



PSL



université
PARIS
DIDEROT



Rapport de Stage de M1

CHEMIN DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES DOUBLE

Théo LEBLANC
Dirigé par Benoît LASLIER

Mars à Juin 2021

Je remercie chaleureusement Benoît Laslier pour le temps investi et pour les multiples entretiens, en présentiel comme en distanciel, réalisés tout au long du stage. Le sujet m'a beaucoup plu et j'ai adoré réfléchir aux questions que nous nous posions pendant ces quatre mois.

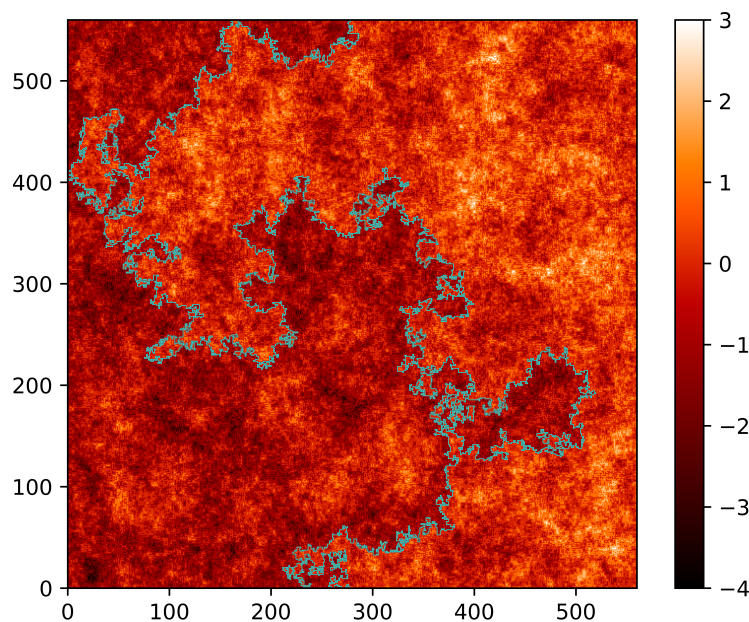


Table des matières

1	Présentation du stage	2
1.1	Déroulement du stage	2
1.2	Apports du stage	2
2	Présentation du travail mathématique	3
2.1	Les modèles de dimères et techniques usuelles	3
2.1.1	Définition d'un modèle de dimères simple	4
2.1.2	Définition d'un modèle de dimères double	5
2.1.3	La fonction de hauteur	6
2.1.4	La bijection de Temperley	9
2.1.5	L'algorithme de Wilson	9
2.2	La question au coeur du stage	10
2.2.1	Définitions des réseaux	10
2.2.2	La bijection de Temperley dans notre cas particulier	11
2.2.3	Arbre couvrant et hauteur	13
2.3	Adaptation d'un article de Benoît Laslier : un premier résultat	16
2.3.1	Une première estimée logarithmique	16
2.3.2	Heuristique sur le Lemme 2.3.1	17
2.4	Nouvel angle d'approche et deuxième résultat sous l'hypothèse d'un lemme	20
2.4.1	Plan du raisonnement	20
2.4.2	Réalisation du tirage des anneaux	21
2.4.3	Une deuxième estimée	26
2.5	Vers une preuve du lemme admis	27

1 Présentation du stage

Le laboratoire de probabilités, statistique et modélisation est un laboratoire de mathématiques comptant environ deux cents membres qui se répartissent entre deux sites : Jussieu et Diderot. Benoît Laslier, mon directeur de stage, fait partie de l'équipe structures et modèles aléatoires. J'ai contacté Benoît Laslier sous les conseils de Giambattista Giacomin, mon tuteur à l'ENS.

1.1 Déroulement du stage

Le stage s'est déroulé majoritairement à distance même si j'ai pu me rendre au laboratoire, dans le bâtiment Sophie Germain à Paris 7, en moyenne une fois par semaine. Nous communiquions aussi par mails et pas visioconférences lorsqu'il n'était pas possible de se retrouver au laboratoire. Dans un premier temps je me suis familiarisé avec les modèles de dimères, une étape nécessaire pour moi qui ne connaissais pas cette partie des mathématiques avant de commencer ce stage. Ensuite je me suis approprié l'article [Las17] de Benoît Laslier pour en tirer un premier résultat (sous-section 2.3). J'ai aussi adapté, quantifié, certains résultats de l'article qui nous ont été utiles par la suite (notamment dans la sous-sous-section 2.4.2). Nous avons ensuite travaillé sous l'hypothèse d'un lemme pour trouver un deuxième résultat (sous-section 2.4), améliorant le premier. D'autres petites pistes ont été explorées jusqu'à la fin du stage mais n'ont pas été poussées très loin. Le stage se terminait officiellement le 30 juin mais nous avons continué à discuter jusqu'à un peu plus que la mi juillet. Durant cette période, Benoît Laslier a trouvé l'article [KT20], très prometteur, qui a donné lieu à la sous-section 2.5.

1.2 Apports du stage

Ce stage est ma première expérience professionnelle, et il m'a beaucoup apporté. Sur le plan mathématique, j'ai beaucoup appris que ce soit sur les marches à boucles effacées par exemple ou sur différentes techniques utilisées en probabilité. J'ai aussi découvert à quoi ressemble le métier de chercheur en mathématiques. J'ai découvert comment s'attaquer à un problème et les échelles de temps que cela met en jeu par exemple. J'ai aussi découvert comment travailler à plusieurs et partager des idées notamment via les réunions virtuelles entre Benoît Laslier et Alexander Glazman auxquelles j'ai eu la chance de pouvoir assister. J'ai commencé ce stage en me disant que j'aimerais bien être chercheur en mathématiques, et aujourd'hui je sors quasiment certain que c'est le métier que je souhaite exercer.

2 Présentation du travail mathématique

Le modèle de dimères double issu de la superposition de deux graphes dont la différence symétrique contient exactement un sommet de chaque graphe force l'existence d'un chemin composé de dimères reliant ces deux points particuliers. Notons Γ ce chemin aléatoire. L'objectif de ce stage est d'étudier ce chemin aléatoire dans le cas particulier où les graphes sont des réseaux carrés (sous-graphes du graphe usuel \mathbb{Z}^2). Comme dans la plupart des modèles issus de la physique statistique, prendre une limite d'échelle est intéressant et nous adopterons donc le point de vue "taille de la maille du réseau", via un redimensionnement, plutôt que le point de vue "nombre de sommet du réseau".

Lorsque la maille des réseaux tend vers 0 il est conjecturé que la loi du chemin Γ tend vers une loi de type SLE_4 . Cette conjecture semble aujourd'hui assez inaccessible. Puisque la dimension d'une courbe de loi SLE_4 est $3/2$, si la conjecture est vraie, à la limite, le chemin Γ ne devrait pas être "space-filling". Ce stage a pour but de démontrer des estimées sur la distance entre le chemin et un point quelconque montrant que le chemin Γ n'est pas trop "space-filling".

Dans la suite nous présenterons les modèles de dimères dans leur généralité, les techniques classiques liées à leur étude (sous-section 2.1) puis dans la sous-section 2.2 nous nous concentrerons sur l'étude de notre cas particulier. Ensuite dans la sous-section 2.3 nous nous appuyerons sur un article de Benoît Laslier pour obtenir un premier résultat. Nous obtiendrons un deuxième résultat sous l'hypothèse d'un lemme dans la sous-section 2.4 et enfin nous donnerons les premières pistes de démonstrations du lemme admis dans la sous-section 2.5

Cette présentation du travail mathématique réalisé lors du stage est basée en partie sur le mémoire de stage [Leb21] écrit tout au long du stage. Ce dernier est plus détaillé et plus complet, toutes les preuves y sont écrites. Les notations peuvent avoir légèrement évolué mais [Leb21] est globalement à peu près "self-contained". Pour de plus amples détails nous renvoyons donc vers ce dernier.

2.1 Les modèles de dimères et techniques usuelles

Dans ce rapport il sera question de graphes. Nous entendons ici par graphe une représentation planaire propre fixée d'un graphe planaire, connexe, sans boucles ni arêtes multiples, fini et non orienté. Dans tout ce document nous nous permettrons cet abus de langage. Pour un tel graphe, le graphe dual est bien défini et unique à isomorphisme sur près sur la sphère.

2.1.1 Définition d'un modèle de dimères simple

Passons maintenant à la définition d'un modèle de dimères (simple). Pour cela nous devons définir ce qu'est une configuration de dimères, aussi appelé couplage parfait.

Définition 1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une **configuration de dimères** sur G , aussi appelé **couplage parfait** est une partie $M \subset E$ des arêtes de G telle que tout sommet de G soit incident à exactement une arête de M . \blacklozenge

Un modèle de dimères sur un graphe G consiste à tirer au hasard un couplage parfait de G . Plus précisément un modèle de dimères c'est la loi de ce tirage. Cette loi est construite à partir d'une fonction de poids w , qui associe un poids à chaque arête,

$$\begin{aligned} w : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad . \\ e &\longmapsto w(e) \end{aligned}$$

Grâce à cette fonction de poids nous pouvons donner un poids $w(M)$ à chaque configuration de dimères M , défini par

$$w(M) = \prod_{e \in M} w(e).$$

Enfin, la mesure de probabilité associée au modèle de dimères que nous sommes en train de définir est l'unique mesure de probabilité \mathbb{P} vérifiant

$$\mathbb{P}(M) \propto w(M).$$

Nous appelons dimère une arête faisant partie de la configuration de dimères tirée.

La constante de normalisation est appelée **fonction de partition** et notée $Z(G)$.

Le cas particulier où $w \equiv 1$ correspond à la mesure uniforme, et la fonction de partition donne le nombre de configurations de dimères. C'est ce cas qui nous intéressera tout au long de ce document.

Remarque: Prendre une fonction de poids $w \neq 1$ est essentiellement une version continue de mettre des arêtes multiples (ie avoir des copies distinctes d'une même arête dans E) et de considérer la fonction de poids uniforme sur ce graphe à arêtes multiples. Néanmoins, certaines constructions comme la bijection de Temperley ne sont pas totalement compatibles avec cette correspondance.

Remarque: Quand le graphe est infini on considère des mesures appelées mesures de Gibbs dont les marginales finies sont données par la même formule que pour les graphes finis. C'est à dire des mesures pour lesquelles si on fixe la configuration sur une région annulaire (une région dont le complémentaire a deux composantes connexes ; une finie et l'autre infinie), ce qui se passe à l'intérieur est indépendant de ce qui se passe à l'extérieur et la loi à l'intérieur est donnée par la même formule que pour les graphes finis.

