

# Mémoire M1

Tristan Pierre-Louis

Encadré par Joan Porti à l'Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Février - Juin 2023

# 1 Introduction et déroulement du stage

## 1.1 Déroulement du stage

Mon stage s'est déroulé en deux parties. Lors des deux premiers mois, de mi-février à mi-mars, je me suis consacré principalement à l'étude de la géométrie hyperbolique et de son application aux surfaces qui sera le contenu de ce rapport. Pour cela je me suis appuyé principalement sur le début des livres *An introduction to Geometric Topology* de Bruno Martelli [4] et *Foundations of hyperbolic manifolds* de John G. Ratcliffe [6], et *low-dimensional Geometry* de Francis Bonahon [2]. Ces premiers mois ont aussi été l'occasion de me remettre à niveau sur les outils nécessaires à ces problématiques, en particulier, j'ai suivi (jusqu'à fin mai) un cours de géométrie riemannienne. A partir de mi-avril, je me suis penché sur la dimension 3, en m'appuyant principalement sur la deuxième partie des trois mêmes livres. Dans ce cadre, j'ai étudié les bases de classifications des 3-variétés (Théorie des surfaces normales, classification des variétés Seifert...) en suivant [4] et de la théorie des noeuds. Je me suis ensuite plus spécifiquement intéressée aux variétés hyperboliques de dimension 3, en particulier dans le cadre des géométrisations des complémentaires de liens ou de noeuds dans  $S^3$ , abordés en détail dans [4], et [6] et dans l'étude des pavages de  $\mathbb{H}^3$  et des objets géométriques (dont des fractales) qui en découlent, plutôt abordés dans [2].

## 1.2 Introduction

Ce rapport sera consacré à l'étude des métriques hyperboliques sur les surfaces. On suivra librement les chapitres 2, 3, 6, 7 et 8 de [4]. Les propositions admises y sont donc prouvées. Dans un premier temps, on introduira brièvement l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  et les variétés hyperboliques (section 2). On verra ensuite que la plupart des surfaces compactes peuvent être munies d'une structure hyperbolique (théorème 3.11). On se concentrera alors sur l'espace de Teichmüller  $Teich(S)$  qui représente les métriques hyperboliques possibles sur une surface  $S$ . La section 4 nous en fournira une paramétrisation et la section 5 sera consacrée à la compactification de Thurston de  $Teich(S)$ , qui permet d'obtenir une classification des automorphismes de  $S$  (théorème 5.48).

L'étude de  $Teich(S)$  permet une compréhension plus fine des variétés de dimension deux, ce qui a de nombreuses applications. Par exemple, la théorie de Teichmüller a été utilisée par Thurston pour prouver un théorème de géométrisation en dimension 3 (voir [8] ou [5]) qui lui a valu la médaille Fields en 1982 et l'a mené à la conjecture de géométrisation des 3-variétés prouvée par Perelman en 2002. Les applications de cette théorie ne se restreignent pas aux mathématiques abstraites. En effet,  $Teich(S)$  représente les classes d'équivalence conformes sur  $S$  (structures Riemanniennes à homéomorphisme préservant les angles près) et peut être muni de métriques naturelles. On obtient une notion agréable de distance entre les surfaces qui donne lieu à des applications intéressantes en traitement de données [3] ainsi qu'en imagerie médicale [9].

## 2 Généralités sur le variétés hyperboliques

### 2.1 L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$

Cette partie sera consacrée à introduire l'espace hyperbolique et à énoncer des propriétés élémentaires admises qui seront utilisées par la suite. Pour le détail, voir le chapitre 2 de [4] ou le chapitre 3 de [6].

**Definition 2.1.** Les quatre variétés riemanennes suivantes sont isométriques.

- La boule  $\mathbb{D}^n$  ouverte munie de la métrique  $g(x) := (\sum_{i=1}^n dx_i^2) (\frac{1}{4\|x\|_{eucl}^2})$  qu'on appelle le *disque de Poincaré*.
- Le demi-espace  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$  muni de la métrique  $g(x) := (\sum_{i=1}^n dx_i^2) (\frac{1}{4x_n^2})$  qu'on appelle le *demi plan de Poincaré*.
- l'hyperboloïde  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | g(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}$  muni de la métrique induite par  $g$ , où  $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$ .
- le disque de Beltrami-Klein, le projectivisé de l'hyperboloïde. On le voit comme la boule unité ouverte dans  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ .

On dit qu'elles sont des *modèles* de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ .

**Propriété 2.2.** Les modèles de Poincaré sont conformément plats, c'est-à-dire que les angles dans  $(M, g)$  sont les mêmes que les angles dans  $(M, g_{eucl})$ .

**Proposition 2.3.** Dans les deux modèles de Poincaré, les géodésiques de  $\mathbb{H}^n$  sont les arcs de cercle (ou les segments) perpendiculaires au bord de  $\mathbb{H}^n$  (vu comme sous-espace de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ). Dans le disque de Beltrami-Klein, les géodésiques sont les segments euclidiens.

**Definition 2.4.** On peut compactifier  $\mathbb{H}^n$  en le munissant d'un bord à l'infini. On regarde  $G$  l'ensemble des demi-géodésiques de  $\mathbb{H}^n$  parcourus à vitesse 1. On considère équivalentes deux demi-géodésiques qui restent à distance finie. En quotientant  $G$  par cette relation d'équivalence, on obtient  $\partial\mathbb{H}^n$ . Dans les deux modèles de Poincaré et le disque de Beltrami-Klein,  $\partial\mathbb{H}^n$  correspond au bord de  $\mathbb{H}^n$  vu comme sous-espace de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ . On peut donc munir  $\overline{\mathbb{H}^n} := \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$  de la topologie induite par  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  qui le rend compact.

*Remarque 2.5.* Dans le modèle de l'hyperboloïde, on peut identifier  $\partial\mathbb{H}^n$  aux droites du cône  $\{\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2 = 0\}$ . Elles correspondent au bord du disque de Beltrami-Klein vu comme sous-ensemble de l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ .

**Définition-Proposition 2.6.** Si  $\gamma \neq \eta$  sont deux géodésiques de  $\mathbb{H}^n$ , on trois cas de figure :

- Elles sont dites *sécantes* si elle s'intersectent dans  $\mathbb{H}^n$ , donc sont à distance 0 atteinte.
- Elles sont dites *parallèles* si elle s'intersectent dans  $\partial\mathbb{H}^n$ . Elles sont alors à distance 0 non atteinte.
- Sinon, elles sont dites *ultraparallèles*. Elles sont à distance  $d > 0$  atteinte.

**Proposition 2.7.** Si  $\gamma$  et  $\eta$  sont deux géodésiques ultraparallèles, la fonction  $t, s \mapsto d(\gamma(t), \eta(s))$  est strictement convexe et propre.

**Proposition 2.8.** *Dans les modèles de Poincaré, les sous-espaces géodésiques de  $\mathbb{H}^n$  de dimension  $k$  sont les sphères (et les sous-espaces vectoriels) de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  perpendiculaires à  $\partial\mathbb{H}^n$ . Ils sont isomètres à  $\mathbb{H}^k$ .*

**Proposition 2.9.**  *$\mathbb{H}^n$  est uniquement géodésique et a une courbure constante égale à  $-1$ . Comme il est simplement connexe, l'exponentielle  $y$  est surjective en tout point.*

**Proposition 2.10.** *Toute isométrie de  $\mathbb{H}^n$  s'étend en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \sqcup \partial\mathbb{H}^n$ . De plus, une isométrie est déterminée par son action sur  $\partial\mathbb{H}^n$ .*

**Proposition 2.11.** *Toute isométrie entre ouverts connexes de  $\mathbb{H}^n$  s'étend de façon unique en une isométrie globale de  $\mathbb{H}^n$ .*

**Définition 2.12.** Si  $f$  est une isométrie de  $\mathbb{H}^n$ , on appelle  $\inf(d(x, f(x)))$  le déplacement minimal de  $f$ , noté  $l(f)$ .

**Définition-Proposition 2.13.** Comme  $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{D}^n$ , le théorème de Bower nous permet de classer les isométries en trois catégories :

- Les isométries *elliptiques* ont au moins un point fixe dans  $\mathbb{H}^n$ , donc sont de déplacement minimal 0 atteint.
- Les isométries *paraboliques* ont exactement un point fixe dans  $\partial\mathbb{H}^n$ . Elles sont de déplacement minimal 0 non atteint.
- Les isométries *hyperboliques* avec exactement deux points fixes dans  $\partial\mathbb{H}^n$ . Elles fixent donc la géodésique qui relie ces deux points. Elles ont un déplacement minimal  $d > 0$  atteint le long de cette géodésique.

## 2.2 Variétés hyperboliques

**Définition 2.14.** Soit  $M$  une variété riemannienne. On dit que  $M$  est une *variété hyperbolique* si  $M$  est localement isomètre à  $\mathbb{H}^n$ , c'est-à-dire munie d'un atlas d'isométries locales dont les recollements sont des isométries de  $\mathbb{H}^n$ .

**Théorème 2.15.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique complète de dimension  $n$ . On a  $\Gamma$  un groupe d'isométries agissant librement discontinuellement sur  $\mathbb{H}^n$  tel que  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ . De plus,  $\Gamma$  est isomorphe à  $\Pi_1(M)$ .*

La preuve de ce théorème se repose sur un lemme principal.

**Lemme 2.16** (Cartan). *Toute variété hyperbolique complète simplement connexe est isomètre à  $\mathbb{H}^n$ .*

*Preuve du lemme.* Soit  $M$  une telle variété,  $x \in M$ ,  $U$  une boule contenant  $x$  et  $f: U \rightarrow V$  une isométrie de  $U$  à une boule de  $\mathbb{H}^n$  notée  $V$ . Supposons pour l'instant que  $f$  s'étende à tout  $M$  en une isométrie locale. Comme  $M$  est complète, par propriété des variétés riemanniennes,  $f$  est un revêtement  $M \rightarrow \mathbb{H}^n$ . Or  $\mathbb{H}^n$  est simplement connexe donc  $f$  est une isométrie globale.

Montrons que  $f$  s'étend bien à tout  $M$ . Soit  $y \in M$ , soit  $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$  un chemin de  $x$  à  $y$ . Par compacité de  $[0, 1]$ , on a  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  et des

isométries  $(D_i: U_i \rightarrow V_i)_{i=1\dots n}$  telles que pour tout  $i$ ,  $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$  une boule de  $M$  et  $V_i$  est une boule de  $\mathbb{H}^n$ . On peut prendre  $U_0 \subset U$  et  $f = D_0$ . On va maintenant modifier les  $D_i$  inductivement sur  $i$  pour qu'ils coïncident sur les  $C_i := U_i \cap U_{i+1}$ . En effet  $D_i \circ D_{i+1}^{-1}: D_{i+1}(C) \rightarrow D_i(C)$  est une isométrie entre ouverts connexes de  $\mathbb{H}^n$ . Par la proposition 2.11, elle s'étend uniquement en  $\phi$  une isométrie globale de  $\mathbb{H}^n$ . On peut donc remplacer  $D_{i+1}$  par  $D'_{i+1} := \phi \circ D_{i+1}$  qui coïncide avec  $D_i$  sur  $C_i$ .

On remarque que le procédé ne dépend pas de la partition  $([t_i, t_{i+1}])_i$  choisie (il suffit de prendre un raffinement commun des partitions).

