

# Rapport de Stage

Cédric Baudet, encadré par Andrea Marchese

mars–juillet 2021

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte du stage . . . . .	1
1.2	Travail pendant le stage . . . . .	2
1.2.1	Le cours de théorie géométrique de la mesure . . . . .	2
1.2.2	Discussions avec Andrea Marchese . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Contenu mathématique</b>	<b>5</b>
2.1	Les mesures de Hausdorff . . . . .	5
2.2	Les ensembles rectifiables . . . . .	7
2.3	La courbe de Von Koch . . . . .	8
2.4	Projections de mesures purement non rectifiables . . . . .	11
2.5	Mesures purement non rectifiables et projections non linéaires . . . . .	15
2.6	La conjecture de Furstenberg . . . . .	17
2.7	Bibliographie . . . . .	19

## 1 Introduction

### 1.1 Contexte du stage

Mon stage s’est déroulé du 1<sup>er</sup> mars au 2 juillet 2021 et a duré 4 mois. Je souhaitais d’une part faire un stage en analyse, car c’est l’orientation que j’avais choisie pour mon M2, et d’autre part le faire en Italie. L’Italie car c’est un pays dont j’apprécie la culture, notamment le patrimoine que j’avais découvert lors d’un voyage à Rome à l’été de 2019, la langue que j’ai étudiée au lycée (en troisième langue, après l’anglais et l’espagnol) et que je préfère aux autres langues étrangères que j’ai apprises, et la cuisine. J’en ai parlé à mon tuteur à l’ENS, Laurent Moonens, et il m’a proposé une liste de noms d’analystes italiens. J’ai regardé sur internet quels étaient les thèmes de leurs recherches et les travaux d’Andrea Marchese m’ont intéressé. Je l’ai contacté et il a accepté de m’accueillir en stage.

Le stage s’est déroulé à Trente, ville de cent mille habitants du nord de l’Italie, dans une vallée à basse altitude des Alpes italiennes. Le département de mathématiques de l’Université de Trente était situé en dehors du centre ville dans un village de l’agglomération nommé Povo ; mais j’y ai passé peu de temps à cause du télétravail. Dans les deux à trois premiers mois du stage, les restrictions sanitaires ne me permettaient pas d’entrer dans les locaux de l’université, car j’étais un étudiant venant de l’extérieur. J’utilisais Zoom pour suivre les cours que j’avais pris et pour discuter avec Andrea et je passais donc la majorité de mon temps dans mon logement. C’a limité les possibilités de rencontrer d’autres étudiants, ce qui est dommage. D’ailleurs, cinq jours après mon arrivée, la résidence universitaire où j’étais a été mise en isolement pendant dix jours à

cause de quelques cas de covid détectés, avec interdiction de sortir de sa chambre et livraison de repas midi et soir. Mais pendant le dernier mois du stage, j'ai pu me rendre régulièrement au département de maths pour discuter avec Andrea dans son bureau et déjeuner avec lui ; environ une fois par semaine.

Quant à la langue, malgré des révisions dans le mois qui a précédé mon arrivée en Italie, je n'avais pas pratiqué l'italien depuis le bac, il y a 3 ans et demi. Donc j'ai pris un cours de langue italienne à l'université. Cependant j'ai en pratique plus parlé anglais car je discutais en anglais avec Andrea et les autres étudiants parlaient spontanément en anglais aux étrangers. Il y avait aussi un certain nombre d'étudiants étrangers ; j'étais étonné de leur nombre pour une agglomération secondaire comme Trente.

Finalement, j'ai profité du chemin du retour en France pour faire du tourisme : 10 jours à Venise, Florence, Milan et Bergame. C'était très agréable. À Venise notamment, j'ai profité de la ville sans les foules de touristes, dans un calme reposant.

Je remercie chaleureusement Andrea de m'avoir accueilli. Il a été très gentil et présent pour échanger régulièrement ensemble. Je remercie aussi l'Université de Trente qui m'a notamment donné accès à un logement.

## 1.2 Travail pendant le stage

Le thème initial du stage, tel qu'indiqué sur la convention de stage, était « théorie géométrique de la mesure et transport optimal », les deux sujets de travail actuels d'Andrea. Cependant le stage s'est finalement concentré sur la théorie géométrique de la mesure. En effet, j'ai suivi le cours de théorie géométrique de la mesure qu'Andrea donnait à l'université de Trente et ensuite nos discussions entre stagiaire et encadrant ont tourné autour des notions vues dans ce cours.

### 1.2.1 Le cours de théorie géométrique de la mesure

Après des rappels et compléments de théorie de la mesure, la première notion nouvelle de ce cours a été les mesures de Hausdorff et la dimension de Hausdorff. La mesure de Hausdorff de dimension  $d$  est la mesure naturelle pour mesurer des objets "de dimension  $d$ " (au sens intuitif de la dimension pour l'instant).  $\mathcal{H}^1$  coïncide avec la longueur,  $\mathcal{H}^2$  avec l'aire,  $\mathcal{H}^3$  avec le volume, etc. J'en avais déjà entendu parler à propos des fractales, mais mes connaissances ne dépassaient pas le domaine de la vulgarisation donc j'étais très content d'apprendre ce qu'est vraiment cette notion. Cet outil a été réutilisé à de nombreuses reprises dans le stage. C'est bien naturel : la dimension étant une notion du domaine de la géométrie, la théorie géométrique de la mesure s'intéresse aux mesures sensibles à la dimension.

Nous avons vu en passant une application de ces mesures de Hausdorff aux fractales avec le théorème de Hutchinson qui affirme que, pour toute propriété d'autosimilarité (du type : être l'union de ses propres images par différentes fonctions de similitude de  $\mathbb{R}^n$  contractantes), il existe une unique fractale compacte qui présente cette autosimilarité et un petit calcul donne sa dimension  $d$  (si les  $\lambda_i$  sont les rapports des similitudes qui décrivent l'autosimilarité, alors  $d$  est l'unique solution de  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^d = 1$ ).

Ensuite, le cours a présenté la notion de densité :

- densité d'une mesure  $\mu$  par rapport à une autre  $\nu$ , définie comme  $x \mapsto \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\nu(B(x,r))}$  et qui coïncide en fait avec la dérivée de Radon-Nikodym,

- densité d'un ensemble  $E$  selon une mesure  $\mu$ , définie comme  $x \mapsto \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))}$ , et qui vaut  $\mathbf{1}_E(x)$  p.p.,
- et  $d$ -densité d'une mesure ou d'un ensemble qui est une notion de densité  $d$ -dimensionnelle définie grâce à la mesure de Hausdorff.

De plus, nous avons vu les théorèmes de recouvrement de Vitali et Besicovitch qui ont servi à démontrer certaines propriétés des mesures de Hausdorff, des densités et d'autres théorèmes de la théorie géométrique de la mesure. Étant donnée une mesure de Radon  $\mu$  fixée sur un espace métrique (vérifiant quelques hypothèses), ces quatre théorèmes permettent d'extraire d'un recouvrement d'une partie par des boules fermées un certain sous-recouvrement. Suivant les versions, ce sous-recouvrement peut être composé de boules disjointes mais pas exact (recouvrement à un  $\mu$ -négligeable près). Et on doit supposer à chaque fois que le recouvrement initial est assez fin, i.e. qu'il possède partout des boules arbitrairement petites.

Ensuite, le cours est passé à l'un des objets d'étude principaux de la théorie géométrique de la mesure : les ensembles rectifiables, et leurs cousins maléfiques les ensembles purement non rectifiables. Les ensembles rectifiables sont grosso modo les images de fonctions lipschitziennes et leurs unions dénombrables. Ils partagent la majorité des propriétés des courbes  $\mathcal{C}^1$  en théorie de la mesure. Au contraire, les ensembles purement non rectifiables peuvent être particulièrement dispersés (des sortes de nuages de points qui ne sont pas regroupés le long de courbes) ou très irréguliers (comme le floncon de Von Koch qui a de très nombreux virages). Pour l'occasion, nous avons vu certaines propriétés des fonctions lipschitziennes : extension d'une fonction lipschitzienne définie sur une partie, dérivabilité p.p., approximation par une fonction  $\mathcal{C}^1$  et formules de l'aire et de la co-aire. Et nous avons montré en cours plusieurs propriétés des ensembles rectifiables énonçant, qu'en un certain sens faible, ils ont un plan tangent p.p.. Nous avons aussi vu sans démonstrations plusieurs théorèmes du même ordre (le théorème de rectifiabilité de Marstrand-Mattila, le théorème de Prein et le théorème de projection de Besicovitch-Federer).

