

Découpage des 3-variétés

Timothé Lemistre

12 septembre 2021

Introduction. Dans tout ce qui suit, les variétés, par défaut, sont différentielles, connexes et peuvent avoir un bord.

On explique comment découper canoniquement toute 3-variété compacte orientée en blocs plus simples. La conjecture de géométrisation, démontrée par Perelman, énonce que chacun de ces blocs est géométrisable, ie. admet une métrique pour laquelle il a un volume fini et est localement isométrique à l'une des huit 3-variétés riemanniennes que nous allons décrire.

On fournit aussi un moyen d'obtenir toute 3-variété compacte orientée à l'aide de noeuds dans \mathbb{S}^3 , ainsi qu'un moyen de représenter dans le plan toute 3-variété fermée orientée en dessinant des noeuds et en assignant un nombre rationnel à chacun d'eux.

Tout est issu de [1].

Préliminaires

On définit la somme connexe de deux n -variétés orientées M et N comme la variété obtenue en choisissant des boules fermées B, B' dans M et N respectivement, un difféomorphisme $f : \partial B \rightarrow \partial B'$ renversant l'orientation, des voisinages-colliers de $\partial B, \partial B'$ dans $M - B$ et $N - B'$ respectivement et en recollant ces voisinages à l'aide de f .

En dimension $n \leq 3$, la variété obtenue ne dépend que de M et N (ni des boules, ni de f); on la note $M \# N$. En effet, deux difféomorphismes $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ renversant l'orientation sont isotopes (et de même pour \mathbb{S}^1), ce qui garantit aussi que l'on peut "reboucher" canoniquement les composantes de bord sphériques d'une 3-variété.

Soient $T = S^1 \times S^1$ le tore, $S_g = \#_g T$ la somme connexe de g tores, $S_{g,b}$ la surface obtenue en enlevant b boules ouvertes disjointes à S_g .

Théorème 0.1. *Toute surface compacte orientable S est difféomorphe à un $S_{g,b}$. De plus, si $\chi(S) > 0$, resp. $\chi(S) = 0$, resp. $\chi(S) < 0$, alors S admet*

une métrique avec b composantes de bord de longueurs arbitraires et telle que l'intérieur de S , cette métrique soit (complète si S est fermée ou $\chi(S) < 0$ et) elliptique, resp. plate, resp. hyperbolique.

Pour trouver une telle métrique dans le cas $\chi < 0$, on peut découper la surface selon des cercles et des arcs (seules variétés de dimension 1) et obtenir ainsi des blocs admettant chacun une métrique hyperbolique pour laquelle les bords sont de longueur arbitraire.

Dans la suite, nous expliquons comment adapter cette idée en dimension 3, ie. comment découper les 3-variétés compactes selon des sous-variétés de dimension 2 pour obtenir des blocs assez simples.

Remarque : en dimension 2, la même idée fonctionne pour des variétés non-orientables, pour lesquelles le théorème précédent est encore valable en remplaçant T par \mathbb{RP}^2 .

1 Décomposition des 3-variétés selon des sphères et disques

Nous allons découper M selon des surfaces de complexité croissante, ie. de caractéristique d'Euler décroissante. Nous commencerons donc par la sphère \mathbb{S}^2 , que suivront le disque et le plan projectif \mathbb{RP}^2 .

Définition. Une 3-variété orientée M est dite irréductible si toute sphère plongée dans M borde une boule ; elle est dite première si pour toute égalité $M = M_1 \sharp M_2$, l'un des M_i est \mathbb{S}^3 (la somme connexe est alors dite triviale).

Remarque : on exige que la sphère soit lisse, comme tout dans cet exposé, sans quoi toute variété serait irréductible (car contiendrait par exemple la sphère cornue d'Alexander).

Proposition 1.1 (Alexander). \mathbb{R}^3 est irréductible.

Proposition 1.2. Toute 3-variété orientée différente de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ est irréductible si, et seulement si, elle est première.

