Mémoire sur les représentations des algèbres de Lie semi-simples et la catégorie O

Thomas Agugliaro

8 septembre 2021

1 Introduction

J'ai effectué mon stage sous la supervision de Eric Vasserot de l'Université de Paris via Zoom. J'ai suivi son cours de M2 intitulé ≪ Théorie Géométrique des représentations ≫ en mars-avril 2021, et comme le sujet m'a plu je lui ai demandé de continuer pour un stage. La motivation principale de ce stage était de comprendre l'énoncé de la conjecture de Kazhdan-Lutzig et les outils qui ont permis une démonstration récente de manière purement algébrique : les bimodules de Soergel. Je n'aurai pas le temps dans ce mémoire de parler des bimodules de Soergel, je vais me concentrer sur l'énoncé de la conjecture de Kazhdan-Lutzig. Dans tout ce mémoire, je travaillerai sur $\mathbb{C}$. Lorsque l'on étudie les représentations des groupes algébriques, c'est-à-dire des variétés algébriques munies d'une multiplication préservant la structure, on est amené à étudier l'algèbre de Lie associée ainsi que ses représentations.

2 Prérequis/Rappels

2.1 Algèbres de Lie

Dans ce paragraphe, k sera un corps de caractéristique 0. Je renvoie en référence à [2] pour un traitement précis du sujet, et j'utiliserai principalement la terminologie et les notations de [3].

Définition 1. *Une algèbre de Lie sur k est un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant les axiomes suivant,*

— $\forall x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = -[y, x]$
— $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *(Identité de Jacobi)*

Remarque :On peut associer à un groupe de Lie une algèbre de Lie en prenant l'espace tangent à l'identité, dans ce cas l'algèbre de Lie encode les propriétés infinitésimales de la loi de groupe. Ainsi la théorie des algèbres de Lie et la théorie des groupes vont avoir de nombreuses similitudes.

Attention : une algèbre de Lie n'est pas une algèbre en général ! En effet, le crochet de Lie n'est pas souvent associatif, il vérifie l'identité de Jacobi à la place.

On dit qu'une algèbre de Lie est commutative (ou abélienne) si son crochet est nul.

Exemple :

— soit E un espace vectoriel, appelons $\mathfrak{gl}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Soient u et v dans $\mathfrak{gl}(E)$, on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$. Il est facile bien que calculatoire de vérifier que cela munit $\mathfrak{gl}(E)$ d'une structure de Lie.

— Plus généralement, soit A une k-algèbre non nécessairement commutative. On peut munir A d'une structure d'algèbre de Lie en posant pour $x, y \in A$, $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ le commutateur de x et y. Cette construction nous donne en fait un foncteur de la catégorie des k-algèbres (non nécessairement commutatives) dans la catégorie des k-algèbres de Lie.

Il y a des notions évidentes de sous-algèbre de Lie, et de morphisme d'algèbres de Lie. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, un sous-espace vectoriel W de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie si la restriction de $[\cdot, \cdot]$ à $W \times W$ est à valeurs dans W. Si V et W sont deux algèbres de Lie, une application linéaire $u : V \to W$ est un morphisme d'algèbres de Lie si pour tout $x, y \in V$, on a $u([x, y]) = [u(x), u(y)]$.

Définition 2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, un sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est appelé un idéal si $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.*

Les idéaux sont en particulier des sous-algèbres de Lie. Cette condition est analogue à la condition d'absorbtion de la notion d'idéal d'un anneau, et elle est similaire à la notion de sous-groupe distingué.
En effet, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors on peut construire une algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ comme on le pense et vérifiant une propriété universelle dans la catégorie des algèbres de Lie.

Définition 3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, une représentation de $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel E muni d'un morphisme d'algèbre de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$.*

De manière équivalente, cela revient à se donner pour tout élément de $\mathfrak{g}$ un endomorphisme ρ_x de E, tels que $\rho_{\lambda x + \mu y} = \lambda \rho_x + \mu \rho_y$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ et $\lambda, \mu \in k$, et vérifiant $\rho_{[x,y]} = \rho_x \circ \rho_y - \rho_y \circ \rho_x$.