Enfin, nous avons vu les courants. Les courants de dimension  $k$  sur  $\mathbb{R}^n$  sont les formes linéaires sur l'espace des  $k$ -formes différentielles à support compact de  $\mathbb{R}^n$ . Les distributions en sont un cas particulier pour  $k = 0$ . Les courants contiennent des représentants des ensembles rectifiables de  $\mathbb{R}^n$  : à tout ensemble  $k$ -rectifiable  $E \subset \mathbb{R}^n$ , on associe les  $k$ -courants de la forme

$$T : \omega \mapsto \int_E \langle \omega(x), \tau(x) \rangle \theta(x) d\mathcal{H}^k(x)$$

où

- $\tau : E \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  donne p.p. un  $k$ -vecteur unitaire dans la direction du plan tangent à  $E$
- et  $\theta \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{H}^k \llcorner E)$  <sup>note 1</sup> est une « multiplicité » (le plus simple étant de prendre  $\theta(x) \in \{-1, 1\}$ ).

Ces courants sont appelés « rectifiables ». Par exemple, on peut représenter une sous-variété orientée  $N \subset \mathbb{R}^n$  par  $T : \omega \mapsto \int_N \omega$ , qui est un cas particulier de la formule précédente. De plus, on définit le « bord » d'un  $k$ -courant  $T$  comme le  $(k-1)$ -courant

$$\partial T : \omega \mapsto \langle T, d\omega \rangle$$

de manière à coïncider avec la notion usuelle de bord lorsque  $T$  représente une sous-variété orientée (grâce à la formule de Stokes).

---

note 1. Le symbole  $\llcorner$  désigne la restriction d'une mesure à une partie :  $(\mu \llcorner E) : A \mapsto \mu(A \cap E)$ .

Les courants m'avaient beaucoup attiré quand j'avais regardé ce que faisais Andrea, en cherchant mon stage, et c'est une des raisons pour lesquelles je lui avait envoyé une candidature. En effet, j'avais adoré étudier les distributions dans le cours d'analyse fonctionnelle de l'ENS : le point de vue dual, leur grande généralité et les questions de topologie qui y interviennent.

Nous avons vu deux sortes de norme (éventuellement infinie) sur les courants : la norme de masse et la norme bémol <sup>note 2</sup> qui mesure la proximité géographique de deux courants. Et en plus des courants rectifiables, nous avons aussi vu les courants normaux (qui sont de masse finie ainsi que leur bord) et courants intégraux (qui sont rectifiables ainsi que leur bord). Et surtout nous avons vu des théorèmes de compacité sur les courants généraux, normaux ou intégraux qui permettent de répondre au problème de minimisation de Plateau : étant donnée un bord, existe-il une surface minimale qui a ce bord ? Les courants permettent d'y répondre par l'affirmative de manière abstraite, et certains champs d'étude s'intéressent ensuite à la régularité des solutions trouvées (nous n'avons pas abordé cette question).

Voilà ce qu'il en est pour le cours de théorie géométrique de la mesure, qui m'a donné les outils de cette théorie dont j'avais besoin. J'ai aussi suivi un cours de calculs et un cours d'analyse géométrique qu'Andrea m'a conseillé, comme des cours d'analyse assez importants.

### 1.2.2 Discussions avec Andrea Marchese

Parallèlement, Andrea et moi avons des discussions mathématiques sur la théorie géométrique de la mesure. Pour commencer léger, il m'a proposé de calculer la dimension et la mesure de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor. Ça a été notre première discussion. Puis il m'a proposé de lire une partie de *The Geometry of Fractal Sets* de Kenneth J. Falconer (les trois premiers chapitres). C'était un bon approfondissement sur les ensembles rectifiables. Il donnait notamment une caractérisation des ensembles 1-rectifiables parmi les ensembles de mesure  $\mathcal{H}^1$  finie, et de même pour les purement non 1-rectifiables. Et nous avons discuté des exercices donnés dans le livre.

Puis, ayant émis le souhait de travailler sur les courants, Andrea m'a proposé de lire le début de *Geometric Measure Theory : A Beginner's Guide* de Frank Morgan. L'une des preuves de ce livre m'a fait douter car elle contenait un passage expéditif. J'en ai parlé à Andrea et il s'est avéré que la preuve était fautive ; nous avons trouvé ensemble un contre-exemple.

Ces lectures m'ont fait me poser certaines questions et nos discussions ont basculé vers ça. J'ai d'abord cherché un exemple de courant rectifiable à multiplicité entière dont le bord n'est pas rectifiable. J'ai cherché du côté du flocon de Von Koch. Andrea avait dit en cours que son bord topologique n'était pas rectifiable sans le prouver. J'ai donc cherché à le démontrer. En réalité, il n'est pas évident de faire le lien entre la non rectifiabilité du bord topologique du flocon et la non rectifiabilité du bord du courant qui représente le flocon, mais passons. Je n'ai pas réussi seul à montrer ce que je voulais, mais j'ai fini par y arriver avec une indication d'Andrea (plus de détails dans la partie suivante). En fait, comme il me l'a fait remarqué, le courant associé à un Cantor gras est aussi un exemple de courant rectifiable entier de bord non rectifiable et bien plus simple (j'avais pensé à regarder cet exemple, mais bizarrement je ne m'étais pas rendu compte qu'il fonctionnait). Puis, Andrea m'a proposé de démontrer que la projection sur une droite de la mesure naturelle de la courbe de Von Koch est singulière ; et de même avec le carré de Cantor (détaillés dans la suite du rapport).

Ensuite, j'ai voulu revoir la définition d'un produit de courants donnée en cours. Le produit du

---

note 2. « flat norm » en anglais.

$k$ -courant  $T$  sur  $\mathbb{R}^n$  par le  $\ell$ -courant  $S$  sur  $\mathbb{R}^m$  était défini comme le  $(k + \ell)$ -courant  $T \times S$  sur  $\mathbb{R}^{n+m}$  tel que :  $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \forall 1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq m, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ ,

$$\langle T \times S, (\varphi \otimes \psi) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_\ell} \rangle = \langle T, \varphi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \rangle \langle S, \psi dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_\ell} \rangle$$

où  $\varphi \otimes \psi : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ . La question est de savoir si ainsi  $T \times S$  est défini de façon unique (ça n'était pas traité dans le cours).  $E := \text{Vect}\{(\varphi \otimes \psi) \wedge_p dx_{i_p} \wedge \wedge_q dy_{j_q} \mid \varphi, \psi, (i_p), (j_q)\}$  est bien dense dans l'espace des  $(k + \ell)$ -formes différentielles à support compact de  $\mathbb{R}^{n+m}$ , cependant il paraît difficile de montrer  $T \times S$  est déjà continu sur  $E$  (de manière à le prolonger ensuite par continuité). Ni Andrea ni moi n'avons vu comment le faire. Alors j'ai cherché une autre façon de définir  $T \times S$  et une approche de type Fubini a fonctionné : pour toute  $(k + \ell)$ -forme différentielle  $\omega$ , on pose

$$\langle T \times S, \omega \rangle = \langle T, x \mapsto \langle S, y \mapsto \omega(x, y) \rangle \rangle.$$

Il faut juste vérifier que  $x \mapsto \langle S, y \mapsto \omega(x, y) \rangle$  est une  $k$ -forme différentielle à support compact. Et ça coïncide bien avec la tentative de définition précédente.

Par la suite, Andrea a proposé de réfléchir à un problème ouvert. C'était une question qu'il s'était posée pendant sa thèse mais qu'il n'avait pas creusée. Le but est de montrer que, pour toute mesure de Radon  $\mu$  supportée par un ensemble purement non 1-rectifiable, il existe une sorte de projection non linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (à définir rigoureusement) telle que  $f_{\#}\mu$  est singulière. Il pensait pouvoir y arriver en utilisant un théorème de sa thèse qui permet de recouvrir un ensemble purement non 1-rectifiable par des bandes très fines. J'ai mis un peu de temps à comprendre le but exact d'Andrea car il en parlait un peu comme d'une idée vague au début. J'y ai réfléchi, mais mes tentatives n'ont malheureusement rien donné. Et comme on approchait de la fin du stage, je n'ai pas pu chercher plus loin.

Finalement, Andrea m'a présenté pour la culture différentes conjectures ouvertes en théorie géométrique de la mesure : la conjecture de Falconer, la conjecture de Kakeya et la conjecture de Furstenberg. Il m'a partagé une idée d'angle d'attaque pour la conjecture de Furstenberg, et on y a réfléchi et on a montré un résultat intermédiaire (mais encore très loin de prouver la conjecture).

Dans la suite de ce compte-rendu, je présenterai le contenu mathématique de ce que j'ai fait avec Andrea Marchese. Je donnerai certains éléments vus en cours de théorie géométrique de la mesure nécessaires à la compréhension (les définitions notamment), mais sans rentrer dans les détails du cours, pour se concentrer sur mon travail de stagiaire.