Montrons que le procédé ne dépend pas non plus du chemin choisi. Soit  $\beta$  un autre chemin de  $x$  à  $y$ . Par simple connexité de  $M$ , on a une homotopie de  $\alpha$  à  $\beta$   $\psi: [0, 1]^2 \rightarrow M$ . On a donc  $N \in \mathbb{N}$  et des  $(D_{i,j}: U_{i,j} \rightarrow V_{i,j})_{i,j=1\dots n}$  comme précédemment tels que  $\psi([\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}] \times [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]) \subset U_{i,j}$ . Par induction sur  $i$  et  $j$  on peut comme précédemment étendre  $f$  à tout  $\psi([0, 1]^2)$ .  $f(y)$  ne dépend donc pas de  $\alpha$ . On a bien étendu  $f$  en une isométrie locale en  $y$ . □

*Preuve du théorème 2.15.* Soit  $M$  une variété hyperbolique complète. Le revêtement universel de  $M$  est alors une variété hyperbolique complète simplement connexe donc isomètre à  $\mathbb{H}^n$ . La projection étant une isométrie locale, l'action de  $\Pi_1(M)$  sur  $\mathbb{H}^n$  se fait bien par isométries et proprement discontinuement. On note  $\Gamma$  ce groupe d'isométries. □

*Remarque 2.17 (admise).* Si  $\Gamma$  agit librement sur  $\mathbb{H}^n$  alors  $\Gamma$  ne contient que des isométries hyperboliques ou paraboliques. De plus, si  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  est compact, les isométries de  $\Gamma$  sont hyperboliques, et les relevés d'une même géodésique de  $M$  sont ultraparallèles.

## 3 Géométrisation des surfaces

### 3.0.1 Classification des surfaces

On énonce ici des faits topologiques admis pré requis à l'étude des variétés de dimension 2.

**Definition 3.1.** On note  $\#$  la somme connexe et  $T$  le tore plat de dimension 2. On note  $S_g := T \# \dots \# T$  la surface de genre  $g$ .

**Théorème 3.2.** Soit  $M$  est une 2-variété  $\mathcal{C}^\infty$  orientable fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) connexe. On a  $g$  telle que  $M$  est difféomorphe à  $S_g$ .

**Definition 3.3.** On notera de même  $S_{g,b,p}$  la surface de genre  $g$  avec  $b$  composantes de bord et  $p$  pointures. On note  $S_{g,b} = S_{g,b,0}$ .

**Proposition 3.4.** Si  $M$  est une 2-variété  $\mathcal{C}^\infty$  à bord orientable compacte connexe. On a  $g, b$  telle que  $M$  est difféomorphe à  $S_{g,b}$ .

**Proposition 3.5.** On a  $\chi(S_{g,b,p}) = 2 - 2g - b - p$ . Où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler usuelle

### 3.1 Théorème de géométrisation

**Definition 3.6.** On appelle  $S_{0,3}$  un *pantalon*.

**Lemme 3.7.** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ . On a un unique hexagone hyperbolique à angle droits dont trois côtés alternés sont de longueur  $a, b, c$ .

*Démonstration.* Cf annexe 7.1. □

**Proposition 3.8.** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ . On a un unique pantalon hyperbolique dont les bords sont des géodésiques de longueur  $2a, 2b, 2c$ .

*Démonstration.* On notera  $X$  le côté d'un hexagone de longueur  $x$ . Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ . On a (à isométrie près) un unique hexagone hyperbolique à angle droits dont les côtés alternés ont longueur  $a, b, c$  par la proposition 3.7. On note  $A', B', C'$  les cotés opposés à réciproquement à  $A, B$  et  $C$ . En recollant deux hexagones identiques le long de  $A', B'$  et  $C'$ , on obtient une structure hyperbolique sur le pantalon dont les bords ont bien la longueur souhaitée.

Réciproquement, si on a une structure hyperbolique sur un pantalon  $P$ , de bords  $D_1, D_2$  et  $D_3$  de longueurs  $2a, 2b$  et  $2c$ . On prend  $\gamma_i$  la courbe de longueur minimale liant  $D_i$  à  $D_{i+1}$ . Par minimalité de leur longueur, les  $\gamma_i$  ne s'intersectent pas, sont géodésiques et orthogonales aux  $D_i, D_{i+1}$ . On coupe ensuite  $P$  le long des  $\gamma_i$ . On obtient deux hexagones à angle droits dont les côtés alternés ont longueur  $L(\gamma_1), L(\gamma_2)$  et  $L(\gamma_3)$ . Par la proposition 3.7, ils sont isomètres et donc leurs autres côtés ont longueur  $a, b, c$ . On a bien la même structure hyperbolique que précédemment sur  $P$ . □

**Proposition 3.9.** Si  $\chi(S_{g,b}) < 0$ , alors  $S_{g,b}$  se décompose en exactement  $-\chi(S_{g,b})$  pantalons.

*Démonstration.* On procède par induction sur  $\chi(S_{g,b})$ . Si  $\chi(S_{g,b}) = -1$ , on a un pantalon ou un tore troué  $S_{1,1}$ . Ce dernier s'obtient en collant deux composantes de bord d'un pantalon. Supposons maintenant  $\chi(S_{g,b}) < -1$ .

- Si  $b = 0$ , on décompose  $S_g$  comme sur la figure 1.
- Si  $b > 1$ , on peut obtenir  $S_{g,b}$  en collant un pantalon  $S_{0,3}$  à une composante de bord de  $S_{g,b-1}$ . On a augmenté la caractéristique d'Euler de 1 et rajouté un pantalon.
- Si  $b = 1$ , on a  $g > 1$ . On peut donc obtenir  $S_{g,1}$  en collant  $S_{1,2}$  à  $S_{g-1,1}$ .  $S_{1,2}$  est composée de deux pantalons (comme au milieu de la figure 1) et  $\chi(S_{g-1,1}) = \chi(S_{g,1}) + 2$ .

Comme à chaque étape on enlève autant de pantalons qu'on rajoute de caractéristique d'Euler, on finit bien le processus avec  $-\chi(S_{g,b})$  pantalons. □

*Remarque 3.10.* On peut étendre 3.7 et 3.8 aux pantalons et hexagones dégénérés (avec une composante de bord ou un côté de longueur nulle). On peut alors étendre 3.9 aux  $S_{g,b,p}$ .

**Corollaire 3.11.** Si  $\chi(S_{g,b,p}) < 0$ , on peut munir  $S_{g,b,p}$  d'une structure hyperbolique. De plus, on peut choisir arbitrairement les longueurs de chaque composante du bord.

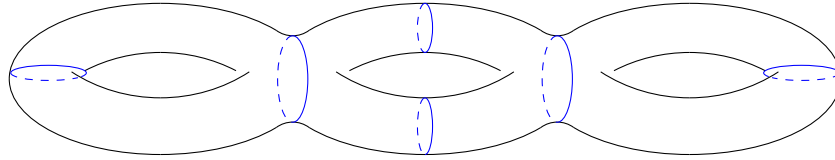


FIGURE 1 – Découpage de  $S_3 = S_{3,0,0}$  en 4 pantalons

## 4 Espace de Teichmüller et coordonnées de Fenchel-Nielsen

Dans cette section et la suivante, on se restreindra à l'étude de la surface  $S_g$ ,  $g > 2$ . La plupart des résultats s'étendent sans difficulté majeure aux autres surfaces pouvant être vêtues d'une métrique hyperbolique et au tore vêtu de métriques euclidiennes.

### 4.1 Introduction : propriétés des courbes

#### 4.1.1 Propriétés élémentaires (preuves en annexe)

**Definition 4.1.** Une courbe fermée est *simple* si elle ne s'auto-intersecte pas.

**Definition 4.2.** Une *multicourbe* est une union finie de courbes simples disjointes non contractiles. Elle est dite *essentielle* si elle n'a pas de composantes homotopes entre elles.

**Definition 4.3.** Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux courbes simples fermées. On définit l'*intersection géométrique*  $i(\gamma_1, \gamma_2) := \min \#(\gamma'_1 \cap \gamma'_2)$  pour  $\gamma'_1, \gamma'_2$  homotopes à  $\gamma_1, \gamma_2$ . Quand  $i(\gamma_1, \gamma_2) := \#(\gamma_1 \cap \gamma_2)$ , on dit que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont en *position minimale*. On étend cette définition aux multicourbes.

**Proposition 4.4.** Une multicourbe de  $S_g$  essentielle a moins de  $3g - 3$  composantes. Elle en a  $3 - 3g$  si et seulement si c'est une décomposition en pantalons.

**Proposition 4.5.** Deux courbes ou multicourbes essentielles géodésiques sont toujours en position minimale.

**Proposition 4.6.** Soient  $\mu, \nu$  en position minimale. L'union de leurs supports ne dépend, à isotopie ambiante près, que de leurs classes d'isotopie.

**Definition 4.7.** On définit  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(S_g)$  l'ensemble des courbes fermées simples non triviales à homotopie et inverse près.

**Proposition 4.8.** Si  $M$  est une variété hyperbolique compacte, chaque élément de  $\mathcal{S}(M)$  est représenté par une unique courbe géodésique  $\bar{\gamma}$ . Si  $\gamma$  est une courbe simple fermée non homotopiquement triviale, la géodésique  $\bar{\gamma}$  associée l'est aussi. On confondra donc souvent  $\gamma \in \mathcal{S}$  et sa géodésique associée.

### 4.1.2 Lemme du collier

**Definition 4.9.** On appelle  $R$ -collier d'une géodésique  $\gamma$  un  $R$ -voisinage tubulaire métrique de  $\gamma$  homéomorphe à  $\gamma \times [-R, R]$  où  $\gamma(t) \times [-R, R]$  est la géodésique orthogonale à  $\gamma$  en  $\gamma(t)$  parcourue à vitesse constante comme à gauche de la figure 4. On défini de même un  $R$ -demi-collier d'une composante de bord  $\gamma$  homéomorphe à  $\gamma \times [0, R]$ .

*Remarque 4.10.* Comme  $\mathbb{H}^2$  est de courbure constante égale à  $-1$ , tout  $R$ -voisinage d'une géodésique de  $\mathbb{H}^2$  est un  $R$ -collier.

**Definition 4.11.** On appelle  $f$  dans tout le reste de cette partie la fonction définie dans la figure 2. On a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ .

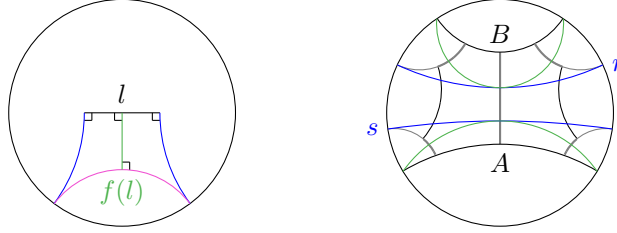


FIGURE 2 – A gauche la définition de  $f(l)$  : On prend un segment géodésique  $l$  (de longueur  $l$ ) on trace les deux demi-géodésiques perpendiculaires au bout de ce segment (en bleu) pour former un quadrilatère à deux angles droits et deux sommets à l'infini.  $f(l)$  est la distance entre la géodésique reliant les deux sommets à l'infini (en rose) et le segment  $l$ .  $f$  est bien définie car  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  agit transitivement sur les segments de longueur  $l$ .

FIGURE 3 – A droite, la figure de la preuve de 4.12. En gris et noir, le relevé du pantalon dans  $\mathbb{H}^2$ , en bleu,  $r$  et  $s$  les lignes de construction de  $f(a)$  et  $f(b)$ , et en vert, le bord des  $f(i)$ -voisinages des géodésiques contenant  $I$  ( $i = a$  et  $b$ ).

**Proposition 4.12.** Soit  $P$  est un pantalon hyperbolique dont les bords ont longueur  $a$ ,  $b$ , et  $c$ . Les  $f(a)$ ,  $f(b)$ , et  $f(c)$ -voisinages de ces bords sont des demi-colliers disjoints.