Notons pour finir que tirer des couplages parfaits d'un graphe G est équivalent à tirer des pavages du graphe dual G^* par des tuiles (union de deux faces adjacentes). La Figure 1

illustre cette bijection entre pavages et couplages parfaits sur le réseau hexagonal. Dans le cas particulier du réseau hexagonal, les pavages créent une illusion de perspective, ce qui motivera l'introduction d'une fonction de hauteur codant la configuration de dimères. La définition de la fonction de hauteur sera algébrique (et non visuelle) pour s'adapter à tous les graphes bipartis et pas uniquement au réseau hexagonal.

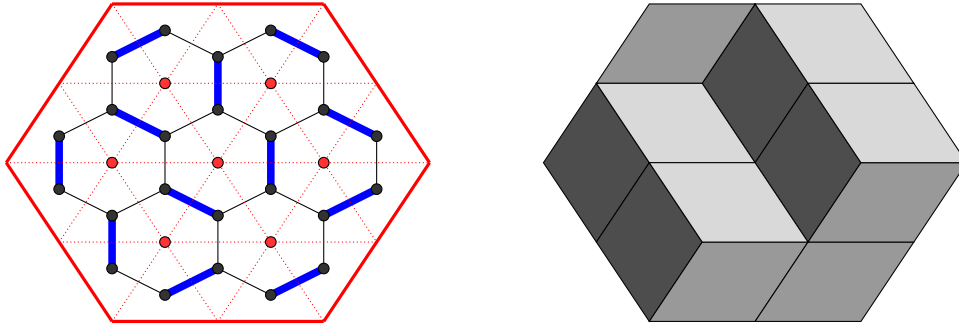


FIGURE 1: A gauche, le réseau hexagonal (en noir), son dual (en rouge) et un couplage parfait (les arêtes bleues). A droite, le pavage du dual (en nuances de gris) associé au couplage parfait.

2.1.2 Définition d'un modèle de dimères double

Soit G un premier graphe ainsi que G_1 et G_2 deux sous-graphes de G . Notons \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 les mesures associées aux modèles de dimères simples sur G_1 et G_2 . Le modèle de dimères double sur G_1 et G_2 consiste à tirer au hasard et indépendamment une configuration de dimères sur G_1 et une sur G_2 puis à les superposer. C'est donc la mesure de probabilité produit $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$.

Les différents phénomènes pouvant se produire dans le modèle de dimères double sont relativement simples. En effet, les dimères des deux configuration peuvent, au choix (voir Figure 2) :

- se superposer
- former des boucles dans $G_1 \cap G_2$
- former des chemins qui relient la différence symétrique $(G_1 \cup G_2) \setminus (G_1 \cap G_2)$
- former des chemins bi-infinis dans $G_1 \cap G_2$ (ce qui nécessite évidemment $G_1 \cap G_2$ infini)
- former des chemins mono-infinis qui commencent dans la différence symétrique d'un côté et ne se terminent pas de l'autre.

C'est une conséquence du fait que pour un sommet donné v , les uniques arêtes des configurations de dimères sur G_1 et sur G_2 contenant v peuvent soit se superposer soit partir dans deux directions différentes et donc former une partie d'un chemin ou d'une boucle que l'on appelle chaîne. Dans le second cas, soit la chaîne formée reste dans $G_1 \cap G_2$ et doit donc nécessairement se refermer en une boucle ou être bi-infinie, soit au moins un des deux côté

de la chaîne se termine dans la différence symétrique et le deuxième côté est soit infini dans $G_1 \cap G_2$ soit se termine aussi dans la différence symétrique.

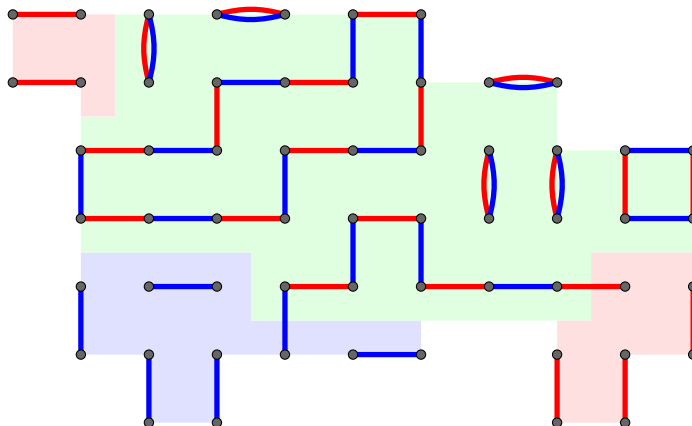


FIGURE 2: Configuration de double dimères sur le réseau carré. En vert, $G_1 \cap G_2$, en bleu, $G_1 \setminus G_2$ et en rouge, $G_2 \setminus G_1$. Les arêtes bleues (resp. rouges) sont les dimères de la configuration sur G_1 (resp. G_2).

2.1.3 La fonction de hauteur

Nous allons construire la fonction de hauteur associée à un couplage parfait M sur un graphe biparti G via des flots sur G . Un flot sur G n'étant rien d'autre qu'une fonction des arêtes orientées de G vers les réels \mathbb{R} . Notons que la hauteur est liée au graphe dual : c'est les faces de G (ie les sommets duaux) qui ont naturellement une hauteur.

Nous notons b pour les sommets noirs (black) et w pour les sommets blancs (white). Pour toute arête $e = \{w, b\}$ on note (w, b) l'arête orientée de w vers b et (b, w) l'arête orientée de b vers w .

Définition 2. Pour M une configuration de dimères sur G nous définissons le flot associé à M , noté ω_M , comme suit : $\forall e = \{w, b\} \in E$,

$$\omega_M(w, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in M \\ 0 & \text{si } e \notin M \end{cases}, \quad \omega_M(b, w) = 0. \quad \blacklozenge$$

Dans la suite nous aurons besoin de la notion de divergence d'un flot ω en un sommet u qui représente le flux sortant moins le flux entrant en u .

Définition 3. Soit ω un flot sur un graphe G et u un sommet de G . La divergence de ω en u , notée $\text{div}(\omega)(u)$ est définie par :

$$\text{div}(\omega)(u) = \sum_{v \sim u} (\omega(u, v) - \omega(v, u)). \quad \blacklozenge$$

Notons que ω_M est de divergence 1 sur les sommets blancs et -1 sur les sommets noirs.

Nous introduisons maintenant la notion de flux traversant une arête duale, ou plus généralement un chemin dual.

Définition 4. Soit ω un flot sur G et $\gamma = e_1^*, \dots, e_n^*$ un chemin dual. On pose (u_k, v_k) l'unique arête orientée de G qui coupe e_k^* de gauche à droite (où e_k^* est orientée dans le sens de γ). Le flux associé à ω traversant γ , noté $\Phi(\gamma, \omega)$ est défini par :

$$\Phi(\gamma, \omega) = \sum_{k=1}^n [\omega(u_k, v_k) - \omega(v_k, u_k)]$$

◆

Dans la suite nous aurons besoin de fixer un flot ayant la même divergence que ω_M , c'est-à-dire 1 sur les sommets blancs et -1 sur les sommets noirs. Ce flot nous le notons ω_0 et jouera le rôle de référence pour définir la fonction de hauteur. Il peut par exemple provenir d'une configuration de dimères. Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour définir la fonction de hauteur h_M associée à une configuration de dimères M .

Théorème et Définition 2.1.1: Soit ω_0 le flot de référence préalablement fixé, f_0 une face de G et M une configuration de dimères sur G . La fonction de hauteur h_M associée à M est définie par :

- $h_M(f_0) = 0$
- pour toute autre face f de G , on considère un chemin dual $\gamma = e_1^*, \dots, e_n^*$ reliant f_0 à f . On pose :

$$h_M(f) = \Phi(\gamma, \omega_M - \omega_0)$$

C'est-à-dire, si (u_k, v_k) est l'unique arête orientée qui coupe e_k^* de gauche à droite (où e_k^* est orientée dans le sens de γ , de f_0 vers f), voir la Figure 3, on a :

$$h_M(f) = \sum_{k=1}^n [(\omega_M - \omega_0)(u_k, v_k) - (\omega_M - \omega_0)(v_k, u_k)].$$

Cette définition est cohérente, elle ne dépend pas du chemin dual γ et de plus l'application $M \mapsto h_M$ est injective.

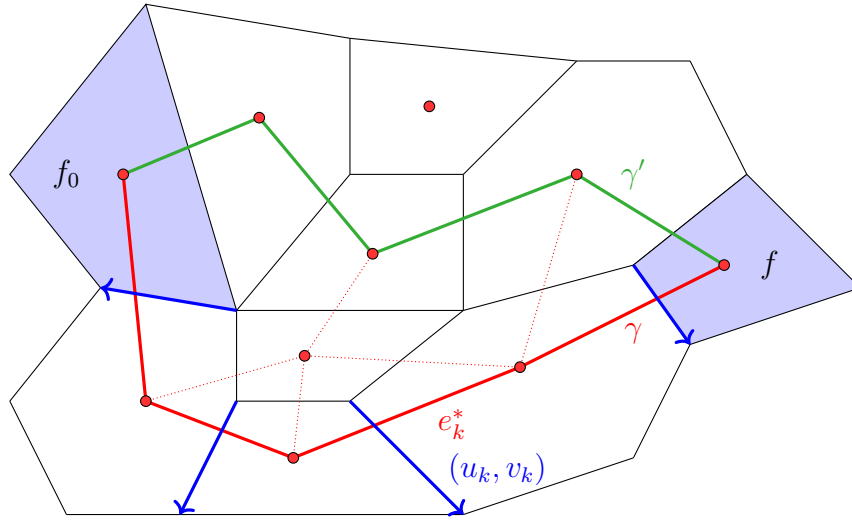


FIGURE 3: Illustration de la construction de h_M .

La preuve de ce théorème repose sur le fait que $\omega_M - \omega_0$ est de divergence nulle. Ce qui implique que passer par γ ou γ' (voir Figure 3) revient au même car le flux à travers le cycle $\gamma - \gamma'$ vaut la somme des divergences en les sommets de G à l'intérieur du cycle, donc 0.

