

Rapport de stage

Philippe Anjolras
sous la supervision de Joaquim Serra

Février-Juillet 2021

1 Déroulement du stage

J'ai effectué un stage de recherche à l'École polytechnique fédérale de Zürich (ETH Zürich) sous la supervision de Joaquim Serra, que je remercie chaleureusement pour le temps, les conseils et l'aide qu'il m'a consacrés en dépit d'un format parfois inhabituel. En effet, nous avons commencé à travailler à distance en organisant des réunions Skype pour échanger environ une fois par semaine, car l'ETH restait fermée aux étudiants. Notre première rencontre virtuelle a eu lieu en janvier, mois au cours duquel j'ai pu lire des documents généraux (*surveys*, notamment [Ser21] ou [HP15]) afin de définir un sujet d'étude, puis le stage a commencé à proprement parler en février. Je suis parti début avril à Zürich, mais nous n'avons pu nous rencontrer physiquement qu'en mi-mai, puis le stage a continué plus normalement jusqu'à sa fin le 18 juillet.

Le stage consistait à étudier les surfaces minimales pour le périmètre fractionnaire (ou non-local), sujet de recherche relativement récent introduit pour la première fois dans [CRS09] (2009), dans lequel Joaquim Serra a apporté des contributions. Plus précisément, l'étude usuelle de ces surfaces minimales se restreint à celles qui sont le bord d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , et nous avons cherché autant que possible à étendre les résultats de ce cas aux surfaces obtenues comme l'union des bords des ensembles constituant une partition (finie) de \mathbb{R}^n . Si la partition est binaire, on retrouve le cas usuel, mais on s'attend en général à créer de nouveaux types de singularités comme des jonctions triples (en dimension $n = 3$, trois demi-plans se rencontrant le long d'une droite avec des angles $\frac{2\pi}{3}$). Moralement, en raison de la forme particulière du périmètre fractionnaire, cela consiste à séparer l'espace en davantage de phases en interaction répulsive, là où usuellement on n'en considère que deux. Ces structures sont appelées *clusters* en anglais, ou coloriages (on considère qu'on colorie l'espace avec m couleurs, plutôt qu'avec seulement du noir et du blanc).

Après avoir établi la généralisation de résultats fondamentaux en février et constaté certaines obstructions à d'autres résultats plus particuliers, j'ai commencé un travail plus bibliographique afin de comprendre l'étude des surfaces minimales classiques (c'est-à-dire celles minimisant l'aire), qui a été conclue par l'article de Jean Taylor en 1976 ([Tay76]). Outre cet article, j'ai pu m'appuyer sur la monographie d'Enrico Giusti *Minimal Surfaces and Functions of*

Bounded Variation ([Giu84]). Les stratégies ayant permis de conclure l'étude du périmètre classique ont ensuite fortement inspiré celles du périmètre fractionnaire : mais les difficultés apportées par ce nouveau périmètre laissent toutefois de nombreuses questions ouvertes, notamment à propos des cônes minimaux, qui sont pourtant d'une importance cruciale dans l'étude des singularités des surfaces minimales.

À partir de mi-avril, une grande partie de mon temps a alors été consacrée à étudier ces cônes minimaux, d'abord dans le cas du périmètre classique afin de redémontrer les classifications déjà connues, ensuite dans le cas du périmètre fractionnaire et des clusters. La grande difficulté de cette étude peut se résumer ainsi : la classification des cônes minimaux pour le périmètre fractionnaire n'est connue (dans le cas usuel, donc sans clusters) qu'en dimension $n = 2$ (voir [SV12]), et en dimension supérieure seulement dans la limite $s \rightarrow 1$. Nous avons essayé de classifier les clusters coniques en dimension $n = 2$ également en suivant le schéma classique de dérivation du périmètre selon une déformation, comme cela avait été fait dans [Fig+15] (section 6), mais en cherchant à étendre le résultat à une déformation singulière à l'origine. Les résultats sont exposés dans ce document. Nous n'avons pu aboutir tout à fait au théorème attendu, qui reste à l'état de conjecture. Nous avons également montré, par des outils issus de la théorie géométrique de la mesure, des résultats concernant la dimension de Hausdorff des singularités d'un cluster.

Je tiens à remercier encore une fois Joaquim Serra qui m'a initié à ce domaine des mathématiques, ainsi que mon tuteur Cyril Imbert pour m'avoir mis en contact avec Joaquim.

2 Contenu mathématique

2.1 Surfaces minimales classiques

Notre étude des surfaces minimales (classiques) consistait à se poser la question suivante : étant donné un ensemble F (ou une partition (F_1, \dots, F_m) de \mathbb{R}^n) et un ouvert (borné) Ω , existe-t-il un ensemble E (resp. une partition) coïncidant avec F hors de Ω et minimisant le périmètre ? Sous quelles conditions, et avec quelle définition du périmètre ? Quelle est la régularité du bord d'un tel ensemble ? À quoi "ressemble-t-il" ?

Ce point de vue, ensembliste, est par ailleurs un point de vue particulier : le problème a également été abordé sous l'angle des *varifolds* et des courants.

Définition 1 (Périmètre à variations bornées) *Étant donné une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on définit sa variation dans Ω comme :*

$$\int_{\Omega} |Df| = \sup_{g \in C_c^1(\Omega), |g| \leq 1} \int_{\Omega} f \operatorname{div}(g) dx$$

Si $f \in L^1(\Omega)$ et que sa variation est finie, on dit que f est à variation bornée et on note $f \in BV(\Omega)$.

On définit alors le périmètre dans Ω d'un ensemble borélien E comme :

$$Per(E, \Omega) = \int_{\Omega} |D\chi_E|$$

où χ_E est la fonction indicatrice de E .

Un ensemble localement à variation bornée (c'est-à-dire $\chi_E \in BV(\Omega)$ pour tout Ω ouvert borné) est appelé un ensemble de Cacciopoli.

Une telle définition est large : les ensembles de Cacciopoli peuvent être très généraux. La grande force de la théorie classique est qu'un minimiseur, bien que pris selon une définition aussi large, est toujours régulier. (Pour le cas des clusters, d'autres singularités apparaissent, mais celles-ci restent également régulières dans une certaine mesure.)

Il est bon de noter que cette définition coïncide avec la mesure de Hausdorff de dimension $n - 1$ de $\partial E \cap \Omega$ dès lors que ∂E est C^2 , mais pas en général. La mesure de Hausdorff n'étant de plus pas semi-continue inférieurement sur les ensembles de Cacciopoli, elle ne dispose pas des propriétés adéquates pour notre étude, alors que la semi-continuité inférieure du périmètre ci-dessus découle simplement d'une application du lemme de Fatou. Ce résultat et le théorème de Rellich (applicable dès lors que Ω est suffisamment régulier, par exemple s'il s'agit d'un ouvert borné à bord Lipschitz) impliquent :

Théorème 2 (Existence de minimiseurs)

Soit Ω un ouvert borné à bord Lipschitz et F un ensemble de Cacciopoli. Alors il existe un ensemble E coïncidant avec F hors de Ω et minimisant le périmètre.

Les ensembles de Cacciopoli satisfont également des propriétés d'approximation par ensembles réguliers, avec convergence du périmètre, et des inégalités isopérimétriques. Naturellement les résultats précédents restent vérifiés dans le cas des clusters.

Une simplification utile des ensembles de Cacciopoli à considérer tient au fait que notre définition du périmètre est invariante si on modifie E par des ensembles négligeables. Cela permet en particulier de ne considérer que des ensembles satisfaisant :

$$\{x \in \mathbb{R}^n, \exists \rho > 0, |B(x, \rho) \cap E| = \omega_n \rho^n\} \subset E \subset \{x \in \mathbb{R}^n, \forall \rho > 0, |B(x, \rho) \cap E| > 0\}$$

où $\omega_n = |B_1|$ est la mesure de Lebesgue de la boule unité.

Sous cette condition, le bord topologique de E coïncide avec son bord au sens de la mesure :

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall \rho > 0, 0 < |B(x, \rho) \cap E| < \omega_n \rho^n\}$$

Cette simplification s'appliquera également au périmètre fractionnaire.

Les surfaces minimales satisfont un ensemble de propriétés remarquables qu'on retrouvera pour le périmètre fractionnaire (et qui motivent grandement

l'étude de ce nouveau périmètre) : des estimées uniformes de densité (au voisinage d'un point du bord, $|B(x, \rho) \cap E|$ est minoré par $c\rho^n$ où c dépend uniquement de la dimension; cela tient évidemment également pour E^c qui est également minimal), une formule de monotonie ($r^{1-n} \int_{B_r} |D\chi_E|$ est croissant en r , constant uniquement pour un cône), un théorème de stabilité (une suite d'ensembles de Cacciopoli minimaux convergeant dans L^1_{loc} convergent vers un ensemble de Cacciopoli minimal également), l'existence de cônes limites en tout point (pour toute suite $t_j \rightarrow 0$, il existe une suite extraite telle que $\frac{1}{t_{j_k}} E$ converge vers un cône minimal).

Le lemme central pour montrer la régularité d'une surface est le suivant :

Lemme 3 (De Giorgi) *Pour tout $n \geq 2$ et $0 < \alpha < 1$, il existe une constante positive $\sigma > 0$ telle que, si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de Cacciopoli et pour un $\rho > 0$, E est minimal dans B_ρ avec*

$$\int_{B_\rho} |D\chi_E| - \left| \int_{B_\rho} D\chi_E \right| < \sigma \rho^{n-1}$$

alors :

$$\int_{B_{\alpha\rho}} |D\chi_E| - \left| \int_{B_{\alpha\rho}} D\chi_E \right| < \alpha^n \left(\int_{B_\rho} |D\chi_E| - \left| \int_{B_\rho} D\chi_E \right| \right)$$

Ce lemme se comprend de la façon suivante : la quantité

$$\Lambda(E, \rho) = \int_{B_\rho} |D\chi_E| - \left| \int_{B_\rho} D\chi_E \right|$$

contrôle les variations de $D\chi_E$ et, en particulier, est minimal si $D\chi_E$ s'écrit comme une mesure de Radon fois un vecteur unitaire indépendant du point considéré. Le lemme dit que, si $\rho^{1-n} \Lambda(E, \rho)$ est suffisamment petit, alors la suite $(\Lambda(E, \alpha^k \rho))_{k \in \mathbb{N}}$ décroît de façon au moins exponentielle. Il est ensuite possible de montrer que, au voisinage d'un point satisfaisant les hypothèses du lemme, ∂E est C^1 . (Cette régularité est en fait suffisante pour aboutir à l'analyticité de ∂E , mais ce point n'a pas été abordé en détail au cours du stage.)

Or cette condition est vérifiée en x dès lors qu'un cône limite en x est un demi-espace ($\{x_n > 0\}$ à une rotation près). Cela conduit à la classification des cônes minimaux : si le demi-espace est l'unique cône minimal, puisqu'il existe (au moins) un cône limite en tout point du bord, ∂E est analytique en tout point.

Théorème 4 (Simons)

Soit E un cône minimal en dimension $n \leq 7$. Alors E est un demi-espace.

Il est très étonnant que ce théorème soit optimal : en dimension 8, un cône minimal singulier existe, appelé cône de Simons :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^8, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\}$$

Par ailleurs, puisqu'un cône C en dimension n est minimal si et seulement si $C \times \mathbb{R}$ est minimal en dimension $n + 1$, on trouve a priori des singularités en toute dimension supérieure. On sait cependant en contrôler la taille :

Théorème 5 (Dimension des singularités)

Soit E minimal dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On note $\Sigma \subset \partial E \cap \Omega$ l'ensemble des points singuliers.

- Si $n \leq 7$, $\Sigma = \emptyset$.
- Si $n = 8$, Σ n'a que des points isolés.
- Si $n \geq 9$, pour tout $t > n - 8$, $\mathcal{H}^t(\Sigma) = 0$, où \mathcal{H}^t est la mesure de Hausdorff de dimension t .

Le cas des clusters rajoute des singularités. Celles-ci se contrôlent néanmoins en procédant selon la même stratégie que précédemment : classification des cônes minimaux, régularité en fonction du cône minimal.

On définit la jonction triple Y comme la partition conique à trois ensembles :

$$E_1 = \{x_1 \geq 0, x_2 < \frac{x_1}{2}\}, E_2 = \{x_1 < 0, x_2 \leq -\frac{x_1}{2}\}, E_3 = (E_1 \cup E_2)^c$$

(et donc invariants dans la direction x_3).

On définit le cône T (tétraédrique) de la façon suivante. Aux rotations près, il n'existe qu'une seule façon de séparer la sphère S^2 en quatre sous-ensembles, chacun étant un triangle dont tous les angles sont $\frac{2\pi}{3}$ (un triangle sur la sphère est entièrement déterminé par ses trois angles, à rotations près). La partition conique engendrée par cette partition de S^2 fournit le cône T .

Théorème 6 (Classification des clusters minimaux)

On se place en dimension $n = 3$. Alors les seuls cônes minimaux sont le demi-espace D , la jonction triple Y et le cône tétraédrique T , ou n'importe quelle transformation orthogonale de ceux-ci.

Une fois cette classification établie, Jean Taylor a montré que, en dimension $n = 3$,

- le cône limite en un point est unique : il existe une unique transformation orthogonale φ et un unique cône C parmi D, Y, T tel que le cône limite est toujours $\varphi(C)$
- les points dont le cône limite est de type T sont isolés et forment un ensemble localement compact
- l'ensemble des points dont le cône limite est de type Y forment une courbe localement analytique.

L'objectif de Jean Taylor était alors d'étudier les surfaces minimales comme une modélisation des films de savon. Cependant, cette modélisation issue de la physique est uniquement phénoménologique, reposant sur la théorie de la tension de surface qui n'est pas reliée aux postulats plus fondamentaux de la physique. Le fait que les surfaces minimales pour le périmètre fractionnaire disposent de nombreuses propriétés semblables permettrait donc, si la théorie aboutit un jour à des théorèmes analogues jusqu'en dimension 3, de modéliser également les films de savon avec l'application de forces non-locales.