*Démonstration.* On considère deux composantes de bord  $A$  et  $B$  de longueurs  $a$  et  $b$ . On découpe  $P$  en deux hexagones hyperboliques qu'on relève dans  $\mathbb{H}^2$  en un octogone comme dans la figure 3. On a alors bien des  $f(a)$  et  $f(b)$ -voisinages disjoints. On note  $V_i$  le  $f(i)$ -voisinage de  $I$  dans  $P$ . Ils forment de plus des demi-colliers. En effet, comme  $V_a$  est disjoint de  $V_c$ , il est délimité comme sur la figure par des orthogéodésiques à  $A$  (en gris). Le recollement le long de ces orthogéodésiques nous donne bien un collier.  $\square$

**Lemme 4.13.** (Lemme du collier) Soit  $S_g$  muni d'une métrique hyperbolique,  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  des géodésiques disjointes fermées de longueurs respectives  $l_1, \dots, l_k$ . Alors les  $\gamma_i$  ont des  $f(l_i)$ -colliers disjoints.

*Démonstration.* Quitte à rajouter des géodésiques, on suppose que les  $\gamma_i$  forment une décomposition en pantalons. Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 4.12 à ces pantalons.  $\square$

**Corollaire 4.14.** *Pour toute géodésique fermée  $\gamma$  on a un collier de  $\gamma$ . Il est homéomorphe à un anneau.*

**Corollaire 4.15.** *Soient  $\gamma$  et  $\eta$  deux géodésiques fermées distinctes de  $S_g$ . On a :  $l(\eta) \geq 2i(\eta, \gamma) \cdot f(l(\gamma))$ .*

*Démonstration.* On a  $A$  un  $f(l(\gamma))$ -collier de  $\gamma$ . Il n'y a pas dans  $A$  de chemin géodésique reliant  $\gamma(t_0)$  à  $\gamma(t_1)$  sans passer par  $\gamma([t_0, t_1])$ . A chaque intersection entre  $\gamma$  et  $\eta$ ,  $\eta$  traverse donc tout  $A$  donc parcourt une distance supérieure à  $2f(l(\gamma))$ , d'où l'inégalité.  $\square$

## 4.2 L'espace de Teichmüller

**Definition 4.16.** *L'espace de Teichmüller  $Teich(S_g)$  est l'ensemble des structures hyperboliques sur  $S_g$  à isométrie homotope à l'identité près. L'espace de Moduli est l'ensemble des structures hyperboliques à isométrie près.*

### 4.2.1 Tremblement de terre

**Définition-Proposition 4.17.** *Soit,  $m \in Teich(S_g)$ ,  $\gamma \in \mathcal{S}$ . On confondra  $\gamma$  et sa représentante géodésique. Informellement, on va construire une nouvelle structure hyperbolique  $m_\theta$  obtenue en coupant le long de  $\gamma$ , tournant d'un angle  $\theta$  dans le sens indirect, puis en recollant. On s'appuie sur la figure 4.*

Formellement, on prend  $\gamma: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \rightarrow S_g$ . Par le corollaire 4.14, on a  $A$  un collier de  $\gamma$  homéomorphe à  $\gamma \times [-R, R]$ . On prend  $f \in \mathcal{C}^\infty([-R, R])$  identiquement nulle sur  $[-R, -\frac{R}{2}]$  et identiquement  $\theta$  sur  $[\frac{R}{2}, R]$ . On définit  $\varphi(\gamma(t), s) := (\gamma(t + f(s)), s)$ . Les géodésiques vertes sur la figure de gauche de 4 sont envoyées sur celles de la figure de droite. On définit la nouvelle métrique  $m_\theta$  sur  $S_g$  :  $m_\theta$  coïncide avec  $m$  sur  $S_g - A$ , et avec  $\varphi_*m$  sur  $A$ . On dit qu'on a fait un *tremblement de terre* d'angle  $\theta$  le long de  $\gamma$ . Comme  $(\gamma(t), s) \mapsto (\gamma(t + \theta), s)$  est une isométrie de  $A$ ,  $m$  et  $\varphi_*m$  se recollent bien sur  $\gamma \times [-R, -R/2] \sqcup [R/2, R]$ .

*Remarque 4.18.* Dans  $m_\theta$ ,  $A$  est toujours un voisinage de  $\gamma$  qui est toujours une géodésique de même longueur.

**Definition 4.19.** *Avec les notations de la définition précédente, si  $\theta = 2\pi$ , comme  $\gamma$  est définie modulo  $2\pi$ , sur  $\gamma \times [R/2, R] \subset A$ ,  $\varphi = id$ . Donc  $\varphi$  se recolle avec l'identité en un difféomorphisme sur  $S_g$ . On appelle ce difféomorphisme *twist de Dehn* le long de  $\gamma$ .*

**Proposition 4.20.** *Soit  $\gamma \in \mathcal{S}$ . L'action par tremblement de terre*

$$\begin{aligned} E_\gamma: \mathbb{R} \times Teich(S_g) &\longrightarrow Teich(S_g) \\ (\theta, m) &\longmapsto m_\theta^\gamma \end{aligned}$$

*est bien définie et est bien une action  $(\mathbb{R}, +) \curvearrowright Teich(S_g)$ .*

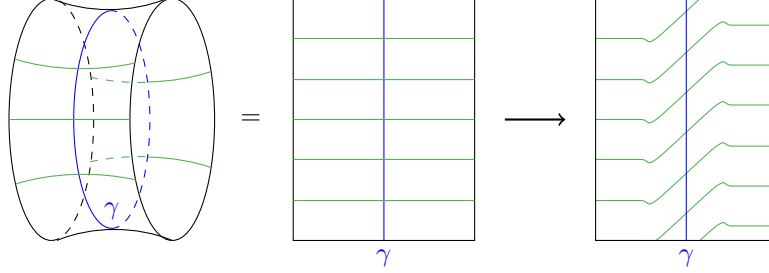


FIGURE 4 – Effet du tremblement de terre le long de  $\gamma$  sur un voisinage de  $\gamma$  : à gauche un  $R$ -collier de  $\gamma$  avec en bleu et des orthogéodésiques à  $\gamma$  en vert, à droite, le même  $R$ -collier après l’action par tremblement de terre

*Démonstration.*  $E_\gamma$  est bien définie. En effet, la seule ambiguïté dans la définition de  $E_\gamma$  est la fonction  $f$  (Si on a des voisinages  $A \neq A'$ , on prend le plus grand des deux). Si on prend deux fonctions  $f$  et  $f'$  différentes, les deux métriques résultant diffèrent d’une isométrie égale à l’identité sur  $S_g - A$  et qui envoie  $(\gamma(t), s) \in A$  sur  $\gamma(t + f(s) - f'(s)), s$ ). Elle est clairement homotope à l’identité.

$E_\theta$  est bien une action. En effet, on a bien  $m_{\theta+\theta'}^\gamma = (m_{\theta'}^\gamma)_\theta^\gamma$  il suffit de prendre le même voisinage  $A$  pour les deux tremblements de terre, ce qu’on peut faire par la remarque 4.18.  $\square$

*Remarque 4.21.* Comme  $E_\gamma$  n’affecte qu’un voisinage de la géodésique associée  $\gamma$ , si  $\gamma, \eta$  sont d’intresection nulle,  $E_\gamma$  et  $E_\eta$  commutent.

**Definition 4.22.** On peut donc étendre la définition à une multicourbe essentielle  $\mu$  contenant  $k$  courbes en

$$E_\mu : \mathbb{R}^k \times \text{Teich}(S_g) \longrightarrow \text{Teich}(S_g)$$

$$(\theta = (\theta_1 \dots \theta_k), m) \longmapsto m_\theta^\mu = m_{\theta_1}^{g_{a_1}} \circ \dots \circ m_{\theta_k}^{g_{a_k}}$$

bien définie par la remarque 4.21.

#### 4.2.2 Fonctions de longueur

**Definition 4.23.** On définit, pour  $\gamma$  une courbe simple fermée et  $m \in \text{Teich}(S_g)$ ,  $l^\gamma(m)$  la longueur de la  $m$ -géodésique homotope à  $\gamma$ .

**Proposition 4.24.** Soient  $\gamma, \eta$  deux courbes simples fermées. La fonction  $\theta \longmapsto l^\eta(m_\theta^\gamma)$  est constante si  $i(\gamma, \eta) = 0$ , strictement convexe et propre sinon.

*Démonstration.* Tout d’abord si  $\gamma$  et  $\eta$  ne s’intersectent pas, on peut choisir un voisinage de  $\gamma$  pour le tremblement de terre ne contenant pas  $\eta$ . On a donc bien  $\theta \longmapsto l^\eta(m_\theta^\gamma)$  constante.

Supposons maintenant  $i(\gamma, \eta) > 0$ . On note  $\bar{\eta}^\theta$  le représentant géodésique de  $\eta$  dans la métrique  $m_\theta^\gamma$ . Soit  $A$  un  $R$ -collier de  $\gamma$ . La géodésique  $\bar{\eta}^\theta$  de  $m_\theta^\gamma$  peut être vue de la façon suivante (figure 5) : En dehors de  $A$ ,  $\bar{\eta}^\theta$  est constituée de segments  $m$ -géodésiques. Dans  $A$ , elle est constituée de  $m$ -segments tournés de façon lisse d'un angle  $\theta$  (figure 5, centre). On peut représenter ces  $m_\theta^\gamma$ -segments comme des  $m$ -segments brisés le long de  $\gamma$  (figure 5, droite). On remarque que la  $m$ -géodésique brisée ainsi obtenue, notée  $\tilde{\eta}^\theta$ , a même longueur dans  $m$  que  $\bar{\eta}^\theta$  dans  $m_\theta^\gamma$ . De plus, ses  $n$  intersections avec  $\gamma$  se traduisent par  $n$  sauts le long de  $\gamma$  de longueur  $\frac{\theta l(\gamma)}{2\pi}$ .

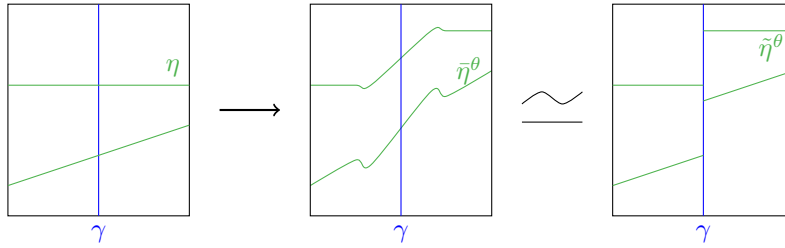


FIGURE 5 – On peut représenter  $\bar{\eta}^\theta \cap A$  comme une union de segments géodésiques pour  $m$  et brisés le long de  $\gamma$ .