Pour le modèle double, la fonction de hauteur est simplement la différence des fonctions de hauteurs (donc définie juste sur l'intersection des deux graphes). Toutefois il faut faire attention à bien prendre les mêmes flots de références pour les deux graphes, cela permettra de relier la hauteur aux boucles et chemins. Comme la restriction d'un flot de référence n'en est pas forcément un, généralement ce qui est fait c'est de prendre un flot sur $G_1 \cup G_2$ qui a la bonne divergence sur les sommets de $G_1 \cap G_2$ et pour calculer les hauteurs simples d'utiliser uniquement des chemins duaux qui coupent des arêtes incidentes à au moins un sommet de $G_1 \cap G_2$ pour éviter tout problème de cohérence de définition de la hauteur.

Grâce à ce petit détail technique, la hauteur double se comporte bien, elle ne varie que lorsque qu'on traverse une chaîne (boucle ou chemin) : dans le calcul des hauteurs simples, la contribution de la référence est la même et donc elle disparaît lors de la soustraction, si on ne traverse pas de dimère les flots associés aux configurations sont nuls et donc pas de variation de hauteur double.

Nous pouvons aussi définir une orientation sur les chaînes qui facilite le calcul de la fonction de hauteur. Par définition on oriente une chaîne dans le sens qui fait que les arêtes bleues vont des sommets noirs vers les sommets blancs. On vérifie ensuite que si l'on traverse une chaîne de gauche à droite, la hauteur augmente de 1 si l'orientation de la chaîne pointe vers le haut et diminue de 1 si l'orientation pointe vers le bas, voir Figure 4. (Ici les arêtes bleues sont les arêtes de la première configuration et les rouges celles de la deuxième et $h = h_1 - h_2$.)

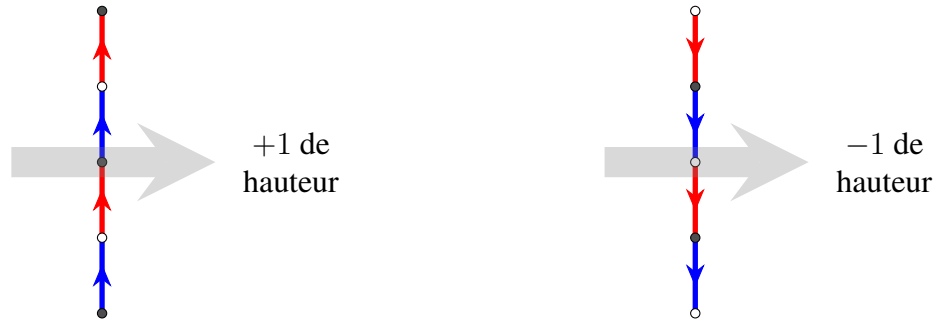


FIGURE 4: Lien entre orientation et variation de hauteur double.

2.1.4 La bijection de Temperley

Une reformulation intéressante du modèle de dimères c'est la bijection de Temperley qui permet de passer des couplages parfaits aux arbres couvrants.

Définition 5. Soit G un graphe connexe. Un arbre couvrant de G est un sous-graphe de G connexe, sans cycle et tel que tous les sommets de G appartiennent à l'arbre couvrant. \blacklozenge

La bijection de Temperley consiste à prendre un graphe H connexe, choisir un sommet \bar{v} quelconque de H puis un sommet dual \bar{f} de H^* bien choisi en fonction du sommet \bar{v} de H choisi puis ensuite le résultat de Temperley assure que les arbres couvrants sur H sont en bijections "naturelle" avec les configurations de dimères sur un graphe G fonction uniquement de H , \bar{v} et \bar{f} . Pour faire simple G est la superposition de H et de H^* à laquelle les deux sommets choisis ont été enlevés. Nous expliciterons cette bijection précisément dans la sous-section 2.2 uniquement pour les graphes qui nous intéressent. Notons tout de même que puisque $H^{**} = H$, nous pouvons très bien travailler avec les arbres couvrants de H^* .

Pour plus de détails sur la bijection de Temperley nous référons le lecteur à l'article [KPW99].

2.1.5 L'algorithme de Wilson

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les questions sur les configurations de dimères peuvent se reformuler en questions sur les arbres couvrants. L'intérêt principal des arbres couvrants c'est que l'on peut les échantillonner selon un algorithme, l'algorithme de Wilson, en utilisant des marches aléatoires. Les questions sur les configurations de dimères se ramènent donc à des questions sur les marches aléatoires.

Définition 6. Soient G un graphe et $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ une marche aléatoire sur G . La marche aléatoire à boucles effacées (en avant) de X est la marche notée $\text{FLE}(X)$ (pour "forward loop erasure") et définie récursivement comme suit :

- Si X est une marche auto évitante, $\text{FLE}(X) = X$.
- Sinon, soit $k = \min\{i \leq n \mid \exists j < i, X_j = X_i\}$ et j l'unique indice tel que $j < k$ et $X_k = X_j$. On pose alors $\text{FLE}(X) = \text{FLE}(X_0, \dots, X_j, X_{k+1}, \dots, X_n)$. \blacklozenge

Théorème 2.1.1 (Algorithme de Wilson): Soit $G = (V, E)$ un graphe fini connexe. L'algorithme suivant tire un arbre couvrant sur G selon la loi uniforme :

- On se donne un ordre sur V ; $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ possiblement aléatoire, de loi quelconque.
- On initialise notre futur arbre couvrant à $\mathcal{T} = (v_0, \emptyset)$.
- Pour chaque sommet restant dans l'ordre choisi, on tire une marche aléatoire simple X partant de ce sommet que l'on arrête au moment où elle touche \mathcal{T} , ce qui arrive presque sûrement. On ajoute à \mathcal{T} les sommets et arêtes intervenant dans $\text{FLE}(X)$.
- On reprend le troisième point jusqu'à ce que tous les sommets soient dans \mathcal{T} .

Notons qu'il est possible de généraliser cet algorithme en mettant des poids sur les arêtes et donc en tirant des arbres biaisés. Nous nous limitons au cas uniforme, le seul qui nous servira.

Pour une preuve de ce théorème, nous revoyons vers l'article de Wilson [Wil96].

2.2 La question au coeur du stage

2.2.1 Définitions des réseaux

Nous allons maintenant définir quels sont les graphes qui vont nous intéresser dans toute la suite.

Soit \mathcal{C} le carré $[-1, 1]^2$ du plan. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Pour alléger les notations, le premier graphe du modèle double sera noté en bleu et le second en rouge. Nous définissons les réseaux carrés suivants, voir Figure 5 :

$$G_n := \left[\left(\frac{1}{2n} \mathbb{Z}^2 \right) \cap \mathcal{C} \right] \setminus (0, -1)$$

$$G_n := \left[\left(\frac{1}{2n} \mathbb{Z}^2 \right) \cap \mathcal{C} \right] \setminus (0, 1)$$

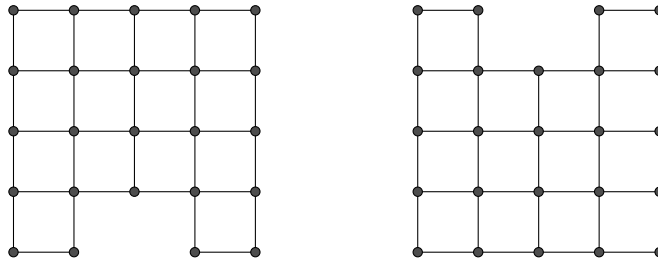


FIGURE 5: G_1 à gauche et G_1 à droite.

Le modèle de dimères double que nous considérons est issu de la superposition indépendante des modèles simples uniformes sur G_n et G_n . Comme expliqué dans la sous-section 2.1.2, de la superposition de ces deux modèles, il se crée un unique chemin aléatoire, noté Γ_n reliant $(0, -1)$ à $(0, 1)$. La Figure 6 montre un exemple de ce chemin pour $n = 1$.

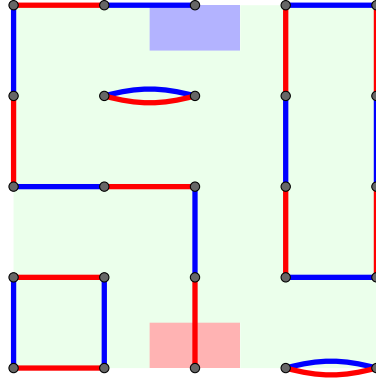


FIGURE 6: Configuration de double dimères sur (G_1, G_1) . Les arêtes rouges (resp. bleues) sont les dimères de la configuration sur G_1 (resp. G_1). En vert, $G_1 \cap G_1$, en bleu, $G_1 \setminus G_1$ et en rouge, $G_1 \setminus G_1$. On peut observer le chemin reliant la différence symétrique.

Nous utiliserons indifféremment n ou $\delta = 1/4n$ la maille des réseaux. Nous nous intéressons au comportement du chemin Γ_n quand $n \rightarrow \infty$ ou de manière équivalente quand $\delta \rightarrow 0$. La figure en première page de ce rapport est un tirage du modèle double pour $n = 140$. La hauteur double y est représentée en échelle de couleur et le chemin Γ est tracé en cyan.

Notre objectif est de montrer que le chemin Γ_δ n'est pas trop "space-filling" dans la limite $\delta \rightarrow 0$. Pour cela nous chercherons à démontrer des inégalités du type :

$$\mathbb{P}(\text{dist}(\Gamma_\delta, x) \leq f(\delta)) \leq g(\delta)$$

où x est un point du carré \mathcal{C} , $f(\delta)$ suffisamment grand devant δ , au moins $\delta = o(f(\delta))$, et $g(\delta)$ qui tend vers 0 quand $\delta \rightarrow 0$.

2.2.2 La bijection de Temperley dans notre cas particulier

Dans notre cas précis il faut choisir pour la bijection de Temperley le graphe $H_n = \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{C}$. Pour des raisons de clarté et d'esthétisme le sommet de H_n^* associé à la face extérieure de H_n est délocalisé tout autour de H_n .

Pour G_n on choisit le sommet $\bar{v} = (0, -1)$ et \bar{f} le sommet dual associé à la face extérieure. Le réseau G_n est obtenu ainsi à partir de H_n , \bar{v} et \bar{f} : nous superposons H_n et H_n^* pour former un réseau de maille deux fois plus petite, les sommets sont :

- les sommets de H_n ,
- les sommets de H_n^* ,
- les intersections entre les arêtes et les arêtes duales,

et les arêtes sont :

- les arêtes coupées en deux (au niveau des sommets de type "intersection"),
- les arêtes duales coupées en deux (au niveau des sommets de type "intersection").

Enfin il ne reste plus qu'à retirer \bar{v} , \bar{f} et les arêtes incidentes pour obtenir G_n , voir Figure 7.