## 2 Contenu mathématique

### 2.1 Les mesures de Hausdorff

Durant ce stage, les mesures de Hausdorff était la principale source d'exemples, en plus d'un objet d'étude en soi.

**Définition 1 : mesures de Hausdorff**

Soient  $X$  un espace métrique et  $d \in \mathbb{R}_+^*$ . Notons  $c_d = 2^{-d}\omega_d$ , où  $\omega_d := \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$  coïncide le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^d$  lorsque  $d$  est entier.

On pose pour tous  $E \subset X$  et  $\delta > 0$ ,

$$\mathcal{H}_\delta^d(E) = \inf \left\{ c_d \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(E_i)^d \mid E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \subset X \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\}$$

$$\text{et } \mathcal{H}^d(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^d(E).$$

Pour  $d = 0$ , on définit de même  $\mathcal{H}_\delta^0$  et  $\mathcal{H}^0$  en remplaçant  $\text{diam}(E_i)^d$  par  $\mathbf{1}_{E_i \neq \emptyset}$  dans la somme. Alors  $\mathcal{H}^d$  est une mesure extérieure sur  $(X, \mathcal{P}(X))$  appelée « mesure de Hausdorff de dimension  $d$  ».

**Remarques :**

1. Les boréliens sont mesurables pour les mesures de Hausdorff.
2. La constante  $c_d$  permet que, sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{H}^d$  coïncide avec la mesure de Lebesgue.

**Définition 2 : dimension de Hausdorff**

Soient  $X$  un espace métrique et  $E \subset X$ . Il existe un unique  $d \in \mathbb{R}_+$  tel que :  $\forall d' \in \mathbb{R}_+$ ,

$$- \forall d' < d \Rightarrow \mathcal{H}^{d'}(E) = +\infty$$

$$- \forall d' > d \Rightarrow \mathcal{H}^{d'}(E) = 0.$$

Ce réel est appelé « dimension de Hausdorff de  $E$  » et est noté  $\dim_{\mathcal{H}} E$ .

**Exemples :**

1. Pour les surfaces  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$ , la dimension de Hausdorff coïncide avec la dimension usuelle. Et leur mesure de Hausdorff pour cette dimension est égale à leur aire ou volume.
2. La dimension de Hausdorff peut être non entière. C'est le cas de l'ensemble de Cantor qui est de dimension  $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ .

Nous aurons besoin dans la suite de la notion de  $d$ -densité, que voici.

**Définition 3 :  $d$ -densité**

Soient  $X$  un espace métrique séparable localement compact,  $E \subset X$ ,  $d \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in X$ . Lorsque  $\frac{\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r))}{\omega_d r^d}$  possède une limite quand  $r \rightarrow 0$ , on pose

$$D_d(E, x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r))}{\omega_d r^d}$$

et on l'appelle «  $d$ -densité de  $E$  en  $x$  ».

## 2.2 Les ensembles rectifiables

C'est la principale notion que j'ai étudiée durant ce stage. Les ensembles  $k$ -rectifiables sont une généralisation des surfaces de dimension  $k$  qui conserve les propriétés de ces surfaces en théorie de la mesure. Leur « contraire » sont les ensembles purement non rectifiables, qui sont particulièrement irréguliers.

### Définition 4 : ensemble rectifiable

Soient  $X$  un espace métrique,  $E \subset X$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

1.  $E$  est dit «  $k$ -rectifiable » s'il existe des boréliens  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $X$  tels que :

$$— E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$$

$$— \mathcal{H}^k(E_0) = 0$$

- pour tout  $i \geq 1$ , il existe un borélien  $F \subset \mathbb{R}^k$  et une application lipschitzienne  $f : F \rightarrow X$  telle que  $E_i = f(F)$ .

2. De plus,  $E$  est dit « purement non  $k$ -rectifiable » si, pour tout borélien  $F \subset \mathbb{R}^k$  et toute application lipschitzienne  $f : F \rightarrow X$ ,  $\mathcal{H}^k(E \cap f(F)) = 0$ .

### Exemples :

1. Toute courbe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  est  $k$ -rectifiable pour  $k$  la dimension de la courbe.
2. Un produit de deux sous-ensembles Lebesgue-négligeables de  $\mathbb{R}$  est purement non 1-rectifiable. Par exemple, le carré de Cantor.

### Remarques :

1. Tout sous-ensemble d'un ensemble  $k$ -rectifiable est  $k$ -rectifiable. Et toute union dénombrable d'ensembles  $k$ -rectifiables est  $k$ -rectifiable. Les mêmes assertions sont vraies pour les ensembles purement non  $k$ -rectifiables.
2. Tout ensemble  $E$  (dans un espace métrique) de mesure  $\mathcal{H}^k$  finie peut être partitionné en un ensemble  $k$ -rectifiable ainsi qu'un ensemble purement non  $k$ -rectifiable, et ce de manière unique (à des sous-ensembles  $\mathcal{H}^k$ -négligeables près).

### Proposition 5 :

Un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est purement non  $k$ -rectifiable si et seulement si, pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\mathcal{H}^k(E \cap f(F)) = 0$ .

Preuve : Cela découle des deux faits suivants :

1. Toute fonction lipschitzienne d'une partie d'un espace métrique vers  $\mathbb{R}$  peut être prolongée à l'espace métrique entier de façon lipschitzienne.
2. Et d'après un théorème de Lusin, toute fonction lipschitzienne  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  coïncide avec une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur un ensemble de complémentaire de mesure de Lebesgue arbitrairement petite. □

Et j'ai vu dans le livre de Falconer la propriété suivante.

**Proposition 6 :**

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $k$ -rectifiable tel que  $\mathcal{H}^k(E) < \infty$ . Alors, pour  $\mathcal{H}^k$ -presque tout  $x \in E$ ,  $E$  possède une  $d$ -densité en  $x$  qui vaut  $D_k(E, x) = 1$ .

### 2.3 La courbe de Von Koch

**Définition 7 : la courbe de Von Koch**

Soit  $V_1$  la courbe de  $\mathbb{R}^2$  affine par morceaux reliant les points  $(-1, 0)$ ,  $(-\frac{1}{3}, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $(\frac{1}{3}, 0)$  et  $(1, 0)$ . On définit par récurrence la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  de sorte que, pour passer de  $V_n$  à  $V_{n+1}$ , on remplace chaque segment de  $V_n$  par une copie de  $V_1$  orientée vers la composante connexe haute de  $([-1, 1] \times \mathbb{R}) \setminus V_n$ .

La courbe de Von Koch est alors la limite au sens de la métrique de Hausdorff de la suite  $(V_n)$ . Nous la noterons  $V$ .

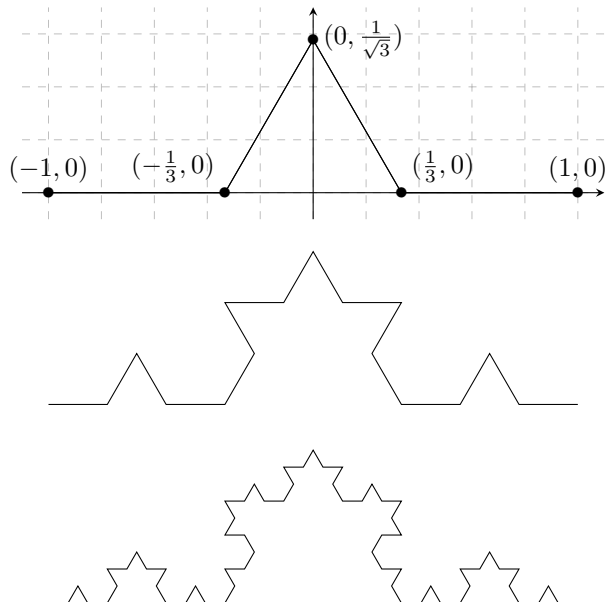


FIGURE 1 – Étapes  $V_1, V_2$  et  $V_3$  de la construction de la courbe de Von Koch

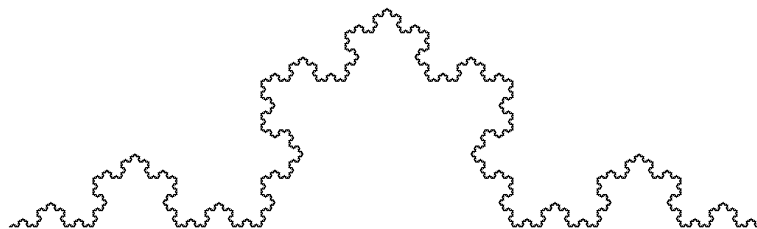


FIGURE 2 – La courbe de Von Koch, notée  $V$

**Théorème 8 :**

La courbe de Von Koch est purement non 1-rectifiable.