On relève  $\eta$  dans le revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $(S_g, m)$  en une ligne  $l$  et on note  $r_1 \dots r_{n+1}$  les  $n + 1$  relevés de  $\gamma$  successifs qu'elle croise (figure 6). On considère les  $r_i$  parcourues à vitesse 1.  $\bar{\eta}^\theta$  est représentée par une géodésique brisée dont chaque segment part de  $r_i(t_i - \frac{\theta l(\gamma)}{2\pi})$  et arrive en  $r_{i+1}(t_{i+1})$  comme dans la figure 6). De plus,  $r_{n+1}(t_{n+1})$  et  $r_1(t_1 - \frac{\theta l(\gamma)}{2\pi})$  représentent le même point de  $S_g$ . On a donc  $\tau \in \text{Iso}(\mathbb{H}^n)$  tel que  $r_{n+1}(t_{n+1}) = \tau(r_1(t_1 - \frac{\theta l(\gamma)}{2\pi}))$ . Réciproquement, peut obtenir de nombreuses courbes par ce processus mais elles représenteront toutes des courbes homotopes à  $\bar{\eta}^\theta$  et donc seront plus longues que  $\bar{\eta}^\theta$ . On a donc, avec  $X := \{\mathbb{R}^{n+1}, r_{n+1}(t_{n+1}) = \tau(r_1(t_1))\}$ ,

$$l^n(m_\theta^\gamma) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} d(r_i(t_i - \frac{\theta l(\gamma)}{2\pi}), r_i(t_{i+1})) \mid (t_1, \dots, t_{n+1}) \in X \right\}$$

Or, les  $r_i$  sont ultraparallèles par la remarque 2.17. Les fonctions distance entre les  $r_i$  sont donc strictement convexes et propres par la proposition 2.7. Par analyse élémentaire,  $\theta \mapsto l^n(m_\theta^\gamma)$  est bien strictement convexe et propre.  $\square$

**Corollaire 4.25.** *Pour toute courbe simple fermée  $\gamma$ , l'action  $E_\gamma$  est libre.*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe  $\theta_0 > \text{tel}$  que  $m = m_{\theta_0}^\gamma$ . On obtient  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $m = m_{\theta_0}^{n\theta_0}$ . Soit  $\eta$  tel que  $i(\eta, \gamma) > 0$ . On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $l^n(m_{\theta_0}^{n\theta_0}) = l^n(m)$ . C'est absurde par stricte convexité de  $\theta \mapsto l^n(m_\theta^\gamma)$ .  $\square$

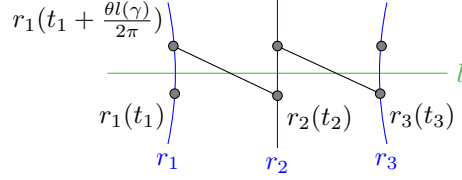


FIGURE 6 – En vert,  $l$  le relevé de  $\eta$ , en bleu ceux de  $\gamma$  et en noir celui de  $\tilde{\eta}$ .

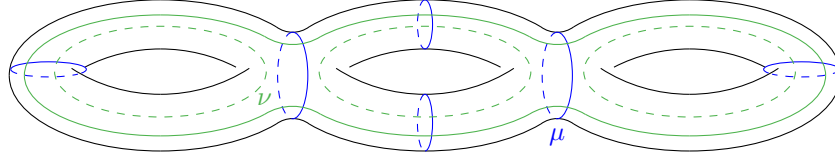


FIGURE 7 – Un châssis pour  $S_3$ , en bleu,  $\mu$  décomposition en pantalon et en vert  $\nu$  qui coupe les pantalons en hexagones.

*Remarque 4.26.* On peut étendre la définition 4.23 à une multicourbe. Les résultats 4.24 et 4.25 restent valables dans ce cadre.

### 4.3 Les coordonnées de Fenchel-Nielsen

#### 4.3.1 Définition

**Définition 4.27.** Un *châssis* de  $S_g$  est composé de deux multicourbes essentielles en position minimale :  $\mu$  une décomposition en pantalons et  $\nu$  une multicourbe découpant ces pantalons en hexagones comme sur la figure 7.

Par la proposition 4.4, on a  $\mu = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \dots \sqcup \gamma_{3-3g}$ . On définit les *coordonnées de Fenchel-Nielsen* comme

$$FN: Teich(S_g) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{3-3g} \times \mathbb{R}^{3-3g}$$

$$m \longmapsto (l_1, \dots, l_{3-3g}, \theta_1, \dots, \theta_{3-3g})$$

où les  $l_i$  sont les  $l^{r_i}(m)$  qui ne dépendent que de  $\mu$ . Pour définir les  $\theta_i$ , on fixe  $m$  une métrique hyperbolique,  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\nu}$  les représentantes géodésiques de  $\mu$  et  $\nu$ . Par 4.5 elles sont en position minimale donc par 4.6 elles restent un *châssis*.

Qualitativement, les  $\theta_i$  vont mesurer la torsion induite par le recollement des pantalons. Formellement, on regarde (figure 8, gauche) les deux pantalons (possiblement égaux) adjacents à  $\tilde{\gamma}_i$ .  $\bar{\nu}$  intersecte ces deux pantalons en 4 arcs. On note  $\lambda$  et  $\lambda'$  les deux arcs de  $\bar{\nu}$  intersectant  $\tilde{\gamma}_i$ . On relève  $\gamma_i, \lambda, \lambda'$  et les  $\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^4$  définis dans figure 8, gauche dans  $\mathbb{H}^2$  (figure 8, droite). On trace les orthogéodésiques de  $\tilde{\gamma}_i^j$  à  $\tilde{\gamma}_i$ , puis on complète la figure pour former deux hexagones à angles droits. Ce sont des hexagones orthogéodésiques isotopes à ceux définis par le châssis  $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ . Leurs bords le long de la géodésique  $\tilde{\gamma}_i$  étant de même longueur, on a bien  $s_i = s'_i$ . On définit  $\theta_i := \frac{2\pi s_i}{l_i}$ , qui ne dépend donc que de  $m$ .

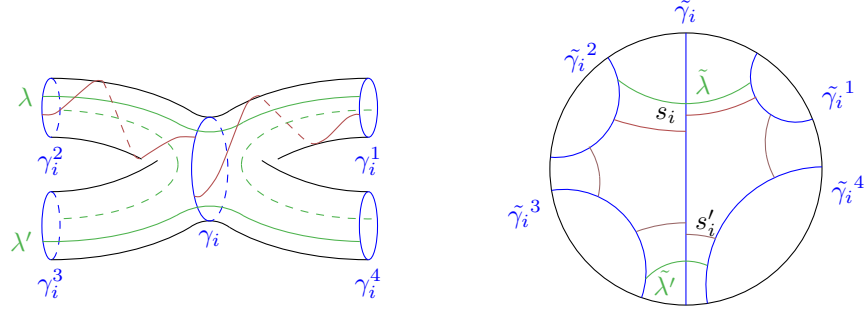


FIGURE 8 – A gauche, deux paires de pantalons collées, à droite leur relevé sur  $\mathbb{H}^2$ . Les géodésiques rouges et bleues sont orthogonales.

**Proposition 4.28.** *FN est bien définie sur  $\text{Teich}(S_g)$ .*

*Démonstration.* Soit  $m, m'$  deux structures hyperboliques isométriques par une isométrie isotope à l'identité, les  $\theta_i$  et  $l_i$  ne dépendent que des classes d'isotope de  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\nu}$ , ils sont bien égaux.  $\square$

*Remarque 4.29.* On remarque que l'action  $E_\mu$  par tremblement de terre le long de  $\mu$  se comporte très bien avec  $FN$  : si  $FN(m) = (l, \theta_0)$ , alors,  $FN(m_\theta^\mu) = (l, \theta_0 + \theta)$ .

**Théorème 4.30.** *FN est une bijection.*

*Démonstration.*  $FN$  est surjective. En effet, si  $l \in \mathbb{R}_+^{*3-3g}$ , par le corollaire 3.11, on peut munir  $S_g$  d'une métrique hyperbolique  $m$  telle que  $l^\mu(m) = l$ . Il suffit ensuite d'agir par  $E_\mu$  pour obtenir les angles souhaités.

$FN$  est injective, en effet soient  $FN(m_1) = FN(m_2)$ . Par liberté de  $E_\mu$ , on peut supposer que tous les  $\theta$  sont nuls. Alors  $\bar{\mu}^{m_1} \sqcup \bar{\nu}^{m_1}$  forme un découpage en hexagones hyperboliques à angles droits, déterminés par les  $l_i$  (proposition 3.7). Ceci induit une isométrie  $\varphi$  de  $m_1$  à  $m_2$  envoyant  $\bar{\mu}^{m_1} \sqcup \bar{\nu}^{m_1}$  sur  $\bar{\mu}^{m_2} \sqcup \bar{\nu}^{m_2}$ . Or par 4.6  $\bar{\mu}^{m_2} \sqcup \bar{\nu}^{m_2}$  et  $\bar{\mu}^{m_1} \sqcup \bar{\nu}^{m_1}$  sont isotopes par une isotopie ambiante. Donc  $\varphi$  est isotope à  $\varphi'$  fixant les hexagones découpés par  $\bar{\mu} \sqcup \bar{\nu}$ . Comme ces hexagones sont déterminés par les  $l_i$ ,  $\varphi'$  est l'identité.  $\square$

### 4.3.2 Une topologie sur l'espace de Teichmüller

**Théorème 4.31.** *Soient  $\gamma_i$  les courbes de  $\mu$  une décomposition en pantalon,  $\gamma'_i$  et  $\gamma''_i$  les courbes définies dans la figure 9.*

$$L: \text{Teich}(S_g) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{*9-9g}$$

$$m \longmapsto (l^{\gamma_i}(m), l^{\gamma'_i}(m), l^{\gamma''_i}(m))_{i=1 \dots 3g-3}$$

*est injective.*

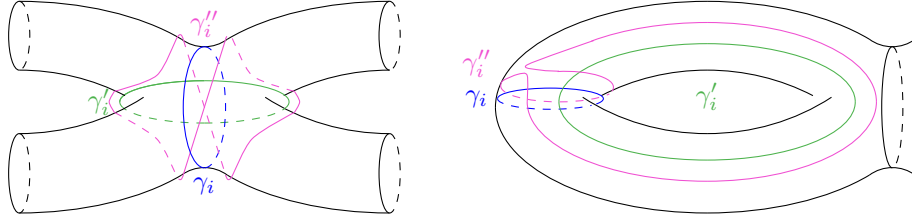


FIGURE 9 – Les courbes  $\gamma'_i$  (vert) sont définies de façon légèrement différente selon que  $\gamma_i$  (bleu) sépare deux pantalons différents ou non (respectivement à gauche et à droite). Dans les deux cas,  $\gamma'_i$  intersecte  $\gamma_i$  une ou deux fois et n'intersecte pas les  $\gamma_j$  pour  $j \neq i$ . On définit alors  $\gamma''_i$  (rose) comme l'image de  $\gamma'_i$  par le Twist de Dehn le long de  $\gamma_i$ .

*Démonstration.* On considère  $L \circ FN^{-1}: (l_i, \theta_i) \mapsto (l_i, l'_i, l''_i)$ . Montrons que cette fonction est injective. Il suffit de montrer que les  $l'_i, l''_i$  déterminent les  $\theta_i$ . Par la proposition 4.24,  $l'_i(\theta_i)$  est strictement convexe et propre. De plus par la définition du Twist de Dehn 4.19,  $l''_i(\theta_i) = l'_i(\theta_i - 2\pi)$ . Comme une fonction strictement convexe propre a au plus deux préimages par image,  $\theta_i \mapsto (l_i(\theta_i), l_i(\theta_i - 2\pi))$  est bien injective, d'où l'injectivité de  $L$ .  $\square$

**Definition 4.32.** Chaque élément  $\gamma \in \mathcal{S}$  induit une fonction  $l^\gamma: Teich(S_g) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . On a donc par le théorème 4.31 une injection  $Teich(S_g) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ . On munit  $Teich(S_g)$  de la topologie induite par cette injection (la topologie de départ pour les  $l^\gamma$ ).

*Remarque 4.33.* Comme  $\mathcal{S}$  est dénombrable, par des propriétés de topologie élémentaire,  $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$  et donc  $Teich(S_g)$  sont Hausdorff ( $T_2$ ) et à base dénombrable d'ouverts.