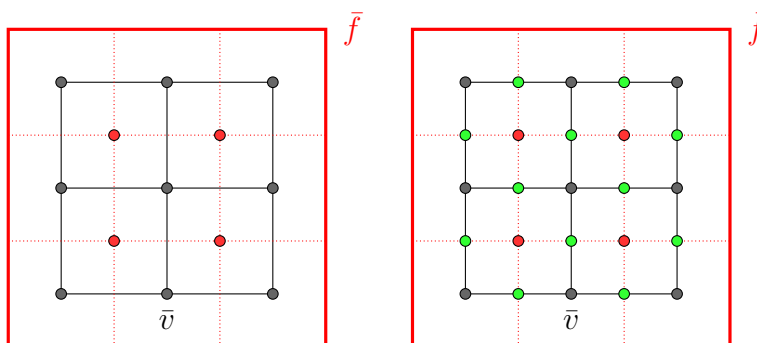


FIGURE 7: A gauche, H_1 et H_1^* superposés, à droite, illustration de la construction de G_1 .

Étant donné un arbre couvrant \mathcal{T} sur H_n nous allons avoir besoin de la notion d'arbre couvrant dual \mathcal{T}^* défini comme l'ensemble des arêtes de H_n^* (ainsi que les sommets qui sont incidents à ces arêtes) qui ne sont pas coupées par une arête de \mathcal{T} . Nous obtenons ainsi un arbre couvrant de H_n^* qui vérifie aussi $\mathcal{T}^{**} = \mathcal{T}$.

La bijection de Temperley fonction de la manière suivante.

Soit \mathcal{T} un arbre couvrant sur H_n , \mathcal{T}^* son dual. Nous orientons \mathcal{T} et \mathcal{T}^* de sorte que \bar{v} et \bar{f} en soient leur racine respective. Les arêtes appartenant à la configuration de dimères sur G_n sont exactement les premières moitiés des arêtes de \mathcal{T} et de \mathcal{T}^* . Voir Figure 8.

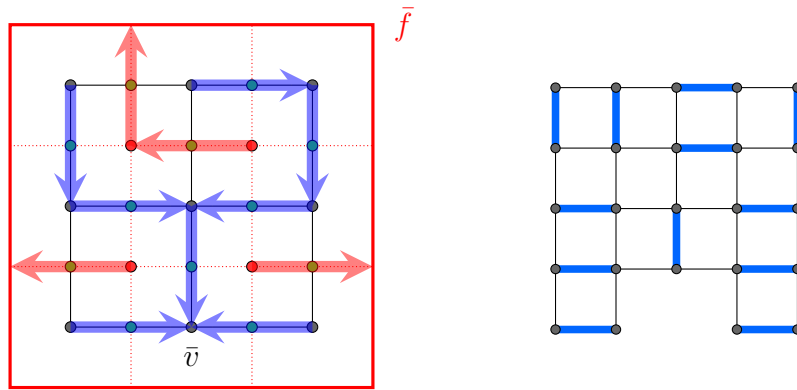


FIGURE 8: A gauche : \mathcal{T} orienté vers \bar{v} en bleu et \mathcal{T}^* orienté vers \bar{f} en rouge. A droite, la configuration de dimères associée en bleu.

Puisque nous pouvons tirer indifféremment \mathcal{T} ou \mathcal{T}^* , nous tirerons \mathcal{T}^* puisqu'en initialisant l'algorithme de Wilson avec le sommet \bar{f} , cela revient à stopper les marches aléatoires à leur sortie du réseau carré, ce qui est une condition beaucoup plus agréable à manipuler que de toucher un sommet particulier. Ce type de condition d'arrêt est appelé condition "wired".

2.2.3 Arbre couvrant et hauteur

Terminons cette sous-section par le lien entre arbre couvrant et hauteur. Nous allons donner ce lien pour l'arbre couvrant dual puisque c'est celui-ci que nous tirerons avec l'algorithme de Wilson.

Par convention nous disons que les sommets de H_n et de H_n^* sont noirs et que les sommets de types "intersection" sont blancs. Nous définissons le flot de référence sur le réseau infini par :

$$\begin{aligned}\omega_{\text{ref}}(w, b) &= \frac{1}{4} \\ \omega_{\text{ref}}(b, w) &= 0.\end{aligned}$$

Avec cette référence, la variation de hauteur simple entre deux faces de G_n reliées (nous donnerons une définition précise juste en dessous) par une branche d'arbre couvrant dual est égal, à un facteur 2π près, à l'enroulement intrinsèque de la branche d'arbre couvrant ;

$$h(f_2) - h(f_1) = \frac{1}{2\pi} \text{Wind}(\mathcal{B}) + O(1).$$

Ici, la branche \mathcal{B} part de la face f_1 pour aller vers la face f_2 . Le $O(1)$ est déterministe et cache pour l'instant la signification de "partir" et "arriver en une face".

Le plus simple c'est de rajouter à l'arbre couvrant dual, pour chaque face (de G_n), une petite flèche partant du centre de la face vers le sommet dual (ie sommet de H_n^*) le plus proche, voir Figure 9. Si l'on compte ces petites flèches dans l'enroulement des branches alors nous obtenons exactement, modulo 2π , la variation de hauteur. La face f_1 doit être reliée via sa petite flèche au début de la première arête et la face f_2 doit être reliée à la tête de la dernière arête.

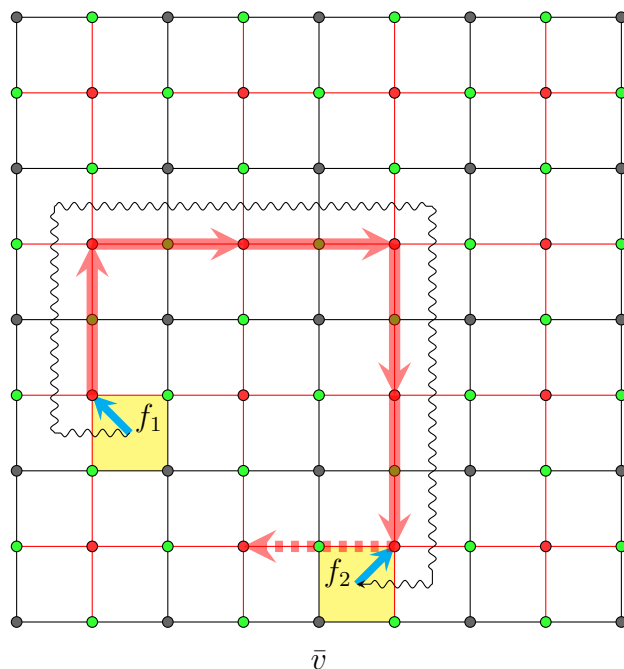


FIGURE 9: La branche \mathcal{B} est en rouge, les petites flèches rajoutées sont en cyan, le chemin dual est en dessiné en traits noirs ondulés.

Pour comprendre pourquoi, il suffit de considérer le chemin dual représenté dans la Figure 9 (il faut prendre le chemin dual qui longe la branche sans la traverser et sans non plus traverser l'arête suivante de l'arbre dual dessinée en pointillés dans la Figure 9). Par définition de la bijection de Temperley, ce chemin dual ne croise aucun dimère, il suffit donc de compter la contribution du flot de référence. Pour cela nous interprétons le flot de référence comme l'enroulement d'un certain chemin γ ;

$$\omega_{\text{ref}}(w, b) = \frac{1}{2\pi}(\text{Wind}(\gamma) + \pi)$$

où γ est le chemin reliant les milieux des faces adjacentes à (w, b) via les diagonales des faces partant des sommets noirs, voir Figure 10.

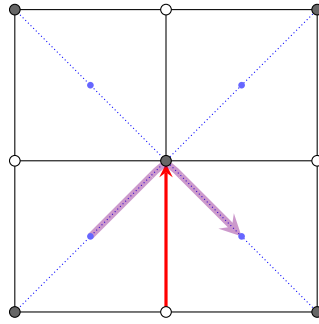


FIGURE 10: En rouge l'arête orientée (w, b) et en violet le chemin γ .

Ensuite il suffit comme expliqué sur la Figure 11 de faire apparaître ces chemins violets, de simplifier les $\pm\pi$ et de raccorder les demis tours pour voir apparaître l'enroulement souhaité.

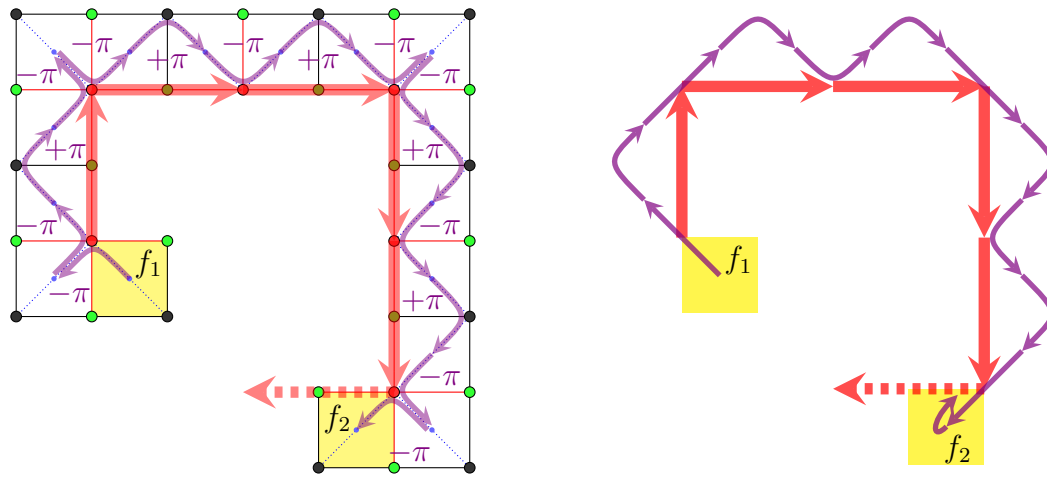


FIGURE 11: A gauche, la contribution de ω_{ref} à la variation de hauteur est représentée par l'enroulement des chemins violets et des $\pm\pi$. A droite, le chemin violet raccordé, le reste des $\pm\pi$ se sont simplifiés.

Pour récapituler, il suffit de lire :

$$\text{Wind} \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow \text{dashed} \\ \nearrow \end{array} \right) = \text{Wind} \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \right) - \text{Wind} \left(\begin{array}{c} \leftarrow \\ \nearrow \end{array} \right).$$

Remarquons aussi, ce sera utile par la suite, que la hauteur est fixée sur le bord, elle vaut nécessairement l'enroulement du bord du réseau.