J'ai cherché par moi-même à démontrer ce fait énoncé sans preuve en cours de théorie géométrique de la mesure, car je cherchais un exemple de sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  non Lebesgue-négligeable dont la frontière n'est pas 1-rectifiable. Le flocon de Von Koch fournit un tel exemple. Mon but était d'avoir un exemple de courant rectifiable intégral de bord non rectifiable. Mais j'ai rencontré des difficultés. Aucune des propriétés des ensembles rectifiables vues en cours ou dans le livre de Falconer ne pouvait être utilisée, car ces propriétés s'appliquaient toutes à des ensembles de mesure  $\mathcal{H}^1$  finie, ce qui n'est pas le cas de  $V$ .

J'en ai parlé à Andrea Marchese et il m'a proposé de prendre une courbe  $\mathcal{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et de montrer que la 1-densité de  $\mathcal{C} \cap V$  est  $\mathcal{H}^1$ -presque partout strictement inférieure à 1. Ça a des chances d'être vrai car la forme angulaire de  $V$  fait que  $\mathcal{C}$  passe souvent derrière  $V$  au voisinage des points de  $\mathcal{C} \cap V$ , et donc  $\mathcal{C} \cap V$  a de nombreux trous (cf. illustration). Comme cette 1-densité devrait être presque partout égale à 1, on en déduit que  $\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V) = 0$ . Il ne savait pas si cette stratégie aboutissait, mais je l'ai tentée et je l'ai menée à bout ; et la fois suivante où nous nous sommes vu, Andrea a finalement été étonné qu'elle fonctionne.

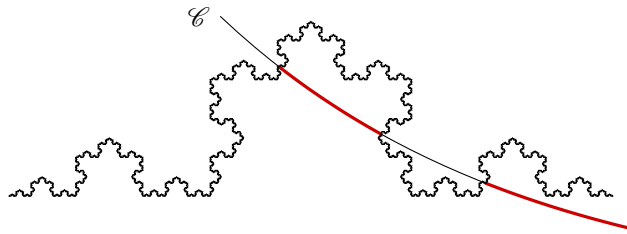


FIGURE 3 – La courbe  $\mathcal{C}$  et une portion zoomée de la courbe de Von Koch (les parties rouges sont les « trous » de  $\mathcal{C} \cap V$ , derrière  $V$ )

Mais cette approche aurait pu échouer car il est nécessaire que la proportion de trous ne tende pas vers 0 quand on zoome. En effet, on veut obtenir

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V \cap B(x, r))}{2r} < 1$$

pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $x \in \mathcal{C} \cap V$ , donc il faut majorer à partir d'un certain rang  $\frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V \cap B(x, r))}{2r}$  par une constante  $c < 1$  indépendante de  $r$  (mais éventuellement dépendante de  $x$ ).

Preuve: Reprenons. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  de longueur finie. D'après la proposition 5, on sait qu'il suffit de prouver que  $\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V) = 0$  pour en déduire que  $V$  est purement non 1-rectifiable. De plus,  $\mathcal{C} \cap V$  est rectifiable et de mesure  $\mathcal{H}^1$  finie, donc d'après la proposition 6 on a  $\mathcal{H}^1$ -p.p. dans  $\mathcal{C} \cap V$  : il existe  $D_1(\mathcal{C} \cap V, x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V \cap B(x, r))}{2r}$  et  $D_1(\mathcal{C} \cap V, x) = 1$ . Par conséquent, il suffit de montrer que  $\limsup \frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V \cap B(x, r))}{2r} < 1$ ,  $\mathcal{H}^1$ -p.p. dans  $\mathcal{C} \subset V$ .

Soit  $x \in \mathcal{C} \cap V$ . Comme  $\mathcal{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , elle possède une tangente en  $x$ . Plaçons-nous à une échelle très zoomée – la  $n$ -ième génération d'autosimilarité de la courbe, avec  $n \gg 1$  – de sorte que  $\mathcal{C}$  ressemble à une ligne droite au voisinage de  $x$ . L'illustration suivante représente la courbe de Von Koch autour de  $x$  à cette échelle très zoomée.  $x$  fait partie d'un triangle en alcôve de côté  $3^{-n}$ , hachuré sur la figure. Au delà de ce triangle, la courbe de Von Koch peut continuer de plusieurs façons, représentées en pointillés, mais dans tous les cas la zone à pois gris ne rencontre pas  $V$ .

Si  $x$  est dans la zone hachurée en vert, alors  $\mathcal{C}$  rencontrera la zone à pois gris sur une longueur au moins aussi grande qu'un des traits bleus, que ce soit dans l'un ou l'autre des triangles à pois.

Donc  $\frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V \cap B(x,r))}{2r}$  est majoré pour  $r := 2 \cdot 3^{-n}$  par un nombre  $c$  strictement inférieur à 1 qui dépend de la longueur des traits bleus, et donc de la largeur de la bande rouge. Fixons la bande rouge telle que nous l'avons dessinée ici ; alors  $c$  devient une constante. Le but va être maintenant de montrer que tout  $x \in \mathcal{C} \cap V$  tombe dans la zone verte à une infinité d'échelles  $n$  différentes, sauf pour certains  $x$  exceptionnels en quantité  $\mathcal{H}^1$ -négligeable. Nous aurons ainsi  $\limsup \frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{C} \cap V \cap B(x,r))}{2r} \leq c < 1$  pour ces  $x$ .

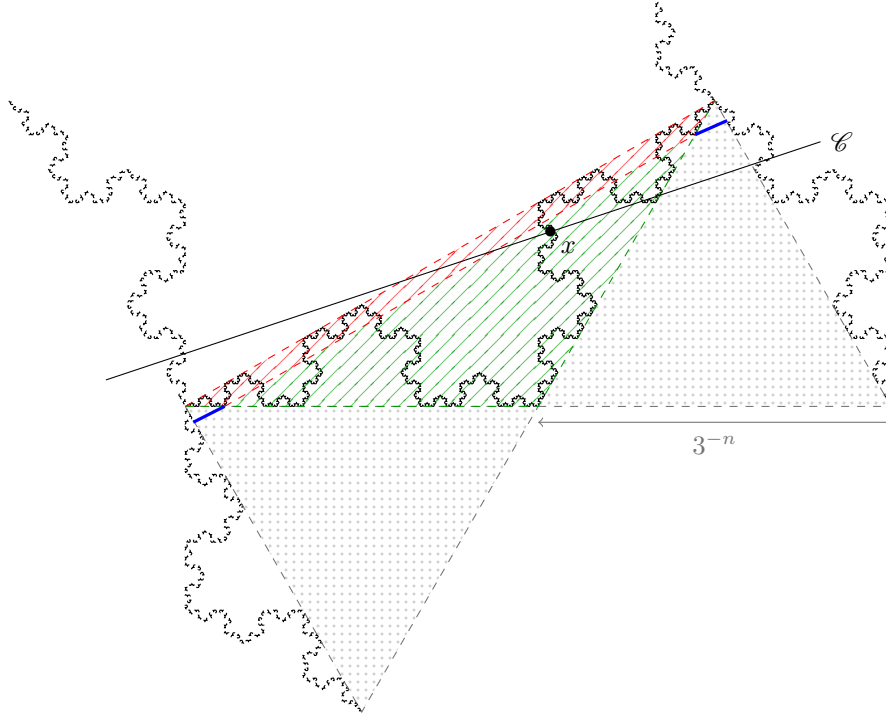


FIGURE 4 – La courbe de Von Koch au voisinage d'un  $x \in \mathcal{C} \cap V$

Nommons  $E$  l'ensemble des  $x \in V$  qui, à toutes les échelles  $n$  sauf un nombre fini, tombent dans la zone rouge. Il nous suffit de montrer que  $\mathcal{H}^1(E) = 0$ . De plus, notons, pour tout  $n$ ,  $E_n$  l'ensemble des  $x \in V$  tels que, à l'échelle  $n$ ,  $x$  tombe dans la zone rouge. On a  $E = \liminf E_n = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} E_n$ . Donc il suffit en fait de montrer que :  $\forall N \in \mathbb{N}, \mathcal{H}^1(\bigcap_{n \geq N} E_n) = 0$ . Mais, par autosimilarité de  $V$ ,  $\bigcap_{n \geq N} E_n$  est l'union de  $4^n$  copies  $3^n$  fois plus petites de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Donc il suffit finalement de montrer que  $\mathcal{H}^1(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$ , et même que  $\mathcal{H}^1(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{3n}) = 0$ .