J'ai dit au début de ce paragraphe qu'une k-algèbre (non nécessairement commutative), munie du commutateur $[\cdot, \cdot]$ était une algèbre de Lie. Réciproquement, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on aurait envie d'interpréter son crochet $[\cdot, \cdot]$ comme le commutateur d'une k-algèbre $U(\mathfrak{g})$. C'est-à-dire trouver une k-algèbre $U(\mathfrak{g})$ et une injection linéaire $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, tel que pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, on ait $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$. Autrement dit, si on identifie $\mathfrak{g}$ à un sous-ensemble de $U(\mathfrak{g})$ par i, on a $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ où $\cdot$ est la multiplication de $U(\mathfrak{g})$.

Soit E un espace vectoriel, on a une notion de k-algèbre non commutative libre engendrée par E que je noterai $F(E)$. On a $F(E) = \bigoplus_{n \geqslant 0} E^{\otimes n}$ et la multiplication est définie sur les tenseurs purs en les concatenant et on l'étend par linéarité à $F(E)$. Il y a une injection linéaire canonique $E \to F(E)$ de plongement dans le deuxième facteur.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, je vais construire $U(\mathfrak{g})$ comme un quotient de $F(\mathfrak{g})$. Soit I l'idéal de $F(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme

$$[x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)$$

pour x, y qui varient dans $\mathfrak{g}$, je pose $U(\mathfrak{g}) = F(\mathfrak{g})/I$. On obtient alors par composition une application linéaire canonique $i : \mathfrak{g} \to F(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ et on ne sait pas a priori si elle est injective à cause du passage au quotient.

Théorème 1. *La construction $\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})$ que je viens de décrire définit un foncteur de la catégorie des algèbres de Lie vers la catégorie des k-algèbres. L'application canonique $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ est injective et pour tout x, y dans $\mathfrak{g}$, $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$.*

L'algèbre $U(\mathfrak{g})$ s'appelle *algèbre enveloppante* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Je ne démontrerai pas ce théorème, toutes les affirmations sont plus ou moins évidentes sauf le fait que i est injective. Ce dernier fait découle du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt que j'énoncerai plus loin.

Si je note R le foncteur qui a une algèbre non nécessairement commutative associe l'algèbre de Lie de l'exemple précédent, alors (U, R) forme une paire de foncteurs adjoints, en quelque sorte R est un foncteur d'oubli de structure (on oublie la multiplication) et U est un foncteur “algèbre libre” à partir d'une algèbre de Lie.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k, et $(x_i)_{i \in I}$ une base de $\mathfrak{g}$ où I est un ensemble totalement ordonné. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, aussi abregé PBW, permet de décrire la structure de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$.

Théorème 2. *L'ensemble $\{x_{i_1}...x_{i_n} | n \in \mathbb{N}, i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n \in I\}$ est une k-base de $U(\mathfrak{g})$.*

j'ai introduit l'algèbre enveloppante car elle permet de réaliser le crochet de Lie abstrait comme un commutateur, mais ce n'est pas le seul bénéfice d'introduire un tel objet. En effet, maintenant on peut identifier les représentations de $\mathfrak{g}$ comme étant des $U(\mathfrak{g})$-modules à gauche.

A travers cette identification, j'en profite pour définir une sous-représentation (resp. une représentation quotient) comme étant un sous-$U(\mathfrak{g})$-module (resp. un module quotient).

Etant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il y a une représentation canonique appelée représentation adjointe. C'est en fait une action de $\mathfrak{g}$ sur lui-même par le crochet de Lie :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(x) : & \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ & y \mapsto [x, y]. \end{aligned}$$

C'est bien une application linéaire car le crochet de Lie l'est, et cela définit une représentation car le crochet de Lie est linéaire et vérifie l'identité de Jacobi.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, et E une représentation de $\mathfrak{g}$, on note $E^{\mathfrak{g}} := \{x \in E | \forall v \in \mathfrak{g}, v \cdot x = 0\}$ qui est l'analogue de l'ensemble des points fixes d'une action de groupes.

A partir de maintenant, je supposerai que les algèbres de Lie sur lesquelles on travaille sont de dimensions finies. Je vais avoir besoin d'introduire de nouvelles classes d'algèbres de Lie, les algèbres de Lie simples et semi-simples car ce sont celles qui ont les théories les plus riches.

Définition 4. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite simple si elle est non abélienne et qu'elle ne contient pas d'idéal propre non nul.*

Définition 5. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite semi-simple si elle ne contient pas d'idéal abélien propre non nul.*

Il y a de nombreuses conditions équivalentes qui caractérisent les algèbres de Lie semi-simples, par exemple le fait d'être un produit direct d'algèbres de Lie simples. Mais je ne donnerai pas de liste de caractérisations équivalentes ici car cela nécessiterait encore plus de définitions.