Démonstration. Pour inverser une somme connexe, on coupe le long d'une sphère séparante S (ie une sphère dont le complémentaire n'est pas connexe), ce qui donne deux variétés M_1, M_2 dont on rebouche les composantes de bord ainsi créées à l'aide de boules. Un M_i dûment rebouché est une sphère ssi M_i est une boule ; ainsi la somme connexe est triviale ssi toute sphère séparante S borde une boule. Ainsi, toute variété irréductible est première. Soit dorénavant M première non irréductible ; on dispose donc d'une sphère non-séparante $S \subseteq M$ et d'un arc $\alpha \subseteq M$ intersectant

S en un seul point. Choisissons de petits voisinages tubulaire de S et α ; leur union N a pour bord une sphère $S' = \partial N$ séparante, qui borde une boule puisque M est première. Ainsi M est union de N et d'une boule, ce dont on déduit facilement que $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (le recollement de la boule est unique à isotopie près, comme affirmé plus haut).

Proposition 1.3. *Soit $M \rightarrow N$ un revêtement de 3-variétés; si M est irréductible, alors N l'est.*

Introduisons une nouvelle opération : pour couper une surface orientable $S \subseteq M$ le long d'un disque $D \subseteq M$ vérifiant $D \cap S = \partial D$, on supprime un petit voisinage tubulaire de ∂D dans S et on recolle deux copies (une de chaque côté) de D .

Pour prouver le théorème 1.1 ci-dessous, nous aurons besoin du lemme suivant. Appelons boule à k trous la 3-variété obtenue en supprimant k boules ouvertes de l'intérieur d'une boule fermée, et nommons système de sphères pour la 3-variété M une réunion $S \subseteq M$ de sphères séparantes disjointes telle qu'aucune composante de $M - S$ ne soit une sphère à trous.

Lemme. *Soit M une 3-variété compacte orientable; il existe $K > 0$ tel que tout système de sphères pour M contienne moins de K sphères.*

Esquisse de démonstration. Etant donnée une union disjointe $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k$ de surfaces non-orientables, on trouve pour chacune, dans un voisinage tubulaire, un lacet α_i intersectant S_i transversalement en un unique point. $[S_i] \in H_2(M, \partial M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ envoie $[\alpha_j] \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sur $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $i = j$, 0 sinon, donc les $[S_i]$ sont linéairement indépendants. M ne peut donc contenir plus de $b_2 = \dim H_2(M, \partial M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ surfaces non-orientables disjointes.

Fixons une triangulation T de M et qualifions de normale une surface orientable non nécessairement connexe mais sans bord plongée dans l'intérieur M , intersectant transversalement tous les simplexes de T et intersectant tous les tétraèdres en triangles ou en carrés. Appelons opération élémentaire sur une telle surface l'une des opérations suivantes : la suppression d'une composante connexe contenue dans une boule et le découpage selon un disque. On vérifie que surface devient normale après un nombre fini d'isotopies et de transformations élémentaires.

Soit t le nombre de tétraèdres de T ; une surface normale S découpe chaque tétraèdre selon des triangles et des carrés, ce qui donne des volumes bordées par deux triangles/carrés parallèles (des prismes) et au plus 6 autres bouts, qui bordent au plus 10 triangles/carrés; ainsi, au plus $10t$ composantes de S ne bordent pas que des prismes; les autres composantes S_i ne bordent que des prismes, qui se recollent en un fibré de fibre $[-1; 1]$ égal à $S_i \times [-1; 1]$ ssi S_i est orientable. Ainsi, si S a au moins $10t + b_2 + 1$ composantes, $b_2 + 1$ au moins ne sont bordées que par des prismes, qui se

recollent en le fibré trivial de base $[-1; 1]$ pour au moins 1 composante (il y a au plus b_2 composantes non-orientables).

Concluons en supposant donné un système de sphères S avec $k \geq 10t + b_2 + 1$ composantes. On transforme S en une surface normale par des opérations élémentaires. Aucune sphère n'est comprise dans une boule, sinon elle borderait une boule. Si on découpe une sphère S_0 le long d'un disque, on obtient deux sphères S_1, S_2 et on vérifie facilement qu'en remplaçant S_0 par l'une, bien choisie, de ces deux nouvelles sphères, on obtient encore un système de sphères. Ainsi, la surface normale obtenue est encore un système de sphère avec k composantes ; or on a montré au paragraphe précédent que dans ce cas, 2 sphères cobordent un $\mathbb{S}^2 \times [0; 1]$ disjoint des autres sphères, ce qui est impossible pour un système de sphères. Ainsi $K = 10t + b_2$ convient.