2.2 Périmètre fractionnaire : définition et résultats fondamentaux

Une fois fixé $s \in (0, 1)$, on définit le s -périmètre fractionnaire d'un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ dans Ω (un ouvert borné) comme :

$$\text{Per}_s(E, \Omega) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{n+s}} \chi_E(x) \chi_{E^c}(y) (1 - \chi_{\Omega^c}(x) \chi_{\Omega^c}(y)) dx dy$$

Cela revient à considérer un potentiel d'interaction

$$K(x - y) = \frac{1}{|x - y|^{n+s}}$$

radial et dont le comportement asymptotique (en 0 comme en $+\infty$) est déterminé par s , l'interaction ayant lieu entre les points de E et ceux de E^c mais (afin d'obtenir une quantité finie suffisamment souvent) seulement lorsqu'un des deux points au moins est dans Ω .

On définit plus généralement pour A, B des ensembles mesurables :

$$L(A, B) = \int_A \int_B K(x - y) dx dy$$

l'interaction entre A et B .

Le lien avec les surfaces classiques est obtenu dans la limite $s \rightarrow 1$:

$$(1 - s) \text{Per}_s(E, B_1) \rightarrow \text{Per}(E, B_1)$$

(voir par exemple [Lom15]).

Le problème usuel considéré est la minimisation de Per_s avec condition aux bords fixées, ce qui dans ce cas revient à fixer $E \setminus \Omega$ et à n'autoriser que des modifications à l'intérieur de Ω . Contrairement au cas classique, une "condition aux bords" signifie pour le périmètre non-local une condition sur tout $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, et non au voisinage de $\partial\Omega$.

Si on considère plus généralement des clusters, on fixe un nombre de couleurs $m \geq 2$ et on cherche à déterminer les propriétés de partitions $E = (E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$ de \mathbb{R}^n minimisant :

$$\text{Per}_s(E, \Omega) = \sum_{i=1}^m \text{Per}_s(E^{(i)}, \Omega)$$

(où on s'autorise la même notation par simplicité, les objets n'étant pas du même type) parmi les partitions ayant les mêmes "conditions aux bords" ($E_i \setminus \Omega$ est fixé pour tout i).

De même que pour le cas des surfaces minimales, on peut toujours supposer que chaque E_i contient l'intérieur de son adhérence (si $|B(x, \rho) \cap E_i| = |B(x, \rho)|$ pour un $\rho > 0$, alors $x \in E_i$) de sorte que les bords topologiques coïncident avec les bords au sens de la mesure.

Nous énonçons dans cette section une variété importante de résultats fondamentaux, qui proviennent généralement de [CRS09], où ils n'ont été traités que dans le cas usuel ($m = 2$). Les théorèmes de cet article sont néanmoins étendus au cas des clusters sans grande difficulté : par souci d'intégrité, nous plaçons les démonstrations en annexe, mais celles-ci sont des adaptations quasi-directes de celles de [CRS09].

Théorème 7 (Semi-continuité inférieure)

— Soit E_j une suite d'ensembles mesurables tels que $E_j \rightarrow E$ dans L_1^{loc} .

Alors :

$$Per_s(E, \Omega) \leq \liminf Per_s(E_j, \Omega)$$

— Soit $E_j = (E_j^{(1)}, \dots, E_j^{(m)})$ une suite de clusters tels que, pour tout $1 \leq i \leq m$, $E_j^{(i)} \rightarrow E^{(i)}$ dans L_{loc}^1 . On pose $E = (E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$. Alors :

$$Per_s(E, \Omega) \leq \liminf Per_s(E_j, \Omega)$$

Les résultats sur les clusters étant plus généraux que ceux sur les ensembles (on se ramène à un cluster en considérant simplement $m = 2$ et la partition (E, E^c)), on énoncera les résultats suivants uniquement pour les clusters.

Théorème 8 (Existence de minimiseurs)

Soit F un cluster, Ω à bord Lipschitz. Alors il existe E un cluster avec même conditions au bord que F et minimisant Per_s parmi les clusters satisfaisant cette condition au bord.

Théorème 9 (Stabilité des minimiseurs)

Soit E_j une suite de clusters minimaux dans Ω , convergeant dans L_{loc}^1 vers E . Alors E est également minimal et :

$$Per_s(E, \Omega) = \lim_j Per_s(E_j, \Omega)$$

$$Per_s(E^{(i)}, \Omega) = \lim_j Per_s(E_j^{(i)}, \Omega)$$

pour tout $1 \leq i \leq m$

Théorème 10 (Estimée uniforme de densité)

Il existe une constante $c = c(n, s) > 0$ vérifiant la propriété suivante. Soit E un cluster minimal et $x \in \Omega$. Alors pour tout $1 \leq i \leq m$ tel que

$$\forall \rho > 0, |B(x, \rho) \cap E^{(i)}| > 0$$

on a :

$$\forall 0 < \rho < d(x, \Omega^c), |B(x, \rho) \cap E^{(i)}| > c\rho^n$$

Par ailleurs, cette constante c reste minorée (par une constante strictement positive) quand $s \rightarrow 1$.

Ce résultat a une importance particulière compte tenu du fait que la bonne notion de convergence est la convergence L^1_{loc} : si une couleur est présente au voisinage d'un point pour tout cluster d'une suite convergente, alors elle reste nécessairement présente à la limite.

Afin d'obtenir une formule de monotonie, il est cependant nécessaire de considérer une fonction plus complexe que la fonction indicatrice, obtenue à partir de celle-ci en l'étendant à $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ de la façon suivante : étant donné $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on définit \tilde{u} par :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\cdot, 0) &= u(\cdot) \text{ sur } \mathbb{R}^n \\ \operatorname{div}(z^{1-s}\nabla\tilde{u}) &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^{n+1}\end{aligned}$$

où z est la coordonnée $n+1$ (on notera x un point de \mathbb{R}^n).

L'équation précédente admet une unique solution. Pour un cluster donné, on considère les fonctions étendues $\tilde{u}^{(i)}$ obtenues à partir de $u^{(i)} = \chi_{E^{(i)}} - \chi_{(E^{(i)})^c}$. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} , on définit $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^n = \Omega \cap \{z = 0\}$ et $\Omega^+ = \Omega \cap \{z > 0\}$. On a alors la propriété de minimisation suivante :

Proposition 11 *E est un cluster minimal dans B_1 si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega^+} z^{1-s} |\nabla \bar{v}^{(i)}|^2 dx dz \geq \sum_{i=1}^m \int_{\Omega^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(i)}|^2 dx dz$$

pour tout Ω ouvert borné tel que $\Omega_0 \subset\subset B_1$ et toutes fonctions $\bar{v}^{(i)}$ qui coïncident avec $\tilde{u}^{(i)}$ sur un voisinage de $\partial\Omega$ et satisfont $\sum_{i=1}^m \bar{v}^{(i)} = 2 - m$ sur Ω_0 .

Cette propriété conduit à une formule de monotonie, mais qui fait intervenir la fonction étendue. On définit :

$$\phi_E(x, r) = \sum_{i=1}^m r^{s-n} \int_{B_r(x)^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(i)}|^2 dx dz$$

(où $B_r(x)^+ = \{(y, z) \in \mathbb{R}^{n+1}, z > 0, |(y, z) - (x, 0)| < r\}$).

Théorème 12 (Formule de monotonie)

Supposons que E soit minimal dans $B(x, R)$. Alors $\phi_E(x, \cdot)$ est croissante sur $(0, R)$. Elle est constante si et seulement si E est conique autour de x .

Théorème 13 (Convergence vers des cônes minimaux)

Soit E un cluster minimal dans B_1 . Soit $r_j \rightarrow 0$ une suite de réels strictement positifs. Alors il existe une sous-suite extraite r_{j_k} telle que la suite de clusters :

$$\frac{1}{r_{j_k}} E = (\{x \in \mathbb{R}^n, r_{j_k} x \in E^{(1)}\}, \dots, \{x \in \mathbb{R}^n, r_{j_k} x \in E^{(m)}\})$$

converge dans L^1_{loc} vers un cluster conique C minimal dans \mathbb{R}^n entier (c'est-à-dire, minimal parmi toutes les déformations compactes).

Le théorème précédent assure qu'en tout point d'un cluster minimal il existe un cône limite. Une difficulté supplémentaire reste toutefois que ce cône pourrait dépendre de la suite $r_j \rightarrow 0$ considérée.

Théorème 14 (Réduction de la dimension)

Soit E un cluster dans \mathbb{R}^n . E est minimal si et seulement si $E \times \mathbb{R}$ est minimal.

Ce théorème est d'une importance capitale. En effet, la classification des cônes n'est connue qu'en petite dimension : mais connaître tous les cônes minimaux en dimension n permet de connaître tous les cônes minimaux ayant (au moins) une direction d'invariance en dimension $n + 1$, et ainsi de suite en dimension supérieure, et donc d'obtenir à partir d'une classification en dimension n_0 des résultats, certes plus faibles, mais en dimension arbitraire.

Définition 15 (Densité) *On définit la densité en un point x comme :*

$$d_E(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \phi_E(x, r)$$

qui existe par monotonie de ϕ_E .

Il est important de noter que la densité est définie indépendamment de toute séquence $r_j \rightarrow 0$, et qu'elle est égale à la densité de tout cône limite (pour lesquels $d_C(0) = \phi_C(0, r), \forall r > 0$). Un cône minimal est défini à transformation orthogonale près : ainsi, prouver que les cônes minimaux ont des densités distinctes permet de s'assurer que le cône limite en un point est unique, mais il reste à montrer que son représentant (parmi toutes les transformations orthogonales possibles) est également unique. Les résultats suivants ne sont pas présents dans [CRS09], nous en laissons donc les démonstrations.

Proposition 16 *d est semi-continue supérieurement.*

Démonstration

Fixons $x_0 \in \Omega$ et considérons $x_k \rightarrow x$. Fixons $\varepsilon > 0$ puis $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \in (0, r_0)$, $\phi(x_0, r) \leq d(x_0) + \varepsilon$. Choisissons $r \in (0, r_0)$ puis k suffisamment grand pour avoir $|x - x_k| < r$.

$$\begin{aligned} d(x_0) &\geq \phi(x_0, r) - \varepsilon \\ &\geq r^{s-n}(r - |x - x_k|)^{n-s} \phi(x_k, r - |x - x_k|) - \varepsilon \\ &\geq r^{s-n}(r - |x - x_k|)^{n-s} d(x_k) - \varepsilon \end{aligned}$$

Mais si $k \rightarrow \infty$, on obtient $d(x_0) \geq \limsup_k d(x_k) - \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ est arbitraire donc d est semi-continue supérieurement. \square

Proposition 17 *Soit E minimal dans B_1 , $x_j \rightarrow 0$ tels que, en posant $r_j = |x_j|$ et $y_j = \frac{x_j}{r_j}$, y_j converge vers $y \in S^{n-1}$, $\frac{1}{r_j}E$ converge dans L_{loc}^1 vers un cône limite C et $d_E(x_j) \rightarrow d_E(0)$. Alors C est invariant dans la direction y , c'est-à-dire :*

$$C + ty = C$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Quitte à appliquer une translation, $x_0 = 0$. Supposons tout d'abord que E est un cône, de sorte que $E = C$. Si $d(0) = 0$, la proposition est évidente, donc nous supposons $d(0) > 0$ et $d(x_k) > 0$ pour tout k . Supposons également dans un premier temps $y_k = y$, donc $x_k = r_k y$.

Ces hypothèses supplémentaires impliquent que $d(x_k)$ ne dépend pas de k . En effet, pour $r < r_k$:

$$\phi_E(x_k, r) = \phi_E(y, r/r_k)$$

donc la limite quand $r \rightarrow 0$ est la même. Ainsi, $d(0) = d(x_k)$ pour tout k .

Mais pour tout x :

$$\phi(0, R + |x|)(R + |x|)^{n-s} = d(0)(R + |x|)^{n-s} \geq R^{n-s} \phi(x, R)$$

Cela implique $\limsup_{R \rightarrow \infty} \phi(x, R) \leq d(0)$. Mais pour $x = y$, la formule de monotonie implique que $\phi(y, R) \geq d(y) = d(0)$ pour tout R , donc que $\phi(y, \cdot)$ est constante, c'est-à-dire que $E - y$ est un cône. Donc E est invariant dans la direction y .

À présent, en supposant toujours que E est un cône, supposons seulement $y_k \rightarrow y$. La semi-continuité supérieure de d implique que $d(y) \geq \lim_k d(y_k) = d(0)$ et on a déjà montré $d(0) \geq d(y)$, donc $d(0) = d(y)$ et on retrouve le cas précédent.

Enfin, considérons le cas d'un cluster général E . Notons d la densité de E et d_* la densité de C , qui coïncident en $x = 0$.

Comme précédemment, la semi-continuité supérieure de d implique $d_*(y) \leq d(0)$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Choisissons $r > 0$ tel que :

$$d_*(y) \geq \phi_C(y, r) - \varepsilon$$

et k_0 suffisamment grand pour que pour tout $k \geq k_0$ on ait :

$$\phi_C(y, r) \geq \phi_{\frac{1}{r_k}E}(y, r) - \varepsilon$$

et $|y_k - y| < r$. Alors, pour de tels r, k :

$$\begin{aligned} d_*(y_k) &\geq \phi_C(y, r) - \varepsilon \\ &\geq \phi_{\frac{1}{r_k}E}(y, r) - 2\varepsilon \\ &\geq \phi_{\frac{1}{r_k}E}(y_k, r - |y - y_k|) \left(\frac{r}{r - |y_k - y|} \right)^{s-n} + 2\varepsilon \\ &\geq \phi_E(x_k, (r - |y_k - y|)r_k) \left(\frac{r}{r - |y_k - y|} \right)^{s-n} + 2\varepsilon \\ &\geq d(x_k) \left(\frac{r}{r - |y_k - y|} \right)^{s-n} + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Donc comme $y_k \rightarrow y$, $d_*(y) \geq d(0) + 2\varepsilon$.