Or  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{3n}$  est une fractale. Posons  $F := (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{3n}) \cap ([-1, 0] \times \mathbb{R})$ . C'est la moitié gauche de cette fractale. Sur l'illustration suivante, on a représenté  $V \cap ([-1, 0] \times \mathbb{R})$ , la moitié gauche de  $V$ . Les triangles rouges et verts sont  $3^3 = 27$  fois plus petits que le grand triangle hachuré. Donc  $F$  est égale à l'union de 22 copies 27 fois plus petites d'elle-même, placées dans les triangles rouges (22 est le nombre de triangles rouges). De même, en regardant à la  $k$ -ième échelle d'autosimilarité de  $F$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), on voit que  $F$  est égale à l'union de  $22^k$  copies  $27^k$  fois plus petites d'elle-même. Par conséquent,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_{27^{-k} \text{ diam}(F)}^1(F) \leq c_1 \cdot 22^k \cdot (27^{-k} \text{ diam}(F))^1 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

(cf. la définition des mesures de Hausdorff). Donc

$$\mathcal{H}^1(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \uparrow \mathcal{H}_\delta^1(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \uparrow \mathcal{H}_{27^{-k} \text{ diam}(F)}^1(F) = 0.$$

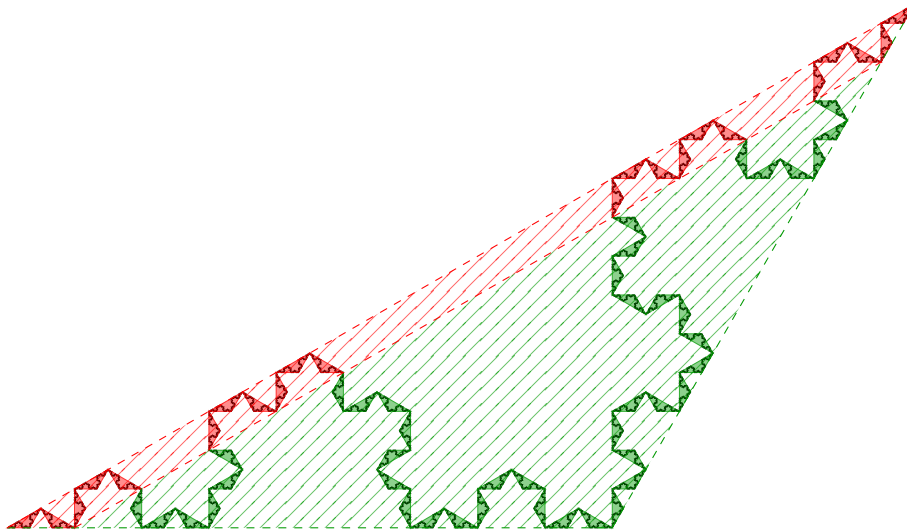


FIGURE 5 – Moitié gauche de  $V$  avec les zones rouges et vertes permettant de situer la fractale  $F$

Ceci achève la démonstration. □

## 2.4 Projections de mesures purement non rectifiables

Nous avons vu en cours de théorie géométrique de la mesure que, si  $E \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{H}^k(E) < \infty$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , alors :

1.  $E$  est  $k$ -rectifiable si et seulement si la projection de  $E$  sur presque tout sous-espace vectoriel  $k$ -dimensionnel de  $\mathbb{R}^n$  est de mesure  $\mathcal{H}^k$  non nulle
2. et  $E$  est purement non  $k$ -rectifiable si et seulement si la projection de  $E$  sur presque tout sous-espace vectoriel  $k$ -dimensionnel est  $\mathcal{H}^k$ -négligeable.

C'est le théorème de projection de Besicovitch-Federer. Ici, « presque tout sous-espace vectoriel » est à prendre au sens de la mesure naturelle de la variété Grassmannienne  $G_{k,n}(\mathbb{R})$ .

Pour continuer dans cette direction, Andrea Marchese m'a proposé de regarder la projection d'ensembles purement non 1-rectifiables dans certaines directions particulières. Dans les exemples suivants, le théorème précédents ne s'applique pas car ils ne sont pas de mesure  $\mathcal{H}^1$  finie (mais ce théorème ne serait de toute façon d'aucun secours pour une direction en particulier). De plus, nous nous intéressons à des *mesures* purement non rectifiables (i.e. des mesures portées par un ensemble purement non rectifiable) au lieu d'ensembles ; c'en est une généralisation.

### **Théorème 9 : projection de la mesure de Von Koch sur l'axe des abscisses**

Notons  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la projection sur la première coordonnée et  $d := \dim_{\mathcal{H}} V$ . La mesure naturelle sur  $V$ , ayant la même autosimilarité que la courbe, est  $\mathcal{H}^d \llcorner V$ .

Alors le poussé en avant par  $\pi$  de la mesure  $\mathcal{H}^d \llcorner V$ , noté  $\mu := \pi_{\#}(\mathcal{H}^d \llcorner V)$ , est singulier vis-à-vis de la mesure de Lebesgue.

*Preuve :* Notons  $V_g$  la moitié gauche de  $V$ . Avec la définition de  $V$  choisie, on a  $\pi(V_g) = [-1, 0]$  et nous noterons  $I = [-1, 0]$ . Par symétrie, il suffit de montrer que  $\mu \llcorner I = \pi_{\#}(\mathcal{H}^d \llcorner V_g)$  est singulière. Pour commencer, remarquons que, quand on subdivise en 3 bandes verticales égales

la bande  $I \times \mathbb{R}$  occupée par  $V_g$ , les 3 portions de courbes dans ces bandes sont, de gauche à droite :

- une copie 3 fois plus petite de  $V_g$ ,
- une autre copie de  $V_g$ , en miroir (selon un axe de symétrie vertical),
- une courbe d'une autre forme; notons-la  $V_{a.f.}$ .

En répétant cette subdivision sur  $V_{a.f.}$ , on obtient :

- une superpositions de deux copies 3 fois plus petites de  $V_{a.f.}$  et d'une copie de  $V_g$ ,
- une copie de  $V_g$  en miroir,
- une copie de  $V_{a.f.}$ .

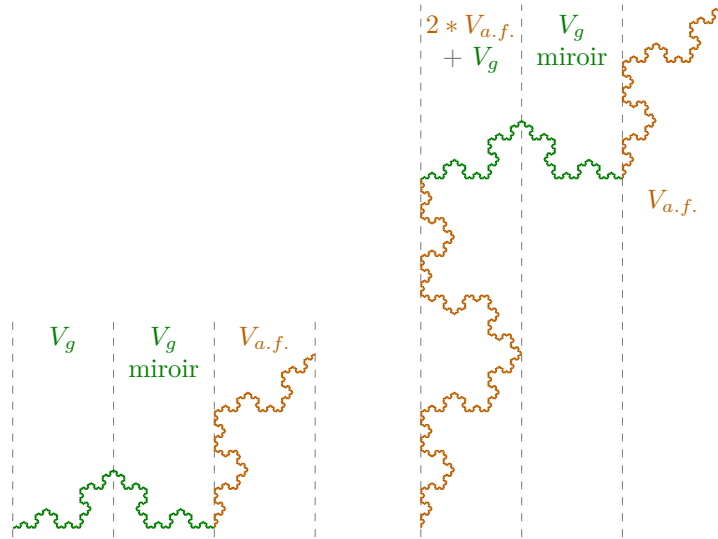


FIGURE 6 – Subdivision de  $V_g$  et  $V_{a.f.}$  en 3 bandes verticales

Ces décompositions de  $V_g$  et  $V_{a.f.}$  en des copies d'elles-mêmes décrivent le caractère fractal de la mesure  $\mu$ . Comme les réflexions n'interviennent que dans la bande centrale, les copies de  $V_g$  ou  $V_{a.f.}$  dans le bon sens ne se superposent pas avec des copies en miroir (et inversement). Donc on peut ignorer la présence de ces réflexions.

Nous dirons qu'une portion de courbe est « de type H » (« horizontal ») si elle a la forme de  $V_g$  (en miroir ou non) et qu'elle est de « de type P » (« penché ») si a la forme de  $V_{a.f.}$  (en miroir ou non). De plus, posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $H_n$  l'ensemble des  $x \in I$  tels que la portion de courbe de  $V$  de largeur  $3^{-n}$  au dessus de  $x$  (i.e.  $V \cap \left( \left[ \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}, \frac{\lfloor 3^n x \rfloor + 1}{3^n} \right] \times \mathbb{R} \right)$ ) est une superposition de types H uniquement
- et  $P_n$  l'ensemble des  $x \in I$  tels que la même portion de courbe de  $V$  est une superposition d'au moins un type P avec éventuellement d'autres types H et P, i.e.  $P_n = I \setminus H_n$ .

Par exemple,  $H_0 = I$ ,  $P_0 = \emptyset$ ,  $H_1 = [-1, -\frac{1}{3}]$  et  $P_1 = [-\frac{1}{3}, 0]$ .