Remarque. Cette démonstration utilise le fait (démontré dedans) que si une surface normale orientable dans bord (dans une 3-variété compacte triangulée) contient plus de $K = 10t + b_2$ composantes, alors deux d'entre elles Σ, Σ' sont parallèles (ie. cobordent un $\Sigma \times [0; 1]$). C'est aussi vrai pour des surfaces à bord (il suffit d'ajouter une opération élémentaire décrite dans la suite : la ∂ -compression, un découpage selon un disque touchant le bord), fait utilisé pour démontrer les théorèmes 1.2 et 2.2.

Théorème 1.1 (de décomposition de Milnor). *Toute 3-variété compacte orientée M se décompose en variétés premières : $M = M_1 \sharp \dots \sharp M_k$. La liste des facteurs premiers est unique à permutation et ajout/suppression de \mathbb{S}^3 près.*

Démonstration. Montrons l'existence. Si M contient une sphère non-séparante, alors $M = M' \sharp (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ (cf. preuve de 1.2) ; comme $H_1(M) = H_1(M) \oplus \mathbb{Z}$, après factorisation par un nombre fini de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, on peut supposer toutes les sphères séparantes. Si M est premier, on a fini ; sinon on décompose en $M = M_1 \sharp M_2$ et on continue à décomposer les M_i jusqu'à ce qu'ils soient premiers ; la décomposition doit s'arrêter selon le lemme précédent.

Montrons l'unicité ; supposons données deux décompositions en facteurs premiers $M = M_1 \sharp \dots \sharp M_k \sharp_h (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) = M'_1 \sharp \dots \sharp M'_{k'} \sharp_{h'} (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ avec les M_i, M'_i différents de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, donc irréductibles. Une réunion S de sphères disjointes dans M est dite adaptée à la décomposition $M = M_1 \sharp \dots \sharp M_k \sharp_h (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ si $M - S$ consiste en un M_i avec des trous pour chaque i , plus des boules à trous ; on peut par exemple prendre pour S la réunion des sphères de la décomposition première et d'une sphère non séparante dans chaque $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Soient S, S' adaptée à la première, resp. la seconde décomposition.

On déforme S, S' pour qu'elles s'intersectent transversalement, donc en des cercles, et on considère un cercle le plus intérieur dans une sphère de S ; il borde un disque $D \subseteq S$. On coupe S' le long de D , ce qui remplace une sphère $S'_0 \subset S'$ par deux sphères disjointes S'_1, S'_2 . Remarquons déjà

qu'en ajoutant une sphère Σ disjointe des précédentes à S ou S' , S est toujours adaptée : Σ est contenue dans un M_i troué ou dans \mathbb{S}^3 troué, qui est irréductible. $S'_0 \sqcup S'_1 \sqcup S'_2$ borde une boule à 2 trous donc en remplaçant S'_0 par $S'_1 \sqcup S'_2$, on ajoute un trou à la composante de $M - S'$ qui borde S'_0 et ne contient pas S'_1, S'_2 ; on obtient une nouvelle réunion disjointe de sphères, encore notée S' et encore adaptée à la seconde décomposition selon la remarque précédente.

Après un nombre fini de telles opérations, on a $S \cap S' = \emptyset$. Selon cette même remarque, $S \cup S'$ est adaptée aux deux décompositions de M . Ainsi, $k = k'$ et après permutation, $M_i = M'_i$; comme $H_1(M) = \bigoplus_i H_1(M_i) \oplus \mathbb{Z}^h = \bigoplus_i H_1(M_i) \oplus \mathbb{Z}^{h'}$, $h = h'$.

Nous avons découpé canoniquement M selon des sphères; on pourra dorénavant étudier chaque bout de M séparément, ie. supposer M irréductible. Découpons maintenant selon des disques. Une surface S plongée proprement dans la 3-variété M (ie telle que $\partial S = S \cap \partial M$) est dite ∂ -parallèle si on peut l'obtenir en poussant dans M l'intérieur d'une surface compacte de ∂M . Une sphère est dite essentielle si elle ne borde pas de boule; un disque est dit essentiel s'il n'est pas ∂ -parallèle. Une 3-variété est dite irréductible si elle ne contient aucune sphère essentielle, ∂ -irréductible si elle ne contient aucun disque essentiel.