ε est arbitraire donc on a effectivement $d_*(y) = d(0) = d_*(0)$ et le raisonnement du cas conique s'applique. \square

Proposition 18 *Soit C un cône minimal, d_C sa densité et d_D la densité du demi-espace. Il existe $c > 0$ dépendant uniquement de n, s tel que, si C n'est pas un demi-espace,*

$$d_C > d_D + c$$

Théorème 19 (Caffarelli, Roquejoffre, Savin)

Soit E un cluster minimal dans B_1 tel qu'un cône limite en 0 est un demi-espace. Alors $\Sigma = \bigcup_i \partial E^{(i)}$ est lisse au voisinage de 0.

Ces deux derniers résultats sont montrés dans [CRS09] et se démontrent de la même façon pour le cas des clusters. (En particulier, pour le théorème, quitte à regarder E d'assez près, il n'y a que deux couleurs au voisinage de 0.)

Remarque 20 (Obstructions) Dans ce qui précède, on a l'impression que tous les résultats théoriques concernant les ensembles minimaux s'étendent aux clusters minimaux, ce qui est faux. Il existe en fait un genre de raisonnement particulier pour lequel une obstruction apparaît à ces généralisations : afin d'utiliser la minimalité d'un ensemble E , certaines démonstrations requièrent de considérer des compétiteurs, qui peuvent être décrits par des "ajouts" et des "retraits" de masse dans E . Or les "retraits" de masse n'existent pas pour les clusters : si $m = 2$, on sait que retirer à E revient à le donner à E^c , mais pour un cluster il s'agit de choisir à quelle autre couleur on donne ce qu'on a retiré à l'un des ensembles de la partition. Tenter de moyenniser sur toutes les autres couleurs offre parfois une voie de sortie, mais pas systématiquement. Notamment, les résultats de [CSV16] ne sont pas généralisables facilement.

2.3 La classification des cônes minimaux en dimension 2

2.3.1 Choix d'une déformation

En dimension $n = 2$, on appelle raie une demi-droite partant de 0 et secteur l'espace délimité par deux raies. Un cône est décrit par un nombre fini de secteurs (angulaires), chacun d'une couleur particulière. Nous considérons le bord entre deux secteurs et, quitte à effectuer une rotation, nous supposons que ce bord est l'axe des abscisses positives. Dans ce qui suit, on note B la couleur supérieure (c'est-à-dire l'ensemble des secteurs de la couleur supérieure) et A la couleur inférieure.

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit. Nous allons considérer $A_\varepsilon \subset A \cap B_1$ et comparer le cône initial au compétiteur obtenu en coloriant A_ε avec la couleur de B . Cela ne fait pas intervenir d'autres couleurs, donc la différence de périmètre entre les périmètres initial et final est :

$$f(\varepsilon) = L(A_\varepsilon, B) - L(A_\varepsilon, A \setminus A_\varepsilon)$$

Si f est strictement positive pour un $\varepsilon > 0$, cela indique que le cône n'est pas minimal.

La déformation que nous étudions est décrite par la figure 1. Cette déformation est celle que l'on considère pour le périmètre classique afin de montrer

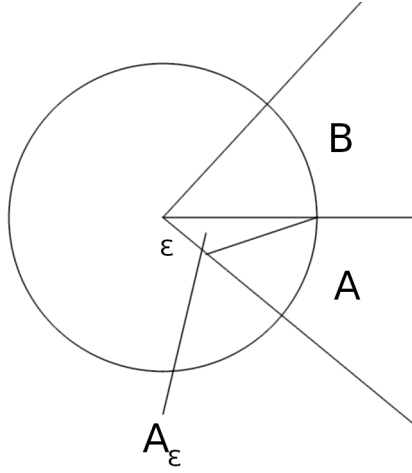


FIGURE 1 – La déformation considérée

qu'il y a moins de quatre raies : il est naturel de s'attendre à ce qu'elle fournisse également des informations pour le périmètre fractionnaire. Notons θ_0 l'angle du secteur de A juste en-dessous du bord décalé par la déformation : alors A_ε est le triangle entre les points 0 , $(1, 0)$, $(\varepsilon, -\theta_0)$ (en coordonnées polaires). On le paramétrise par une fonction :

$$\varphi : (x, y) \in [0, \varepsilon] \times [0, 1] \mapsto (y + x(1 - y) \cos \theta_0, -x(1 - y) \sin \theta_0)$$

de sorte que :

$$f(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \int_0^1 \int_{B \cup A \setminus A_\varepsilon} K(z - \varphi(x, y)) (\chi_B(z) - \chi_A(z)) dz (1 - y) \sin \theta_0 dy dx$$

Par ailleurs, afin de différentier en $\varepsilon > 0$, nous écrivons :

$$f(\varepsilon + t) = f(\varepsilon) + L(A_{\varepsilon+t} \setminus A_\varepsilon, B \cup A_\varepsilon) - L(A_{\varepsilon+t} \setminus A_\varepsilon, A \setminus A_{\varepsilon+t})$$

Proposition 21 (Variation première) *Soit $\varepsilon > 0$ assez petit. Alors :*

$$f'(\varepsilon) = \int_0^1 (1 - y) \sin \theta_0 \text{ v.p. } \left(\int_{B \cup A} K(z - \varphi(\varepsilon, y)) (\chi_B(z) - \chi_A(z) + 2\chi_{A_\varepsilon}(z)) dz \right) dy$$

où la valeur principale est donnée par :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B \cup A \setminus B(\varphi(\varepsilon, y), r)} K(z - \varphi(\varepsilon, y)) (\chi_B(z) - \chi_A(z) + 2\chi_{A_\varepsilon}(z)) dz$$

dont la limite est stationnaire, c'est-à-dire que la valeur ne change plus une fois que r est assez petit (à y fixé).

Démonstration

Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit, $y \in (0, 1)$ et posons $r(y) > 0$ suffisamment petit pour que $B(\varphi(\varepsilon, y), r(y))$ soit entièrement inclus dans $(A \cup B) \cap B_1$, et pour que cela reste vrai en $\varepsilon' = \varepsilon + t$, pour t petit. Il est clair qu'un tel $r(y)$ satisfait la deuxième partie de la proposition, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B \cup A \setminus B(\varphi(\varepsilon, y), r)} K(z - \varphi(\varepsilon, y)) (\chi_B(z) - \chi_A(z) + 2\chi_{A_\varepsilon}(z)) dz \\ &= \int_{B \cup A \setminus B(\varphi(\varepsilon, y), r(y))} K(z - \varphi(\varepsilon, y)) (\chi_B(z) - \chi_A(z) + 2\chi_{A_\varepsilon}(z)) dz \end{aligned}$$

puisque les termes dans l'anneau entre $0 < r < r(y)$ et $r(y)$ se compensent exactement.

On cherche donc à différentier en $t = 0$:

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+t} \int_{B \cup A} K(z - \varphi(x, y)) (\chi_{B \cup A_\varepsilon}(z) - \chi_{A \setminus A_{\varepsilon+t}}(z)) dz dx$$

Considérons alors la quantité altérée :

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+t} \int_{B \cup A \setminus B(\varphi(\varepsilon, y), r(y))} K(z - \varphi(x, y)) (\chi_{B \cup A_\varepsilon}(z) - \chi_{A \setminus A_{\varepsilon+t}}(z)) dz dx$$

K est bornée par $(r(y) - t)^{-2-s}$, donc nous pouvons différentier :

$$\int_{B \cup A \setminus B(\varphi(\varepsilon, y), r(y))} K(z - \varphi(\varepsilon, y)) (\chi_B(z) - \chi_A(z) + 2\chi_{A_\varepsilon}(z)) dz$$

Les termes que nous avons mis de côté ci-dessus sont :

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+t} \int_{B(\varphi(\varepsilon, y), r(y))} K(z - \varphi(x, y)) (\chi_{B \cup A_\varepsilon}(z) - \chi_{A \setminus A_{\varepsilon+t}}(z)) dz dx$$

Ils peuvent être séparés en deux parties : une provenant de B qui est l'interaction entre une ligne de longueur t dans la direction $-\theta_0$ et une demi-boule de rayon $r(y)$ dans le demi-espace supérieur ; une provenant de A qui est l'interaction entre une ligne de longueur t dans la direction $-\theta_0 + O(t)$ et l'intersection du demi-espace supérieur avec une boule de rayon $r(y)$ et de centre t -proche de 0.

La différence entre la partie provenant de A et celle obtenue si la boule de rayon $r(y)$ avait son centre en 0 est contrôlée par $r(y)^{-2-s} t^2 r(y)$ (à des constantes près dépendant uniquement de s pour t assez petit devant $r(y)$), donc en $o(t)$ ce qui est invisible dans la variation première. La figure 2 montre la situation (nous avons choisi $r(y)$ suffisamment petit afin de décrire le bord au voisinage de $\varphi(\cdot, y)$ comme une droite).

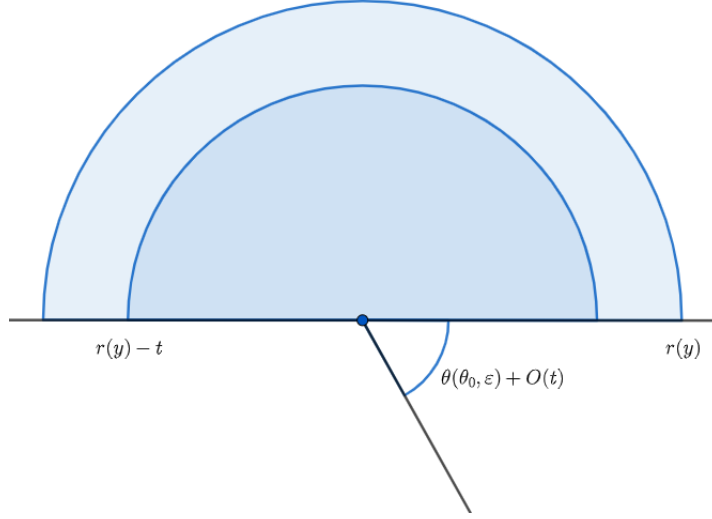


FIGURE 2 – La partie venant de A

Alors, puisque les termes provenant de A et B ont des signes distincts, ils se compensent à l'exception d'un petit angle de taille $O(t)$. Mais l'interaction entre une ligne de longueur t et un domaine angulaire d'angle $O(t)$ est en $O(t^{2-s})$, donc négligeable au premier ordre.

Il reste uniquement à montrer que la formule obtenue pour chaque y fixé est intégrable en y : cela provient du fait que l'on peut choisir $r(y)$ d'ordre $\min(y, 1 - y)$ et qu'ainsi, l'interaction avec B ou A est contrôlée par :

$$\int_{r(y)}^{\infty} r^{-2-s} r dr = \frac{1}{s} r(y)^{-s}$$

mais y^{-s} et $(1 - y)^{-s}$ sont intégrables sur $(0, 1)$. \square

Un point d'intérêt particulier est $\varepsilon = 0$. En ce point, la configuration est un cône, donc nous utilisons l'invariance par changement d'échelle afin d'écrire la dérivée première sous une forme plus agréable :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_0^1 (1 - y) \sin \theta_0 \text{v.p.} \int_{B \cup A} K(z - (y, 0)) (\chi_B(z) - \chi_A(z)) dz dy \\ &= \int_0^1 (1 - y) y^{-s} \sin \theta_0 dy \text{v.p.} \int_{B \cup A} K(z - (1, 0)) (\chi_B(z) - \chi_A(z)) dz \end{aligned}$$

Échanger les rôles de A et B fournit un changement de signe (et du facteur $\sin \theta_0$), donc on déduit qu'une condition nécessaire à la minimalité est que cette valeur principale ci-dessus est 0.

Par ailleurs, lorsqu'on calcule la valeur principale, il est clair que l'on peut retirer n'importe quel domaine symétrique par rapport à l'axe des abscisses, pas nécessairement une boule, donc en particulier nous pouvons retirer des domaines angulaires de chaque côté. De cette observation, on déduit aisément :

Proposition 22 *Considérons un cône minimal et deux secteurs adjacents tels qu'ils sont les uniques secteurs de leurs couleurs respectives. Alors ces secteurs ont le même angle.*

2.3.2 Variation seconde

Le calcul de f'' est un peu plus délicat. En effet, on peut remarquer que dans (presque) tous les cas, f n'est pas deux fois dérivable en 0. Afin de contourner ce problème et d'obtenir facilement une formule, on approche f' par approximation. Pour tout $\delta > 0$, on définit :

$$K_\delta(z) = \frac{1}{(\delta + |z|)^{-2-s}}$$

et :

$$f'_\delta(\varepsilon) = \int_0^1 (1 - \tilde{x}) \sin \theta_0 \int_{A \cup B} K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) (\chi_B(z) - \chi_A(z) + 2\chi_{A_\varepsilon}(z)) dz d\tilde{x}$$

Lemme 23 *Il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $C_s > 0$ tels que :*

$$\forall 1 > \delta > 0, \forall \varepsilon < \varepsilon_1, |f'(\varepsilon) - f'_\delta(\varepsilon)| \leq C_s \delta^{(1-s)/2}$$

Démonstration

On écrit :

$$f'(\varepsilon) - f'_\delta(\varepsilon) = \int_0^1 (1 - \tilde{x}) \sin \theta_0 \left(\int_{B \cup A} (K - K_\delta) (\chi_B - \chi_A + 2\chi_{A_\varepsilon}) \right) d\tilde{x}$$

Or :

$$K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) - K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) = K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \left(1 - \left(\frac{\delta}{|z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)|} + 1 \right)^{-n-s} \right)$$

Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout \tilde{x} fixé, on peut trouver $r > 0$ d'ordre $\min(\tilde{x}, 1 - \tilde{x})$ indépendant de $\varepsilon < \varepsilon_1$ tel qu'on peut retirer la boule de centre $\varphi(\tilde{x}, \varepsilon)$ et de rayon r sans changer l'intégrale précédente, et ce pour tout $\delta > 0, \varepsilon_1 > \varepsilon > 0$.