2.3 Adaptation d'un article de Benoît Laslier : un premier résultat

Dans cette sous-section nous allons donner une première méthode pour obtenir un contrôle de la distance entre le chemin et un point de \mathcal{C} , disons l'origine. L'argument principal de ce raisonnement est un résultat sur l'enroulement de la marche à boucles effacées développé dans l'article [Las17]. Le résultat qui nous intéresse est le suivant. Dans toute la suite, X est une marche aléatoire simple sur le réseau carré de maille δ et stoppée à sa sortie du réseau.

Lemme 2.3.1: *Il existe $\delta_0 > 0$ et une constante $C > 0$ indépendantes de δ tels que pour tout réseau carré G contenant au moins $B(0, R)$, de maille $\delta \leq R\delta_0$, pour tout point u en lequel $\text{FLE}(X)$ peut se terminer (ie sortir de G), évènement que l'on note ($\text{FLE}(X)$ sort en u), on ait :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P} \left(\text{Wind}(\text{FLE}(X)) = \frac{n\pi}{2} \mid \text{FLE}(X) \text{ sort en } u \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\log R/\delta}}.$$

Introduisons une terminologie qui nous sera utile.

Définition 7. Soit X une variable aléatoire discrète et $\varepsilon > 0$. X est dite **diffuse en ε** si :

$$\forall x, \mathbb{P}(X = x) \leq \varepsilon. \quad \blacklozenge$$

Le lemme se résume donc en : " $\text{Wind}(\text{FLE}(X))$ est diffuse en $\frac{C}{\sqrt{\log R/\delta}}$ pour la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \mid \text{FLE}(X) \text{ sort en } u)$ ".

2.3.1 Une première estimée logarithmique

Nous allons nous appuyer sur le Lemme 2.3.1 pour démontrer une première estimée. La qualité de l'estimée obtenue dépend que du lemme qui est optimal modulo les constantes multiplicatives, nous ne pourrions donc pas obtenir mieux avec cette méthode. Énonçons le théorème que nous allons démontrer.

Théorème 2.3.1: *Il existe $\delta_0 > 0$ et une constance $C > 0$ tels que pour tout $\delta < \delta_0$ on ait :*

$$\mathbb{P} \left(\text{dist}(\Gamma_\delta, 0) \leq \delta(\log 1/\delta)^{1/4} \right) \leq \frac{C}{(\log 1/\delta)^{1/4}}.$$

DÉMONSTRATION. Dans cette preuve nous fixons les hauteurs simples sur G_n et G_n à 0 sur la face à droite du sommet $(0, -1)$ de sorte que le chemin Γ_n soit une ligne de niveau de hauteur 0.

Pour tirer une configuration double nous procédons ainsi :

- On tire une configuration sur G_n ,

- Pour tirer une configuration sur G_n nous tirons l'arbre couvrant dual \mathcal{T}^* avec l'algorithme de Wilson. Nous commençons par la branche issue de 0 (techniquement un des quatre sommets de la face de H_n^* dont 0 en est le centre), notée \mathcal{B} . Puis nous tirons les autres branches indifféremment.

Pour n assez grand, d'après le Lemme 2.3.1, pour tout point de sortie u ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P} \left(\text{Wind}(\mathcal{B}) = \frac{n\pi}{2} \mid \mathcal{B} \text{ sort en } u \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\log 1/\delta}}.$$

Rappelons que modulo un $O(1)$ déterministe,

$$h(u) - h(0) = \frac{1}{2\pi} \text{Wind}(\mathcal{B}),$$

et que $h(u)$ est déterministe puisque la hauteur est déterministe sur le bord. Il vient donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P} \left(h(0) = \frac{n}{4} \mid \mathcal{B} \text{ sort en } u \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\log 1/\delta}}.$$

Puisque les tirages sur G_n et sur G_n sont indépendants et que la hauteur double $h = h - h$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P} (h(0) = n) \leq \frac{C}{\sqrt{\log 1/\delta}}.$$

Par borne d'union (la constante C change de ligne en ligne mais reste une constante),

$$\mathbb{P} (|h(0)| \leq (\log 1/\delta)^{1/4}) \leq \frac{C}{(\log 1/\delta)^{1/4}}.$$

Il suffit de se rappeler maintenant que h est lipschitzienne en $1/\delta$ et que Γ_δ est de hauteur 0. En effet, de ces deux observations nous concluons que sous le complémentaire de l'évènement $(|h(0)| \leq (\log 1/\delta)^{1/4})$, le chemin Γ_δ ne peut pas intersecter la boule $B(0, \delta(\log 1/\delta)^{1/4})$ sous peine de contredire la lipschitzianité de h , ce qui conclut. ■

2.3.2 Heuristique sur le Lemme 2.3.1

Nous donnons ici une idée de la preuve du Lemme 2.3.1.

La plus grande difficulté lors de l'étude des marches à boucles effacées c'est le fait que la géométrie de la marche à boucles effacées à un endroit donné va dépendre à la fois de ce

qui s'est passé avant et de ce qui se passera après pour la marche non effacée dont elle est issue. Toute l'idée pour attaquer ce problème c'est de montrer qu'il existe des échelles géométriques aléatoires dans lesquelles la géométrie de la marche classique contrôle celle de la marche à boucles effacées sans influence d'autres parties de la marche classique. Ces échelles sont appelées échelles isolées. Le contrôle que nous avons sur la marche classique dans les échelles isolées se propage en contrôle sur la marche à boucles effacées.

Ce que nous appelons "échelles géométriques" c'est les régions annulaires délimitées par des cercles successifs de centre 0 et dont les rayons forment une suite géométrique de raison > 1 . Les échelles sont indexées par un entier j qui correspond à la puissance de la raison associée à leur rayon. Nous notons toujours X la marche aléatoire sur le réseau carré de maille δ partant de 0.

Très grossièrement, une échelle j est isolée si j est pair et si lors du dernier passage de X au voisinage de l'échelle $j - 1$, X fait un tour complet dans l'échelle $j - 1$, puis traverse l'échelle j , passe dans l'échelle $j + 1$ et ne re-entre plus jamais vraiment dans l'échelle j . Les échelles isolées simplifient le comportement de l'effacement des boucles dans l'échelle en question.

Conditionnellement à ce qu'une échelle j soit isolée, nous nous intéressons à la portion de marche classique correspondant à la traversée de l'échelle j , notons la X_j . C'est une marche conditionnée à ses point de départ et de sortie d'un anneau. En utilisant des lemmes de contrôle de la trajectoire des marches aléatoires classiques nous exhibons un couplage (X_j^1, X_j^2) de X_j pour lequel, avec une probabilité strictement positive indépendante de j , X_j^1 et X_j^2 coïncident près des bords de l'anneau et suivent à peu près les chemins γ_1 et γ_2 de la Figure 12. Nous appelons cet évènement E_j .

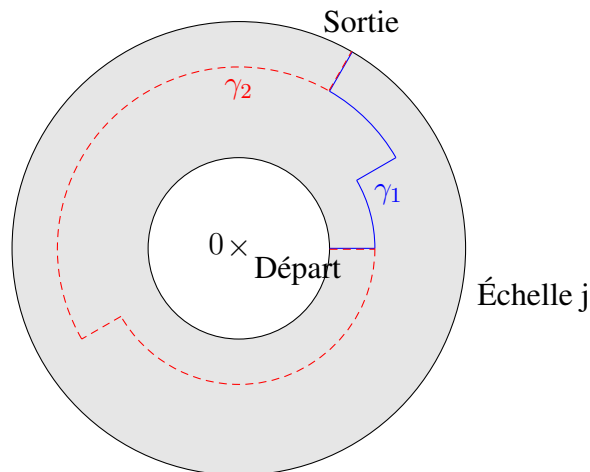


FIGURE 12: Représentation des chemins γ_1 et γ_2 .

L'idée de ce couplage c'est que quand l'évènement E_j se produit, en effaçant habilement les

boucles de X , l'enroulement de X varie d'un tour en fonction qui de X_j^1 ou X_j^2 est utilisé.

Donnons nous des choix ε_j de loi $\mathcal{B}(1/2)$ indépendants entre eux et de tout le reste. Nous pouvons alors écrire l'égalité en loi :

$$X = \tilde{X} \bigoplus_j [\mathbb{1}_{j \text{ isolée}}((1 - \varepsilon_j)X_j^1 + \varepsilon_j X_j^2)],$$

où \tilde{X} est la marche hors des échelles isolées. Nous pouvons aussi introduire les événements E_j :

$$X = \tilde{X} \bigoplus_j [\mathbb{1}_{j \text{ isolée}} \mathbb{1}_{E_j^c}((1 - \varepsilon_j)X_j^1 + \varepsilon_j X_j^2)] \bigoplus_j [\mathbb{1}_{j \text{ isolée}} \mathbb{1}_{E_j}((1 - \varepsilon_j)X_j^1 + \varepsilon_j X_j^2)].$$

La dernière étape est l'effacement des boucles. La clé pour faire cela c'est d'utiliser une autre méthode d'effacement que FLE qui se comporte mieux vis-à-vis des échelles isolées. Cette méthode d'effacement dépend de J l'ensemble des échelles paires (ie susceptibles d'être isolées) et nous la notons MLE_J . En loi, effacer avec l'une ou l'autre des méthode est équivalent car il existe une bijection f_J des marches aléatoires finies qui préserve les arêtes orientées utilisées dans la marche avec multiplicité et qui fait commuter les deux méthodes d'effacement : $\text{FLE}(f_J(X)) = \text{MLE}_J(X)$.

Le résultat important est le suivant.

Lemme 2.3.2: *Si j est isolée et que E_j se produit alors nous avons :*

- $\text{MLE}_J(\tilde{X} \oplus X_j^1)$ et $\text{MLE}_J(\tilde{X} \oplus X_j^2)$ coïncident hors de l'échelle j ,
- $\text{Wind}(\text{MLE}_J(\tilde{X} \oplus X_j^1)) = \text{Wind}(\text{MLE}_J(\tilde{X} \oplus X_j^2)) + 2\pi$.

Reprenons, en posant $Z = \tilde{X} \bigoplus_j [\mathbb{1}_{j \text{ isolée}} \mathbb{1}_{E_j^c}((1 - \varepsilon_j)X_j^1 + \varepsilon_j X_j^2)] \bigoplus_j [\mathbb{1}_{j \text{ isolée}} \mathbb{1}_{E_j} X_j^1]$, nous pouvons donc écrire l'égalité en loi :

$$\text{Wind}(\text{FLE}(X)) = \text{Wind}(Z) + 2\pi \sum_j \mathbb{1}_{j \text{ isolée}} \mathbb{1}_{E_j} \varepsilon_j.$$

La somme binomiale donne alors la dispersion souhaitée (qui va dépendre du nombre d'échelles et donc de R) dans le Lemme 2.3.1.