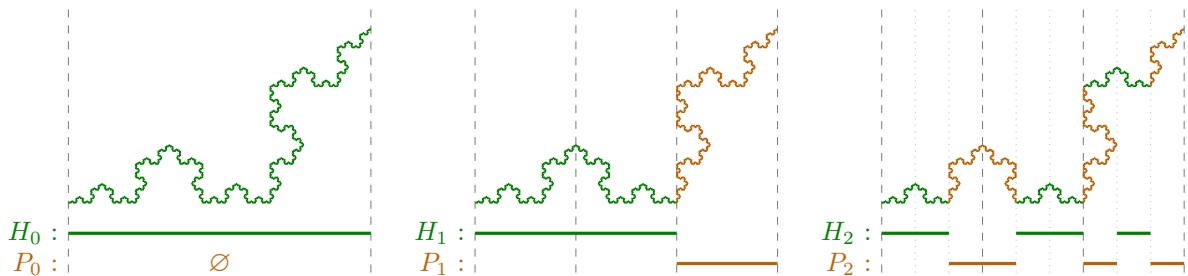


FIGURE 7 – Les premiers ensembles  $H_n$  et  $P_n$  représentés en dessous de  $V_g$

Posons ensuite, pour tous  $p, q, r \in \mathbb{N}$ ,

$$k_q := \frac{\ln q}{\ln(3/2)}$$

$$E_{p,r} := \left\{ x \in I \mid \exists (\kappa_1, \dots, \kappa_r) \in (\mathbb{N}^*)^r, \forall q \in \llbracket 1, r \rrbracket, \kappa_q \leq k_{p+q} \text{ et } x \in \bigcap_{i=1}^{\kappa_q-1} H_{\kappa_1+\dots+\kappa_{q-1}+i} \cap P_{\kappa_1+\dots+\kappa_q} \right\}$$

$$E_p := \bigcap_{r=0}^{\infty} E_{p,r} = \left\{ x \in I \mid \exists (\kappa_q) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \kappa_q \leq k_{p+q} \text{ et } x \in \bigcap_{i=1}^{\kappa_q-1} H_{\kappa_1+\dots+\kappa_{q-1}+i} \cap P_{\kappa_1+\dots+\kappa_q} \right\}$$

et  $E := \bigcup_{p=0}^{\infty} E_p$

Ainsi, les éléments de  $E_p$  sont ceux qui, quand  $n$  grandit en partant de 0, appartiennent au plus à  $k_p$  ensembles  $H_n$  à la suite avant d'appartenir à un  $P_n$ , puis appartiennent au plus à  $k_{p+1}$  ensembles  $H_n$  avant d'appartenir à nouveau à un  $P_n$ , etc. Et les éléments de  $E$  sont ceux qui appartiennent aux  $P_n$  « suffisamment souvent ». Sachant que  $V_{a.f.}$  a une  $\mu$ -mesure deux fois plus importante que  $V_g$  proportionnellement à sa largeur,  $E$  va concentrer la majorité de la masse de  $\mu$  (en fait la totalité).

Notons  $\lambda$  la mesure de Lebesgue. Montrons que  $\lambda(E) = 0$  et  $\mu(E) = \mu(I)$ . Soit  $J$  un intervalle de la forme  $[\ell 3^{-n}, (\ell + 1)3^{-n}]$ , avec  $\ell \in \mathbb{Z}$ , contenu dans  $I$ . Que  $J$  soit inclus dans  $H_n$  ou  $P_n$ , on a  $\lambda(J \cap H_{n+1}) \geq \frac{1}{3}\lambda(J)$ . Ensuite, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , comme  $J \cap \bigcap_{i=1}^k H_{n+i} \subset H_{n+k}$ , on a  $\lambda(J \cap \bigcap_{i=1}^{k+1} H_{n+i}) = \frac{2}{3}\lambda(J \cap \bigcap_{i=1}^k H_{n+i})$ . Ainsi,

$$\lambda(J \cap \bigcap_{i=1}^k H_{n+i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \lambda(J \cap H_{n+1}) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \lambda(J)$$

et, par passage au complémentaire,

$$\lambda(J \cap \bigcup_{i=1}^k P_{n+i}) \leq \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) \lambda(J).$$

Or, pour tous  $p, r$ ,  $E_{p,r}$  est une union d'intervalles de la même forme que  $J$  pour divers  $n$ . Donc, en appliquant ce qu'on vient d'obtenir à chacun de ces intervalles, on a

$$\lambda(E_{p,r+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{p+r+1}}\right) \lambda(E_{p,r}).$$

En itérant à partir de  $E_{p,0} = I$ , on en déduit  $\lambda(E_{p,r}) \leq \lambda(I) \prod_{q=1}^r \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{p+q}}\right)$  puis

$$\lambda(E_p) \leq \lambda(I) \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{p+q}}\right) = \lambda(I) \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3(p+q)}\right) = 0$$

par choix de  $(k_p)$ . Donc  $\boxed{\lambda(E) = 0}$ .

Pour  $\mu(E)$ , le raisonnement est le même. On écrit cette fois que  $\mu(J \cap H_{n+1}) \leq \mu(J)$  et  $\mu(J \cap \bigcap_{i=1}^{k+1} H_{n+i}) = \frac{1}{2}\mu(J \cap \bigcap_{i=1}^k H_{n+i})$ , donc on obtient  $\mu(J \cap \bigcup_{i=1}^k P_{n+i}) \geq (1 - (\frac{1}{2})^k)\mu(J)$  et

$$\mu(E_p) \geq \mu(I) \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{p+q}}\right) = \mu(I) \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(p+q)^\alpha}\right) > 0$$

avec  $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)} > 1$ . Donc  $\mu(E) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu(E_p) = \mu(I)$ .

Ainsi, on a montré que  $\mu$  est supportée par un ensemble  $E$  Lebesgue-négligeable. Donc elle est singulière.  $\square$

Plus tard, Andrea Marchese m'a aussi proposé de réfléchir à la question similaire suivante.

**Proposition 10 : projection diagonale de la mesure du carré de Cantor**

Soit  $C$  l'ensemble triadique de Cantor. On appelle « carré de Cantor » la fractale  $C^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Notons  $\pi$  l'application  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x+y}{2}$ . C'est la composition de la projection orthogonale  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cdot (1, 1)$  et de l'isomorphisme vectoriel  $\mathbb{R} \cdot (1, 1) \cong \mathbb{R}$  qui envoie  $(1, 1)$  sur 1, de sorte que  $\pi(C^2) = [0, 1]$ .

Alors  $\pi_{\#}(\mathcal{H}^{\dim_{\mathcal{H}}(C^2)} \llcorner C^2)$  est singulière vis-à-vis de la mesure de Lebesgue.

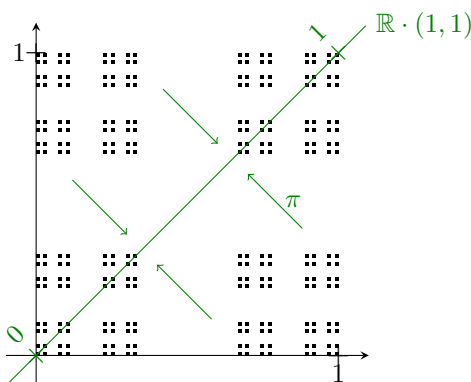


FIGURE 8 – Le carré de Cantor, noté  $C^2$ , et l'application  $\pi$  (les graduations de la diagonale représentent les images de  $\pi$ )

Elle peut se résoudre de la même façon que la précédente question, en appelant cette fois « type P » tout intervalle triadique qui est le tiers central de l'intervalle triadique 3 fois plus grand le contenant, et en appelant « types H » tout intervalle triadique qui est un tiers latéral de l'intervalle triadique 3 fois plus grand le contenant. Les calculs sont alors les mêmes. Cependant, la plus grande simplicité de la structure fractale de la mesure projetée de  $C^2$  permet de donner ici une preuve plus courte, probabiliste, que voici.

Preuve : Notons  $f := \frac{d\mu}{d\lambda}$  la dérivée de Radon-Nikodym de  $\mu$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Les images par  $\pi$  des deux quarts inférieur gauche et supérieur droit de  $C^2$  sont respectivement  $[0, \frac{1}{3}]$  et  $[\frac{2}{3}, 1]$ , et les images des deux autres quarts de  $C^2$  sont toutes deux  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ . Donc, par autosimilarité de  $C^2$ ,  $f$  vérifie p.p. l'équation fonctionnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], & f(x) = \frac{3}{4}f(3x) \\ \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], & f(x) = \frac{3}{2}f(3x - 1) \\ \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1], & f(x) = \frac{3}{4}f(3x - 2). \end{cases}$$

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : x \in [0, 1] \rightarrow f((3^n x) \bmod 1)$ , où «  $y \bmod 1$  » désigne le représentant de  $y$  modulo 1 dans  $[0, 1[$ . Ainsi, par exemple,  $f_0 = f$  et p.p.

