte un point de vue analytique. Pour toute la suite on pose X une surface de Riemann compacte de dimension $g > 0$, et vérifiant le théorème de Riemann-Roch.

On va voir comment associer à X sa jacobienne $J(X)$, qui est un groupe de Lie complexe abélien compact de dimension g, isomorphe à $\mathbb{C}^g/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^g$. On dispose canoniquement d'un plongement défini à translation près $X \to J(X)$.

On commence par définir $J(X)$, puis on montre que $J(X)$ est canoniquement isomorphe au groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ des classes d'isomorphismes des fibrés en droite sur X de degré 0 (théorème d'Abel-Jacobi). On obtient par ce moyen un morphisme $X \to J(X)$.

La preuve provient de [2], elle est seulement modifiée pour éviter l'usage de coordonnées et faire apparaître le caractère canonique de l'isomorphisme entre $J(X)$ et $\mathrm{Pic}^0(X)$.

4.1 Définition de la jacobienne et du groupe de Picard

On pose $\Omega(X)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega(X), \mathbb{C})$.

Définition/Propriété 7. *Il existe une injection de groupes* $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z}) \to \Omega(X)^\vee$ *induite par l'intégration le long d'un chemin lisse. On pose* $\mathrm{J}(X)$ *son conoyau.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 29 qui donne une injection $\Omega(X) \to \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C})$. □

On verra plus tard que $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ définit bien un réseau de $\Omega(X)^\vee$, et donc que $\mathrm{J}(X)$ est un groupe de Lie complexe.

Si on choisit une base $(\phi_i)_{1\le i\le g}$ de $\Omega(X)$ on obtient un isomorphisme $\Omega(X)^\vee \simeq \mathbb{C}^g$ donné par l'évaluation en les ϕ_i. On pose $\Lambda = \{(\int_\gamma \phi_i)_{1\le i\le g}; \gamma \in \mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})\}$ le groupe des périodes des $(\phi_i)_{1\le i\le g}$. Alors l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{J}(X) \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$.

On définit d'abord $\mathrm{Pic}^0(X)$ comme le groupes des diviseurs de degré 0 à équivalence linéaire près. Ainsi le diagramme commutatif suivant est exact, i.e. ses lignes et ses colonnes le sont.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathcal{M}(X) \arrow[r, "div"] \arrow[d, no head] & \mathrm{Div}^0(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathcal{M}(X) \arrow[r, "div"] & \mathrm{Div}(X) \arrow[r] \arrow[d, "deg"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "deg"] & 0 \\
 & \mathbb{Z} \arrow[r, no head] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On admet que $\mathrm{Pic}(X)$ s'identifie au groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur X muni du produit tensoriel ; ce point est abordé en fin de partie.

Remarque 8. *Si* $g = 1$ *on peut voir grâce au théorème de Riemann-Roch que pour tout* O*, l'application* $X \to \mathrm{Pic}^0(X)$ *définie par* $P \mapsto P-O$ *est une bijection. Ainsi les courbes de genre* 1*, appelées courbes elliptiques, sont munies d'une loi de groupe abélien après choix d'un point base.*

4.2 Théorème d'Abel-Jacobi

Avant d'énoncer le théorème on pose quelques notations. Si $V \subset X$ est un ouvert simplement connexe et $\phi \in \Omega(X)$ on pose $\int \phi_{|V}$ une primitive de ϕ sur V. Pour tout diviseur D on pose V_D un ouvert simplement connexe contenant le support de D. Si f est une fonction sur X, et D un diviseur sur X on pose $f(D) = \sum_{P\in X} D(P)f(P)$. Ainsi si D est de degré 0, $(\int \phi_{|V_D})(D)$ ne dépend pas du choix de la primitive.