**Théorème 4.34.**  $FN$  est un homéomorphisme.

*Démonstration.* On montre que  $FN^{-1}$  est continue et propre.  $FN^{-1}$  est continue. En effet, soit  $\eta \in \mathcal{S}$ , montrons que  $l^\eta \circ FN^{-1}$  est continue.  $\eta$  se relève en un segment géodésique de même longueur  $\tilde{\eta}_{(l_i, \theta_i)}$  dans  $\mathbb{H}^2$ . Or les  $(l_i, \theta_i)$  déterminent continuellement un découpage en hexagones à angles droits de  $S_g$  et les recollements entre hexagones, donc, à isométrie près, la façon de relever  $S_g$  dans  $\mathbb{H}^2$ . Le segment  $\tilde{\eta}_{(l_i, \theta_i)}$  à isométrie près dépend donc continuellement des  $(l_i, \theta_i)$ . Comme il est de longueur  $l^\eta \circ FN^{-1}((l_i, \theta_i))$ ,  $l^\eta \circ FN^{-1}$  est continue. Par propriété de la topologie initiale,  $FN^{-1}$  est bien continue.

Montrons que  $FN^{-1}$  est propre. Soit  $K$  compact de  $Teich(S_g)$  montrons que  $FN(K)$  est compact. On raisonne par l'absurde et on suppose que  $FN(K)$  n'est pas borné dans  $\mathbb{R}_+^{3-3g} \times \mathbb{R}^{3-3g}$ . Soit  $(l_i^n, \theta_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite non bornée de  $FN(K)$ . On a, à sous suite près, trois cas possibles : un des  $l_i$  tend vers l'infini, un des  $l_i^n$  tend vers 0, ou un des  $\theta_i^n$  tend vers  $\pm\infty$  et les  $l_i^n$  sont bornés donc, à sous suite près, convergent dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Si un des  $l_i^n$  tend vers l'infini, alors

$l^{\gamma_i} \circ FN^{-1}(l_i^n, \theta_i^n) \rightarrow \infty$  donc  $(FN^{-1}(l_i^n, \theta_i^n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $K$  sans sous-suite convergente. C'est absurde. Si un des  $l_i^n$  tend vers 0, on prend  $\eta \in \mathcal{S}$  telle que  $i(\gamma_i, \eta) > 0$ , alors par le corollaire 4.15, on a  $l(\eta) \geq 2i(\eta, \gamma) \cdot f(l(\gamma))$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ ,  $l^n \circ FN^{-1}(l_i^n, \theta_i^n) \rightarrow \infty$ . Comme précédemment, c'est absurde. Dans le dernier cas,  $\theta_i^n \rightarrow \pm\infty$  et les  $l_i^n$  convergent à sous suite près vers des  $l_i$ . On prend  $\eta \in \mathcal{S}$  telle que  $i(\gamma_i, \eta) > 0$  et  $i(\gamma_j, \eta) = 0$  pour  $i \neq j$  (comme  $\gamma'_i$  dans la figure 9). On a  $\lim l^n(FN^{-1}(l_i^n, \theta_i^n)) = \lim l^n(FN^{-1}(l_i, \theta_i^n))$  par continuité de  $FN^{-1}$ . On note  $m = FN(l_i, 0)$ . Alors  $l^n(FN^{-1}(l_i, \theta_i^n)) = l^n(m_{\theta_i^n}^\mu) = l^n(m_{\theta_i^n}^{\gamma_i})$  car seuls les tremblements de terre le long de  $\gamma_i$  affectent  $l^n$ . Enfin,  $l^n(m_{\theta_i^n}^{\gamma_i}) \rightarrow \pm\infty$  car  $\theta \mapsto l^n(m_\theta^{\gamma_i})$  est propre par la proposition 4.24.

$FN^{-1}$  est donc continue et propre à valeurs dans un espace Hausdorff donc est un homéomorphisme sur son image.  $\square$

## 5 Compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller

### 5.1 Courants géodésiques

#### 5.1.1 Introduction

**Definition 5.1.** On fixe  $S_g = \mathbb{H}^2/\Gamma$  dans toute la suite. On note  $\mathcal{G}$  l'ensemble des lignes géodésiques de  $\mathbb{H}^2$ . On a naturellement, si  $S_g = \mathbb{H}^2/\Gamma$ ,  $\mathcal{G}(S_g) = \mathcal{G}/\Gamma$ .

*Remarque 5.2.* Comme les éléments de  $\mathcal{G}$  sont uniquement déterminées par leurs deux bords à l'infini,  $\mathcal{G} = (\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 - \Delta)/\sim$  où  $\Delta$  est la diagonale, et  $(a, b) \sim (b, a)$ . On munit  $\mathcal{G}$  de la topologie induite par ce quotient qui est homéomorphe à un ruban de Möbius ouvert.

**Definition 5.3.** On définit les *courants géodésiques*  $\mathcal{C}$  de  $S_g$  comme les mesures boréliennes localement finies sur  $\mathcal{G}(S_g)$  qu'on identifiera aux mesures boréliennes localement finies  $\Gamma$ -invariantes de  $\mathcal{G}$ .

**Proposition 5.4.** *La paire  $(\mathcal{G}, \Gamma)$  ne dépend pas (à isomorphismes près) de la métrique  $m$  sur  $S_g$ .  $\mathcal{G}(S_g)$  et  $\mathcal{C}$  sont donc indépendants de  $m$ .*

*Démonstration.* Soient  $m, m'$  deux métriques de  $S_g$ . Elles induisent deux revêtements universels  $\mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$  et des groupes d'isométries  $\Gamma, \Gamma'$  identifiés à  $\Pi_1(S_g)$ . L'identité se relève alors en un homéomorphisme  $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$   $\Pi_1(S_g)$ -équivariant. On admet qu'il s'étend de  $\partial\mathbb{H}^2$  à  $\partial\mathbb{H}^2$  (voir théoème 5.2.1 de [4]). Il induit donc un homéomorphisme  $\Pi_1(S_g)$ -équivariant  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  qui transforme l'action par  $\Gamma$  en celle par  $\Gamma'$ .  $\square$

**Proposition 5.5.** *Si  $D \subset S_g$  est compact, on note  $\mathcal{G}_D$  l'ensemble des droites passant par  $D$ . Il est compact dans  $\mathcal{G}$ .*

*Démonstration.*  $D$  est loin de  $\partial\mathbb{H}^2$  donc  $\mathcal{G}_D$  est loin de la diagonale dans  $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$  donc est dans un compact. De plus,  $\mathcal{G}_D$  est fermé donc il est compact.  $\square$

**Proposition 5.6.** Soit  $g \in \mathcal{G}$ . La  $\Gamma$ -orbite de  $g$  est discrète si et seulement si  $g$  se projette en une géodésique fermée dans  $S_g$ .

*Démonstration.* Comme  $S_g$  est compacte,  $g$  ne se projette pas en une géodésique fermée  $\iff$  On a un petit disque  $D \subset S_g$  qui intersecte le projeté de  $g$  une infinité de fois  $\iff$  On a un disque  $D' \subset \mathbb{H}^2$  qui intersecte la  $\Gamma$ -orbite de  $g$  une infinité de fois  $\iff$  La  $\Gamma$ -orbite de  $g$  n'est pas discrète.  $\square$

**Corollaire 5.7.** Les seuls atomes possibles d'une mesure de  $\mathcal{C}$  sont les courbes géodésiques de  $S_g$ .

*Remarque 5.8.* On a donc une injection  $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$  qui à  $\gamma \in \mathcal{S}$  associe la mesure de Dirac sur  $\gamma \in \mathcal{G}/\Gamma$ . On en déduit une injection  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}$ , où une multicourbe  $\mu \in \mathcal{M}$  est identifiée à la somme de ses composantes.

### 5.1.2 Crayons et boîtes

**Definition 5.9.** Un sous ensemble  $P$  de  $\mathcal{G}$  est un *crayon* si tous ses éléments ont un bout commun  $a$  (figure 10, gauche). On note  $\Gamma(\mathcal{S})$  les relevés des courbes de  $\mathcal{S}$ . On dit qu'un crayon est *générique* si il ne contient pas d'éléments de  $\Gamma(\mathcal{S})$ .

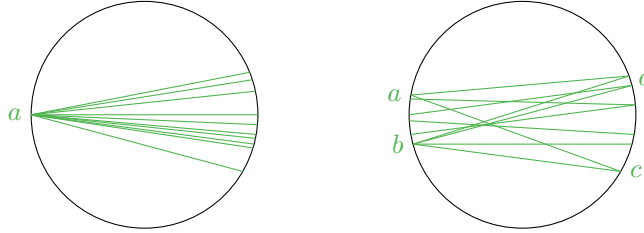


FIGURE 10 – A gauche, un crayon sur  $a$ , à droite, des éléments d'une boîte  $[a, b] \times [c, d]$ .

**Proposition 5.10.** Soit  $\mu \in \mathcal{C}$ ,  $P$  un crayon. Si  $P$  est générique,  $\mu(P) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $P$  un crayon générique pointant vers  $a \in \partial\mathbb{H}^2$ .  $P$  se projette alors en un faisceau de lignes de  $S_g$  qui rétrécit exponentiellement (par propriété des géodésiques de  $\mathbb{H}^2$ ) mais ne se referme jamais. On a donc un disque  $D \subset S_g$  qui les intersecte une infinité de fois. Un relevé  $D' \subset \mathbb{H}^2$  de  $D$  intersecte alors une infinité des  $(\gamma(P))_{\gamma \in \Gamma}$ . Or,  $\mathcal{G}_D$  est compact (proposition 5.5) donc de mesure finie, donc  $\mu(P) = 0$ .  $\square$

**Definition 5.11.** Soient  $a, b, c, d \in \partial\mathbb{H}^2$  ordonnés dans le sens direct (figure 10, droite). Une *boîte* est le compact de  $\mathcal{G}$  constitué des droites dont les bouts sont dans  $[a, b]$  et  $[c, d]$ . Le bord  $\partial B$  d'une boîte  $B$  est constitué des quatre crayons de la forme  $\{a\} \times [c, d]$ . Une boîte  $B$  est dite *générique* si  $\Gamma(\mathcal{S}) \cap \partial B = \emptyset$ .

**Proposition 5.12.** Soit  $B$  une boîte générique,  $\mu_n \rightharpoonup \mu$ , alors  $\mu_n(B) \rightarrow \mu(B)$ .

*Démonstration.* En effet, comme  $B$  est générique, son bord est constitué de crayons génériques donc  $\mu(\partial B) = 0$  par la proposition 5.10.  $\square$

*Remarque 5.13.* Les boites sont un objet fondamental de cette partie. En effet, les propositions techniques sur les courants géodésiques admises ici (5.14, 5.28, 5.30, 5.39, et 5.42) se prouvent grâce à des calculs sur des boites bien choisies.

**Proposition 5.14** (admise).  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  est un ensemble discret.

### 5.1.3 Mesure de Liouville

**Definition 5.15.** Soit  $\gamma \in \mathcal{G}$  parcourue à vitesse 1,  $U_\gamma$  l'ouvert contenant toutes les droites qui intersectent  $\gamma$  (mais pas  $\gamma$ ). On peut paramétrer  $U_\gamma$  par  $\mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[$ , où  $(t, \theta)$  est la géodésique intersectant  $\gamma$  en  $\gamma(t)$  en formant un angle  $\theta$ . On munit alors  $U_\gamma$  de la deux-forme :  $L_\gamma = \frac{1}{2} \sin(\theta) dt \wedge d\theta$ .

**Définition-Proposition 5.16** (admis). Les  $U_\gamma$  forment un atlas différentiable de  $\mathcal{G}$ . les  $L_\gamma$  se recollent à signe près et donc définissent une mesure  $L$  sur  $\mathcal{G}$ , la mesure de Liouville.

**Proposition 5.17.** Si  $s \subset \mathbb{H}^2$  est un segment géodésique de longueur  $l$ , la mesure de Liouville de l'ensemble des lignes intersectant  $s$  est  $l$ .