Pour un tel $r > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(B \cup A) \setminus B_r(\varphi(\tilde{x}, \varepsilon))} (K - K_\delta) (\chi_B - \chi_A + 2\chi_{A_\varepsilon}) dz \right| \\ & \leq \int_{(B \cup A) \setminus B_r(\varphi(\tilde{x}, \varepsilon))} K dz \sup \left(1 - \left(\frac{\delta}{|z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)|} + 1 \right)^{-n-s} \right) \end{aligned}$$

Si $r < \sqrt{\delta}$, ce supremum est inférieur à 1. Pour $r > \sqrt{\delta}$, ce supremum est inférieur à $c_\delta(n+s)\sqrt{\delta}$, avec $c_\delta \rightarrow 1$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Enfin, on a vu que l'intégrale avec K est contrôlée par r^{-s} . Ainsi, au total,

$$|f'(\varepsilon) - f'_\delta(\varepsilon)| < \int_{\sqrt{\delta}}^{1-\sqrt{\delta}} C(\tilde{x}^{-s} + (1-\tilde{x})^{-s})\sqrt{\delta}d\tilde{x} + C \int_0^{\sqrt{\delta}} \tilde{x}^{-s}d\tilde{x}$$

La première intégrale est inférieure à $C_s\sqrt{\delta} \leq C_s\delta^{(1-s)/2}$. La deuxième intégrale est inférieure à $C_s\delta^{(1-s)/2}$ également, ce qui conclut. \square

Lemme 24 Pour tout $\delta > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, la dérivée de f'_δ est :

$$f''_\delta(\varepsilon) = f''_{int}(\varepsilon, \delta) + \int_0^1 (1-\tilde{x})^2 \sin \theta_0 \left(\int_{\tilde{\partial}A} K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon))\nu_0 \cdot \nu_A(z)dz - \int_{\tilde{\partial}B} K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon))\nu_0 \cdot \nu_B(z)dz \right) d\tilde{x}$$

où f''_{int} est une fonction de ε, δ uniformément bornée en ε, δ , ν_0 est le vecteur unitaire dans la direction $-\theta_0$, $\tilde{\partial}A$ et $\tilde{\partial}B$ désignent respectivement ∂A et ∂B sans l'axe des abscisses positives (le bord déplacé), ν_A et ν_B sont les vecteurs normaux unitaires à A et B .

Démonstration

Fixons $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, puis calculons $f''_\delta(\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} f''_\delta(\varepsilon) &= \int_0^1 (1-\tilde{x}) \sin \theta_0 \left(- \int_{B \cup A_\varepsilon} \nabla K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \cdot (1-\tilde{x})\nu_0 dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{A \setminus A_\varepsilon} \nabla K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \cdot (1-\tilde{x})\nu_0 dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (1-\tilde{x}') \sin \theta_0 K(\varphi(\tilde{x}', \varepsilon) - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon))d\tilde{x}' \right) d\tilde{x} \end{aligned}$$

Par la première identité de Green :

$$\int_{B \cup A_\varepsilon} \nabla K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \cdot (1-\tilde{x})\nu_0 dz = \int_{\partial(B \cup A_\varepsilon)} K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon))(1-\tilde{x})\nu_0 \cdot \nu_{B \cup A_\varepsilon} dz$$

On sépare cette intégrale en 3 : une sur $\tilde{\partial}B$, une sur le bord de A_ε et une sur l'axe positif des abscisses avec $x \geq 1$; on effectue la même séparation sur $A \setminus A_\varepsilon$.

D'abord, nous montrons que l'intégrale sur l'axe des $x \geq 1$ reste uniformément borné en ε, δ . Sur ce bord, $\nu_0 \cdot \nu_B = \sin \theta_0$. De plus, la distance entre

$\varphi(\tilde{x}, \varepsilon)$ et $(r, 0)$ ($r \geq 1$) est minorée par $C(r - \tilde{x})$ pour tout $\varepsilon < 1$.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin^2 \theta_0 \int_1^\infty (\delta + C(r - \tilde{x}))^{-2-s} dr d\tilde{x} \\ & \leq C \int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 (\delta + C(1 - \tilde{x}))^{-2-s} d\tilde{x} \\ & \leq C \int_0^1 (1 - \tilde{x})^{-s} d\tilde{x} \\ & \leq C \end{aligned}$$

Ensuite, nous montrons que l'intégrale sur le bord de A_ε compense le dernier terme de f'_δ suffisamment pour que leur somme reste uniformément bornée en δ, ε . Le bord de A_ε qui intervient se décompose en une petite portion de taille ε , mais sur laquelle ν_0 est orthogonal au vecteur normal, et une portion de taille $\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_\varepsilon}$, où θ_ε est l'angle entre ν_0 et cette portion. Sur cette seconde portion, ν_0 scalaire le vecteur normal est $\sin(\theta_\varepsilon)$, de sorte que les termes considérés valent :

$$\int_0^1 (1 - \tilde{x}) \sin^2 \theta_0 \int_0^1 (1 - \tilde{x})(\delta + |\tilde{x}' - \tilde{x}|)^{-2-s} - (1 - \tilde{x}')(\delta + |\tilde{x}' - \tilde{x}|)^{-2-s} d\tilde{x}' d\tilde{x}$$

Ainsi, cela se simplifie en :

$$C \int_0^1 (1 - \tilde{x}) \int_0^1 (\tilde{x}' - \tilde{x})(\delta + |\tilde{x}' - \tilde{x}|)^{-2-s} d\tilde{x}' d\tilde{x}$$

Fixons $\tilde{x} \in (0, 1)$. Supposons d'abord $\tilde{x} \in (0, 1/2)$. Alors on regroupe $\tilde{x}' \leq \tilde{x}$ et $2\tilde{x} - \tilde{x}'$ (symétriques par rapport à \tilde{x}), de sorte que les termes se compensent exactement. On aboutit donc à :

$$(1 - \tilde{x}) \int_{2\tilde{x}}^1 (\tilde{x}' - \tilde{x})(\delta + |\tilde{x}' - \tilde{x}|)^{-2-s} \leq C(1 - \tilde{x})\tilde{x}^{-s}$$

de sorte que l'intégrale sur $(0, 1/2)$ est bornée.

Le même raisonnement sur $(1/2, 1)$ fournit :

$$C(1 - \tilde{x})^{1-s}$$

et l'intégrale y reste bornée également.

On place tous les termes précédents dans f_{int} . Le seul terme restant est :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin \theta_0 \left(\int_{\partial \tilde{A}} K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_A(z) dz \right. \\ & \quad \left. - \int_{\partial \tilde{B}} K_\delta(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_B(z) dz \right) d\tilde{x} \end{aligned}$$

comme attendu. \square

Le point intéressant est de noter que ce dernier terme n'est pas uniformément borné en δ, ε : à $\varepsilon > 0$ fixé, on peut faire tendre $\delta \rightarrow 0$ pour obtenir l'expression limite :

$$\int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin \theta_0 \left(\int_{\widetilde{\partial A}} K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_A(z) dz - \int_{\widetilde{\partial B}} K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_B(z) dz \right) d\tilde{x}$$

et cette expression diverge comme ε^{-s} quand $\varepsilon \rightarrow 0$, comme on va le voir.

Lemme 25 *Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_0 > 0$. Alors $f''_\delta - f''_{int}(\cdot, \delta)$ converge vers :*

$$\widetilde{f}''(\varepsilon) = \int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin \theta_0 \left(\int_{\widetilde{\partial A}} K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_A(z) dz - \int_{\widetilde{\partial B}} K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_B(z) dz \right) d\tilde{x}$$

uniformément en $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Démonstration

Une fois que $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$, $\varphi(\tilde{x}, \varepsilon)$ est à distance strictement positive de $\widetilde{\partial B}$ et de $\widetilde{\partial A}$ (à l'exception du bord dans la direction $-\theta_0$, mais sur lequel $\nu_0 \cdot \nu_A = 0$) et uniformément minorée en \tilde{x} , la minoration dépendant uniquement de ε_0 , de sorte que la convergence en δ est uniforme sur $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$. \square

Lemme 26 *La fonction f' , définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^+ , est continue en 0.*

Démonstration

Considérons $\varepsilon < 1/2$. On a alors :

$$f'(\varepsilon) = \int_0^1 (1 - \tilde{x}) \sin \theta_0 \int_{A \cup B} K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) (\chi_B(z) - \chi_A(z) + 2\chi_{A_\varepsilon}(z)) dz d\tilde{x}$$

Fixons $\tilde{x} \in (0, 1)$ et regardons les contributions hors d'une balle de rayon $r > 0$, centrée en $\tilde{x}, 0$, notée $B_r(\tilde{x})$, en supposant que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit pour que $\varphi(\tilde{x}, \varepsilon) \in B_r(\tilde{x})$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{A \cup B \setminus B_r(\tilde{x})} (K(z - (\tilde{x}, 0)) (\chi_B - \chi_A + 2\chi_{A_\varepsilon}) - K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) (\chi_B - \chi_A)) \right| \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_r} (|z| - \varepsilon)^{-2-s} - |z|^{-2-s} dz \\ & \leq C \int_r^\infty ((r' - \varepsilon)^{-2-s} - r'^{-2-s}) r' dr' \\ & \leq C \left(\frac{1}{s} (r - \varepsilon)^{-s} - \frac{1}{s} r^{-s} + \varepsilon \frac{1}{1+s} (r - \varepsilon)^{-1-s} \right) \end{aligned}$$

Supposons de plus que r est d'ordre $\min(\tilde{x}, 1 - \tilde{x})$ et supérieur à $\sqrt{\varepsilon}$. Alors, en intégrant sur $\tilde{x} \in (\sqrt{\varepsilon}, 1/2)$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1/2} C \left(\frac{1}{s}(\tilde{x} - \varepsilon)^{-s} - \frac{1}{s}\tilde{x}^{-s} + \varepsilon \frac{1}{1+s}(\tilde{x} - \varepsilon)^{-1-s} \right) d\tilde{x} \\ & \leq C\sqrt{\varepsilon} + C\varepsilon(\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon)^{-s} \leq C\sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

On contrôle de la même façon $\tilde{x} \in (1/2, 1 - \sqrt{\varepsilon})$.

Il reste à contrôler l'intégrale pour $\tilde{x} \in (0, \sqrt{\varepsilon})$ (et de façon équivalente $\tilde{x} \in (1 - \sqrt{\varepsilon}, 1)$). Mais sur ce domaine, indépendamment de ε , l'intégrale en z est contrôlée par \tilde{x}^{-s} , de sorte que :

$$\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \tilde{x}^{-s} d\tilde{x} \leq C\varepsilon^{(1-s)/2}$$

ce qui conclut. \square

Lemme 27 Notons $r(\tilde{x}, \varepsilon)$, $\theta(\tilde{x}, \varepsilon)$ les coordonnées polaires de $\varphi(\tilde{x}, \varepsilon)$. Alors \tilde{f}'' peut être réécrit :

$$\int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin \theta_0 r(\tilde{x}, \varepsilon)^{-1-s} c_{A,B}(\theta(\tilde{x}, \varepsilon)) d\tilde{x}$$

où :

$$\begin{aligned} c_{A,B}(\theta) &= \int_{\tilde{\partial A}} K(z - (\cos \theta, -\sin \theta)) \nu_0 \cdot \nu_A(z) dz \\ &\quad - \int_{\tilde{\partial B}} K(z - (\cos \theta, -\sin \theta)) \nu_0 \cdot \nu_B(z) dz \end{aligned}$$

Démonstration

On calcule :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin \theta_0 \\ & \left(\int_{\tilde{\partial A}} K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_A(z) dz - \int_{\tilde{\partial B}} K(z - \varphi(\tilde{x}, \varepsilon)) \nu_0 \cdot \nu_B(z) dz \right) d\tilde{x} \\ &= \int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin \theta_0 r(\tilde{x}, \varepsilon)^{-1-s} \\ & \left(\int_{\tilde{\partial A}} K(z - (\cos \theta(\tilde{x}, \varepsilon), \sin \theta(\tilde{x}, \varepsilon))) \nu_0 \cdot \nu_A(z) dz \right. \\ & \quad \left. - \int_{\tilde{\partial B}} K(z - (\cos \theta(\tilde{x}, \varepsilon), \sin \theta(\tilde{x}, \varepsilon))) \nu_0 \cdot \nu_B(z) dz \right) d\tilde{x} \\ &= \int_0^1 (1 - \tilde{x})^2 \sin \theta_0 r(\tilde{x}, \varepsilon)^{-1-s} c_{A,B}(\theta(\tilde{x}, \varepsilon)) d\tilde{x} \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu. \square

Lemme 28 Supposons $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Alors :

$$\widetilde{f}''(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C(s, \theta_0) \varepsilon^{-s} \int_0^{\theta_0} \sin(\theta)^{s-1} c_{A,B}(\theta) d\theta$$

(sous réserve que $\int_0^{\theta_0} \sin(\theta)^{s-1} c_{A,B}(\theta) d\theta \neq 0$).