Il y a une forme bilinéaire canonique sur les algèbres de Lie : la forme de Killing $(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$ pour x et y dans $\mathfrak{g}$.

Théorème 3. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non dégénérée.*

La suite de ce mémoire va se focaliser sur les algèbres de Lie semi-simples, mais avant cela je vais un peu justifier pourquoi c'est intéressant au regard de la théorie générale des algèbres de Lie. Cette justification va prendre la forme du théorème de Levi-Malcev (qui nécessite que k soit de caractéristique 0) :

Théorème 4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Alors $\mathfrak{g}$ est un produit semi-direct d'un idéal résoluble et d'une algèbre de Lie semi-simple.*

Je n'ai pas défini ce qu'était une algèbre de Lie résoluble, je me borne à mentionner que la théorie des représentations de ces algèbres de Lie se comporte bien. Je n'ai pas non plus défini le produit semi-direct, il est analogue au produit semi-direct des groupes.

Je ne donne pas d'exemple précis, mais en voyant ce théorème, on peut se dire qu'il est intéressant d'étudier à part les algèbres de Lie résolubles et semi-simples pour ensuite obtenir des résultats généraux grâce au produit semi-direct.

On va alors se concentrer sur les algèbres de Lie semi-simples, pour commencer on va regarder ce qu'il se passe pour les représentations de dimensions finies de ces algèbres avec le théorème de réductiblité complète de Weyl.

Théorème 5. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie et E une représentation de $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Alors E est une somme directe de représentations simples de $\mathfrak{g}$.*

Ainsi, pour comprendre les représentations de dimensions finies des algèbres de Lie semi-simples, il suffit de comprendre les représentations simples de dimensions finies.

2.2 Les racines et les poids

On va considérer $k = \mathbb{C}$ dorénavant pour alléger la terminologie.
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie.

Définition 6. *Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ abélienne telle que pour tout $x \in \mathfrak{h}$,*

$$ad(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

soit diagonalisable, et maximale pour cette propriété.

On aura besoin de ces sous-algèbres par la suite, mais il faut d'abord savoir qu'elles existent.

Théorème 6. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, alors il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.*

Pour toute la suite de ce mémoire, je fixerai une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, et je noterai ℓ la dimension de $\mathfrak{h}$.

Une grande partie des propriétés des algèbres de Lie semi-simples est encodée dans des ≪ systèmes de racines ≫, sans rentrer dans la théorie des systèmes de racines, je vais construire le système de racines associé à la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, on définit

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} | [h, x] = \alpha(h)x \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Et on pose $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} | \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\} \subset \mathfrak{h}^*$ qui est le système de racines associé à la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. C'est un ensemble fini qui est un objet combinatoire et géométrique.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par Φ, alors la forme de Killing induit un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ sur E. Pour $\alpha \in \Phi$, on définit s_α comme étant la réflexion orthogonal de E telle que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Et on définit le groupe de Weyl W comme étant le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ engendré par les s_α. Ainsi, W agit canoniquement sur E, et cette action s'étend en une action sur $\mathfrak{h}^*$ par extension des scalaires.
W est un groupe de Coxeter, c'est-à-dire qu'il a une présentation par générateurs et relations d'une forme bien particulière qui fait qu'il a des propriétés combinatoires intéressantes. On fixe $\Delta \subset \Phi$ un sous-ensemble minimal tel que $\{s_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ engendre W. Alors Δ est une base de E, un tel sous-ensemble est appelé système simple. Soit Δ^* la base duale de Δ
Il y a une fonction longueur : $\ell : W \to \mathbb{N}$ qui a un élément w associe la longueur de la plus petite écriture de w comme produit de s_α avec $\alpha \in \Delta$, et cette fonction longueur a de bonnes propriétés vis-à-vis de la multiplication de W.
On peut aussi définir une relation d'ordre partielle sur W en demandant que $w' < w$ si les deux conditions sont réunies :

— $l(w') < l(w)$

— $w = s_\alpha w'$ pour un $\alpha \in \Phi$

et en fermant par transitivité. L'identité est l'unique élément minimal et il existe un unique élément maximal $w_\circ$. De nombreuses propriétés qui nous intéresseront auront des symétries par rapport à des actions du groupe de Weyl.