Pour plus de détails, voir l'article de Benoît Laslier partie 4.3 [Las17] ou la partie 4 du mémoire (peut-être un peu plus détaillé) [Leb21].

2.4 Nouvel angle d'approche et deuxième résultat sous l'hypothèse d'un lemme

2.4.1 Plan du raisonnement

Le but de cette section est de démontrer une estimée bien meilleure que celle donnée par le Théorème 2.3.1 en admettant un lemme (le Lemme 2.4.1) portant sur la plage de hauteur occupée par les chemins du modèle de dimères double traversant un anneau de rapport d'aspect fixé. Ce deuxième résultat améliore le côté distance (il y a un meilleur contrôle sur $\text{dist}(\Gamma_\delta, 0)$) mais pas le côté probabilité qui reste d'ordre logarithmique.

Soyons plus précis concernant ce lemme, pour cela définissons rigoureusement la plage de hauteur dont il est question. Nous nous plaçons toujours dans un réseau carré et il est question du modèle de dimères double.

Définition 8. Soit $A = A(0, r, R)$ un anneau. On dit qu'une collection de dimères inclus dans A du modèle double est une chaîne traversant A si cette collection forme une chaîne qui relie $B(0, r)$ à $B(0, R)^c$. \blacklozenge

Remarque: Une chaîne traversant A peut au choix être une partie d'une boucle "à cheval sur A " ou une partie du chemin Γ s'il intersecte $B(0, r)$.

Définition 9. Soit A un anneau, on appelle variation de hauteur de A la quantité que l'on note $\mathcal{V}(A)$ et définie par :

$$\mathcal{V}(A) = \sup_{\substack{\text{chaînes } \gamma \\ \text{traversant } A}} h(\gamma) - \inf_{\substack{\text{chaînes } \gamma \\ \text{traversant } A}} h(\gamma).$$

Où h est la fonction de hauteur double.

On appelle aussi intervalle de hauteur l'intervalle

$$\mathcal{I}(A) = \left[\inf_{\substack{\text{chaînes } \gamma \\ \text{traversant } A}} h(\gamma), \sup_{\substack{\text{chaînes } \gamma \\ \text{traversant } A}} h(\gamma) \right]. \quad \blacklozenge$$

Admettons le lemme suivant qui sera la clé du raisonnement de cette sous-section (la véracité de ce lemme reste actuellement inconnue).

Lemme 2.4.1: *Considérons le modèle de dimères double issu de la superposition de deux modèles simples sur des réseaux carrés de maille δ . Notons h la hauteur double. Il existe $\delta_0 > 0$, $C > 0$, $C' \geq 1$ et une constante $1 \geq c_{var} > 0$ tels que, pour tout $r > 0$, si $\delta < r\delta_0$ et que les réseaux contiennent au moins $B(0, C'r)$ alors on ait :*

$$\mathbb{P} \left(\mathcal{V}(A(0, r/2, r)) \geq C \sqrt{\log r / \delta} \right) \leq 1 - c_{var}.$$

Ce lemme offre une nouvelle perspective pour contrôler la distance du chemin Γ à 0. En effet si nous sommes capables de révéler la configuration double de plusieurs anneaux imbriqués les uns dans les autres tout en conservant suffisant d'aléatoire entre eux pour ne pas fixer leurs hauteurs relatives alors nous pouvons mener le raisonnement suivant. Si le chemin Γ (qui est une ligne de niveau de hauteur 0) entre à l'intérieur du plus petit anneau, alors l'intersection des intervalles de hauteur des anneaux contient 0. Or si les variations de hauteurs sont raisonnablement petites (ce qui arrive si on admet le lemme) et que les hauteurs relatives des anneaux, qui sont encore aléatoires, sont suffisamment diffuses, alors avec grande probabilité au moins un des intervalles de hauteurs ne contiendra pas 0, ce qui contraint Γ à rester à l'extérieur du plus petit anneau.

2.4.2 Réalisation du tirage des anneaux

Le modèle de dimères double est la superposition indépendante de deux modèles simples. Nous allons donc travailler sur un modèle simple (disons celui sur G_δ), découvrir des anneaux, faire fluctuer leurs hauteurs (simples) puis ensuite nous superposerons une configuration complète de G_δ pour obtenir un modèle double où les configurations de certains anneaux ont été révélées et où leurs hauteurs (doubles) fluctuent.

Le lemme suivant qui permet de tirer un anneau est la clé du tirage des anneaux (nous l'itérerons) et repose sur les deux résultats suivants :

- Si nous tirons toutes les branches issues d'un lot de sommets assez dense alors les branches issues du reste des sommets touchent très rapidement les premières branches tirées sans s'éloigner de leur point de départ. C'est l'idée générale du lemme de finitude de Schramm.
- Nous pouvons contrôler la distance entre un point u et une marche à boucles effacées partant de d'un autre point v jusqu'à sa sortie du réseau. A l'inverse d'une marche classique qui a tendance à s'approcher de tous les points, une marche à boucles effacées s'approche rarement d'un point particulier. L'idée est que si la marche non effacée s'approche, alors lorsque qu'elle va s'éloigner pour sortir du réseau il y a possibilité d'effacer toute la partie proche du point en question.

Soit $A = A(0, r/2, r)$ l'anneau que nous allons tirer. Il faut garder l'aléatoire de la première branche pour qu'à la fin les hauteurs relatives soient encore aléatoires. Pour cela nous tirons la première branche, notée \mathcal{B}_0 issue d'un sommet v_0 quelconque de A . Nous tirons tout sauf les choix ε_j pour lesquels $j \in L$: l'ensemble des échelles isolées j situées hors de $B(0, r(\log 1/\delta)^K)$ et où l'évènement E_j se produit. K sera précisé dans le lemme. C'est-à-dire que nous tirons la marche hors des échelles isolées, les couplages et les choix ε_j pour $j \notin L$. Nous obtenons une branche aléatoire

$$\mathcal{B}_0(\varepsilon_j, j \in L) = \text{MLE}_J \left(\tilde{X} \bigoplus_{j \in L} [(1 - \varepsilon_j)X_j^1 + \varepsilon_j X_j^2] \right)$$

où \tilde{X} est la marche hors des échelles $j \in L$.

Enfin nous notons $\mathcal{T}(A, \varepsilon_j, j \in L)$ un tirage de toutes les branches issues des sommets de A (la branche issue de v_0 étant déjà tirée mais encore aléatoire, elle peut influencer le tirage de A d'où la dépendance en les ε_j).

Lemme 2.4.2: Soit $\kappa > 0$, il existe alors $K > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour tout tirage de $\mathcal{B}_0(\varepsilon_j, j \in L)$ comme précédemment où il ne reste que les ε_j pour $j \in L$ d'aléatoires, il existe un évènement F uniforme en toutes les réalisations des $\varepsilon_j, j \in L$ sous lequel si $\delta < r\delta_0$:

— on ait premièrement :

$$\mathcal{T}(A, \varepsilon_j, j \in L) \setminus \{\mathcal{B}_0(\varepsilon_j, j \in L)\} \subset A(0, r(\log 1/\delta)^{-K}, r(\log 1/\delta)^K)$$

— ainsi que, dans $A(0, r(\log 1/\delta)^{-K}, r(\log 1/\delta)^K)$, on ait :

$$\mathcal{T}(A, \varepsilon_j, j \in L) = \mathcal{T}(A, 0, j \in L)$$

— et :

$$\mathbb{P}(F) \geq 1 - \frac{1}{(\log 1/\delta)^\kappa}.$$

Remarque: Ce lemme est uniforme en tous les réseaux contenant $B(0, r(\log 1/\delta)^K)$ et en $r > 0$. L'uniformité de F vient du fait que dans $A(0, r(\log 1/\delta)^{-K}, r(\log 1/\delta)^K)$, la branche $\mathcal{B}_0(\varepsilon_j, j \in L)$ n'est pas aléatoire.

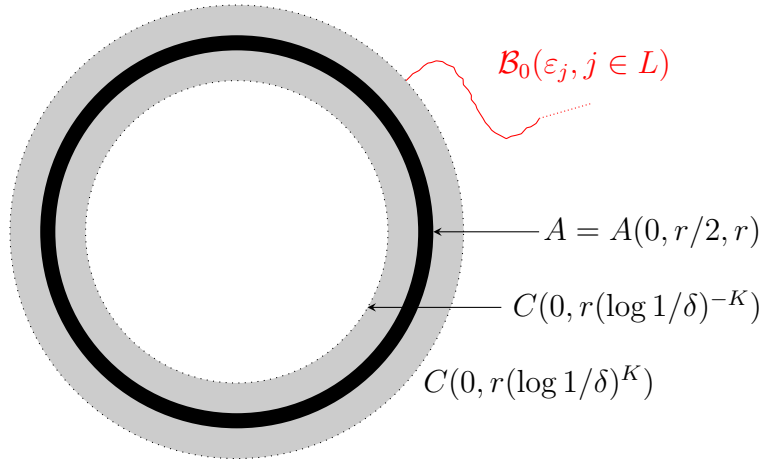


FIGURE 13: Représentation schématique du Lemme 2.4.2, toutes les branches issues de A sont tirées et ne dépassent pas la zone grisée (sauf \mathcal{B}_0). Ici la branche \mathcal{B}_0 est choisie de telle sorte qu'elle ne rentre pas dans $B(0, r(\log 1/\delta)^{-K})$: c'est dans ce cas que nous utiliserons ce résultat. La branche \mathcal{B}_0 possède encore de l'aléatoire qui permet notamment de faire fluctuer son enroulement et donc de faire fluctuer la hauteur en bloc de l'anneau A . Cet aléatoire n'a pas d'influence sur le tirage dans la zone grisée.

Itérons maintenant le Lemme 2.4.2 pour tirer tous les anneaux que nous introduisons ci-dessous.

Soient $0 < \varepsilon < 1/4$ et $0 < \beta < 1$, nous allons considérer les anneaux suivants :

- $A_k := A(0, r_k/2, r_k)$ pour $1 \leq k \leq N(\delta)$.
- avec $r_k := \delta^{1-\varepsilon^k}$
- et $N(\delta) := \beta \frac{\log \log 1/\delta}{\log 1/\varepsilon}$ (techniquement n'importe quel arrondi entier de cette valeur).