On peut découper une 3-variété orientée M selon un disque plongé proprement dans M ; l'opération inverse est l'ajout d'une 1-anse. La preuve du théorème suivant est essentiellement identique à celle du théorème de décomposition de Milnor.

Théorème 1.2. *Toute 3-variété compacte orientée irréductible est obtenue en ajoutant des 1-anses à une liste finie de 3-variétés irréductibles et ∂ -irréductibles. Cette liste est unique à permutation et ajout/suppression de boules près.*

La seule surface restante de caractéristique d'Euler > 0 est $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Théorème 1.3. *Si la 3-variété compacte orientable irréductible M contient $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, alors $M = \mathbb{R}\mathbb{P}^3$.*

Démonstration. M contient un voisinage tubulaire N de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, identifié au fibré non trivial de base $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ et de fibre $I =]-1; 1[$; on a donc identifié ∂N au revêtement d'orientation de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, ie. à la sphère \mathbb{S}^2 . M étant irréductible, cette sphère borde une boule; N n'étant pas une boule, M est obtenue en recollant une boule à N , ce qui la détermine uniquement; or $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ contient $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, donc $M = \mathbb{R}\mathbb{P}^3$.

2 Décomposition des 3-variétés selon des tores et géométrisation

Dorénavant, nous parlerons surtout de 3-variétés compactes orientables irréductibles et ∂ -irréductibles ; pour abrégé, on les qualifiera de marmoréennes. Nous introduisons la décomposition JSJ (pour Jaco, Shalen, Johansson), valable pour toute 3-variété M marmoréenne dont le bord (éventuellement vide) est constitué de tores. Les blocs obtenus seront de 3 types, que nous allons définir : des (semi-) fibrés en tores, des variétés de Seifert et des variétés simples.

Nous souhaitons découper selon des surfaces intéressantes, que nous définissons.

Définition. Une surface orientable S proprement plongée dans une 3-variété orientable M et de caractéristique d'Euler $\chi \leq 0$ est dite :

- *incompressible* si pour tout disque $D \subseteq M$ vérifiant $\partial D = D \cap S$, ∂D borde un disque dans S ;
- *∂ -incompressible* si pour tout $D \subseteq M$ vérifiant $\partial D = \alpha \cup \beta$ avec $\alpha \subseteq S$ et $\beta \subseteq \partial M$, il n'existe pas de disque $D' \subseteq S$ vérifiant $\partial D' = \alpha \cup \beta'$ avec $\beta' \subseteq \partial M$;
- *essentielle* si elle est incompressible, ∂ -incompressible et non ∂ -parallèle.

Proposition 2.1. Soient M marmoréenne et S une surface fermée incompressible plongée dans M ; en découpant M selon S , on obtient des variétés marmoréennes.

Proposition 2.2. Soient M une 3-variété compacte orientée et $S \subseteq M$ une surface fermée orientée vérifiant $\chi(S) \leq 0$. S est incompressible si, et seulement si, l'application induite $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ est injective.

Une variété marmoréenne est dite simple si elle ne contient ni tore essentiel, ni anneau (sphère à deux trous) essentiel. C'est le premier des trois types de blocs obtenus après la décomposition JSJ ; il contient les variétés fermées elliptiques et hyperboliques (car leurs groupes fondamentaux ne contiennent pas \mathbb{Z}^2).

Un disque fournissant un contre-exemple à la (∂ -)incompressibilité est appelé disque de (∂ -)compression ; on peut découper S le long de ce disque comme fait précédemment, opération appelée (∂ -)compression. Après une (∂ -)compression, on obtient une ou deux surfaces de caractéristique d'Euler $> \chi(S)$, donc après un nombre fini de compressions, resp. ∂ -compressions, la surface devient une réunion finie de surfaces incompressibles, resp. ∂ -incompressibles.