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], & f_1(x) = f(3x) \\ \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], & f_1(x) = f(3x - 1) \\ \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1], & f_1(x) = f(3x - 2). \end{cases}$$

Ensuite, plaçons-nous dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$  et notons, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ ,  $X_n(x)$  le  $n$ -ième chiffre en base 3 de  $x$  et

$$Y_n(x) := \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } X_n(x) = 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } X_n(x) = 0 \text{ ou } X_n(x) = 2. \end{cases}$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f = f_n \cdot \prod_{i=1}^n Y_i.$$

Or,  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  sont des suites de v.a. i.i.d. donc, par la loi forte des grands nombres, on a p.s.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\ln(Y_1)] = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = 0.$$

D'où  $\prod_{i=1}^n Y_i \rightarrow 0$  p.s.. Ainsi,  $f_n = f \cdot \prod_{i=1}^n Y_i^{-1}$  converge p.s. vers  $+\infty$  sur  $\{f \neq 0\}$ , i.e.  $f_n \rightarrow (+\infty) \cdot \mathbf{1}_{f \neq 0}$ . En particulier, cette convergence a aussi lieu en loi. Cependant,  $f$  a la même loi que  $f_n$ . Donc  $f(\Omega) \subset \{0, +\infty\}$ . Comme  $f$  ne peut pas prendre la valeur  $+\infty$  avec probabilité non nulle (c'est une dérivée de Radon-Nikodym), forcément  $f = 0$ . D'après le théorème de décomposition de Radon-Nikodym, on en déduit que  $\mu$  et  $\lambda$  sont étrangères.  $\square$

## 2.5 Mesures purement non rectifiables et projections non linéaires

Dans la suite du stage, Andrea m'a fait réfléchir au problème ouvert suivant.

### Définition 11 : mesure purement non rectifiable

Soient  $X$  un espace métrique et  $k \in \mathbb{N}$ . Une mesure  $\mu$  sur  $X$  est dite purement non  $k$ -rectifiable s'il existe un ensemble  $E \subset X$  purement non  $k$ -rectifiable tel que  $\mu(X \setminus E) = 0$ .

### Définition 12 : projection non linéaire

Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Une application  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une projection non linéaire sur la direction  $v$  si :

- $p$  est lipschitzienne
- et  $p$  est non contractante dans la direction  $v : \exists c > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, |p(x+tv) - p(x)| \geq c|t|$ .

### Proposition 13 : (admise)

Soient  $E \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble purement non 1-rectifiable,  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ . Alors  $E$  peut être recouvert par un nombre fini de bandes horizontales  $\delta$ -lipschitziennes de largeur totale  $\varepsilon$  dans le sens suivant : il existe  $\exists N \in \mathbb{N}$  et des applications  $\delta$ -lipschitziennes  $\exists f_1, \dots, f_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^N \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_k(x) - \frac{\varepsilon}{2N} \leq y \leq f_k(x) + \frac{\varepsilon}{2N} \right\}.$$

La proposition ci-dessus est issue de la thèse d'Andrea Marchese. Il pensait pouvoir l'utiliser

pour montrer que tout ensemble purement non 1-rectifiable de  $\mathbb{R}^2$  peut être envoyé par une projection non linéaire sur un sous-ensemble Lebesgue-négligeable de  $\mathbb{R}$ . Rappelons que l'on sait déjà que presque toute projection *linéaire* d'un ensemble purement non 1-rectifiable *de mesure  $\mathcal{H}^1$  finie* est négligeable (cf. la partie 2.4). Ici, l'idée était grosso modo de projeter sur la direction verticale en voyant tous les points d'une même bande sur un intervalle de largeur  $\frac{\varepsilon}{N}$ , et d'exploiter le fait que  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement petit. La figure suivante illustre cette idée.

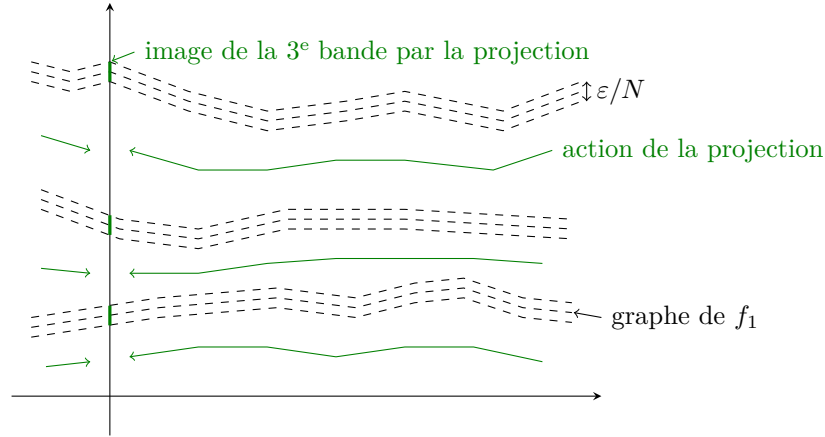


FIGURE 9 – Les bandes données par la proposition 13 et, en vert, l'hypothétique projection non linéaire dont l'image  $\mathbb{R}$  est représentée sur l'axe des ordonnées

Cependant, formulé ainsi, ça ne peut pas marcher car la courbe de Von Koch en est un contre-exemple. En effet, puisqu'elle est connexe et qu'elle n'est pas incluse dans la rotation d'un graphe de fonction, son image par toute projection non linéaire est un intervalle non réduit à un singleton. Alors, nous avons cherché une autre formulation et sommes arrivés à ceci :

**Conjecture 14 : projection non linéaire d'une mesure purement non rectifiable**

1. Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^2$  purement non 1-rectifiable. Il existe une projection non linéaire  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $p_{\#}\mu$  est singulière.
2. Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $\mathbb{R}^2$  purement non 1-rectifiable. Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\mu$  et une projection non linéaire  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que la partie singulière de  $p_{\#}\mu$  a pour masse au moins  $c \times \mu(\mathbb{R}^2)$ .

Cette fois, la courbe de Von Koch n'est plus un contre-exemple car, comme on l'a vu, la projection de sa mesure naturelle sur la première coordonnée est singulière. Pour tenter de démontrer ces conjectures, on peut appliquer la proposition 13 au support de  $\mu$ . De plus, il est envisageable que par un processus d'itération la conjecture n°2 implique la n°1 (pour les mesure finies).

Cependant, il y a une difficulté. Les bandes ont beau être  $\delta$ -lipschitziennes avec  $\delta$  arbitrairement petit, elles ne sont pas parfaitement horizontales. Deux bandes peuvent donc se toucher à un endroit puis s'éloigner. Si l'on compte envoyer par notre projection non linéaire chaque bande sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  de largeur environ  $\frac{\varepsilon}{N}$ , alors il devient difficile de rendre cette projection non contractante dans la direction verticale.

On pourrait envisager de ne se préoccuper que d'une bande sur deux pour garder un espace d'au moins  $\frac{\varepsilon}{N}$  entre les bandes considérées (c'est ce que j'ai tenté). Ceci est possible en remarquant

qu'on peut se ramener au cas où les intérieurs des bandes sont disjoints. Dans ce cas, on cherche plutôt à prouver la conjecture n°2 qui se contente que seule une partie de la mesure projetée soit singulière. Cependant, c'est encore insuffisant. Si l'on note  $D$  le diamètre du support de  $\mu$  (supposons-le fini), alors la différence maximale d'éloignement entre deux bandes à deux endroits différents est inférieure à  $2D\delta$ . Donc le rapport éloignement minimal sur éloignement maximal entre deux bandes prises en compte peut être aussi petit que  $\inf_{t \geq \varepsilon/N} \frac{t}{t+2D\delta} = \frac{\varepsilon/N}{\frac{\varepsilon}{N}+2D\delta} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2ND\delta}$ . Ce rapport est environ la constante de contraction  $c$  de la projection dans la direction verticale, i.e.  $\inf_{x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}} \frac{|p(x+(0,t))-p(x)|}{|t|}$ . Comme  $N$  ne peut pas être contrôlé, on ne peut pas minorer  $c$  et construire une projection convenable lorsque l'on fait prendre  $\varepsilon$  de plus en plus petit. Pour contrôler  $c$ , on devrait ignorer une proportion de bandes non majorée par une constante  $c' < 1$ , et on perdrait donc au final toute la masse de  $\mu$ .

Andrea pensait utiliser la proposition 13 dans deux directions : horizontalement (telle qu'elle est formulée) et verticalement. Ainsi, le support de  $\mu$  est inclus dans l'intersection de deux groupes de bandes perpendiculaires, i.e. dans un ensemble de petits carrés de largeur  $\frac{\varepsilon}{N}(1+\delta)$  disposés sur une sorte de grille pas droite. Ça donne une information supplémentaire, mais je n'ai malheureusement pas réussi à l'exploiter car la projection qu'on cherche à construire n'agit que dans une direction. J'ai aussi essayé de discrétiser le problème (la preuve de la proposition 13 repose déjà sur une discrétisation), mais ça n'a rien donné non plus.