*Démonstration.* L'ensemble est de mesure

$$\int_0^\pi \int_0^l \frac{1}{2} \sin(\theta) dt d\theta = l \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin(\theta) d\theta = l$$

$\square$

**Definition 5.18.** Si  $m$  est une métrique hyperbolique sur  $S_g$  induite par  $S_g = \mathbb{H}^2/\Gamma$ . Comme la mesure de Liouville est invariante par  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ , elle induit un courant géodésique  $L_m \in \mathcal{C}(S_g)$ . On remarque que  $\mathcal{C}(S_g)$  ne dépend pas de  $m$  mais  $L_m$  dépend de  $m$ . Ces courants de Liouville induisent une application  $\text{Teich}(S_g) \rightarrow \mathcal{C}(S_g)$ .

## 5.2 Fonction d'intersection

**Definition 5.19.** On définit  $\mathcal{I} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}$  l'ensemble des paires de géodésiques incidentes distinctes de  $\mathbb{H}^2$ .  $\mathcal{I}$  forme un ouvert de  $\mathcal{G}^2$ . On le munit donc de la topologie induite par cette inclusion.

Comme deux géodésiques disjointes ne s'intersectent qu'en un point, on peut voir  $\mathcal{I}$  comme l'ensemble des triplets  $(p, l_1, l_2)$  où  $p \in \mathbb{H}^2$ ,  $l_i \in T_p \mathbb{H}^2$  unitaire.

**Proposition 5.20.** L'application  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\Gamma$  est un revêtement.

*Démonstration.*  $\Gamma$  agit librement proprement discontinuement sur  $\mathbb{H}^2$  donc sur les triplets  $(p, l_1, l_2)$ .  $\square$

**Corollaire 5.21.**  $\mathcal{I}$  est donc naturellement un fibré sur  $S_g$  dont la fibre en  $p$  est l'ensemble des paires de vecteurs unitaires distincts de  $T_p S_g$

**Definition 5.22.** Si on a  $a, b \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(S_g)$ , ils se relèvent en une mesure produit  $\Gamma$ -invariante de  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$  donc de  $\mathcal{S}$  notée  $a \times b$ . Cette mesure se redescend bien par la proposition 5.20 en une mesure sur  $\mathcal{S}/\Gamma$ . On définit leur *intersection*  $i(a, b) = (a \times b)(\mathcal{S}/\Gamma) \in \mathbb{R}^+$ . Elle est clairement bilinéaire symétrique.

**Proposition 5.23.** Soient  $a, b \in \mathcal{C}$ ,  $i(a, b) < \infty$ .

*Démonstration.* Soit  $D$  un domaine fondamental compact de  $S_g = \mathbb{H}^2/\Gamma$ . Par la proposition 5.5,  $\mathcal{G}_D$  est compact donc de mesure finie. On a donc  $i(a, b) = (a \times b)(\mathcal{S}/\Gamma) \leq a(\mathcal{G}_D) \times b(\mathcal{G}_D) < \infty$ .  $\square$

**Proposition 5.24.** Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$  sont des multicourbes,  $i(\alpha, \beta)$  est égal à l'intersection géométrique de  $\alpha$  et  $\beta$ .

*Démonstration.* Par bilinéarité de  $i$ , il suffit de prouver le resultat pour  $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ . Les mesures  $\alpha$  et  $\beta$  sur  $S_g$  sont les mesures de Dirac sur  $\alpha$  et  $\beta$ . Leur mesure sur l'ensemble des  $(p, l_1, l_2)$  est donc le cardinal des triplets tels que  $(p, l_1) = \alpha$  et  $(p, l_2) = \beta$ . Ils sont un par point  $p$  d'intersection de  $\alpha$  et  $\beta$ . Enfin,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des géodésiques donc en position minimale par la proposition 4.5.  $\square$

*Remarque 5.25.* On a de même, pour  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ ,  $i(\alpha, \beta) > 0$  si et seulement si deux droites de leurs supports s'intersectent

**Proposition 5.26.** Si  $m$  est une métrique sur  $S_g$ ,  $\alpha \in \mathcal{S}$ ,  $i(L_m, \alpha) = l^\alpha(m)$  la longueur de la géodésique représentant  $\alpha$  dans  $m$ .

*Démonstration.* On représente  $\alpha$  comme une géodésique fermée de  $(S_g, m) = \mathbb{H}^2/\Gamma$ . La mesure induite  $L_m \times \alpha$  sur  $\mathcal{S}$  a pour support les droites incidentes  $(l, l')$  où  $l'$  est un relevé de  $\alpha$ . On fixe  $l'$  un relevé de  $\alpha$ . Soit un segment  $s' \subset l'$  de longueur  $l^\alpha(m)$ . Il forme un domaine fondamental pour les relevés de  $\alpha$ . Le support de  $L_m \times \alpha$  admet donc pour domaine fondamental l'ensemble des  $(l, l')$ , où  $l$  intersecte  $s'$ . Par la proposition 5.17, on a donc  $i(L_m, \alpha) = l^\alpha(m)$ .  $\square$

*Remarque 5.27.* La forme d'intersection  $i$  généralise deux notions a priori très différentes : l'intersection géométrique et la longueur d'une géodésique.

**Théorème 5.28** (admis).  $i$  est continue pour la convergence en loi.

**Corollaire 5.29.** L'application  $\text{Teich}(S_g) \hookrightarrow \mathcal{C}(S_g)$  est injective.

*Démonstration.* En effet, par le théorème 4.31, si  $m \neq m'$ , on a  $\gamma \in \mathcal{S}$  de longueur différente dans  $m$  et  $m'$ , donc  $i(L_m, \gamma) \neq i(L_{m'}, \gamma)$  donc  $L_m \neq L_{m'}$ .  $\square$

**Proposition 5.30** (admise).  $i(L_m, L_m) = -\pi^2 \chi(S_g)$

**Corollaire 5.31.**  $\text{Teich}(S_g) \hookrightarrow \mathbb{P}\mathcal{C}$  est injective.

*Remarque 5.32.* Le projectivisé  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  est pris par rapport à l'action canonique de  $\mathbb{R}_+^*$  sur les mesures donc sur  $\mathcal{C}$ .

*Remarque 5.33.* On est ici dans une situation similaire au modèle de l'hyperboloïde pour  $\mathbb{H}^n$ , où les points de l'espace sont tels que  $b(x, x) = -a$ . On veut essayer de compactifier  $\text{Teich}(S_g)$  de la même façon que  $\mathbb{H}^n$ , c'est à dire de voir son bord dans  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  comme le projectivisé du cône  $\{i(x, x) = 0\}$ .

Comme  $\forall \mu \in \mathcal{M}$ ,  $i(\mu, \mu) = 0$ , les multicourbes sont dans le cône recherché.

### 5.2.1 Laminations

**Definition 5.34.** Une *lamination géodésique* d'une surface  $S$  est un ensemble fermé de droites de  $\mathcal{G}(S)$  ne s'intersectant pas. On confondra une lamination et son support dans  $S$ .

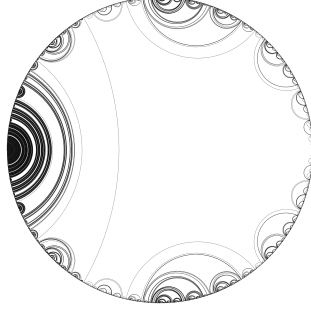


FIGURE 11 – Une lamination de  $\mathbb{H}^2$  (figure de Adam Majewski [1])

**Definition 5.35.** Une *mesure transverse* d'une lamination  $\lambda \subset S$  associe à chaque arc  $\alpha$  transverse une mesure borélienne localement finie  $L_\alpha$  telle que :

- si  $\alpha' \subset \alpha$ , alors  $L_{\alpha'} = L_\alpha|_{\alpha'}$
- le support de  $L_\alpha$  est  $\alpha \cap \lambda$
- la mesure est invariante par isotopie d'arcs transverses.

**Proposition 5.36.** On a une bijection entre les laminations mesurées notées  $\mathcal{ML}$  et l'ensemble  $\{c \in \mathcal{C} \mid i(c, c) = 0\}$ .

*Démonstration.* Soit  $c \in \mathcal{C}(S_g)$  tel que  $i(c, c) = 0$ . Par la remarque 5.25, le support  $S_c \subset \mathbb{H}^2$  de  $c$  est un ensemble  $\Gamma$ -invariant de droites qui ne se croisent pas donc est une lamination de  $S_g$ . De plus,  $c$  induit une mesure transverse  $L$  sur  $S_c$  : Soit  $\alpha$  un arc transverse à  $S_c$ , quitte à le découper en un nombre fini de points, on peut supposer qu'il n'intersecte chaque droite de  $S_c$  qu'une fois. Soit  $U \in \alpha$  un borélien et  $V \subset \mathcal{G}$  l'ensemble des courbes de  $S_c$  rencontrant  $U$ . On pose  $L_\alpha(U) := c(V)$ .  $L$  forme bien une mesure transverse.

Pour l'application réciproque, on prend  $(\lambda, L)$  une lamination mesurée. Pour chaque droite  $l$  de  $\lambda$ , on prend  $U_l$  un petit voisinage de  $l$  dans  $\lambda$  et  $\alpha_l$  un arc transverse intersectant chaque droite de  $U_l$  une et une seule fois.  $L_{\alpha_l}$  induit alors une mesure sur  $U_l$ . Comme  $\mathcal{G}$  est paracompact, et que les mesures sur les  $U_l$  se recollent deux à deux, on peut toutes les recoller en une mesure globale  $c$ . Comme  $c$  est de support  $\lambda$ ,  $i(c, c) = 0$ .  $\square$

**Théorème 5.37** (admis, voir [4] 8.3). On peut paramétrer  $\mathcal{ML}$ , on obtient  $\mathcal{ML} = \mathbb{R}^{6-6g}$  et  $\mathbb{P}\mathcal{ML} = \mathbb{S}^{5-6g}$ .  $\mathbb{P}\mathcal{S}$  est dense dans  $\mathbb{P}\mathcal{ML}$ .

*Remarque 5.38.* La paramétrisation de  $\mathcal{ML}$  se fait à partir de chemins de fer pondérés. On peut les voir comme des multicourbes admettant des bifurcations, avec un poids sur chaque branche et conservant les poids aux branchements.

## 5.3 La compactification

### 5.3.1 La compactification de Thurston

**Théorème 5.39** (admis).  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  est compact donc  $\overline{\text{Teich}(S_g)}$  est compact.

**Proposition 5.40.** *L'inclusion  $\text{Teich}(S_g) \hookrightarrow \mathcal{C}/0 \hookrightarrow \mathbb{P}\mathcal{C}$  est un homéomorphisme sur son image.*

*Démonstration.* On a déjà vu que c'était une injection et elle est évidemment continue. Montrons qu'elle est propre. Soit  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  divergeant dans  $\text{Teich}(S_g)$ . Comme  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  est compact, on a des  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $\alpha \in \mathcal{C}$  tels que  $\lambda_i m_i \rightarrow \alpha$ . Comme les  $m_i$  divergent,  $\lambda_i \rightarrow 0$ . Enfin  $[\alpha] \notin \text{Teich}(S_g)$ . En effet  $i(\alpha, \alpha) = \lim i(\lambda_i m_i, \lambda_i m_i) = \lim -\lambda_i^2 \pi^2 \chi(S_g) = 0$ . Les  $[m_i]$  divergent bien dans l'image de  $\text{Teich}(S_g)$ .  $\square$

**Corollaire 5.41** (Conséquence de la preuve). *On a  $\partial\text{Teich}(S_g) \subset \mathbb{P}\mathcal{M}\mathcal{L}$ .*

**Proposition 5.42.** (admise) *Soit  $\mu$  une multicourbe essentielle,  $\alpha \in \mathcal{C}$  tel que  $\forall \eta \in \mathcal{S} \ i(\mu, \eta) = 0 \implies i(\mu, \alpha) = 0$ . Alors le support de  $\alpha$  est inclus dans  $\mu$ .*

**Proposition 5.43.** *On a  $\mathbb{P}\mathcal{S} \subset \partial\text{Teich}(S_g)$ .*

*Démonstration.* On considère  $(l_i^k, \theta_i^k) = FN(m_k)$ . On fait tendre  $l_1^k$  vers 0 en fixant les autres coordonnées. Quitte à considérer une sous suite, on peut supposer que  $[m_k] \rightarrow [\alpha]$ . Soit  $\eta$  une courbe simple fermée, par le lemme du collier (4.15), si  $i(\eta, \gamma_1) > 0$ ,  $i(\eta, m_k) \rightarrow \infty$ , sinon, comme les autres coordonnées sont fixes,  $i(\eta, m_k)$  reste borné. On a donc, si  $i(\eta, \gamma_1) = 0$ ,  $i(\eta, \alpha) = 0$ . Par la proposition précédente, on  $[\alpha] = [\gamma_1]$ . Il suffit maintenant de faire varier le chassis des coordonnées de Fenchel Nielsen pour obtenir  $\mathbb{P}\mathcal{S} \subset \partial\text{Teich}(S_g)$ .  $\square$

*Remarque 5.44.* On peut de même faire tendre  $m_k$  vers  $\gamma_1$  en faisant tendre  $\theta_1$  vers  $\pm\infty$ . Qualitativement, on peut soit pincer en  $\gamma$  ou tordre autour de  $\gamma$ .