On définit le système positif $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi | \beta(\alpha) \geqslant 0 \ \forall \beta \in \Delta^*\}$, et de même on définit Φ^- en demandant que tous les produits scalaires soient négatifs et alors on peut démontrer que $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$. Je définis Γ comme l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ d'éléments de Φ^+ et alors on obtient une relation d'ordre partielle sur $\mathfrak{h}^*$ en décrétant que pour $x, y \in \mathfrak{h}^*$ que $x \leqslant y$ si $y - x \in \Gamma$. On a alors un théorème de structure qui donne une décomposition de $\mathfrak{g}$ selon l'espace des racines.

Théorème 7. *On a* $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$*, et pour tout* $\alpha \in \Phi$*,* $\mathfrak{g}_\alpha$ *est de dimension 1.*
Soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$*, si* $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ *et* $y \in \mathfrak{g}_\beta$ *alors* $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

On en déduit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$ est une sous-algèbre nilpotante (de même pour $\mathfrak{n}^-$) et on pose $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ la sous-algèbre de Borel correspondante.

$\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}^-$) est l'analogue de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) strictes, $\mathfrak{h}$ est l'analogue des matrices diagonales et $\mathfrak{b}$ est l'analogue des matrices triangulaires supérieures. Un corollaire du théorème de PBW est que $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \cdot U(\mathfrak{h}) \cdot U(\mathfrak{n})$

Si M est une représentation de $\mathfrak{g}$, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ on pose $M_\lambda = \{v \in M | \forall h \in \mathfrak{h} \ h \cdot v = \lambda(h) x\}$ et si $M_\lambda \neq 0$, on dit que λ est un poids de M, de multiplicité $\dim(M_\lambda)$ (potentiellement ∞).
On voit facilement que la somme $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$ est directe, mais elle n'est pas forcément égale à M tout entier. Lorsque $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$, on dit que M est un

module de poids, c'est-à-dire que l'action de $\mathfrak{h}$ est diagonalisable.

Un corollaire du théorème de réductibilité de Weyl est que les modules de dimensions finies sont des modules de plus haut poids. En effet, par réductibilité complète on peut écrire $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda \oplus N$ où N est une représentation de $\mathfrak{g}$ de dimension finie. C'est en particulier une représentation de $\mathfrak{h}$ de dimension finie, et comme $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie abélienne, il y a un vecteur v sur lequel tous les éléments de $\mathfrak{h}$ agissent par des scalaires. Ce vecteur v définit donc une forme linéaire $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ et par construction $v \in M_\alpha$. Et comme la somme est directe, on obtient $v = 0$ donc $N = 0$.

3 La catégorie $\mathcal{O}$

A partir de cette section, la référence pour tous les résultats sera [3].

3.1 Définition et premières propriétés

Les représentations pour lesquelles j'ai donné des propriétés intéressantes jusque là étaient toutes de dimensions finies. On aimerait avoir des bonnes propriétés pour des représentations de dimensions infinies, c'est-à-dire travailler dans la catégorie $\mathrm{Mod}(U(\mathfrak{g}))$. Cependant cette catégorie est bien trop grosse pour avoir des propriétés comme on le souhaite, c'est pourquoi on rajoute des hypothèses supplémentaires sur les modules que l'on va considérer. Les modules qui satisferont ces hypothèses formeront une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(U(\mathfrak{g}))$: catégorie $\mathcal{O}$.

Définition 7. *La catégorie $\mathcal{O}$ est la sous-catégorie pleine de Mod($U(\mathfrak{g})$) constituée des modules M vérifiant ces propriétés :*

- *M est un $U(\mathfrak{g})$-module de type fini.*
- *M est un module de poids : $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$*
- *Pour tout $v \in M$, l'espace vectoriel $U(\mathfrak{n}) \cdot M \subset M$ est de dimension fini.*

Il y a alors quelques conséquences plus ou moins faciles de cette définition.

Proposition 1.
- *les espaces de poids M_λ de M sont de dimensions finies.*
- *L'ensemble $\Pi(M)$ des poids de M est inclus dans une union finie d'ensembles de la forme $\lambda - \Gamma$ où λ varie dans $\mathfrak{h}^*$ et où Γ est le semi-groupe généré par les racines positives Φ^+.*
- *La catégorie $\mathcal{O}$ est abélienne.*

Proposition 2. *Les modules de dimensions finies sont dans la catégorie $\mathcal{O}$.*

La vérification des axiomes est évidente, sauf le fait que les modules de dimensions finies sont des modules de poids, mais je l'ai démontré dans le paragraphe précédent.