2.1 Variétés de Seifert

Présentons une nouvelle opération : le remplissage de Dehn. Cette opération consiste en le rebouchage d'une composante de bord torique T d'une 3-variété

M à l'aide d'un tore plein $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Le résultat dépend uniquement (de la classe d'isotopie) du difféomorphisme $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow T$ utilisé ; en fait, celle-ci est déterminée par (la classe d'isotopie de) la courbe image de $\partial\mathbb{D}^2 \times pt$. Celle-ci est un lacet simple γ dont la classe d'homotopie devient nulle après le remplissage de Dehn ; on a en fait, en notant M' la variété résultante, $\pi_1(M') = \pi_1(M) / \langle\langle \gamma \rangle\rangle$ (avec $\langle\langle \gamma \rangle\rangle$ le normalisateur de γ).

Une fois fixée une base (m, l) de $H_1(T) = \mathbb{Z}^2$, on dispose d'une bijection entre les (classes d'isotopie de) lacets simples dans \mathbb{T} et $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (à savoir $\frac{p}{q} \mapsto [qm + pl]$), et on peut donc décrire un remplissage de Dehn par un élément de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$: on parle de (p, q) -remplissage de Dehn. Des nombres différents ne produisent pas toujours des variétés différentes. Définissons en effet l'espace lenticulaire $L(p, q)$ comme le tore plein (avec la base usuelle pour le H_1 de son bord) après un (p, q) -remplissage de Dehn ; on a :

Théorème 2.1. *$L(p, q)$ et $L(p', q')$ sont difféomorphes si, et seulement si, $p = p'$ et $q' = \pm q^\pm$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Définissons maintenant les variétés de Seifert. Soit S une surface compacte connexe ; il existe un unique fibré orientable au-dessus de S ayant pour fibre $I = [0; 1] : S \times I$ ou le fibré tordu $S \tilde{\times} I$. On note $S \times \mathbb{S}^1$, resp. $S \tilde{\times} \mathbb{S}^1$, le double de ce fibré (ie. la variété obtenue en recollant deux copies du fibré le long de leurs bords via l'identité) ; c'est un fibré en cercles orientable au-dessus de S , appelé fibré trivial.

Lemme. *Si $\partial S \neq \emptyset$, alors tout fibré en cercles au-dessus de S est isomorphe au fibré trivial.*

Définition. *Soient S une surface compacte (orientable ou non) à bord non vide. Le bord de son fibré trivial $N = S \times \mathbb{S}^1$ ou $S \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ est constitué de t tores T_i , $H_1(T_i)$ étant muni d'une base canonique (à changement de signe simultané près) positivement orientée (m_i, l_i) avec $m_i = [T_i \cap \partial S]$ et l_i une fibre. Un remplissage de Dehn est dit parallèle à la fibre si $p_i = 0$. On nomme variété de Seifert toute variété obtenue en pratiquant $k \leq t$ (p_i, q_i) -remplissages de Dehn non parallèles à la fibre sur un tel N .*

On peut échanger les cercles du bord de S par une difféomorphisme, qui s'étend au I -fibré orientable puis à son double ; on peut échanger ainsi les tores du bord de N , en préservant les bases $\pm(m_i, l_i)$. En fait, une variété de Seifert est presque un fibré (en cercles) sur la surface \hat{S} obtenue en rebouchant k composantes de bord de S avec des disques ; on note la variété de Seifert obtenue précédemment $M = (\hat{S}, (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k))$. Elle possède des fibres singulières, que nous définissons.

Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $p > 0$; le (p, q) -tore fibré standard est $(\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1) / \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{D} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \times \{1\}$ une rotation d'angle $2\pi \frac{q}{p}$ partitionné en cercles/fibres obtenus en recollant les $\{pt\} \times [0; 1]$. Les fibres non centrales font p fois le tour de la fibre centrale, dite singulière d'ordre p si $p \geq 2$.

Définition. Une fibration de Seifert est une partition d'une 3-variété orientée en cercles telle que toute fibre/cercle intérieure ait un voisinage fibré isomorphe à un tore fibré standard.

En quotientant une fibration de Seifert pour identifier les cercles à des points, on obtient une surface compacte ayant naturellement des "points-cônes" d'ordre p_i au-dessus desquels se trouvent les tores fibrés standards, d'ordre (p_i, q_i) . Une surface S avec de tels "points-cônes", ie des points marqués chacun par un entier $p_i \geq 2$, sera notée (S, p_1, \dots, p_k) , et on appellera fibration de Seifert au-dessus de cette surface la fibration de Seifert au-dessus de S dont les fibres singulières sont au-dessus des points-cônes et ont les ordres prescrits.