Théorème 7 (Abel-Jacobi)**.** *L'application suivante est un isomorphisme de groupes, et ne dépend pas du choix de V_D :*

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & \mathrm{Pic}^0(X) & \longrightarrow & \mathrm{J}(X) \\ & D & \longmapsto & \psi(D) : \phi \mapsto (\int \phi_{|V_D})(D) \end{array}$$

Remarque 9. *La quantité $(\psi(D))(\phi)$ dépend du choix de V_D, i.e. in fine du choix des chemins reliant les points de D sur lesquels on intègre ϕ. Chaque choix d'ouvert V_D définit donc un élément de $\Omega(X)^\vee$. Cependant tous ces éléments ont la même classe dans le quotient $\mathrm{J}(X)$.*

On commence par écrire différemment la jacobienne.

Lemme 14. *On a un isomorphisme naturel de groupes $\mathrm{J}(X) \simeq \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)/\Omega(X)$.*

Démonstration. Les groupes $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z})$ sont canoniquement duaux (cas sans torsion). De plus $\mathrm{H}_2(X, \mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$ car engendré par la classe de X notée $[X]$. La dualité de Poincaré indique que le cup-product donne un pairing :

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

Ainsi $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z})$ sont des groupes canoniquement isomorphes : à tout $\alpha \in \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ on associe $\gamma \in \mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z})$ tel que pour tout $\beta \in \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$, $\beta \smile \alpha([X]) = \beta(\gamma)$.

On rappelle que le cup-product correspond au produit extérieur de formes différentielles. Si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ alors $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, car c'est une 2-forme holomorphe. Ainsi $\Omega(X)$ est un sous-espace lagrangien de $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ pour le cup-product, car de dimension maximale g.

On en déduit que le cup-product donne un morphisme $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \to \Omega(X)^\vee$ donné par $\alpha \mapsto (\phi \mapsto \phi \smile \alpha([X]))$, et qu'on a une suite exacte courte $0 \to \Omega(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \to \Omega(X)^\vee \to 0$.

De plus la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \overset{2i\pi}{\to} \mathbb{C} \overset{\exp}{\to} \mathbb{C}^*$ induit une suite exacte $0 \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \to 0$.

On peut donc construire le diagramme commutatif suivant où toutes les lignes et colonnes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] \arrow[d, no head] & \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(X)^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}^*) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathrm{J}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

A part le morphisme g, tous les morphismes ont déjà été donnés, l'exactitude a été vérifiée, et la commutativité est évidente. Le morphisme g est défini comme étant le seul qui fait commuter le diagramme ; il est obtenu par passage au quotient du morphisme $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \to \mathrm{J}(X)$. $\square$

On écrit maintenant différemment le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$. On commence par poser quelques définitions (les notations ne sont pas usuelles).

Soit $E_1(X)$ l'espace vectoriel des différentielles méromorphes sur X à pôles simples et résidus entiers.

La différentielle logarithmique $f \mapsto \frac{df}{f}$ donne un morphisme de groupe $\mathcal{M}(X)^* \to E_1(X)$. On pose $E(X)$ son conoyau.

On a aussi un morphisme $\mathrm{res} : E_1(X) \to \mathrm{Div}^0(X)$ où $\mathrm{res}(\omega)(P)$ est le résidu de ω en P. La proposition ci-dessous assure que res est surjective.

Proposition 35. *Soient $P_i \in X$ et $a_i \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, \dots k$, avec $\sum a_i = 0$. Alors il existe une différentielle méromorphe ω tel que ω n'a pour pôle que les P_i, et les P_i sont des pôles simples de ω avec résidu a_i.*

Démonstration. Toute différentielle méromorphe ω vérifie $\sum_{P \in X} \mathrm{res}_P(\omega) = 0$. En effet d'après la formule des résidus $\sum_{P \in X} \mathrm{res}_P(\omega)$ s'obtient en intégrant ω le long du bord d'un compact contenant tous les pôles ; il suffit de prendre X lui même qui n'a pas de bord.