Nous allons appliquer le Lemme 2.4.2 pour l'anneau A_1 et une bonne branche $\mathcal{B}_0^{(1)}$ puis nous l'appliquons pour l'anneau A_2 avec comme le domaine sous-jacent le domaine aléatoire laissé libre de toute branche à l'intérieur de A_1 contenant au moins $B(0, r_1(\log(1/\delta))^{-K})$. La branche $\mathcal{B}_0^{(2)}$ est donc une branche tirée avec ce nouveau bord. Et ainsi de suite. Voir Figure 14.

Pour que les choses se passent bien nous avons besoin d'avoir des branches $\mathcal{B}_0^{(k)}$ qui se comportent bien. Pour cela il y a deux critères :

- La branche $\mathcal{B}_0^{(k)}$ ne doit pas trop déborder à l'intérieur, plus précisément elle n'intersecte pas la boule $B(0, r_k(\log 1/\delta)^{-K})$ (le dessin à avoir en tête est celui de la Figure 13).
- Pour faire fluctuer les hauteurs relatives il faut des échelles isolées où l'évènement E du couplage se produise. Nous demandons donc que ces échelles soit en grand nombre, c'est-à-dire que l'ensemble $L^{(k)}$ soit grand.

Nous ne détaillons pas plus ces deux conditions (voir [Leb21] partie 5.3), mais elles ont un coût en probabilité du même ordre que le coût du Lemme 2.4.2.

Passons maintenant à l'itération du Lemme 2.4.2 :

Tirage du premier anneau.

Commençons par tirer une branche $\mathcal{B}_0^{(1)}$ en gardant l'aléatoire des échelles dans $L^{(1)}$ (ie qui sont isolées et où l'évènement E du couplage se produit) qui satisfait aux deux conditions : " $L^{(1)}$ grand" et " $\text{dist}(\mathcal{B}_0^1, 0) \geq r_1(\log 1/\delta)^{-K}$ ". Cela nous coûte au plus en probabilité $2 \times (\log 1/\delta)^{-\kappa}$.

Sous le tirage d'une telle première branche, appliquons le Lemme 2.4.2 (avec comme domaine sous-jacent D_1 égal au réseau G_δ).

Finalement, avec probabilité d'au moins

$$\left(1 - \frac{1}{(\log 1/\delta)^\kappa}\right) \times \left(1 - \frac{2}{(\log 1/\delta)^\kappa}\right) \geq 1 - \frac{3}{(\log 1/\delta)^\kappa}$$

nous obtenons un tirage de toutes les branches de A_1 où les choix ε_j pour $j \in L^{(1)}$ ne sont pas encore tirés, " $L^{(1)}$ est grand", excepté $\mathcal{B}_0^{(1)}$, les branches ne sortent pas de l'anneau $A(0, r_1(\log 1/\delta)^{-K}, r_1(\log 1/\delta)^K)$ et où $\mathcal{B}_0^{(1)}$ n'intersecte pas $B(0, r_1(\log 1/\delta)^{-K})$. Nous disons que " A_1 est bien tiré".

Tirage du deuxième anneau.

Sous un tirage du premier anneau comme décrit si dessus, nous disposons d'un domaine (aléatoire) dont le bord est donné par les branches issues du tirage de A_1 , noté D_2 , contenant au moins $B(0, r_1(\log 1/\delta)^{-K})$ et tel qu'aucune branche du premier tirage ne l'intersecte.

Tirons les branches de l'anneau A_2 exactement comme pour l'anneau A_1 avec avec comme domaine sous-jacent le domaine D_2 (le Lemme 2.4.2 est uniforme en le réseau sous-jacent).

Conditionnellement au premier tirage, nous obtenons un tirage du second anneau vérifiant les mêmes propriétés (à l'indice 2) avec probabilité d'au moins :

$$1 - \frac{3}{(\log 1/\delta)^\kappa}.$$

Tirage du k -ième anneau.

Conditionnellement à ce que les $k - 1$ premiers anneaux ont été bien tirés, nous tirons le k -ième anneau comme les anneaux précédents avec comme domaine sous-jacent le domaine (aléatoire) dont le bord est donné par les branches issues du tirage de A_{k-1} , noté D_k , contenant au moins $B(0, r_{k-1}(\log 1/\delta)^{-K})$ et tel qu'aucune branche des tirages précédents ne l'intersecte.

Conditionnellement aux premiers tirages, nous obtenons un tirage du k -ième anneau vérifiant les mêmes propriétés (à l'indice k) que les tirages précédents avec probabilité d'au moins :

$$1 - \frac{3}{(\log 1/\delta)^\kappa}.$$

Tirage total.

Au final, nous obtenons un tirage des $N(\delta)$ anneaux où, grâce aux échelles L_k , la hauteur relative d'un anneau par rapport à celle de l'anneau précédent est aléatoire et fluctue indépendamment des autres anneaux. Nous obtenons un tel "bon tirage" avec probabilité d'au moins :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3}{(\log 1/\delta)^\kappa}\right)^{N(\delta)} &\geq 1 - \frac{3N(\delta)}{(\log 1/\delta)^\kappa} \\ &= 1 - \frac{3\beta \log \log 1/\delta}{\log 1/\varepsilon (\log 1/\delta)^\kappa} \end{aligned}$$

Remarque: Notons que pour pouvoir appliquer le Lemme 2.4.2 il faut $\delta \leq \delta^{1-\varepsilon^{N(\delta)}} \delta_0$ c'est-à-dire,

$$N(\delta) \leq \frac{\log \left(\frac{\log 1/\delta}{\log 1/\delta_0} \right)}{\log 1/\varepsilon}.$$

Ce qui explique notre choix de $N(\delta)$.

La Figure 14 récapitule ce qui a été discuté dans cette sous-sous-section.

Tirons une configuration complète sur G_δ . Supposons les anneaux (de G_δ) bien tirés jusqu'à A_{k-1} . Sous cet évènement le tirage de A_k est un bon tirage avec probabilité d'au moins $1 - \frac{3}{(\log 1/\delta)^\kappa}$. Nous savons aussi, d'après le Lemme 2.4.1 sous lequel nous travaillons qu'avec probabilité d'au moins c_{var} , $\mathcal{V}(A_k) \leq C\sqrt{\log(r_k/\delta)}$. Par borne d'union, quitte à réduire c_{var} , le tirage est un bon tirage et la variation " $\mathcal{V}(A_k)$ est petite" (vérifie d'inégalité ci-dessus) avec probabilité d'au moins c_{var} et cela indépendamment du bon tirage des $k - 1$ premiers anneaux.

Finalement par des résultats d'inégalités classiques en probabilité (Markov exponentielle), conditionnellement au bon tirage de tous les anneaux, il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\text{au moins } c_1 N(\delta) \text{ anneaux vérifient " } \mathcal{V}(A_k) \text{ petite" } \mid \text{ le tirage total est un bon tirage}) \\ &\geq 1 - e^{-c_2 N(\delta)} = 1 - \frac{1}{(\log 1/\delta)^{c_3}}. \end{aligned}$$

Enfin, quitte à réduire c_3 , en prenant κ pas trop petit,

$$\mathbb{P}(\text{le tirage total est bon tirage et au moins } c_1 N(\delta) \text{ anneaux vérifient " } \mathcal{V}(A_k) \text{ petite"}) \geq 1 - \frac{1}{(\log 1/\delta)^{c_3}}.$$

Cela conclut le tirage des anneaux.

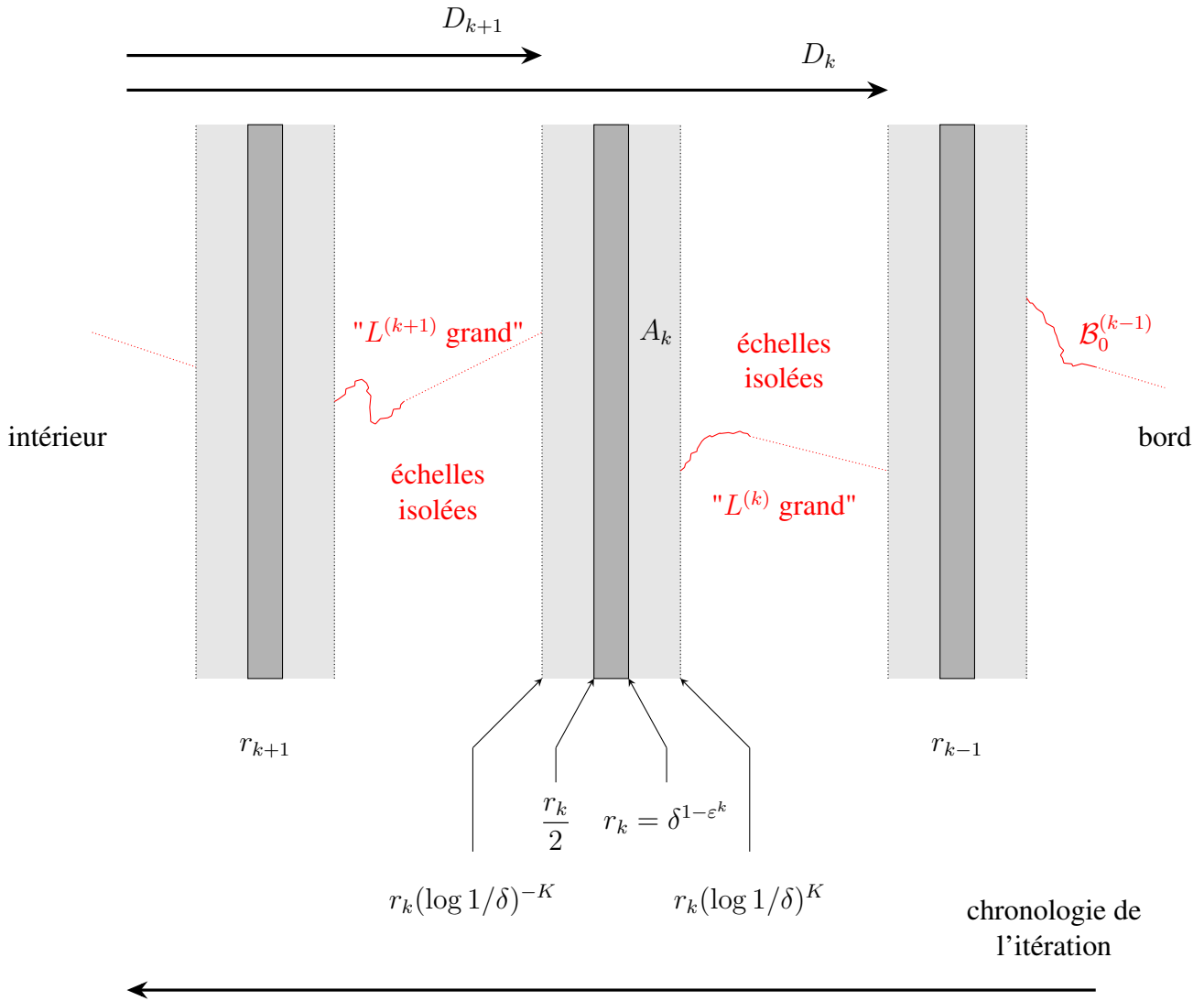


FIGURE 14: Représentation schématique de l'itération du Lemme 2.4.2.