Proposition 2.3. Toute variété de Seifert $(S, (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k))$ est obtenue comme une fibration de Seifert au-dessus de (S, p_1, \dots, p_k) .

2.2 (Semi-) fibrés en tores

Nous venons de décrire des 3-variétés comme des \mathbb{S}^1 -fibrés au-dessus d'une surface compacte, avec quelques fibres singulières. Le contraire, qui donne d'autres 3-variétés, est aussi possible ; ces variétés constitueront des blocs fermés dans la décomposition JSJ, donc ne pourront être attachés à d'autres blocs pour faire partie d'une variété plus grosse. Elles consistent en les fibrés au-dessus de \mathbb{S}^1 ayant pour fibre une surface compacte orientable Σ (on s'intéressera surtout au tore). Le bord d'une telle variété est constitué de tores - un pour chaque composante de bord de Σ . Tout tel fibré est obtenu à partir de $\Sigma \times [0; 1]$ en recollant $\Sigma \times 0$ à $\Sigma \times 1$ via un difféomorphisme φ préservant l'orientation. En fait, la variété obtenue ne dépend que de la classe de conjugaison de φ dans le mapping class group $MCG(\Sigma)$.

Si Σ est le tore \mathbb{T} , une fois fixée une base de $H_1(\mathbb{T})$, on a $MCG(\mathbb{T}) = SL_2(\mathbb{Z})$, ce qui identifie la classe d'isotopie de φ à $A \in SL_2(\mathbb{Z})$; on note le fibré en tores obtenu M_A . On peut montrer

- que M_A est difféomorphe à $M_{A'}$ si, et seulement si, A' est conjugué à $A^{\pm 1}$;
- que M_A est une variété de Seifert si, et seulement si, $|tr(A)| \leq 2$.

Etant donnée une surface non-orientable Σ (on s'intéressera surtout à la bouteille de Klein), de revêtement d'orientation $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$, on appelle semi-fibré local l'application $\Sigma \tilde{\times}]0; 1[\rightarrow]0; 1[, (p, x) \mapsto |x|$. On appelle semi-fibré une application $M \rightarrow]-1; 1]$ qui se restreint en deux semi-fibrés locaux ; la fibre est Σ au-dessus de -1 et 1 , $\tilde{\Sigma}$ ailleurs.

2.3 Décomposition JSJ et décomposition géométrique

Etant donnée une 3-variété M , on appelle décomposition en tores de M une réunion S de tores essentiels disjoints décomposant M en blocs d'un des trois types suivants :

- variétés simples ;
- variétés de Seifert ;
- (semi-)fibrés en tores.

Elle est dite minimale si aucun sous-ensemble propre de S n'est une décomposition en tores.

Théorème 2.2 (décomposition JSJ). *Soit M une 3-variété marmoréenne dont le bord (éventuellement vide) est réunion de tores. Il existe une décomposition en tores minimale de M et elle est unique à isotopie près.*

On nomme cette dernière décomposition JSJ. Notons quelques différences entre cette décomposition et celle du théorème de Milnor : les sphères sont canoniques (à isotopie près), les tores ne le sont pas ; les variétés premières de la décomposition de Milnor permettent de reconstituer la variété initiale, tandis que les bouts de la décomposition JSJ ne le permettent pas car il n'y a pas de moyen canonique de les recoller.

On définit la décomposition géométrique en modifiant la décomposition JSJ comme suit : pour tout bloc difféomorphe à $K\tilde{\times}] - 1; 1[$ avec K la bouteille de Klein, on remplace le tore autour de ce bloc par $K \times \{0\}$, ce qui a pour effet de supprimer le bloc $K\tilde{\times}] - 1; 1[$. On découpe donc selon des tores incompressibles et des bouteilles de Klein.

2.4 Géométrisation

Nous définissons ici les huit 3-variétés riemanniennes suivantes, dites modèles : \mathbb{S}^3 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, Nil , Sol .