Démonstration

Donnons tout d'abord une expression de $r(\widetilde{x}, \varepsilon)$ et $\theta(\widetilde{x}, \varepsilon)$:

$$r(\widetilde{x}, \varepsilon) = \sqrt{(\widetilde{x} + \varepsilon(1 - \widetilde{x}) \cos \theta_0)^2 + \varepsilon^2(1 - \widetilde{x})^2 \sin^2 \theta_0}$$

et :

$$\tan \theta(\theta_0, \widetilde{x}, \varepsilon) = \frac{\varepsilon(1 - \widetilde{x}) \sin \theta_0}{\widetilde{x} + \varepsilon(1 - \widetilde{x}) \cos \theta_0}$$

Posons $X = \frac{\widetilde{x}}{\varepsilon(1 - \widetilde{x}) \cos \theta_0}$ de sorte que :

$$r(\widetilde{x}, \varepsilon) = \sqrt{(X + 1)^2 + \tan^2 \theta_0} \varepsilon(1 - \widetilde{x}) \cos \theta_0$$

et :

$$\tan \theta(\widetilde{x}, \varepsilon) = \frac{\tan \theta_0}{X + 1}$$

Écrivons également :

$$\widetilde{x} = \frac{\varepsilon X \cos \theta_0}{1 + \varepsilon X \cos \theta_0} = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon X \cos \theta_0}$$

On considère donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1 - \widetilde{x})^2 \sin \theta_0 r(\widetilde{x}, \varepsilon)^{-1-s} c_{A,B}(\theta(\widetilde{x}, \varepsilon)) d\widetilde{x} \\ &= C(\theta_0) \varepsilon^{-1-s} \int_0^1 (1 - \widetilde{x})^{1-s} ((X + 1)^2 + \tan^2 \theta_0)^{-(1+s)/2} c_{A,B}(\theta(\widetilde{x}, \varepsilon)) d\widetilde{x} \end{aligned}$$

dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

On effectue le changement de variable en X et on obtient :

$$\begin{aligned} & C(\theta_0) \varepsilon^{-1-s} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon X \cos \theta_0}\right)^{1-s} ((X + 1)^2 + \tan^2 \theta_0)^{-\frac{1+s}{2}} \\ & \quad c_{A,B} \left(\arctan \frac{\tan \theta_0}{X + 1} \right) d\widetilde{x} \\ &= C(\theta_0) \varepsilon^{-1-s} \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon X \cos \theta_0}\right)^{1-s} ((X + 1)^2 + \tan^2 \theta_0)^{-\frac{1+s}{2}} \\ & \quad c_{A,B} \left(\arctan \frac{\tan \theta_0}{X + 1} \right) \frac{\varepsilon \cos \theta_0 dX}{(1 + \varepsilon X \cos \theta_0)^2} \\ &= C(\theta_0) \varepsilon^{-s} \left(\int_0^\infty ((X + 1)^2 + \tan^2 \theta_0)^{-\frac{1+s}{2}} c_{A,B} \left(\arctan \frac{\tan \theta_0}{X + 1} \right) \right. \\ & \quad \left. \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon X \cos \theta_0}\right)^{1-s} \frac{dX}{(1 + \varepsilon X \cos \theta_0)^2} \right) \end{aligned}$$

Il suffit à présent de considérer l'intégrale entre parenthèses pour conclure. $c_{A,B}$ est une fonction bornée de θ (sur $[0, \theta_0]$) et $\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon X \cos \theta_0}\right)^{1-s} (1+\varepsilon X \cos \theta_0)^{-2}$ converge simplement vers 1, en restant majoré par 1 uniformément en ε , donc par convergence dominée la limite de cette intégrale quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty ((X+1)^2 + \tan^2 \theta_0)^{-\frac{1+s}{2}} c_{A,B} \left(\arctan \frac{\tan \theta_0}{X+1} \right) dX \\ &= \int_0^{\tan \theta_0} \left(\frac{\tan^2 \theta_0}{X^2} + \tan^2 \theta_0 \right)^{-\frac{1+s}{2}} c_{A,B}(\arctan X) \frac{\tan \theta_0}{X^2} dX \\ &= \tan(\theta_0)^{-s} \int_0^{\theta_0} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^{-\frac{1+s}{2}} c_{A,B}(\theta) \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} d\theta \\ &= \tan(\theta_0)^{-s} \int_0^{\theta_0} \left(\frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} \right)^{\frac{1-s}{2}} c_{A,B}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

On range $\tan(\theta_0) > 0$ dans $C(\theta_0)$. Enfin :

$$\frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

donc le terme final est :

$$\int_0^{\theta_0} \sin(\theta)^{s-1} c_{A,B}(\theta) d\theta$$

comme annoncé. \square

Proposition 29 (Cas d'un secteur par couleur) *Supposons que A et B n'ont qu'un seul secteur chacun. Si $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, alors le cône n'est pas minimal.*

Démonstration

Par la Proposition 22, les angles de A et B sont égaux à θ_0 .

On montre que, sous ces hypothèses, $c_{A,B}(\theta)$ reste (strictement) positif sur $[0, \theta_0]$, de sorte que $f(\varepsilon) > 0$ pour ε assez petit.

Dans ce cas, si on considère la définition de $c_{A,B}$, l'intégrale sur $\widetilde{\partial A}$ est nulle car ce bord est constitué de la seule raie dans la direction ν_0 , sur laquelle on a donc $\nu_0 \cdot \nu_A = 0$; de même, $\widetilde{\partial B}$ n'est constitué que d'une seule raie, sur laquelle $\nu_0 \cdot \nu_B = -\sin(2\theta_0)$. Le signe $-$ devant l'intégrale sur $\widetilde{\partial B}$ permet de conclure que $c_{A,B}(\theta) > 0$. \square

La démonstration dans le cas général est un peu plus délicate et nous ne l'avons pas achevée. La conjecture est la suivante :

Conjecture 30 *Soit E un cône minimal en dimension $n = 2$. Supposons que, pour tout i , $|E^{(i)} \cap B_1| > 0$. Alors $m \leq 3$ et, à transformations orthogonales et ensembles négligeables près, si $m = 2$, E est une partition en deux demi-plans; si $m = 3$, E est une partition en 3 secteurs angulaires de taille $\frac{2\pi}{3}$.*

Nous avons des raisons de penser que la conjecture est correcte : notamment, $c_{A,B}(0) > 0$ pour au moins une raie dès que le cône considéré est distinct de D , Y ou du cône à quatre secteurs de tailles $\frac{\pi}{2}$ et quatre couleurs distinctes (ce dernier cas étant traité à part).

2.3.3 Étude de $c_{A,B}$

Posons :

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \int_0^\infty K((r \cos \theta, r \sin \theta) - (1, 0)) dr \\ &= \int_0^\infty (r^2 + 1 - 2r \cos \theta)^{-(2+s)/2} dr \end{aligned}$$

l'interaction entre un point et une demi-droite dans la direction θ .

Décrivons ensuite A par ses secteurs angulaires, $(\theta_i, \theta'_i)_{1 \leq i \leq a}$ (avec $\theta_a = 2\pi - \theta_0$ et $\theta'_a = 2\pi$) et de même B par $(\psi_i, \psi'_i)_{1 \leq i \leq b}$ (avec $\psi_1 = 0$). Alors $c_{A,B}(\theta)$ s'exprime comme :

$$\begin{aligned} c_{A,B}(\theta) &= \sum_{i=1}^{a-1} (\sin(\theta_0 + \theta_i)g(\theta_i + \theta) - \sin(\theta_0 + \theta'_i)g(\theta'_i + \theta)) \\ &\quad + \sin(\theta_0 + \theta_a)g(\theta_a + \theta) + \sin(\theta_0 + \psi'_1)g(\psi'_1 + \theta) \\ &\quad + \sum_{i=2}^b (\sin(\theta_0 + \psi'_i)g(\psi'_i + \theta) - \sin(\theta_0 + \psi_i)g(\psi_i + \theta)) \end{aligned}$$

Afin de séparer les dépendances en θ_0 , θ et les angles des bords, on utilise la formule de duplication des sinus comme :

$$\sin(\theta_0 + \theta_i) = \sin(\theta_0 - \theta) \cos(\theta_i + \theta) + \cos(\theta_0 - \theta) \sin(\theta_i + \theta)$$

De sorte que :

$$c_{A,B}(\theta) = \sin(\theta_0 - \theta)c_{A,B}^{sym}(\theta) + \cos(\theta_0 - \theta)c_{A,B}^{asym}(\theta)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_{A,B}^{sym}(\theta) &= \sum_{i=1}^{a-1} (\cos(\theta_i + \theta)g(\theta_i + \theta) - \cos(\theta'_i + \theta)g(\theta'_i + \theta)) \\ &\quad + \cos(\theta_a + \theta)g(\theta_a + \theta) + \cos(\psi'_1 + \theta)g(\psi'_1 + \theta) \\ &\quad + \sum_{i=2}^b (\cos(\psi'_i + \theta)g(\psi'_i + \theta) - \cos(\psi_i + \theta)g(\psi_i + \theta)) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} c_{A,B}^{asym}(\theta) &= \sum_{i=1}^{a-1} (\sin(\theta_i + \theta)g(\theta_i + \theta) - \sin(\theta'_i + \theta)g(\theta'_i + \theta)) \\ &\quad + \sin(\theta_a + \theta)g(\theta_a + \theta) + \sin(\psi'_1 + \theta)g(\psi'_1 + \theta) \\ &\quad + \sum_{i=2}^b (\sin(\psi'_i + \theta)g(\psi'_i + \theta) - \sin(\psi_i + \theta)g(\psi_i + \theta)) \end{aligned}$$

L'un est "symétrique" et l'autre "antisymétrique" car $c_{B,A}^{sym}(0) = c_{A,B}^{sym}(0)$ tandis que $c_{B,A}^{asym}(0) = -c_{A,B}^{asym}(0)$. (On a fait tous les calculs dans le cas où on rogne à A pour donner à B , mais on peut inverser leurs rôles.)

Lemme 31 *Si $c_{A,B}^{asym}(0) \neq 0$, alors le cône n'est pas stable.*

Démonstration

Dans ce cas, quitte à échanger le rôle de A et B , on peut supposer que $c_{A,B}^{asym}(0) > 0$. On emploie alors l'astuce du "bord artificiel", qui consiste à séparer le secteur de A d'angle θ_0 en deux secteurs adjacents, le plus proche de B étant d'angle petit, et d'appliquer les résultats précédents à cette configuration avec un petit angle $d\theta$ à la place de θ_0 (mais avec un secteur de plus pour A). L'ajout de ce bord artificiel ne modifie pas les fonction $c_{A,B}^{(a)sym}$ (ce qui est ajouté d'un côté est retranché de l'autre) mais modifie leurs poids donc in fine la fonction $c_{A,B}$.

Dans cette situation, la continuité en θ des fonctions $c_{A,B}^{(a)sym}(\theta)$ permet d'obtenir pour $d\theta$ assez petit que $\cos(d\theta - \theta)c_{A,B}^{asym}(\theta) > \eta$ pour $\theta \in (0, d\theta)$ tandis que $\sin(d\theta - \theta)c_{A,B}^{sym}(\theta) > -\eta$ sur le même intervalle et $c_{A,B} > 0$ sur cet intervalle, donc le cône n'est pas stable. \square

On suppose donc $c_{A,B}^{asym}(0) = 0$. Malheureusement, la stratégie de créer un bord artificiel d'angle petit ne fonctionne plus ensuite (en particulier, quand s est proche de 1, le fait que $(1 - s)Per_s$ approche Per nous indique que cette déformation a peu de chance de fournir de bons résultats).

$c_{A,B}^{asym}$ est constitué d'une somme alternée de termes $\sin(\cdot)g(\cdot)$ qui sont difficiles à contrôler; mais $c_{A,B}^{sym}$ est constitué d'une somme alternée de termes $\cos(\cdot)g(\cdot)$ qui bénéficient de propriétés intéressantes.

Lemme 32 *La fonction :*

$$h : \theta \in (0, 2\pi) \mapsto \cos(\theta)g(\theta)$$

est strictement convexe, symétrique par rapport à π (c'est-à-dire $h(\pi - \theta) = h(\pi + \theta)$), strictement décroissante sur $(0, \pi)$ et avec comme valeurs remarquables :

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad h(\pi) = -\frac{1}{1+s} \quad h(0^+) = +\infty$$

et la minoration $h\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{1+s}$.

La preuve de ce lemme est purement technique et a été placée en annexe. L'astuce consiste essentiellement à ne pas se décourager devant de longs calculs.

Ainsi, même si h est difficile à calculer à s fixé, sa stricte convexité permet

de contrôler $c_{A,B}^{sym}$ simplement :

$$\begin{aligned}
& h(\psi'_1 + \theta) + \sum_{i=2}^b (h(\psi'_i + \theta) - h(\psi_i + \theta)) \\
&= h(\psi'_1 + \theta) + \sum_{i=2}^b \int_{\psi_i + \theta}^{\psi'_i + \theta} h'(\psi) d\psi \\
&\geq h(\psi'_1 + \theta) + \sum_{i=2}^b \int_{\psi'_1 + \theta + \sum_{j=2}^{i-1} (\psi'_j - \psi_j)}^{\psi'_1 + \theta + \sum_{j=2}^i (\psi'_j - \psi_j)} h'(\psi) d\psi \\
&= h(\theta + \psi'_1) + \sum_{i=2}^b (\psi'_i - \psi_i)
\end{aligned}$$

Si on note $\Theta_B = S^1 \cap B$ et $\Theta_A = S^1 \cap A$, on trouve donc :

$$c_{A,B}^{sym}(\theta) \geq h(|\Theta_A| - \theta) + h(|\Theta_B| + \theta) \geq 2h\left(\frac{|\Theta_B| + |\Theta_A|}{2}\right)$$

avec égalité si et seulement si toutes les inégalités précédentes sont des égalités, donc si et seulement si A et B n'ont qu'un seul secteur de taille $\frac{\pi}{2} - \theta$ pour B et $\frac{\pi}{2} + \theta$ pour A .