On dispose donc d'une injection obtenue en prennant les résidus en $P_1, \dots, P_k$ $\mathrm{res} : \Omega_{P_1, \dots, P_k}(X)/\Omega(X) \to H \subset \mathbb{C}^k$ où H est l'hyperplan des vecteurs de somme nulle. Or d'après Riemann-Roch il y a égalité des dimensions, donc l'application est surjective. $\square$

Pour résumer :

Lemme 15. *Le diagramme commutatif suivant est exact.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C}^* \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathbb{C}^* \arrow[d] & \\
 & & \mathcal{M}(X)^* \arrow[r, dash] \arrow[d, "dlog"] & \mathcal{M}(X)^* \arrow[d, "dlog"] & \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] \arrow[d, dash] & E_1(X) \arrow[r, "res"] \arrow[d] & \mathrm{Div}^0(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] & E(X) \arrow[r, "res"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On vérifie qu'un élément $\frac{df}{f}$ a un pôle si f a un pôle, et est nul sinon car alors f est constante. $\square$

Lemme 16. *L'intégration selon un lacet lisse fournit une injection* $E(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$

Démonstration. Si $\omega \in E_1(X)$ a pour pôles S alors ω définit un élément de $\mathrm{H}^1(X \setminus S, \mathbb{C})$ qui vaut un multiple de $2i\pi$ sur tout lacet lisse contenu dans un petit voisinage U de S. On peut prendre ce voisinage ouvert U homéomorphe à l'union disjointe de r disques.

Comme $\mathrm{H}_1(U) = 0$ et $\mathrm{H}_0(U) \simeq \mathrm{H}_0(U \setminus S)$, la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement $U \cup X \setminus S$ s'écrit :

$$\mathrm{H}_1(U \setminus S) \to \mathrm{H}_1(X \setminus S) \to \mathrm{H}_1(X) \to 0$$

Dualement on a donc la suite exacte suivante, où les morphismes sont induits par les inclusion $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{H}^1(X \setminus S, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{H}^1(U \setminus S)$. On en déduit que ω définit un élément dans l'image de $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$. On définit ainsi un morphisme $E_1(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$. On montre que son noyau est exactement formé des différentielles $\frac{df}{f}$.

En effet si $\omega = \frac{df}{f}$ alors l'intégrale de ω sur tout lacet lisse est un multiple de $2i\pi$. Réciproquement si cette dernière condition est remplie on peut définir $f(P) = \exp(\int_O^P \omega)$, et on vérifie que $\frac{df}{f} = \omega$.

En passant au quotient on obtient donc une injection $E(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$. □

On peut maintenant faire la preuve du théorème. Les trois derniers lemmes permettent de construire le diagramme commutatif suivant, où ψ est défini à partir des autres morphismes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] \arrow[d, dash] & E(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \arrow[r] & \mathrm{J}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On peut déjà remarquer que l'injectivité de la flèche verticale du milieu induit celle de ψ.

On va maintenant vérifier que ψ est bien l'application définie dans l'énoncé du théorème.

Suivons les étapes de la preuve. On part d'un diviseur D. On considère ensuite une forme méromorphe ω à pôles simples telle que $\mathrm{res}(\omega) = D$. Cette forme définit un élément de $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$, qu'on relève en un $\alpha \in \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$. Alors $\psi(D)$ s'écrit $\phi \mapsto \phi \smile \alpha([X])$, où $\phi \in \Omega(X)$ est identifié à un élément de $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$.

On fait maintenant un choix particulier de α qui permettra de calculer facilement $\psi(D)$. Soit $V \Subset X$ un ouvert difféomorphe à une boule et à bord C^∞ contenant les pôles de ω. Soit α une 1-forme différentielle fermée C^∞ qui coïncide avec ω hors de V. Un tel α existe car $\int_{\partial V} \omega = 0$; il suffit de trouver g sur un voisinage de ∂V tel que $dg = \omega$ puis de prolonger g sur V et de poser $\alpha = dg$ sur V. De plus α et ω déterminent le même élément dans $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$.