Elles sont simplement connexes et homogènes (ie. les isométries agissent transitivement) mais seules les trois premières sont isotropes (ie. toute isométrie de $T_p M$ provient d'une isométrie de M). Etant données une 3-variété riemannienne N et M une variété modèle, on dira que N a une géométrie modelée sur celle de M si tout $p \in N$ a un voisinage isométrique à un ouvert de M . Si N est complète, elle est de la forme M/Λ avec $\Lambda < Isom(M)$ discret agissant librement sur M . On dira que N est géométrisable si son intérieur admet une métrique riemannienne pour laquelle N a un volume fini et une géométrie modelée sur l'un des huit modèles.

Les cinq premières sont munies de leur métrique (produit) usuelle. Les trois autres sont des groupes de Lie munis d'une métrique (riemannienne) invariante à gauche. Une 3-variété fermée orientable est de Seifert si, et seulement si, elle est géométrisable avec un modèle qui n'est ni \mathbb{H}^3 ni Sol , et avec Sol pour modèle si, et seulement si, c'est un (semi-)fibré en tores M_A avec $|tr A| > 2$. Une même variété ne peut avoir plusieurs géométries.

Nil est le groupe de Heisenberg, constitué des matrices

$$[x, y, z] := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec x, y et z réels (il est donc difféomorphe à \mathbb{R}^3). On lui donne la structure de groupe de Lie qu'on devine et la métrique invariante à gauche valant la métrique euclidienne dans $T_{id}Nil$, identifié à \mathbb{R}^3 grâce à la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Une base orthonormale en $[x, y, z]$ est $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})$; sa forme volume est donc celle de \mathbb{R}^3 .

$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ est le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$ muni d'une certaine métrique.

Sol est \mathbb{R}^3 muni de l'opération $(x, y, z) \cdot (x', y', z') \mapsto (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z')$ qui en fait un groupe de Lie, et muni de la métrique $e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$ au point (x, y, z) .

Théorème 2.3 (conjecture de géométrisation). *L'intérieur de chacun des blocs de la décomposition géométrique est géométrisable.*

Corollaire 2.1 (conjecture de Poincaré). *Toute 3-variété fermée simplement connexe est difféomorphe à \mathbb{S}^3 .*

Démonstration. M est orientable. Après décomposition en facteurs premiers, on peut supposer M première, donc irréductible ($\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ n'est pas simplement connexe). $\pi_1(M)$ étant trivial, il ne contient pas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; la décomposition géométrique est donc triviale (cf. proposition 2.2). Par géométrisation M est géométrique. C'est donc un quotient compact, mais aussi un quotient trivial (car M est simplement connexe), de l'un des 8 modèles; la seule possibilité est \mathbb{S}^3 .

Corollaire 2.2 (conjecture d'elliptisation; implique la conjecture de Poincaré). *Toute 3-variété fermée de groupe fondamental fini est elliptique.*

Démonstration. Appliquer la démonstration précédente au revêtement d'orientation.

Corollaire 2.3 (conjecture d'hyperbolisation). *Toute 3-variété fermée irréductible M telle que $\pi_1(M)$ soit infini mais ne contienne pas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est hyperbolique.*

3 Noeuds, entrelacs et théorème de Lickorish-Wallace

Définissons le corps en anses de genre g , noté H_g , comme la 3-variété obtenue en collant g 1-anses à une 0-anse.

Proposition 3.1 (scindement de Heegaard). *Toute 3-variété M s'obtient en recollant deux corps en anses.*

Démonstration. On choisit une décomposition en anses de M ; les 0- et 1-anses forment un corps en anses, et en inversant le collage on peut considérer les 2- et 3-anses comme des 0- et 1-anses, qui se recollent en un corps en anses.

Une telle décomposition s'appelle scindement de Heegaard de genre g ; une fois un scindement de genre g trouvé, on peut en construire un de genre $g + 1$ en ajoutant à l'un des deux corps en anses une petite 1-anse qui passe dans l'autre corps en anses. En particulier, comme \mathbb{S}^3 est obtenu en collant deux 0-anses \mathbb{D}^3 , on dispose d'un scindement de Heegaard de tout genre $g \in \mathbb{N}$ pour \mathbb{S}^3 .