Ensuite, le fait que $h(\theta) > 0$ dès que $\theta < \frac{\pi}{2}$ permet de déduire $c_{A,B}^{sym} > 0$ dès que $|\Theta_B| + |\Theta_A| < \pi$, ce qui est une contrainte forte (et indépendante de s !) Des considérations plus fines, notamment en utilisant des compensations de termes sur les deux bords d'un secteur, permettent enfin de montrer que, si un secteur est de taille inférieure à $\frac{\pi}{4}$, $c_{A,B}^{sym}(0) > 0$ sur au moins un de ses bords.

Le terme $c_{A,B}^{asym}$ est plus problématique, mais on peut le contourner dès que $c_{A,B}^{asym}(0) = 0$, en tenant cependant compte d'un terme perturbatif :

$$\begin{aligned}
p_{A,B}(\theta) &= \sum_{i=1}^{a-1} (\cos(2\theta_i + \theta) - \cos(2\theta'_i + \theta)) + \cos(2\theta_a + \theta) \\
&\quad + \cos(2\psi'_1 + \theta) + \sum_{i=2}^b (\cos(2\psi'_i + \theta) - \cos(2\psi_i + \theta))
\end{aligned}$$

Lemme 33 *Supposons $c_{A,B}^{asym} = 0$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_0} (\sin \theta)^{s-1} c_{A,B}(\theta) d\theta &= \int_0^{\theta_0} c_{A,B}^{sym}(\theta) \sin \theta_0 (1-s) \int_{\theta}^{\theta_0} (\sin \psi)^{s-2} d\psi d\theta \\
&\quad + \int_0^{\theta_0} \sin(\theta)^s \cos(\theta_0 - \theta) p_{A,B}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Démonstration

On obtient cette nouvelle expression en écrivant pour tout θ :

$$c_{A,B}^{asym}(\theta) = c_{A,B}^{asym}(\theta) - c_{A,B}^{asym}(0) = \int_0^{\theta} \frac{d}{d\psi} c_{A,B}^{asym}(\psi) d\psi$$

puis en réorganisant les termes. La dérivée de $g(\cdot) \sin(\cdot)$ est :

$$-sh(\cdot) - (\sin^2(\cdot) - \cos^2(\cdot)) = -sh(\cdot) + \cos(2\cdot)$$

$c_{A,B}$ s'exprime comme une somme. Considérons uniquement le terme en θ_i pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\theta_0} (\sin \theta)^{s-1} \sin(\theta_0 - \theta) h(\theta_i + \theta) d\theta \\ & + \int_0^{\theta_0} (\sin \theta)^{s-1} \cos(\theta_0 - \theta) \int_0^\theta \cos(2(\theta_i + \psi) - sh(\theta_i + \psi)) d\psi d\theta \\ & = \int_0^{\theta_0} (\sin \theta)^{s-1} \sin(\theta_0 - \theta) h(\theta_i + \theta) d\theta \\ & - \int_0^{\theta_0} \int_\theta^{\theta_0} (\sin \psi)^{s-1} \cos(\theta_0 - \psi) sh(\theta_i + \theta) d\psi d\theta \\ & + \int_0^{\theta_0} (\sin \theta)^{s-1} \cos(\theta_0 - \theta) \int_0^\theta \cos(2(\theta_i + \psi)) d\psi \\ & = \int_0^{\theta_0} h(\theta_i + \theta) \left((\sin \theta)^{s-1} \sin(\theta_0 - \theta) - s \int_\theta^{\theta_0} (\sin \psi)^{s-1} \cos(\theta_0 - \psi) d\psi \right) d\theta \\ & + \int_0^{\theta_0} (\sin \theta)^{s-1} \cos(\theta_0 - \theta) \frac{1}{2} (\sin(2(\theta_i + \theta)) - \sin(2\theta_i)) d\theta \end{aligned}$$

Il reste alors à calculer le coefficient en face de h :

$$\begin{aligned} & (\sin \theta)^{s-1} \sin(\theta_0 - \theta) - s \int_\theta^{\theta_0} (\sin \psi)^{s-1} \cos(\theta_0 - \psi) d\psi \\ & = (\sin \theta)^{s-1} \sin \theta_0 \cos \theta - (\sin \theta)^s \cos \theta_0 - s \int_\theta^{\theta_0} (\sin \psi)^{s-1} (\cos \theta_0 \cos \psi + \sin \theta_0 \sin \psi) d\psi \\ & = (\sin \theta)^{s-1} \sin \theta_0 \cos \theta - (\sin \theta)^s \cos \theta_0 - \cos \theta_0 ((\sin \theta_0)^s - (\sin \theta)^s) - s \int_\theta^{\theta_0} \sin \theta_0 (\sin \psi)^s d\psi \\ & = \sin \theta_0 \left((\sin \theta)^{s-1} \cos \theta - (\sin \theta_0)^{s-1} \cos \theta_0 - s \int_\theta^{\theta_0} (\sin \psi)^s d\psi \right) \\ & = \sin \theta_0 \int_\theta^{\theta_0} ((\sin \psi)^s + (1-s)(\cos \psi)^2 (\sin \psi)^{s-2}) - s(\sin \psi)^s d\psi \\ & = \sin \theta_0 (1-s) \int_\theta^{\theta_0} (\sin \psi)^{s-2} d\psi \end{aligned}$$

Pour le second terme, on utilise les formules usuelles :

$$\frac{1}{2} (\sin(2(\theta_i + \theta)) - \sin(2\theta_i)) = \sin \theta \cos(2\theta_i + \theta)$$

En sommant ensuite sur tous les bords, on obtient bien l'expression annoncée. \square

L'avantage de la forme précédente est qu'elle ne fait plus intervenir que $c_{A,B}^{sym}$, et que le terme perturbatif ne contient aucun terme potentiellement singulier (puisque le noyau K n'y intervient plus). Par ailleurs, l'intégrale étant sur $[0, \theta_0]$, on peut montrer que l'intégrande total est strictement positif au moins aux deux bords sous des hypothèses faibles :

- si $c_{A,B}^{sym}(0) > 0$ (ce qui est très souvent vérifié en choisissant bien le bord), le fait que le terme perturbatif ait un $\sin(\theta)$ supplémentaire assure que l'intégrande total est strictement positif en $\theta \sim 0$ (et même divergent, d'ordre θ^{s-1} - donc intégrable) ;
- si le bord dans la direction $-\theta_0$ de A est un vrai bord (et pas un bord artificiel), en $\theta \sim \theta_0$, $c_{A,B}^{sym}(\theta)$ est d'ordre $(\theta_0 - \theta)^{-1-s}$ car la contribution de ce bord de A est de cet ordre. L'intégrale $\int_{\theta}^{\theta_0} \dots$ en facteur de $c_{A,B}^{sym}$ tend vers 0, mais seulement à vitesse linéaire en $(\theta_0 - \theta)$, donc l'intégrande totale avec le terme perturbatif reste positif, divergeant à vitesse $(\theta_0 - \theta)^{-s}$.

À la fin du stage, nous avons abouti à ces résultats sans parvenir à contrôler efficacement cette quantité sur tout l'intervalle $[0, \theta_0]$, mais ces observations vont dans le sens de la conjecture 30.

2.4 Régularité et singularités

Dans cette section, on suppose que la conjecture 30 est vraie.

On dénote par $d_D^{(n)}, d_Y^{(n)}$ les densités des cônes D (demi-espace) et Y (jonction triple) en dimension $n \geq 2$.

Théorème 34 (Structure en dimension $n = 2$)

Soit E un cluster minimal en dimension $n = 2$. Définissons $\Sigma = \bigcup_i \partial E_i$.

Alors $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_0$, avec :

- $\Sigma_1 = \{x \in \Sigma, \text{ il existe un cône limite en } x \text{ qui est un demi-plan}\} = \{x \in \Sigma, d(x) = d_D^{(2)}\}$ est ouvert dans Σ , de dimension de Hausdorff 1 et lisse.
- $\Sigma_0 = \{x \in \Sigma, \text{ il existe un cône limite en } x \text{ qui est une jonction triple}\} = \{x \in \Sigma, d(x) = d_Y^{(2)}\}$ est un ensemble dénombrable, fermé et constitué de points isolés. Au voisinage de chacun de ses points, Σ et l'union de trois courbes lisses se rencontrant avec des angles $\frac{2\pi}{3}$.

Démonstration

Le fait que Σ_1 soit lisse découle du théorème 19. Une fois la classification admise, on sait de plus que $d_D^{(2)} < d_Y^{(2)}$ et que, pour tout point $x \in \Sigma$, $d(x) = d_D^{(2)}$ ou $d(x) = d_Y^{(2)}$. La semi-continuité supérieure de d implique donc que Σ_0 est fermé. La proposition 17 implique ensuite que les points de Σ_0 sont isolés, donc Σ_0 est dénombrable. (Cela peut aussi être vu comme une conséquence du fait que d ne satisfait aucune propriété de continuité séquentielle au voisinage d'un point de x , d'après [FRS19], lemme 7.1). Enfin, Σ_0 ne peut pas être isolé dans Σ , autrement pour un $x \in \Sigma_0$ on aurait $d(y) = 0$ sur $y \in B_r(x) \setminus \{x\}$ et donc par l'estimée uniforme de densité il n'existerait qu'une seule couleur au voisinage de x , donc $d(x) = 0$, absurde. \square

Théorème 35 (Structure en dimension $n = 3$)

Il existe $s_0 \in (0, 1)$ tel que ce qui suit soit vérifié. Soit E un cluster minimal en dimension $n = 3$, pour $s \in (0, 1)$. On définit Σ comme précédemment. Écrivons $\Sigma = \Sigma_2 \sqcup \Sigma_1 \sqcup \Sigma_0$ avec :

- Σ_2 est l'ensemble des points où il existe un cône limite possédant deux directions invariantes ;
- Σ_1 est l'ensemble des points où il existe un cône limite possédant une direction invariante ;
- $\Sigma_0 = \Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$

Alors :

- $\Sigma_2 = \{x \in \mathbb{R}^3, d(x) = d_D^{(3)}\}$ est de dimension de Hausdorff 2, ouvert dans Σ et est une surface lisse.
- Σ_1 est de dimension de Hausdorff inférieure à 1, et si $s > s_0$, le cône limite est toujours une jonction triple et $\Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, d(x) = d_Y^{(3)}\}$.
- Σ_0 est dénombrable et, si $s > s_0$, $\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^3, d(x) > d_Y^{(3)}\}$.

Démonstration

Les propriétés de Σ_2 (points dont un cône limite possède deux directions d'invariance) se déduisent de la même façon qu'en dimension $n = 2$.

Concernant Σ_1 et Σ_0 , les dimensions de Hausdorff et la dénombrabilité découlent d'outils de la théorie géométrique de la mesure exposés dans [FRS19], section 7 (lemme 7.1 et proposition 7.3), pour $f = d$, avec les propositions 17 et 14 qui permettent de caractériser les cônes ayant des directions d'invariance.

La semi-continuité supérieure de d et la classification des cônes ayant au moins une direction d'invariance permet enfin de savoir que, pour tout cône C différent de Y , de D et faisant apparaître au moins une jonction triple (sur son intersection avec S^2) satisfait $d_C > d_Y$. Le seul cas délicat serait celui d'un cône minimal dont l'intersection avec S^2 serait lisse (donc sans jonction triple). Nous montrons que, pour $s > s_0$ (s_0 assez proche de 1), de tels cônes minimaux n'existent pas.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $s_k \rightarrow 1$ de cônes minimaux E_k pour le s_k -périmètre, tel qu'aucun d'entre eux n'a de point de jonction triple. On peut supposer que $s_k \geq \frac{1}{2}$ pour tout k . La minimalité de E_k , en comparant au cas où on colorie tout B_1 avec une seule couleur, fournit :

$$\text{Per}_{s_k}(E_k, B_1) \leq \frac{C}{1 - s_k}$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de s_k . (On a utilisé ici $s_k \geq \frac{1}{2}$, en général on obtiendrait autrement un terme $\frac{1}{s_k}$.)

On peut alors appliquer le théorème 4 de [BBM01] : quitte à extraire une sous-suite, il existe un cône E limite au sens de la convergence L_{loc}^1 . En effet, en prenant ρ_k suffisamment proche de $(1 - s_k)|x|^{-n+1-s_k}$, on a les hypothèses requises. Ce cône E est minimal pour le périmètre classique, car il a été prouvé dans [CN19] (théorème 2.8) que $(1 - s)\text{Per}_s$ Γ -converge vers Per (par rapport à la convergence L_{loc}^1) et la convergence des minimiseurs.

Mais l'estimée de densité uniforme pour tout $s \in (0, 1)$ et le fait que la constante dans cette estimée peut être choisie uniforme en s (pour s loin de 0) implique qu'on a également la convergence au sens de la distance de Hausdorff.

Cependant, les cônes minimaux pour le périmètre classique sont bien connus : à l'exception du demi-espace, tous contiennent une jonction triple. La convergence vers un demi-espace est impossible par l'amélioration de la planéité prouvée dans [CRS09] (qui est l'analogue du lemme de De Giorgi pour les surfaces minimales : si on est proche dans L^1_{loc} d'un demi-espace, grossir la figure géométriquement permet de converger géométriquement vers le demi-espace, et en particulier il n'existe aucun cône minimal trop proche d'un demi-espace). Ensuite, par l'estimée uniforme de densité, il n'est pas possible non plus qu'une séquence de cônes sans jonction triple converge vers un cône avec jonction triple.