## 2.6 La conjecture de Furstenberg

Vers la fin du stage, Andrea m'a parlé de plusieurs conjectures en théorie géométrique de la mesure, dont la conjecture de Furstenberg.

### Définition 15 : $p$ -invariance

Soit un entier  $p > 1$ . On note  $\varphi_p$  l'application de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dans lui-même qui à  $x$  associe  $px$ .

1. Un ensemble  $E \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est dit  $p$ -invariant si  $\varphi_p(E) = E$ .
2. Une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est dite  $p$ -invariante si  $(\varphi_p)_\# \mu = \mu$ .

### Théorème 16 : (admis)

Soit  $E \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  un ensemble compact infini 2-invariant et 3-invariant. Alors  $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Remarque :** Un contre-exemple lorsque  $E$  est fini est donné par  $\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$  car 2 et 3 sont inversibles dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .

### Conjecture 17 : conjecture de Furstenberg (1967)

Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , sans atome, 2-invariante et 3-invariante. Alors  $\mu$  est la mesure uniforme de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Remarque :** On peut aussi remplacer 2 et 3 par une autre paire d'entiers premiers entre eux.

Via la bijection  $[0, 1[ \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}/\mathbb{Z}, x \mapsto (x \bmod 1)$ , on peut se placer sur  $[0, 1]$  au lieu de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (ce

qui permet de considérer la fonction de répartition de  $\mu$ ). De plus, on peut étudier séparément le cas où  $\mu$  est à densité, de sorte à se ramener au cas où  $\mu$  est singulière. Le but est alors de montrer que  $\mu = 0$ . Un angle d'attaque possible est de chercher une suite de compacts  $(K_n)$  de  $[0, 1]$  2-et-3-invariants et Lebesgue-négligeables tels que  $\mu$  est supporté par  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ . Les  $K_n$  seraient alors tous fini (car sinon ils seraient égaux à  $[0, 1]$  par le précédent théorème) et donc  $\mu$  serait nulle (car elle est sans atome). Ou même plus simple : en supposant par l'absurde  $\mu \neq 0$ , on peut chercher un compact  $K \subset [0, 1]$  2-et-3-invariant tel que  $\mu(K) > 0$  et  $\lambda(K) = 0$ ; ceci serait impossible car  $K$  devrait être infini et donc égal à  $[0, 1]$ .

Andrea a proposé de chercher à atteindre ce but en étudiant la fonction de répartition de  $\mu$ . Notons  $F$  cette fonction et  $\gamma$  sa courbe. Nous avons montré la proposition suivante.

**Proposition 18 :**

Soient  $\mu$  une mesure finie sur  $[0, 1]$  et  $F$  sa fonction de répartition. Soit  $\gamma$  la courbe de  $F$  dont on a complété les « trous » en les points de discontinuité de  $F$  :

$$\gamma := \{(x, F(x)) \mid x \in [0, 1]\} \cup \bigcup_{x \in [0, 1]} \{(x, y) \mid F(x^-) \leq y \leq F(x^+)\}.$$

$\gamma$  est une courbe de longueur finie, donc rectifiable. Elle a donc  $\mathcal{H}^1$ -p.p. une tangente dont on peut noter  $\theta$  l'angle avec l'horizontale ( $\theta$  est une fonction  $\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ). De plus, notons  $\pi$  la projection  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sur la première coordonnée. Alors

$$\pi_{\#}(\sin(\theta) \cdot \mathcal{H}^1 \llcorner \gamma) = \mu \quad \text{et} \quad \pi_{\#}(\cos(\theta) \cdot \mathcal{H}^1 \llcorner \gamma) = \lambda \llcorner [0, 1].$$

**Remarque :** Dans le cas où  $\mu$  est sans atome, le  $\gamma$  de la proposition est simplement le graphe de  $F$ .

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin de la formule de l'aire.

**Proposition 19 : formule de l'aire (admise)**

Soient  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $k$ -rectifiable et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction lipschitzienne. Notons, pour  $\mathcal{H}^k$ -presque tout  $x \in E$ ,  $J_E f(x) := \sqrt{\det({}^t d_x f|_{\tau(x)} \cdot d_x f|_{\tau(x)})}$  <sup>note 3</sup> où  $\tau(x)$  est le plan tangent à  $E$  en  $x$ . C'est le « jacobien tangentiel ». Alors

$$\int_E J_E f(x) d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |\{x \in E \mid f(x) = y\}| d\mathcal{H}^k(y).$$

Preuve : Soient  $0 \leq a \leq b \leq 1$ . Appliquons la formule de l'aire à  $E = \gamma \cap ([a, b] \times \mathbb{R})$  et  $f = \pi$ .

note 3. On utilise le fait qu'une fonction lipschitzienne est p.p. différentiable.

On a  $J_\gamma \pi(x) = \cos(\theta(x))$  p.p. donc

$$\begin{aligned} \pi_\#(\cos(\theta) \cdot \mathcal{H}^1 \llcorner \gamma)([a, b]) &= \int_{\gamma \cap ([a, b] \times \mathbb{R})} \cos(\theta) \, d\mathcal{H}^1 \\ &\stackrel{\text{formule de l'aire}}{=} \int_{[a, b]} (1 + (+\infty)\mathbf{1}_{\mu(x) > 0}) \, d\mathcal{H}^1(x) \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Ceci prouve la seconde identité de la proposition 18. Pour la première, on applique la formule de l'aire au même  $E$  mais avec  $f$  la projection  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sur la seconde coordonnée. On calcule que  $J_\gamma f(x) = \sin(\theta(x))$  p.p., donc

$$\begin{aligned} \pi_\#(\sin(\theta) \cdot \mathcal{H}^1 \llcorner \gamma)(]a, b]) &= \int_{\gamma \cap (]a, b] \times \mathbb{R})} \sin(\theta) \, d\mathcal{H}^1 \\ &\stackrel{\text{formule de l'aire}}{=} \int_{]F(a), F(b)]} (1 + (+\infty)\mathbf{1}_{|F^{-1}(\{y\})| > 1}) \, d\mathcal{H}^1(y) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

Si  $\mu$  est une mesure singulière sans atome sur  $[0, 1]$  (c'est le contexte qu'on s'est donné pour travailler sur la conjecture de Furstenberg), alors  $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$  p.p. sur  $\gamma$ , car la dérivée de Radon-Nikodym  $\frac{d\mu}{d\lambda}$  est p.p. nulle sur  $[0, 1]$ . Donc, en notant  $\gamma_{\text{vert}} := \{x \in \gamma \mid \theta(x) = \frac{\pi}{2}\}$ , on a  $\pi_\#(\mathcal{H}^1 \llcorner \gamma_{\text{vert}}) = \mu$ . Ainsi, l'idée d'Andrea était de travailler sur  $\gamma$ , car cette courbe contient la donnée de  $\mu$ .

Rappelons que, étant donnée  $\mu$  une mesure singulière sans atome 2-et-3-invariante, nous voulons trouver un compact  $K \subset [0, 1]$  2-et-3-invariant tel que  $\mu(K) > 0$  et  $\lambda(K) = 0$ . On peut chercher  $K$  parmi  $\pi(\gamma_{\text{vert}})$ . Nous avons cherché avec Andrea une façon de sélectionner des points  $x$  de  $[0, 1]$  pour les mettre dans  $K$  en fonction du comportement de  $\gamma$  au voisinage de  $(x, F(x))$ . Comme la 2-et-3-invariance implique une action de dilatation (de facteur 2 ou 3), nous avons cherché une processus de sélection qui soit inchangé par dilatation horizontale de  $\gamma$ . Nous avons tenté de placer une très petite boîte autour de  $(x, F(x))$  et de dilater horizontalement  $\gamma$  jusqu'à ce qu'elle passe par les coins de la boîte pour ensuite utiliser la forme de  $\gamma$  dans cette boîte. Mais c'était trop dépendant des petites variations de  $F$ . Nous n'avons pas pu poursuivre au-delà.

## 2.7 Bibliographie

- [1] Kenneth J. FALCONER, *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge Tracts in Mathematics), Cambridge University Press, 1985
- [2] Frank MORGAN, *Geometric Measure Theory, A Beginner's Guide*, Academic Press, 1988
- [3] Andrea MARCHESE, *Two applications of the Theory of Currents*, thèse à l'Université de Pise, 2013
- [4] Giovanni ALBERTI, Marianna CSÖRNYEI, David PREISS, *Structure of null sets in the plane and applications*, 2005