Soit $p : Y \to X$ le revêtement universel de X et $U \subset Y$ un ouvert simplement connexe à bord C^∞_{pm} qui est un domaine fondamental pour l'action de $\pi_1(X)$ et tel que $V \subset p(U)$. Soit $\phi \in \Omega(X)$ et soit f une primitive sur Y. Alors $\int_X \phi \wedge \alpha = \int_{\partial U} f\alpha = \int_{\partial U} f\omega = 2i\pi \sum_{P\in U} \mathrm{res}(f\omega)$. Finalement on a bien l'écriture suivante :

$$\psi(D)(\phi) = \int \phi_{|V}(D)$$

On montre maintenant la surjectivité de ψ. On pose A la préimage dans $\Omega(X)^\vee$ de $\psi(\mathrm{Pic}^0(X))$ et on montre que $A = \Omega(X)^\vee$. Comme A est un espace vectoriel, il suffit de montrer que A contient un voisinage de 0.

Si on choisit une base $(\phi_i)_{1\leq i\leq g}$ de $\Omega(X)$ on obtient des coordonnées sur $\Omega(X)^\vee$. Dans ces coordonnées le morphisme ψ s'écrit ainsi :

$$\psi(D) = (\textstyle\int \phi_{i|V}(D))_{1\leq i\leq g}$$

En particulier, choisissons des points bases $O_1, \dots O_g$, avec des petits voisinages contractiles $U_1, \dots U_g$. Le morphisme ci-dessous est un relevé dans $\mathbb{C}^g$ de l'application ψ précomposée par l'application $U_1 \times \cdots \times U_g \to \mathrm{Pic}^0(X)$ donné par $(P_i)_{1\leq i\leq g} \mapsto \sum_{i=1}^g P_i - O_i$:

$$\begin{array}{rccc} \overset{\vee}{\psi} : & U_1 \times \cdots \times U_g & \longrightarrow & \mathbb{C}^g \\ & P_1, \dots P_g & \longmapsto & (\sum_{j=1}^g \int_{O_j}^{P_j} \phi_i)_{1\leq i\leq g} \end{array}$$

On va utiliser le théorème d'inversion locale pour conclure que l'image de $\overset{\vee}{\psi}$ contient un voisinage de 0. La différentielle de $\overset{\vee}{\psi}$ en $O_1, \dots, O_g$ a pour matrice $(\frac{\phi_i}{dz_j}(O_j))_{i,j}$. On choisit $O_1, \dots O_g$ tels que cette matrice ou sa transposée soit triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, et donc inversible. Il suffit de choisir les O_i et les ϕ_i tels qu'on ait :

$$\Omega_{-\sum_{k=1}^{i} O_k}(X) \subsetneq \Omega_{-\sum_{k=1}^{i-1} O_k}(X) \ ; \ \phi_i \in \Omega_{-\sum_{k=1}^{i-1} O_k}(X) \setminus \Omega_{-\sum_{k=1}^{i} O_k}(X)$$

Remarque 10. *On pourrait aussi montrer le théorème en passant par la cohomologie des faisceaux (de Cech par exemple). A part l'isomorphisme* $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}^*)/\Omega(X) \simeq \mathrm{J}(X)$ *provenant de la dualité de Poincaré, tous les diagrammes intervenant dans la preuve proviennent de la cohomologie des suites exactes de faisceau ci-dessous.*

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^* \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathcal{O}^* \arrow[r, "dlog"] \arrow[d] & \Omega \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^* \arrow[r] & \mathcal{M}^* \arrow[r, "dlog"] \arrow[d, "div"] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "res"] & 0 \\
 & & \mathrm{Div} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathrm{Div} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Si on montre que $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{M}^*) = 0$*, alors les suites exactes données par le diagramme ci-dessus donnent la surjectivité de* ψ*, ainsi que l'isomorphisme* $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*) \simeq \mathrm{Pic}(X)$*.*

De plus, on voit avec la cohomologie de Cech que $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ *correspond aux classes d'isomorphismes de fibrés en droite, munies du produit tensoriel.*

L'argument manquant est donc la nullité de $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{M}^*)$, i.e. le fait que tout fibré en droite holomorphe a une section méromorphe.

Références

[1] William FULTON. *Algebraic curves.* Addison Wesley Longman, 1989.

[2] Eric REYSSAT. *Quelques aspects des surfaces de Riemann.* Birkhäuser Boston, 1989.

[3] Kay WERNDLI master's thesis *Elementary gaga* 2011, under the supervision of Hanspeter KRAFT.