On aboutit à une contradiction, d'où l'existence d'un tel s_0 . \square

Références

- [Ser21] J. SERRA. « The geometric structure of interfaces and free boundaries ». In : *EMS Magazine* 120 (2021).
- [HP15] J. HARRISON et H. PUGH. « Plateau's Problem : What's Next ». In : *arXiv : Analysis of PDEs* (2015).
- [CRS09] L. CAFFARELLI, J. ROQUEJOFFRE et O. SAVIN. « Nonlocal minimal surfaces ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 63 (2009), p. 1111-1144.
- [Tay76] Jean E. TAYLOR. « The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces ». In : 1976.
- [Giu84] E. GIUSTI. « Minimal surfaces and functions of bounded variation ». In : 1984.
- [SV12] O. SAVIN et E. VALDINOCI. « Regularity of nonlocal minimal cones in dimension 2 ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 48 (2012), p. 33-39.
- [Fig+15] A. FIGALLI et al. « Isoperimetry and Stability Properties of Balls with Respect to Nonlocal Energies ». In : *Communications in Mathematical Physics* 336 (2015), p. 441-507.
- [Lom15] L. LOMBARDINI. « Fractional Perimeter and Nonlocal Minimal Surfaces ». In : *arXiv : Analysis of PDEs* (2015).
- [CSV16] E. CINTI, Joaquim SERRA et E. VALDINOCI. « Quantitative flatness results and $\$BV\$$ -estimates for stable nonlocal minimal surfaces ». In : *arXiv : Analysis of PDEs* (2016).
- [FRS19] A. FIGALLI, Xavier ROS-OTON et Joaquim SERRA. « Generic regularity of free boundaries for the obstacle problem ». In : *Publications mathématiques de l'IHÉS* (2019), p. 1-112.

- [BBM01] J. BOURGAIN, H. BREZIS et P. MIRONESCU. « Another look at Sobolev spaces ». In : 2001.
- [CN19] A. CESARONI et M. NOVAGA. « Nonlocal minimal clusters in the plane ». In : *arXiv : Analysis of PDEs* (2019).

Annexe A : Démonstrations des résultats fondamentaux, adaptées aux clusters

Démonstration (du théorème 7)

Le premier point a été montré dans [CRS09]. L'extension aux clusters est immédiate, le périmètre d'un cluster étant la somme des périmètres de ses ensembles, chacun étant semi-continu inférieurement. \square

Démonstration (du théorème 8)

On considère une suite de clusters dont le périmètre fractionnaire converge vers la borne inférieure. Si une sous-suite converge dans L^1_{loc} , la semi-continuité inférieure assure que la limite est le minimiseur voulu.

Or la convergence dans L^1_{loc} provient du fait que l'injection de Sobolev $W^{1,s}(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ est compacte et que la norme sur $W^{1,s}(\Omega)$ d'une fonction indicatrice est contrôlée par le périmètre fractionnaire d'ordre s (plus une constante, $|\Omega|$). \square

Démonstration (du théorème 9)

Soit $F = (F^{(1)}, \dots, F^{(m)})$ un cluster tel que $F = E$ hors de B_1 . Posons :

$$F_k^{(j)} = (F^{(j)} \cap B_1) \cup (E_k^{(j)} \setminus \Omega)$$

de sorte que $F_k = E_k$ hors de B_1 , et donc par minimalité :

$$\text{Per}_s(F_k, B_1) \geq \text{Per}_s(E_k, B_1)$$

Cependant :

$$\begin{aligned} & \text{Per}_s(F^{(j)}, B_1) - \text{Per}_s(F_k^{(j)}, B_1) \\ &= \int_{F^{(j)} \cap B_1} \left(\int_{(F^{(j)})^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} - \int_{(F_k^{(j)})^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} \right) dx \\ & \quad + \int_{B_1 \setminus F^{(j)}} \left(\int_{F^{(j)} \setminus B_1} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} - \int_{F_k^{(j)} \setminus B_1} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} \right) dx \\ &= \int_{F^{(j)} \cap B_1} \left(\int_{(E^{(j)})^c \setminus B_1} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} - \int_{(E_k^{(j)})^c \setminus B_1} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} \right) dx \\ & \quad + \int_{B_1 \setminus F^{(j)}} \left(\int_{E^{(j)} \setminus B_1} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} - \int_{E_k^{(j)} \setminus B_1} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{F^{(j)} \cap B_1} \int_{(E^{(j)})^c \setminus ((E_k^{(j)})^c \cup B_1)} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} - \int_{(E_k^{(j)})^c \setminus ((E^{(j)})^c \cup B_1)} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} dx \\
&\quad + \int_{B_1 \setminus F^{(j)}} \int_{E^{(j)} \setminus (E_k^{(j)} \cup B_1)} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} - \int_{E_k^{(j)} \setminus (E^{(j)} \cup B_1)} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} dx \\
&\leq \int_{B_1} \int_{E_k^{(j)} \setminus (E^{(j)} \cup B_1)} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} dx + \int_{B_1} \int_{E^{(j)} \setminus (E_k^{(j)} \cup B_1)} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} dx \\
&\leq \int_{B_1} \int_{(E^{(j)} \Delta E_k^{(j)}) \setminus B_1} \frac{dxdy}{|x-y|^{n+s}} \\
&\leq L(B_1, (E^{(j)} \Delta E_k^{(j)}) \setminus B_1)
\end{aligned}$$

En échangeant le rôle de $F^{(j)}$ et $F_k^{(j)}$, on obtient :

$$|\text{Per}_s(F^{(j)}, B_1) - \text{Per}_s(F_k^{(j)}, B_1)| \leq L(B_1, E^{(j)} \Delta E_k^{(j)} \setminus B_1)$$

d'où :

$$|\text{Per}_s(F, B_1) - \text{Per}_s(F_k, B_1)| \leq \sum_{j=1}^m L(B_1, E^{(j)} \Delta E_k^{(j)} \setminus B_1)$$

Posons alors :

$$b_k^{(j)} = L(B_1, E^{(j)} \Delta E_k^{(j)} \setminus B_1)$$

Supposons que $b_k^{(j)} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, pour tout j . Alors :

$$\begin{aligned}
\text{Per}_s(F, B_1) &= \lim_k \text{Per}_s(F, B_1) + 2 \sum_{j=1}^m b_j^k \\
&\geq \limsup_k \text{Per}_s(F_k, B_1) \\
&\geq \limsup_k \text{Per}_s(E_k, B_1) \\
&\geq \liminf_k \text{Per}_s(E_k, B_1) \\
&\geq \text{Per}_s(E, B_1)
\end{aligned}$$

par la semi-continuité inférieure de Per_s . Ainsi, E est un minimiseur et, en considérant les inégalités précédentes avec $F = E$, nous avons même prouvé que la limite ci-dessus existe et qu'elle vaut $\text{Per}_s(E, B_1)$. Comme Per_s est semi-continu inférieurement pour les ensembles, on obtient donc également $\text{Per}_s(E_k^{(j)}, B_1) \rightarrow \text{Per}_s(E^{(j)}, B_1)$.

Posons :

$$a_k^{(j)}(r) = \mathcal{H}^{n-1}((E^{(j)} \Delta E_k^{(j)}) \cap \partial B_r)$$

Alors, pour tout $r_0 > 2$:

$$\begin{aligned}
b_k^{(j)} &= \int_1^\infty \int_{(E^{(j)} \Delta E_k^{(j)}) \cap \partial B_r} \int_{B_1} \frac{dx dy dr}{|x-y|^{n+s}} \\
&\leq C(n, s) \int_1^{r_0} \int_{(E^{(j)} \Delta E_k^{(j)}) \cap \partial B_r} (r-1)^{-s} dy dr + C(n) \int_{B_1} \int_{r_0}^\infty \frac{r^{n-1}}{(r-1)^{s+n}} dr dx \\
&\leq C(n, s) \int_1^{r_0} a_k^{(j)}(r) (r-1)^{-s} dr + C(n, s) r_0^{-s}
\end{aligned}$$

Mais puisque $a_k^{(j)}(r) \leq C(n) r_0^{n-1}$ si $r \leq r_0$, on peut calculer :

$$\int_1^{r_0} a_k^{(j)}(r) (r-1)^{-s} dr \leq \int_1^{1+\varepsilon} C(n) r_0^{n-1} (r-1)^{-s} dr + \varepsilon^{-s} \int_{1+\varepsilon}^{r_0} a_k^{(j)}(r) dr$$

La deuxième intégrale converge vers 0 quand $k \rightarrow \infty$ par les hypothèses de convergence L_{loc}^1 sur $E_k^{(j)}$. La première intégrale est indépendante de k et, à r_0 fixé, converge vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Enfin, le dernier terme $C(n, s) r_0^{-s}$ converge vers 0 quand $r_0 \rightarrow \infty$, d'où :

$$\limsup b_k^{(j)} = 0$$

ce qui complète la démonstration. \square

Démonstration (du théorème 10)

Afin de démontrer ce théorème, il suffit de montrer qu'il existe une constante $c_0(n, s, m) > 0$ telle que, si $|E^{(i)} \cap B_1| < c_0$, alors $|E^{(i)} \cap B_{1/2}| = 0$.

Si $r \in (0, 1)$, posons :

$$A_r = E^{(j)} \cap B_r, \quad V_r = |A_r|, \quad a(r) = \mathcal{H}^{n-1}(E^{(j)} \cap \partial B_r)$$

Appliquons alors l'inégalité de Sobolev à $u = \chi_{A_r}$, pour $p = \frac{2n}{n-s}$:

$$\|u\|_{L^p} = V_r^{\frac{n-s}{n}} \leq CL(A_r, A_r^c) = C\|u\|_{H^{s/2}}$$

Mais E est minimal, donc :

$$\begin{aligned}
L(A_r, A_r^c) &= L(A_r, (E^{(j)})^c) + L(A_r, E^{(j)} \setminus A_r) \\
&= L(A_r, E^{(j)} \setminus A_r) + \sum_{i \neq j} L(A_r, E^{(i)}) \\
&\leq mL(A_r, E^{(j)} \setminus A_r) \leq mL(A_r, B_r^c)
\end{aligned}$$

Si $x \in A_r$, on a que :

$$\int_{B_r^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} \leq C \int_{r-|x|}^\infty \frac{1}{\rho^{n+s}} \rho^{n-1} d\rho \leq C(r-|x|)^{-s}$$

d'où :

$$L(A_r, B_r^c) \leq C \int_{A_r} (r - |x|)^{-s} dx \leq C \int_0^r a(\rho)(r - \rho)^{-s} d\rho$$

avec C dépendant uniquement de n, s . Ainsi :

$$V_r^{\frac{n-s}{n}} \leq C \int_0^r a(\rho)(r - \rho)^{-s} d\rho$$

avec C dépendant uniquement de n, s, m . On intègre cette inégalité entre 0 et t :

$$\begin{aligned} \int_0^t V_r^{\frac{n-s}{n}} dr &\leq C \int_0^t \int_0^r a(\rho)(r - \rho)^{-s} d\rho dr \\ &= C \int_0^t a(\rho) \int_\rho^t (r - \rho)^{-s} dr d\rho \\ &\leq C t^{1-s} \int_0^t a(\rho) d\rho \end{aligned}$$

Posons à présent :

$$t_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \quad v_k = V_{t_k}$$

de sorte que, par la croissance de V_r on ait :

$$2^{-(k+1)} v_{k+1}^{\frac{n-s}{n}} \leq \int_{t_{k+1}}^{t_k} V_r^{\frac{n-s}{n}} dr \leq C t_k^{1-s} v_k \leq C v_k$$

On reconnaît alors une itération de De Giorgi : si $v_1 = V_1$ est assez petit, $v_k \rightarrow 0$ et cela conclut. De plus, dans le procédé d'itération de De Giorgi, la limite sur v_1 peut être choisie indépendamment de la constante C , donc ne dépend que de n, s et ne peut converger vers 0 que lorsque $s \rightarrow 0$, pas $s \rightarrow 1$. \square

Démonstration (de la proposition 11)

La démonstration de la propriété analogue pour le cas usuel $m = 2$ dans [CRS09] découle de propriétés des extensions, indépendamment de toute notion de minimiseur, donc la démonstration reste exactement la même pour le cas m quelconque. \square

Démonstration

Quitte à effectuer une translation, $x = 0$. Il suffit de montrer $\frac{d}{dr} \phi_E(1) \geq 0$ pour un minimiseur dans B_R , $R > 1$. En effet, par invariance par homothétie, $\phi'_E(r) = \phi'_{rE}(1)$, et pour $r < R$, rE est un minimiseur dans $B_{R/r}$. L'idée de la preuve est de comparer E au cluster qui coïncide avec E hors de B_1 et correspond au cône engendré par $E \cap S^{n-1}$ dans B_1 .

Cependant :

$$\phi'_E(1) = \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 d\sigma - (n-s) \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz$$

Posons, pour $\varepsilon > 0$:

$$\bar{v}_\varepsilon^{(j)}(x, z) = \begin{cases} \tilde{u}^{(j)}((1 + \varepsilon)(x, z)) & \text{if } (1 + \varepsilon)|(x, z)| \leq 1 \\ \tilde{u}^{(j)}\left(\frac{(x, z)}{|(x, z)|}\right) & \text{if } \frac{1}{1 + \varepsilon} \leq |(x, z)| \leq 1 \\ \tilde{u}^{(j)}(x, z) & \text{else} \end{cases}$$

Les $\bar{v}_\varepsilon^{(j)}$ prennent comme valeur ± 1 sur \mathbb{R}^n , sont égaux aux $\tilde{u}^{(j)}$ sur un voisinage de ∂B_2^+ et leur somme est $2 - m$ sur \mathbb{R}^n . Ainsi, par minimalité de E :

$$\sum_{j=1}^m \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \bar{v}_\varepsilon^{(j)}|^2 dx dz \geq \sum_{i=j}^m \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz$$

Notons ∇_τ la composante tangentielle du gradient, ∇_ν sa composante radiale. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \bar{v}_\varepsilon^{(j)}|^2 dx dz &= \int_{B_1^+} (z/(1 + \varepsilon))^{1-s} |(1 + \varepsilon) \nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 \frac{dx dz}{(1 + \varepsilon)^{n+1}} \\ &\quad + \int_{B_1^+ \setminus B_{1/(1+\varepsilon)}^+} z^{1-s} \left| \frac{1}{|(x, z)|} \nabla_\tau \tilde{u}^{(j)} \right|^2 dx dz \\ &= (1 + \varepsilon)^{s-n} \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz \\ &\quad + \int_{B_1^+ \setminus B_{1/(1+\varepsilon)}^+} \frac{z^{1-s}}{|(x, z)|^2} |\nabla_\tau \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\sum_{j=1}^m (s - n) \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz + \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} |\nabla_\tau \tilde{u}^{(j)}|^2 d\sigma \geq 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} \phi'_E(1) &= \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 d\sigma - (n - s) \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} (|\nabla_\tau \tilde{u}^{(j)}|^2 + |\nabla_\nu \tilde{u}^{(j)}|^2) d\sigma + (s - n) \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz \\ &\geq \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} |\nabla_\nu \tilde{u}^{(j)}|^2 d\sigma \geq 0 \end{aligned}$$

Et ϕ_E est croissante.