3.2 Les modules de Verma

Maintenant que j'ai énoncé la définition de la catégorie $\mathcal{O}$, il serait intéressant de construire des modules de dimensions infinies qui sont des objets de cette catégorie.

Définition 8. *Soient M un $U(\mathfrak{g})$-module, $v^+ \in M$ non nul, et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On dit que v^+ est un vecteur maximal de poids λ si $v^+ \in M_\lambda$ et que $\mathfrak{n} \cdot v^+ = 0$. Si de plus M est engendré par v^+ comme $U(\mathfrak{g})$-module, on dit que M est un module de plus haut poids de poids λ.*

Comme $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \cdot U(\mathfrak{h}) \cdot U(\mathfrak{n})$ par le théorème de PBW, un module M de plus haut poids engendré par v^+ comme $U(\mathfrak{g})$-module est aussi engendré par v^+ comme $U(\mathfrak{n}^-)$-module.

Théorème 8. *Soit M un module de plus haut poids de poids λ, généré par un vecteur maximal v^+.*

— *Les poids μ de M vérifient $\mu \leqslant \lambda$: ils sont inclus dans $\lambda - \Gamma$.*

— *Pour tout poids μ de M, on a $dim(M_\mu) < \infty$ et $dim(M_\lambda) = 1$.*

— *M est un module de poids, et M est un objet de $\mathcal{O}$.*

— *Tous les quotients non nuls de M sont des modules de plus haut poids de poids λ.*

— *M possède un unique sous-module maximal, et un unique quotient simple. En particulier M est indécomposable.*

— *Tous les modules de plus haut poids de poids λ simples sont isomorphes. Si M est l'un d'entre eux, $dim(End(M)) = 1$.*

Les modules de plus haut poids sont intéressants dans la catégorie $\mathcal{O}$ car tous les objets de cette catégorie s'obtiennent à partir des modules de plus haut poids par des dévissements successifs.

Proposition 3. *Soit M un module non nul de $\mathcal{O}$. Alors il existe une filtration de M, $0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$ dont les quotients successifs M_{k+1}/M_k sont des modules de plus haut poids.*

On parle des modules de plus haut poids, mais on n'a toujours pas montré l'existence d'objets de la catégorie $\mathcal{O}$ de dimension infinie. On va alors construire les modules de plus haut poids universels, ce sont les modules de Verma. La construction va avoir lieu par ≪ induction ≫ : on va définir un $\mathfrak{b}$-module que l'on va tensoriser par $U(\mathfrak{g})$, c'est une extension des scalaires.

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on définit une action de $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ sur $\mathbb{C}$ en demandant qu'un élément h de $\mathfrak{h}$ agisse par le scalaire $\lambda(h)$ et qu'un élément de $\mathfrak{n}$ ait une action

nulle. On appelle ce $\mathfrak{b}$-module $\mathbb{C}_\lambda$, et on pose $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$ qui est un $U(\mathfrak{g})$-module et est appelé un module de Verma.
Comme $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \cdot U(\mathfrak{b})$, on a $M(\lambda) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda$, donc $M(\lambda)$ est un $U(\mathfrak{n}^-)$ module libre de rang 1. Et on peut voir que $v^+ = 1 \otimes 1$ est un vecteur maximal de $M(\lambda)$ qui l'engendre librement comme $U(\mathfrak{n}^-)$-module, donc $M(\lambda)$ est un module de plus haut poids de poids λ, en particulier il est dans la catégorie $\mathcal{O}$.

Comme $U(\mathfrak{n}^-)$ n'est pas de dimension finie, on a que $M(\lambda)$ n'est jamais de dimension finie.

Proposition 4. *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, alors $M(\lambda)$ est le module de plus haut poids de poids λ universel. C'est-à-dire que pour tout module M de plus haut poids de poids λ, il existe un morphisme de modules surjectif $M(\lambda) \to M$, i.e M est un quotient de $M(\lambda)$.*

Ainsi les modules de Verma sont des objets universels et incontournables de la théorie : les modules de plus haut poids sont des blocs de bases des modules de la catégorie $\mathcal{O}$ et les modules de Verma sont les modules de plus haut poids universels.

De plus, pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $L(\lambda)$ l'unique quotient simple de $M(\lambda)$ et $N(\lambda)$ l'unique sous-module maximal de $M(\lambda)$. On déduit facilement de ce qui précède la proposition suivante.