2.4.3 Une deuxième estimée

Reprenons le tirage des anneaux là où nous l'avons laissé. La condition (non développée) sur le nombre d'échelles isolées avec l'évènement E_j assure que la différence de hauteur entre A_k et A_{k-1} est diffuse en $1/(c_4\sqrt{\varepsilon^{k-1}\log 1/\delta})$ pour une constante $c_4 > 0$. C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(h(A_k) - h(A_{k-1}) = n) \leq \frac{1}{c_4\sqrt{\varepsilon^{k-1}\log 1/\delta}}.$$

Explorons les anneaux de l'extérieur vers l'intérieur : nous tirons enfin les choix ε_j laissés aléatoires en commençant par ceux de A_1 puis A_2 etc.

Supposons les ε_j tirés pour tous les anneaux jusqu'à A_{k-1} . Si l'anneau k a une variation de

hauteur " $\mathcal{V}(A_k)$ petite", alors lors du tirage de ses ε_j , la probabilité que 0 soit dans l'intervalle $\mathcal{I}(A_k)$ est majorée par,

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}(A_k) \times \frac{1}{c_4 \sqrt{\varepsilon^{k-1} \log 1/\delta}} \\ & \leq \frac{C \sqrt{\log(r_k/\delta)}}{c_4 \sqrt{\varepsilon^{k-1} \log 1/\delta}} \\ & \leq C_5 \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Puisqu'il y a au moins $c_1 N(\delta)$ anneaux avec une variation de hauteur petite, la probabilité que 0 soit dans l'intersection des intervalles de hauteur est majorée par,

$$(C_5 \sqrt{\varepsilon})^{c_1 N(\delta)} \leq (\log 1/\delta)^{-c_1 \beta/2 + \eta}$$

pour $\eta > 0$ quelconque et $\varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$. Or rappelons que pour que Γ_δ intersecte $B(0, r_{N(\delta)}/2)$, il est nécessaire que 0 soit dans l'intersection des intervalles de hauteur. Nous obtenons donc l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P} \left(\text{dist}(\Gamma, 0) \leq \frac{1}{2} r_{N(\delta)}/2 \right) \leq (\log 1/\delta)^{-c_1 \beta/2 + \eta} + (\log 1/\delta)^{-c_3} .$$

En remplaçant $r_{N(\delta)}$ nous obtenons notre deuxième résultat.

Théorème 2.4.1: *Il existe des constantes c_1 et c_3 telles que pour tout $0 < \beta < 1$ et pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\beta, \eta) > 0$ tel que si $\delta < \delta_0$ on ait :*

$$\mathbb{P} \left(\text{dist}(\Gamma, 0) \leq \delta \times \frac{1}{2} \exp((\log 1/\delta)^{1-\beta}) \right) \leq (\log 1/\delta)^{-c_1 \beta + \eta} + (\log 1/\delta)^{-c_3} .$$

2.5 Vers une preuve du lemme admis

Cette dernière sous-section est une piste pour attaquer le Lemme 2.4.1 admis dans la sous-section précédente. Cette piste est basée sur un article [KT20] datant de fin 2020 à propos des estimées Russo-Seymour-Welsh (RSW) en percolation. Exposons le résultat principal de cet article.

L'article se place dans le cas de la percolation sur \mathbb{Z}^2 tout entier. Une mesure de percolation P est dite **invariante** si elle est invariante sous les symétries de \mathbb{Z}^2 : translation, rotation et réflexion). P est dite **positivement associée** si pour tout événements A et B croissants en les

arêtes ouvertes, nous avons $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$.

Nous notons $C(m, n)$ l'évènement : "il existe un chemin ouvert (de percolation) traversant horizontalement le rectangle $[-m, m] \times [-n, n]$ ".

L'article prouve le théorème suivant.

Théorème 2.5.1: *Pour tout $\rho \geq 1$, il existe un homéomorphisme $\psi_\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tel que pour toute mesure de percolation invariante et positivement associée P , pour tout $n \geq 1$,*

$$P(C(\rho n, n)) \geq \psi_\rho(P(C(n, \rho n))).$$

Autrement dit, la probabilité d'avoir des longs chemins est minorée en fonction de la probabilité d'avoir des petits chemins.

Ce résultat peut s'étendre à des situations où le domaine n'est plus \mathbb{Z}^2 tout entier mais un domaine fini et à des situations où il n'y a que de la quasi-invariance.

Faisons le lien avec nos modèles de dimères. Considérons le modèle de dimères double sur \mathbb{Z}^2 tout entier et fixons la hauteur double à 0 en l'origine.

Nous allons considérer deux percolations (par site) différentes dépendant d'un paramètre C , notées P_+ et P_- . Pour P_+ les sites ouverts sont ceux dont la hauteur est supérieure à C et pour P_- c'est ceux dont la hauteur est inférieure à $-C$. Vérifions les hypothèses de l'article :

- **Invariance** : si nous nous restreignons à un sous-domaine assez loin de l'origine nous aurons assez d'invariance.
- **Positivement associée** : pour cette hypothèse nous devons naviguer entre \mathbb{Z}^2 tout entier et des modèles sur des domaines finis. La raison est que pour les domaines finis il existe une inégalité de type FKG sur les évènements croissants en la hauteur (ie pour des évènements A et B croissants en la hauteur, $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$). Ce qui résout la question puisque les évènements croissants en les sites ouverts de P_+ sont croissants en la hauteur. Cette inégalité se démontre avec une dynamique de Glauber et le théorème ergodique.

Dans la suite nous ne revenons plus sur ces détails techniques qui importent peu ici et nous faisons comme si nous avons toujours une invariance parfaite.

Soit $R_n = [n, 2n] \times [-2n, 2n]$ un rectangle et A_n l'anneau "carré" formé par l'union des rotations par rapport à l'origine de R_n d'angle $0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$. Considérons les évènements suivants (ici "chaîne" fait référence à une chaîne de dimères et non de percolation) :

$$E_{n,+} := (\text{Il existe une chaîne } \gamma_1 \text{ traversant } A_n \text{ avec } h(\gamma_1) \geq C) \\ \cap (\text{Il existe une chaîne } \gamma_2 \text{ traversant } A_n \text{ avec } h(\gamma_2) < C)$$

$$E_{n,-} := (\text{Il existe une chaîne } \gamma_3 \text{ traversant } A_n \text{ avec } h(\gamma_3) \leq -C) \\ \cap (\text{Il existe une chaîne } \gamma_4 \text{ traversant } A_n \text{ avec } h(\gamma_2) > -C)$$

$$E_{n,0} := (\text{Il existe une chaîne } \gamma_5 \text{ traversant } A_n \text{ avec } |h(\gamma_5)| \geq 3C)$$

Le lien avec le lemme admis est le suivant :

$$(\mathcal{V}(A_n) \geq 2C) \subset E_{n,+} \cup E_{n,-} \cup E_{n,0}.$$

Avec l'article [KT20] nous devrions être capables (modulo des détails techniques qui peuvent notamment contraindre la valeur de C à dépendre de n) de montrer que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_{n,+} \cup E_{n,-}) < 1.$$

DÉMONSTRATION. Nous donnons les grandes lignes.

Soit n tel que $\mathbb{P}(E_{n,+} \cup E_{n,-}) \geq 1/2$. Alors pour au moins une des quatre rotations de R_n (disons R_n sans pertes de généralités), pour au moins une des deux percolations (disons P_+ sans pertes de généralités), nous avons :

$$\mathbb{P}(\text{il existe un chemin ouvert pour } P_+ \text{ traversant } R_n \text{ dans la direction courte}) \geq \frac{1}{16}.$$

En effet une chaîne de dimères traversant A_n doit traverser au moins un des rectangles dans la direction courte. D'après l'article [KT20],

$$\mathbb{P}(\text{il existe un chemin ouvert pour } P_+ \text{ traversant } R_n \text{ dans la direction longue}) \geq \psi \left(\frac{1}{16} \right).$$

Appelons **barrière** un chemin de percolation ouvert faisant une boucle autour de l'origine. En utilisant l'invariance par rotation et l'inégalité de type FKG, nous obtenons :

$$\mathbb{P}(\text{il existe une barrière pour } P_+ \text{ dans } A_n) \geq \left[\psi \left(\frac{1}{16} \right) \right]^4.$$

Or $(E_{n,+} \cup E_{n,-}) \cap (\text{il existe une barrière pour } P_+ \text{ dans } A_n) = \emptyset$! On en déduit donc que $\mathbb{P}(E_{n,+} \cup E_{n,-}) \leq 1 - \psi \left(\frac{1}{16} \right)^4$. D'où,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_{n,+} \cup E_{n,-}) \leq \max \left(1/2, 1 - \left[\psi \left(\frac{1}{16} \right) \right]^4 \right) \\ < 1 \quad \blacksquare$$

Références

- [Wil96] David WILSON. *Generating random spanning trees more quickly than the cover time*. 1996. URL : <https://doi.org/10.1145/237814.237880>.
- [KPW99] Richard KENYON, James PROPP et David WISLON. *Trees and Matchings*. 1999. URL : <https://arxiv.org/abs/math/9903025>.
- [Las17] Benoît LASLIER. *Local limits of lozenge tilings are stable under bounded boundary height perturbations*. 2017. URL : <https://arxiv.org/pdf/1709.01370.pdf>.
- [KT20] Laurin KÖHLER-SCHINDLER et Vincent TASSION. *Crossing probabilities for planar percolation*. 2020. URL : <https://arxiv.org/abs/2011.04618v1>.
- [Leb21] Théo LEBLANC. *Mémoire de stage*. 2021. URL : <https://drive.google.com/file/d/107jmvQ2neiqkgWowM290LavAfiIT-tjg/view?usp=sharing>.