**Théorème 5.45.** *On a dans  $\mathbb{P}\mathcal{C}$ ,  $\overline{\text{Teich}(S_g)} = \text{Teich}(S_g) \sqcup \mathbb{P}\mathcal{M}\mathcal{L} = \mathbb{D}^{6-6g}$ .*

*Idée de la preuve.* La preuve complète est trop longue pour ce mémoire. Les trois parties techniques de la preuve, les théorèmes 5.37 et 5.39 et le lemme 5.46 sont donc admises ici. Pour une preuve complète, on verra [4], chapitre 8.

Les propositions 5.41 et 5.43 donnent  $\mathbb{P}\mathcal{S} \subset \partial\text{Teich}(S_g) \subset \mathbb{P}\mathcal{M}\mathcal{L}$ . Par le théorème 5.37, comme  $\partial\text{Teich}(S_g)$  est fermé, on a bien  $\partial\text{Teich}(S_g) = \mathbb{P}\mathcal{M}\mathcal{L}$ .

**Lemme 5.46.** (admis) *Grâce à un homéomorphisme naturel  $\mathcal{M}\mathcal{L} \rightarrow \text{Teich}(S_g)$ , on peut munir  $\overline{\text{Teich}(S_g)}$  d'une structure de variété topologique.*

On conclut en invoquant deux théorèmes de topologie générale (prouvés dans le chapitre 1 de [7]) : Un premier théorème de Brown nous donne un collier topologique  $C$  de  $\partial\overline{\text{Teich}(S_g)} = \mathbb{S}^{5-6g}$ . Le bord intérieur de ce collier est donc une sphère dans  $\text{Int}(\overline{\text{Teich}(S_g)}) = \mathbb{D}^{6-6g}$  qui borde donc un disque par le théorème de Shönflies généralisé.  $\text{Teich}(S_g)$  est donc obtenu en rajoutant un collier à  $\mathbb{D}^{6-6g}$  donc est homéomorphe à  $\mathbb{D}^{6-6g}$ .  $\square$

### 5.3.2 Application à la classification des difféomorphismes

**Definition 5.47.** On définit  $MCG(S_g)$  le groupe des difféomorphismes de  $S_g$  à homotopie près. Il agit naturellement sur  $Teich(S_g)$  mais aussi sur  $\mathcal{C}$  en général, donc sur  $(\overline{Teich(S_g)})$ .

**Théorème 5.48** (admis). *Comme  $MCG(S_g)$  agit sur  $(\overline{Teich(S_g)}) = D^{6-6g}$ , le théorème de Bower nous donne une trichotomie des éléments de  $MCG(S_g)$ .*

- *Les éléments qui fixent un élément de  $Teich(S_g)$  sont d'ordre fini.*
- *Les éléments qui fixent une multicourbe de  $\mathbb{P}\mathcal{M}$  sont dits réductibles, ils peuvent être décomposés en coupant le long de la multicourbe, en des éléments de  $MCG(S_{g',b'})$  et étudiés séparément sur les différentes composantes.*
- *Les autres éléments sont dits pseudo-Anosovs.  $\varphi \in MCG(S_g)$  pseudo-Anosov fixe deux éléments  $[\mu_s]$  et  $[\mu_i] \in \mathbb{P}\mathcal{M}\mathcal{L}$  dits stable et instable. On a  $\lambda > 1$  tel que  $\varphi(\mu_s) = \lambda\mu_s$  et  $\varphi(\mu_i) = \frac{1}{\lambda}\mu_i$ .*

*Remarque 5.49* (admise). On a une correspondance avec la trichotomie des éléments de  $Isom(\mathbb{H}^n)$  :

- Les isométries elliptiques fixent un point de  $\mathbb{H}^n$  et sont aussi d'ordre fini.
- Les éléments pseudo-Anosovs et hyperboliques fixent tous les deux un point attractif et un répulsif sur le bord.
- Les isométries paraboliques peuvent être réduites à une action sur des horosphères, qui sont des sous-ensembles de  $\mathbb{H}^n$  de dimension  $n - 1$  donc sont aussi en un sens réductibles.

## 6 Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadrant Joan Porti pour son suivi durant mon stage, son aide lors de nos rendez-vous fréquents m'a permis de débloquer rapidement tous les problèmes de compréhension que j'ai rencontrés.

Je remercie également ma tutrice Muriel Livernet pour son encadrement cette année, ainsi que Nicolas Tolozan qui m'a mis en contact avec Joan Porti.

## Références

- [1] Article wikipedia : "lamination(topology)", Apr 2024.
- [2] Francis Bonahon. *Low-dimensional geometry. From Euclidean surfaces to hyperbolic knots*, volume 49 of *Stud. Math. Libr.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) ; Princeton, NJ : Institute for Advanced Study, 2009.
- [3] Miao Jin, Wei Zeng, Feng Luo, and Xianfeng Gu. Computing teichmuller shape space. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 15 :504 – 517, 07 2009.

- [4] Bruno Martelli. *An introduction to geometric topology*. Independently Published, 2022.
- [5] Jean-Pierre Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, volume 235 of *Astérisque*. Paris : Société Mathématique de France, 1996.
- [6] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Grad. Texts Math.* Berlin : Springer-Verlag, 1994.
- [7] T. B. Rushing. *Topological embeddings*, volume 52 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, inc, 1973.
- [8] William P. Thurston. Hyperbolic geometry and 3-manifolds. Low-dimensional topology, Proc. Conf., Bangor/Engl. 1979, Vol. 1, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 48, 9-25 (1982)., 1982.
- [9] Yalin Wang, Wei Dai, Xianfeng Gu, Tony Chan, Shing-Tung Yau, Arthur Toga, and Paul Thompson. Teichmüller shape space theory and its application to brain morphometry. volume 12, pages 133–40, 09 2009.

## 7 Annexe

Toutes les figures de l'annexe sont libres de droits et tirées de la version numérique du livre de Bruno Martelli [4].

### 7.1 Géométrie hyperbolique des polygones

**Lemme 7.1.** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ . On a un unique hexagone hyperbolique à angle droits dont les bords alternés sont de longueur  $a, b, c$  (comme dans la figure 12).

*Démonstration.* Soient  $a, b > 0$ . On suit la construction de la figure 13. Si  $x = 0$ , les deux droites bleues sont confondues, ainsi que les points  $P$  et  $Q$ . En particulier  $f(x) = 0$ . De plus,  $f$  est continue et quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$ . on donc un unique  $c$  tel que  $f(x) = c$ . On remarque que chaque hexagone de côtés alternés  $a, b, c$  induit une construction comme 13, donc est uniquement déterminé à isométrie près par  $a, b, x$  donc par  $a, b, c$ .  $\square$

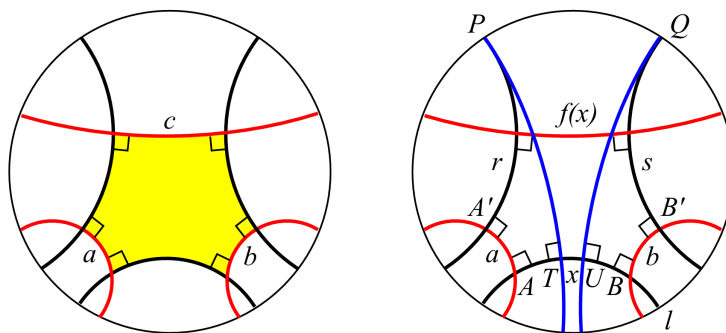


FIGURE 12 – Figure de gauche, un hexagone avec des côtés de longueurs alternées  $a, b$  et  $c$ .

FIGURE 13 – Figure de droite, la construction de l'hexagone. On prend un segment  $l = [A, B]$  quelconque. On trace ensuite une perpendiculaire à  $l$  en  $A$  (en rouge). A une distance  $a$  de  $A$ , on y fixe  $A'$  et on trace une nouvelle perpendiculaire  $r$  (en noir) jusqu'au bord à l'infini en  $P$ . On trace enfin (en bleu) la perpendiculaire à  $l$  passant par  $P$ , qui coupe  $l$  en  $T$ . On remarque que la distance  $AT$  est déterminée par  $a$ . On trace de façon analogue,  $B', s, Q, U$  déterminés par  $b$ . Le seul paramètre de ce schéma est donc la distance  $TU$ , notée  $x$ . On note  $f(x)$  la distance entre les droites  $(PT)$  et  $(QU)$  atteinte sur leur perpendiculaire commune (en rouge). Ceci nous construit un hexagone à angles droits de longueurs respectives  $a, b$  et  $f(x)$ .

## 7.2 Complément sur les variétés hyperboliques

**Proposition 7.2** (admise, voir [4] chapitre 3, 3.1.4). *Si  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  est une variété, alors tous les éléments non triviaux de  $\Gamma$  sont hyperboliques ou paraboliques.*

**Proposition 7.3** (admise, voir [4] chapitre 4, 4.1.3). *Si  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  compact, alors tous les éléments non triviaux de  $\Gamma$  sont hyperboliques. Deux relevés d'une même géodésique sont alors ultraparallèles.*

La suite de cette partie suit la parte 4.1.5 de [4]

**Definition 7.4.** On note  $[X, Y]$  les classes d'homotopie des applications de  $X$  vers  $Y$ .

*Remarque 7.5.* Si  $X$  est connexe,  $\Pi_1(X, x_0)$  s'injecte naturellement dans  $[\mathbb{S}^1, X]$ . Cette injection entraîne une bijection entre les classes de conjugaison de  $\Pi_1(X, x_0)$  et  $[\mathbb{S}^1, X]$ . Si  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  est une variété hyperbolique complète, on peut donc identifier  $\Gamma$  et  $[\mathbb{S}^1, X]$ .