Proposition 5. *Tout module simple de $\mathcal{O}$ est isomorphe un $L(\lambda)$ pour un certain λ.*

Ainsi, on sait que les modules simples de $\mathcal{O}$ sont paramétrés par $\mathfrak{h}^*$. On a vu précédemment que pour comprendre les modules de dimensions finies, il suffisait de comprendre les modules simples de dimensions finies. Le théorème suivant est un pas dans cette direction car il permet de paramétrer toutes les représentations simples de dimensions finies.

Théorème 9. *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, alors $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si $\lambda \in \Lambda^+$. De plus cette condition est équivalente à $dim L(\lambda)_\mu = dim L(\lambda)_{w\mu}$ pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$ et $w \in W$.*

Je n'ai pas défini Λ et Λ^+ dans ce mémoire, tout ce que je dirai est que Λ est un réseau de $\mathfrak{h}^*$ et que $\Lambda^+ = \mathbb{Z}^+\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}^+ w_\ell$ où $\omega_1, \ldots, \omega_\ell$ est une base canonique du réseau Λ.
On peut déduire de ce théorème que les multiplicités des poids des modules de dimensions finies sont invariantes par l'action de W sur $\mathfrak{h}$.

4 Formules sur la dimension des modules

4.1 Caractères formels et groupe de Grothendieck

Dans la suite du mémoire, on va s'intéresser à des informations à propos de la dimension des modules de la catégorie $\mathcal{O}$. Plus précisément, aux dimensions des espaces propres M_λ, c'est-à-dire les multiplicités des modules de $\mathcal{O}$. Et on ne va pas traiter les multiplicités de chaques poids λ séparément, on va les faire intéragir entre elles. Pour cela il faut introduire le groupe des caractères formels de modules de $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{X} = \{f : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z} | \text{supp} f \text{ est inclus dans une union finie d'ensembles de la forme } \lambda - \Gamma\}.$$

Ainsi, à tout module M de $\mathcal{O}$, on peut associer le caractère

$$\begin{aligned} \text{ch}(M) : &\mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z} \\ &\lambda \mapsto \dim(M_\lambda) \end{aligned}$$

On a un produit de convolution sur $\mathcal{X}$: pour f et g dans $\mathcal{X}$, on pose

$$(f * g)(\lambda) = \sum_{\mu+\nu=\lambda} f(\mu)g(\nu).$$

C'est bien une somme finie car on a fait une hypothèse sur le support des fonctions de $\mathcal{X}$. Si M et N sont des modules de dimensions finies, on a

$$\text{ch}(M \otimes N) = \text{ch}(M) * \text{ch}(N).$$

Et pour toute suite exacte

$$0 \to L \to M \to N \to 0,$$

on a l'égalité $\text{ch}(M) = \text{ch}(L) + \text{ch}(N)$. $\mathcal{X}$ muni de l'addition terme par terme et de la convolution est un anneau commutatif.

Je vais parler du groupe de Grothendieck d'une catégorie abélienne. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, une application additive $f : \text{Ob}(A) \to G$ où G est un groupe, est une application telle que pour toute suite exacte

$$0 \to L \to M \to N \to 0,$$

on a l'égalité $\text{ch}(M) = \text{ch}(L) \cdot \text{ch}(N)$.

Le groupe de Grothendieck $\text{K}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est le groupe le plus général qu'on peut obtenir à partir de $\mathcal{A}$ en demandant que les suites exactes courtes deviennent des sommes. De manière plus rigoureuse, il existe une application additive $s : \text{Ob}(\mathcal{A}) \to \text{K}(\mathcal{A})$ telle que pour toute application additive $f : \text{Ob}(\mathcal{A}) \to G$ où G est un groupe, il y ait une unique factorisation $\overline{f} : \text{K}(\mathcal{A}) \to G$ telle que $\overline{f} \circ s = f$.

Ainsi, ch définit une application additive $\mathrm{Ob}(\mathcal{O}) \to \mathcal{X}$. Donc, par la propriété universelle du groupe de Grothendieck, on en déduit un morphisme de groupe $\mathrm{K}(\mathcal{O}) \to \mathcal{X}$. Je prétends que cette application est injective, en effet deux modules qui ont les mêmes caractères formels ont des poids de même multiplicités, et en prenant des suites de Jordan-Hölder pour chacun de ces modules on peut montrer par récurrence que les multiplicités de Jordan-Hölder sont les mêmes : en effet on sait que $\dim(L(\lambda)_\lambda) = 1$ et $\dim(L(\lambda)_\mu)) = 0$ quand $\mu \nleqslant \lambda$ (la négation de $\mu \leqslant \lambda$). Les multiplicités de Jordan-Hölder étant les mêmes, les deux modules ont la même image dans le groupe de Grothendieck.