Si ϕ_E est constante, les calculs ci-dessus impliquent que $|\nabla_\nu \tilde{u}^{(j)}| = 0$ dans B_R^+ pour tout j , donc que $\tilde{u}^{(j)}$ est homogène de degré 0 dans B_R^+ .

Réciproquement, si chaque $\tilde{u}^{(j)}$ est homogène de degré 0 :

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 d\sigma - (n-s) \int_{B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 dx dz \\
&= \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 d\sigma - (n-s) \int_0^1 \int_{\partial B_1^+} (rz)^{1-s} \frac{1}{r^2} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 r^n d\sigma dr \\
&= \int_{\partial B_1^+} z^{1-s} |\nabla \tilde{u}^{(j)}|^2 d\sigma \left(1 - (n-s) \int_0^1 r^{n-s-1} dr \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et ϕ_E est constante. \square

Démonstration (du théorème 13)

L'existence d'une sous-suite convergente est obtenu par compacité, de la même façon que pour l'existence de minimiseurs. Il a été prouvé dans [CRS09] que les fonctions ϕ convergeaient (pour les minimiseurs) et la démonstration s'étend immédiatement au cas des clusters, de sorte que la fonction ϕ d'une telle limite est nécessairement conique (théorème 12). Ce cône, enfin, est minimal par la stabilité des minimiseurs (théorème 9). \square

Démonstration (du théorème 14)

La démonstration de [CRS09] s'adapte également immédiatement (le sens direct s'obtient en considérant qu'un compétiteur dans \mathbb{R}^{n+1} est moins bon que E dans chacun des plans $\mathbb{R}^n \times \{z\}$, $z \in \mathbb{R}$; le sens indirect s'obtient par la construction d'un compétiteur dans \mathbb{R}^{n+1} à partir d'un compétiteur F dans \mathbb{R}^n , en raccordant $F \times [-a, a]$ à $E \times [-a-1, a+1]^c$ par une opération de coût fini et en laissant $a \rightarrow \infty$.) \square

Annexe B : Preuve du lemme 32

La preuve de ce lemme n'est pas particulièrement instructive et consiste principalement en des calculs.

La symétrie $h(2\pi - \theta) = h(\theta)$ est évident à partir des symétries de \cos et g .

Les valeurs remarquables sont obtenues aisément à partir de calculs simples, nous ne traitons explicitement que $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \left(\left(r \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + \frac{r^2}{2} \right)^{-1-s/2} dr \\
&= 2^{-1/2} \int_0^\infty \left(\left(r - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right)^{-1-s/2} dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> 2^{-1/2} \int_0^\infty \left(r^2 + \frac{1}{2}\right)^{-1-s/2} dr \\
&= 2^{s/2} \int_0^\infty (r^2 + 1)^{-1-s/2} dr \\
&> \int_0^\infty (r^2 + 1)^{-3/2} dr \\
&= \left[\frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} \right]_0^\infty \\
&= 1 \\
&> \frac{1}{1+s}
\end{aligned}$$

Afin de simplifier les calculs, nous allons utiliser le changement de variable $X = \cos \theta$. En effet, h ne dépend que de $\cos \theta$ et pas de θ .

Posons :

$$\begin{aligned}
b(X, \alpha) &= \int_0^\infty (r^2 - 2rX + 1)^{-\alpha/2} dr \\
H(X) &= Xb(X, 2+s)
\end{aligned}$$

Ainsi : $h(\theta) = H(\cos \theta)$.

Montrons d'abord un résultat sur b : nous écrirons $b'(X, \alpha) = \frac{\partial}{\partial X} b(X, \alpha)$.

$$b'(X, \alpha) = 1 + \alpha X b(X, \alpha + 2) = \int_0^\infty (r^2 - 2rX + 1)^{-(\alpha+2)/2} \alpha r dr$$

En effet, on calcule :

$$\begin{aligned}
b'(X, \alpha) &= \int_0^\infty (r^2 - 2rX + 1)^{-\alpha/2-1} \alpha r dr \\
&= \int_0^\infty (r^2 - 2rX + 1)^{-\alpha/2-1} \frac{\alpha}{2} (2r - 2X) dr \\
&\quad + X\alpha \int_0^\infty (r^2 - 2rX + 1)^{-(\alpha+2)/2} dr \\
&= 1 + \alpha X b(X, \alpha + 2)
\end{aligned}$$

Ceci permet de calculer efficacement les deux premières dérivées de H :

$$\begin{aligned}
H'(X) &= b(X, 2+s) + Xb'(X, 2+s) \\
&= b(X, 2+s) + X + (2+s)X^2 b(X, 4+s) \\
H''(X) &= 2b'(X, 2+s) + Xb''(X, 2+s) \\
&= 2 + 3(2+s)Xb(X, 4+s) + (2+s)(4+s)X^3 b(X, 6+s)
\end{aligned}$$

Montrons d'abord que H est croissante sur $[-1, 1]$, de sorte que $h = H \circ \cos$ est décroissant sur $(0, \pi]$. En effet, en regardant H' , nous pouvons traiter l'expression comme s'il s'agissait d'un polynôme d'ordre 2 (en X) afin de déterminer s'il s'annule :

$$\Delta = 1 - 4(2+s)b(X, 4+s)b(X, 2+s)$$

Si $X \in [-1, 1)$ est tel que $\Delta < 0$, alors $H'(X) > 0$.

Mais nous connaissons une borne inférieure simple sur b :

$$b(X, \alpha) \geq b(-1, \alpha) = \int_0^\infty (r^2 + 2r + 1)^{-\alpha/2} dr = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Ainsi :

$$\Delta \leq 1 - \frac{4(2+s)}{(3+s)(1+s)} = \frac{3+4s+s^2-8-4s}{(3+s)(1+s)} = \frac{-5+s^2}{(3+s)(1+s)} < 0$$

Donc la monotonicit e stricte est acquise.

Montrons   present que h est strictement convexe.

$$h''(\theta) = H''(\cos \theta) \sin^2 \theta - \cos \theta H'(\cos \theta)$$

En utilisant   nouveau le changement de variable $X = \cos \theta$, il nous faut montrer :

$$H''(X)(1 - X^2) - XH'(X) > 0$$

pour tout $X \in [-1, 1)$.

Consid rions d'abord $X \in [-1, 0]$. Pour cela, nous calculons :

$$\begin{aligned} & H''(X)(1 - X^2) - XH'(X) \\ &= X(1 - X^2)b''(X, 2+s) + 2(1 - X^2)b'(X, 2+s) \\ &\quad - X^2b'(X, 2+s) - Xb(X, 2+s) \\ &= \int_0^\infty (r^2 - 2rX + 1)^{-3-s/2} (X(1 - X^2)r^2(2+s)(4+s) \\ &\quad + (2 - 3X^2)r(2+s)(r^2 - 2rX + 1) - X(r^2 - 2rX + 1)^2) dr \end{aligned}$$

Étudions seulement le terme entre parenthèses. Comme $X \leq 0$ et $r > 0$:

$$\begin{aligned} & X(1 - X^2)r^2(2+s)(4+s) + (2 - 3X^2)r(2+s)(r^2 - 2rX + 1) - X(r^2 - 2rX + 1)^2 \\ &= (2+s)(4+s)r^2X - (2+s)(4+s)r^2X^3 + 2(r^2+1)r(2+s) - 4r^2(2+s)X \\ &\quad - 3(2+s)rX^2(r^2+1) + 6r^2(2+s)X^3 - X(r^2+1)^2 - 4r^2X^3 + 4rX^2(r^2+1) \\ &= 2(r^2+1)r(2+s) + X((2+s)(4+s)r^2 - 4(2+s)r^2 - (r^2+1)^2) \\ &\quad + X^2(-3(2+s)r(r^2+1) + 4r(r^2+1)) + X^3(6r^2(2+s) - (2+s)(4+s)r^2 - 4r^2) \\ &= 2(2+s)r(r^2+1) - X((r^2+1)^2 - (2+s)sr^2) - X^2(r^2+1)r(2+3s) - X^3r^2s^2 \\ &= (r^2+1)(2(2+s)r - X^2r(2+3s)) - X(r^2+1)^2 + Xsr^2(2+s - X^2s) \\ &\geq (r^2+1)r(2-s) - X(r^2+1)^2 + 3Xr^2 \\ &> (r^2+1)r - X(r^4 - r^2 + 1) > 0 \end{aligned}$$

ce qui conclut ce cas.

Étudions   present le cas $X \in [0, 1)$. La stratégie précédente ne peut fonctionner, car le terme d'ordre le plus haut en r est $-Xr^4$ ci-dessus.

Étudions d'abord la fonction b et cherchons à séparer autant que possible X de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
b(X, \alpha) &= \int_0^\infty (r^2 - 2rX + 1)^{-\alpha/2} dr \\
&= \int_0^\infty ((r - X)^2 + (1 - X^2))^{-\alpha/2} dr \\
&= (1 - X^2)^{-\alpha/2} \int_{-X}^\infty \left(\frac{r^2}{1 - X^2} + 1\right)^{-\alpha/2} dr \\
&= (1 - X^2)^{(1-\alpha)/2} \int_{-X/\sqrt{1-X^2}}^\infty (r^2 + 1)^{-\alpha/2} dr
\end{aligned}$$

Cela indique le comportement de b pour $X \sim 1$. À présent, comparons :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (r^2 + 1)^{-\alpha/2} dr - \int_0^\infty (r^2 + 1)^{-\alpha/2-1} dr \\
&= \int_0^\infty (r^2 + 1)^{-\alpha/2-1} r^2 dr \\
&= \left[-(r^2 + 1)^{-\alpha/2} \frac{1}{\alpha} r\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} (r^2 + 1)^{-\alpha/2} dr \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty (r^2 + 1)^{-\alpha/2} dr
\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^\infty (r^2 + 1)^{-(\alpha+2)/2} dr = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_0^\infty (r^2 + 1)^{-\alpha/2} dr$$

Le même calcul avec ∞ remplacé par $\frac{X}{\sqrt{1-X^2}}$ donne :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{X/\sqrt{1-X^2}} (r^2 + 1)^{-(\alpha+2)/2} dr \\
&= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_0^{X/\sqrt{1-X^2}} (r^2 + 1)^{-\alpha/2} dr + \frac{1}{\alpha} \frac{X}{\sqrt{1-X^2}} \left(\frac{X^2}{1-X^2} + 1\right)^{-\alpha/2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_0^{X/\sqrt{1-X^2}} (r^2 + 1)^{-\alpha/2} dr + \frac{1}{\alpha} X(1-X^2)^{(\alpha-1)/2}
\end{aligned}$$

Posons $c_s = \int_0^\infty (1+r^2)^{-1-s/2} dr$ et $c_{s,X} = \int_0^{X/\sqrt{1-X^2}} (1+r^2)^{-1-s/2} dr < c_s$.

$$\begin{aligned}
&H''(X)(1-X^2) - XH'(X) \\
&= (1-X^2)(2+3(2+s)Xb(X, 4+s) + (2+s)(4+s)X^3b(X, 6+s)) \\
&\quad - X(b(X, 2+s) + X + (2+s)X^2b(X, 4+s))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - X^2) \left(2 + 3(2 + s)X(1 - X^2)^{-(3+s)/2} \left(\frac{1+s}{2+s}(c_s + c_{s,X}) + \frac{1}{2+s}X(1 - X^2)^{(1+s)/2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (2 + s)(4 + s)X^3(1 - X^2)^{-(5+s)/2} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{1+s}{2+s} \frac{3+s}{4+s}(c_s + c_{s,X}) + \frac{3+s}{4+s} \frac{1}{2+s}X(1 - X^2)^{(1+s)/2} + \frac{1}{4+s}X(1 - X^2)^{(3+s)/2} \right) \right) \\
&- X \left((1 - X^2)^{-(1+s)/2}(c_s + c_{s,X}) + X \right. \\
&\quad \left. + (2 + s)X^2(1 - X^2)^{-(3+s)/2} \left(\frac{1+s}{2+s}(c_s + c_{s,X}) + \frac{1}{2+s}X(1 - X^2)^{(1+s)/2} \right) \right) \\
&= (1 - X^2)^{-(3+s)/2} (X^3(1 + s)(3 + s)(c_s + c_{s,X}) - X^3(1 + s)(c_s + c_{s,X})) \\
&\quad + (1 - X^2)^{-1} ((3 + s)X^4 - X^4) \\
&\quad + (1 - X^2)^{-(1+s)/2} (3X(1 + s)(c_s + c_{s,X}) - X(c_s + c_{s,X})) \\
&\quad + 2(1 - X^2) + 3X^2 + (2 + s)X^4 - X^2 \\
&= (c_s + c_{s,X}) \left((1 - X^2)^{-(3+s)/2} X^3(1 + s)(2 + s) + (1 - X^2)^{-(1+s)/2} X(2 + 3s) \right) \\
&\quad + (1 - X^2)^{-1} (2 + s)X^4 + 2 + (2 + s)X^4 > 0
\end{aligned}$$

Cela montre que h est effectivement strictement convexe.