**Proposition 7.6.** *Si  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  est une variété hyperbolique complète, chaque élément hyperbolique de  $\Gamma = [\mathbb{S}^1, X]$  est représenté par une unique géodésique fermée. Les éléments non hyperboliques ne sont pas représentés par des géodésiques fermées.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \Gamma$  hyperbolique. Elle fixe une géodésique dans  $\mathbb{H}^n$ , que le quotient projette en une géodésique fermée de  $M$ . Réciproquement, si  $\gamma$  est une géodésique fermée, elle se relève en une géodésique de  $\mathbb{H}^n$  reliant  $x_0$  à  $y_0$ . On a  $\varphi \in \Gamma$  telle que  $\varphi(x_0) = y_0$ .  $\varphi$  préserve alors la géodésique allant de  $x_0$  à  $y_0$  (comme isométrie) donc est hyperbolique par 7.2.  $\square$

**Corollaire 7.7.** *Si  $M$  est une variété hyperbolique compacte, chaque élément non trivial de  $[\mathbb{S}^1, X]$  est représenté par une unique géodésique.*

**Definition 7.8.** On note  $\bar{\gamma}$  le représentant géodésique associé à à une géodésique  $\gamma$ .

**Proposition 7.9.** (admise) *Si  $\gamma$  est une courbe simple fermée,  $\bar{\gamma}$  l'est aussi.*

**Corollaire 7.10.** *Si  $M$  est une variété hyperbolique complète, chaque géodésique fermée est la courbe la plus courte de sa classe d'homotopie.*

*Démonstration.* Si  $\alpha$  est une géodésique fermée, elle a la longueur  $l(f)$  où  $f$  est l'isométrie hyperbolique la représentant. Chaque  $\gamma$  homotope à  $\alpha$  se relève en une courbe de  $x$  à  $f(x)$  donc de longueur  $> l(f)$ .  $\square$

## 7.3 Courbes dans les surfaces

**Definition 7.11.** Soient  $\gamma_1, \gamma_2$  des courbes simples fermées. On définit l'*intersection géométrique*  $i(\gamma_1, \gamma_2) := \min \#\gamma'_1 \cap \gamma'_2$  pour  $\gamma'_1, \gamma'_2$  homotopes à  $\gamma_1, \gamma_2$ .

Quand  $i(\gamma_1, \gamma_2) := \min \#\gamma_1 \cap \gamma_2$ , on dit que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont en *position minimale*

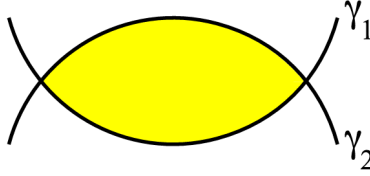


FIGURE 14 – Un bigon entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

**Definition 7.12.** Un *bigon* est un polygone à deux côtés comme dans la figure 14.

**Théorème 7.13.** Deux courbes sont en position minimale si et seulement si elles ne forment pas de bigons.

*Démonstration.* Soit  $\gamma, \eta$  deux courbes simples fermées. Si elles forment un bigon, on peut supprimer le bigon par une homotopie comme dans la figure 15 à gauche. Elles ne sont donc pas en position minimale. Réciproquement, supposons qu'elles ne forment pas de bigons. Si  $\gamma$  est triviale, elle borde un disque. Si  $\eta$  rencontre le bord de ce disque, elles forment des bigons (figure 15, droite). Donc  $\eta \cap \gamma = \emptyset$ . Elles sont donc en position minimale.

Si  $\gamma$  et  $\eta$  sont non triviales, on munit  $S_g$  d'une métrique hyperbolique arbitraire. Soit  $\pi$  la projection  $\mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$ .  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  se relèvent dans  $\mathbb{H}^2$  en des *lignes* et des *arcs* géodésiques notés  $\gamma^k$  et  $\bar{\gamma}^k$ . Comme  $\gamma^k$  et  $\bar{\gamma}^k$  sont homotopes, elles relient la même paire de points de  $\partial\mathbb{H}^2$ ,  $P_\gamma^k$ .

Ces lignes et celles de  $\eta$  ne forment pas de bigons (Comme  $S_g$  est orientable,  $\pi(\text{un bigon}) = \text{un bigon}$ ). Donc deux lignes  $\gamma^k$  et  $\eta^k$  s'intersectent en au plus un point. De plus, elles ne s'intersectent que si  $\bar{\gamma}^k$  et  $\bar{\eta}^k$  s'intersectent, c'est-à-dire si  $P_\gamma^k$  et  $P_\eta^k$  sont imbriqués.

On a donc une bijection  $\pi^{-1}(\gamma) \cap \pi^{-1}(\eta) \longleftrightarrow \pi^{-1}(\bar{\gamma}) \cap \pi^{-1}(\bar{\eta})$

Par ailleurs, si  $C(\gamma)$  est la classe de conjugaison d'isométries hyperboliques associée à  $\gamma$  par 7.6, on sait (toujours grâce à 7.6), que les  $\bar{\gamma}^k$  sont les axes des transformations des éléments de  $C(\gamma)$ . Si

$$X := \{f, g \in C(\gamma) \times C(\eta) \mid \text{Fix}(\phi_1) \text{ et } \text{Fix}(\phi_2) \text{ sont liés.}\}$$

, on a aussi une bijection entre  $\pi^{-1}(\bar{\gamma}) \cap \pi^{-1}(\bar{\eta})$  et  $X$ . En effet, ces deux relevés de  $\bar{\gamma}$  et  $\bar{\eta}$  ne s'intersectent que si leurs bouts dans  $\partial\mathbb{H}^n$ , qui sont les points fixes des éléments de  $\Gamma$  correspondant, sont liés. Enfin, toutes ces bijections sont  $\Gamma$ -équivalentes, donc on a des bijections

$$\gamma \cap \eta \longleftrightarrow \bar{\gamma} \cap \bar{\eta} \longleftrightarrow X/\Gamma$$

. En particulier  $\text{Card}(\gamma \cap \eta) = \text{Card}(\bar{\gamma} \cap \bar{\eta}) = \text{Card}(X/\Gamma)$  est invariant par homotopie de  $\eta$  et  $\gamma$  tant qu'on n'a pas de bigons, et est donc égal à  $i(\eta, \gamma)$ .  $\square$

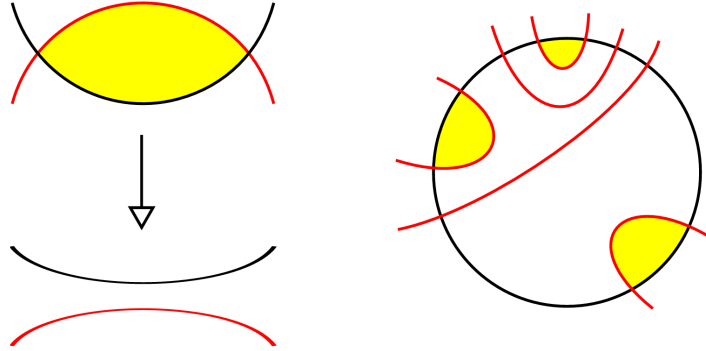


FIGURE 15 – A gauche, la simplification d’un bigon. A droite, les bigons formées entre deux courbes quand une est homotopiquement nulle. On simplifie les bigons en commençant par les bigons les plus intérieurs (en jaune).

**Corollaire 7.14.** *Deux géodésiques sont toujours en position minimale.*

*Démonstration.* Si elles forment un bigon, il se relève dans  $\mathbb{H}^2$  en un bigon entre géodésiques de  $\mathbb{H}^2$ , ce qui est absurde par unicité des géodésiques de  $\mathbb{H}^2$ .  $\square$

**Proposition 7.15.** *Deux courbes disjointes et homotopiquement équivalentes et non nulles bordent un anneau.*

*Démonstration.* Soient  $\gamma_1, \gamma_2$  deux telles courbes. On coupe  $S_g$  le long de ces courbes. On n’obtient pas de disque car elles sont non homotopiquement nulles. On peut donc obtenir soit un anneau (et une autre surface), soit deux surfaces de caractéristique d’Euler négative. Dans le dernier cas, on les munit de structures hyperboliques qu’on recolte selon  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . On obtient deux géodésiques homotopes, c’est absurde.  $\square$

**Proposition 7.16.** *Deux courbes non homotopiquement triviales homotopes sont isotopes.*

*Démonstration.* Leur intersection géométrique étant nulle, il suffit de se débarrasser des bigons, ce qu’on peut faire sans difficulté par isotopie. On se retrouve ensuite dans le cas de 7.15.  $\square$

**Definition 7.17.** Une *multicourbe* est une union finie de courbes disjointes non triviales. Elle est dite *essentielle* si elle n’a pas de composantes homotopes.

**Proposition 7.18.** *Une multicourbe de  $S_g$  est essentielle a moins de  $3g - 3$  composantes. Si elle en a  $3 - 3g$ , c’est une décomposition en pantalons.*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  essentielle. On munit  $S_g$  d’une structure hyperbolique. On homotope  $\mu$  à un sa représentante géodésique. On peut ensuite couper  $S_g$  selon  $\mu$ . On obtient  $k$  surfaces de caractéristique d’Euler négative POURQUOI.

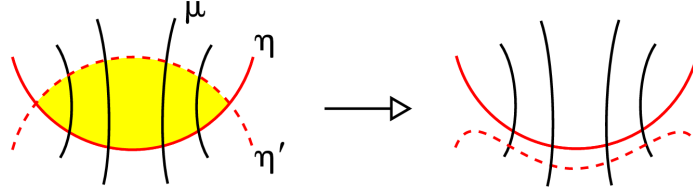


FIGURE 16 – Simplification d’un bigon entre  $\eta$  et  $\eta'$ . Comme les intersections de  $\mu$  avec le bigon se font verticalement, on peut le simplifier par une isotopie qui préserve  $\mu$  et tant qu’il ressemble.

Si elles sont toutes des paires de pantalon, on en a donc  $2 - 2g$  donc on a coupé selon  $\frac{3}{2}(2 - 2g) = (3 - 3g)$  courbes. Sinon, on peut rajouter des courbes pour en faire une décomposition en pantalon.  $\square$

**Definition 7.19.** On définit l’intersection géométrique de deux multicourbes comme celle de deux courbes.

On étend sans problème les définitions 7.11 et le théorème 7.13 au cadre des multicourbes.

**Proposition 7.20.** Soient  $\mu, \nu$  en position minimale. L’union de leurs supports ne dépend, à isotopie ambiante près, que de leurs classes d’isotopie.

*Démonstration.* Soit  $\mu', \eta'$  isotopes à  $\mu, \eta$ . Montrons qu’on peut construire une isotopie ambiante entre  $\mu \cup \eta$  et  $\mu' \cup \eta'$ . Par hypothèse, on a une isotopie de  $\mu$  à  $\mu'$  qui peut être étendue en une isotopie ambiante par compacité de  $S_g$ . On peut donc supposer  $\mu' = \mu$ . On va maintenant construire une isotopie de  $\eta$  à  $\eta'$  qui fixe  $\mu$  en tant qu’ensemble. A une petite isotopie près, on peut supposer que  $\eta$  et  $\eta'$  se coupent transversalement. Si  $\eta \cap \eta' \neq \emptyset$ , elles forment des bigons.  $\mu$  intersecte le bigon par des courbes qui joignent les deux côtés du bigon. (cf figure 16). En effet,  $\mu$  ne forme pas de bigon avec  $\eta$  ou  $\eta'$  (elles sont en position minimale). On peut alors éliminer ces bigons par isotopie ambiante comme sur la figure 16. Après un nombre fini d’étapes, on obtient  $\eta \cap \eta' = \emptyset$ . On regarde maintenant une famille maximale de courbes parallèles de  $\eta \cup \eta'$ . Elles sont incluses dans un anneau  $A = [0, 1] \times \mathbb{S}^1$ . Les courbes de  $\mu$  coupent cet anneau soit selon des arcs  $[0, 1] \times \{pt\}$  soit selon des cercles  $\{pt\} \times \mathbb{S}^1$ . Dans les deux cas, on trouve une isotopie de  $[0, 1]$  de  $A \cap (\mu \cup \eta)$  à  $A \cap (\mu' \cup \eta')$ . En concaténant toutes ces isotopies, on obtient bien l’isotopie souhaitée.  $\square$

**Corollaire 7.21.** Le support  $\bar{\eta} \cup \bar{\mu}$  ne dépend pas à isotopie près de la métrique hyperbolique choisie.