On peut donc identifier le groupe de Grothendieck de $\mathcal{O}$ au sous-groupe $\mathcal{X}_0$ de $\mathcal{X}$ engendré par les $\mathrm{ch}(M)$.

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on définit $e(\lambda) = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}$. Pour tout $f \in \mathcal{X}$, on a $f * e(\lambda) = f(\cdot - \lambda)$. On veut maintenant calculer les caractères formels des modules qui nous passent sous la main, à commencer par les modules de Verma. Pour cela définissons la fonction $p \in \mathcal{X}$, pour $\gamma \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$p(\gamma) = \#\{(c_\alpha)_{\alpha>0} | c_\alpha \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } \gamma = -\sum_{\alpha>0} c_\alpha \alpha\}.$$

Ici $\alpha > 0$ est une abréviation pour $\alpha \in \Phi^+$.

Proposition 6. *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on a $chM(\lambda) = p * e(\lambda)$.*

La preuve est juste combinatoire car on sait que $M(\lambda)$ est un $U(\mathfrak{n}^-)$-module libre de rang 1.

Maintenant que l'on a calculé les caractères des modules de Verma, on aimerait calculer les caractères des modules simples. Mais ce calcul est autrement plus compliqué : c'est justement l'objet de la conjecture de Kazhdan-Lutzig.

4.2 Formule de Weyl et Kostant

Le cas des modules simples de dimensions finies a néanmoins déjà été traité par Weyl et Kostant. On pose $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha$, et on définit

$$q = \prod_{\alpha>0} (e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)).$$

Je peux donc énoncer la formule de Weyl.

Théorème 10. *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $L(\lambda)$ soit de dimension finie (i.e $\lambda \in \Lambda^+$). Alors*

$$q * ch(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e(w(\lambda + \rho)).$$

On peut penser à cette formule comme un quotient

$$\mathrm{ch}L(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e(w(\lambda+\rho))}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e(w\rho)}.$$

On peut en déduire la formule de Kostant.

Théorème 11. *Si λ est tel que $L(\lambda)$ est de dimension fini et $\mu \leqslant \lambda$, alors*

$$dim L(\lambda)_\mu = \sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}p(\mu+\rho-w(\lambda+\rho))$$

Pour un module M de dimension finie, on a $\dim M = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}\dim M_\lambda$. Donc la dimension d'un module se déduit facilement de son caractère, la formule de Weyl permet alors de trouver une formule close pour la dimension de $L(\lambda)$.

Théorème 12. *Si λ est tel que $L(\lambda)$ est de dimension finie, alors*

$$dim\, L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha>0}\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle}{\prod_{\alpha>0}\langle\rho,\alpha^\vee\rangle}$$

où $\langle\beta,\alpha^\vee\rangle = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

Ainsi on a beaucoup d'informations sur les modules simples de dimensions finies, donc par le théorème de réductibilité complète de Weyl des informations sur les tous les modules de dimensions finies. On veut donc maintenant se tourner sur les modules simples de dimensions infinies et c'est l'objet du paragraphe suivant.

4.3 Le cas de la dimension infinie et la conjecture de Kazhdan Lutzig

Il faut d'abord que je parle de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$. Elle est définie par générateurs et relations comme $A := \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-algèbre non commutative et vérifie $\mathcal{H}\otimes_A\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}[W]$ l'algèbre du groupe de Weyl W et où $\mathbb{Z}$ est vu comme A algèbre par le morphisme $A\to\mathbb{Z}$ d'évaluation $q=1$.

Je ne décrirai pas les relations ici, elles proviennent des relations de W comme groupe de Coxeter. Il y a un générateur T_w pour tout $w\in W$, et ces générateurs forment une A-base de $\mathcal{H}$.

On construit une involution de $\mathcal{H}$ qui est l'unique morphisme d'anneau qui envoie q sur q^{-1} et T_w sur $(T_{w^{-1}})^{-1}$ et notée pour $h\in\mathcal{H}$, $h\mapsto\overline{h}$. On va maintenant chercher une A-base $(C_w)_{w\in W}$ de $\mathcal{H}$ qui vérifie pour tout $w\in W$, $\overline{C_w}=C_w$. Cependant il va falloir considérer $q^{1/2}$, donc dorénavent $A=\mathbb{Z}[q^{1/2},q^{-1/2}]$.
Par la suite, on note $l(x,w)=l(x)-l(w)$.

Théorème 13. *Il existe une unique famille d'éléments C_w pour $w \in W$ fixés par l'involution de $\mathcal{H}$ et vérifiant*

$$C_w = (-1)^{l(w)} q^{l(w)/2} \sum_{x \leqslant w} (-1)^{l(x)} q^{-l(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x,$$

où $P_{w,w} = 1$, $P_{x,w}$ est un polynôme à coefficients entiers, et deg $P_{x,w} \leqslant \frac{l(x,w)-1}{2}$ dès que $x < w$.

C'est dans le chapitre 8 de [3].
Les polynômes $P_{x,w}(q)$ qui permettent le changement de base sont appelés les polynômes de Kazhdan-Lutzig. Ils n'ont a priori pas grand chose à voir avec les algèbres de Lie car ils sont définis uniquement à partir du groupe de Weyl W et leur définition est purement combinatoire.

On fixe $\lambda = -2\rho$, et pour $w \in W$, on pose $M_w = M(w(\lambda + \rho) - \rho)$ et $L_w = L(w(\lambda + \rho) - \rho)$. Je peux donc énoncer la conjecture de Kazhdan-Lutzig (qui est bien un théorème depuis 1981).

Théorème 14. *On a l'égalité dans le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{O})$:*

$$[L_w] = \sum_{x \leqslant w} (-1)^{l(x,w)} P_{x,w}(1)[M_x].$$

Comme on connaît les caractères des modules de Verma M_w, on en déduit les caractères des modules simples L_w pour $w \in W$.

On a ainsi une formule explicite qui donne les multiplicités de certains modules simples : ceux de la forme L_w. Il y a un nombre fini de cette forme mais il est toujours possible, avec plus ou moins de difficultés, de se ramener au cas des L_w.

En fait on peut faire intéragir $L(\lambda)$ et $L(\mu)$ quand $\lambda - \mu \in \Lambda$ à l'aide des « foncteurs de translation » du chapitre 7 de [3]. Ces foncteurs de translations permettent de passer du calcul du caractère de $L(\lambda)$ au calcul du caractère de $L(\mu)$ sous certaines hypothèses. Et pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un μ et un $w \in W$ tel qu'on puisse se ramener au calcul du caractère de $L(\mu) = L_w$, ce qu'on sait faire.

Ainsi, il est possible de calculer les caractères des $L(\lambda)$ pour tous les $\lambda \in \Lambda$. Mais Λ est un réseau de $\mathfrak{h}^*$, donc la plupart des λ ne sont pas dans Λ.

En fait c'est un résultat de Soergel qui permet de s'en sortir avec des λ qui ne sont pas dans Λ. Cependant cela nécessite de faire intéragir $L(\lambda)$ avec des modules simples d'une autre algèbre de Lie semi-simple ! En quelque sorte on peut trouver $\mathfrak{g}'$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mu \in \Lambda'$ qui ont des caractères semblables. Et comme $\mu \in \Lambda'$, la conjecture de Kazhdan-Lutzig appliquée à $\mathfrak{g}'$ permet de terminer le problème.

5 Conclusion

Ainsi, après beaucoup de définitions on arrive à un résultat « tangible » à propos des modules simples de $\mathcal{O}$. Un des corollaires surpenant de la conjecture de Kazhdan-Lutzig est que les multiplicités des modules simples ne dépendent que du groupe W et non pas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. C'est-à-dire que si deux algèbres de Lie ont le même groupe de Weyl, alors les multiplicités de leurs modules simples seront les mêmes.
La conjecture de Kazhdan-Lutzig a été démontrée en 1981 en utilisant des méthodes géométriques, la correspondance de Riemann-Hilbert et le théorème de décomposition. A partir de là, Soergel a essayé de trouver une démonstration plus algébrique de la conjecture, un démonstration qui ne quittait pas autant la théorie des représentations. Et c'est en 2013 que Benjamin Elias termine ce programme en terminant la première preuve algébrique de la conjecture. C'est cette preuve qui est présentée dans [1].

Références

[1] Elias Benjamin. *Introduction to Soergel bimodules / Ben Elias, Shotaro Makisumi, Ulrich Thiel... [et al.].* RSME Springer series. Real Sociedad Matemática Española Springer Nature, Madrid] [Cham, 2020.

[2] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie.* Hermann, 1971.

[3] J. Humphreys. *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category O.* American Mathematical Society, 2008.