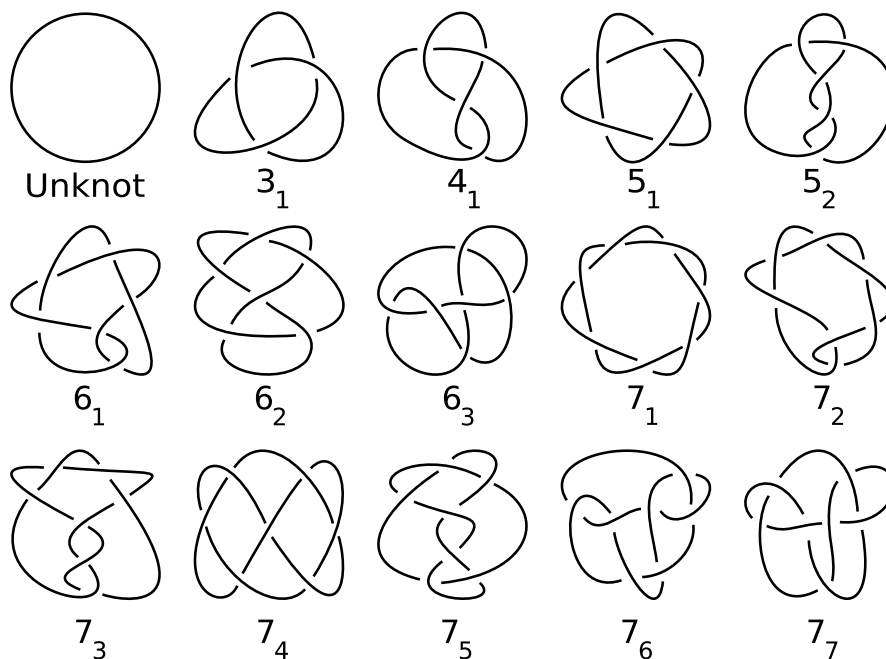
Définition. *Un entrelacement dans une 3-variété M est une sous-variété compacte sans bord de dimension 1 (donc une union disjointe finie de cercles plongés dans M). Un noeud est un entrelacement connexe, ie. un cercle plongé dans M .*

Par abus de langage, on nommera complémentaire d'un entrelacs le complémentaire d'un petit voisinage tubulaire (constitué, donc, de tores solides plongés) de ces entrelacs (et non le complémentaire de l'entrelacs lui-même). On peut représenter tout entrelacs de \mathbb{S}^3 par un diagramme sur un plan, comme sur l'illustration ci-dessous -par exemple, après une projection stéréographique puis une projection orthogonale -, les lacets s'intersectant transversalement. Les entrelacs sont considérés à isotopie près et on qualifie de trivial le noeud le plus simple, dont le diagramme est un cercle.

Proposition 3.2. *Soit K un noeud dans \mathbb{S}^3 . Son complémentaire est irréductible. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. K est trivial ;
2. K est le bord d'un disque ;
3. le complémentaire de K est un tore solide.

Démonstration. Toute sphère dans le complémentaire N de K borde deux boules, dont l'une seulement contient le voisinage tubulaire de K (qui est connexe), d'où l'irréductibilité. (1) \Rightarrow (2) est le théorème de Jordan. On a (2) \Rightarrow (1) car les disques plongés dans \mathbb{S}^3 sont isotopes entre eux. (1) \Rightarrow (3) est évident. Si (3) est vérifié, \mathbb{S}^3 est réunion des deux tores



solides considérés, ce qui donne $\mathbb{S}^3 = L(1, q)$ (car $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) et le méridien du tore complémentaire s'étend en un disque de bord K .

Remarque. Le téléphone arabe est le babouche à oreille ; les téléphones sont sur des murs ; les murs et les Mickey ont des oreilles. On en déduit par sophisme à roulettes russes que les babouches (éventuellement à oreilles) sont sur les Mickey, qui ont donc toujours leur éventuel téléphone arabe sur eux.

Considérons un petit voisinage tubulaire N d'un noeud $K \subseteq \mathbb{S}^3$; c'est un tore solide. Son méridien m est (à isotopie près) le lacet de ∂N homotopiquement nul dans N . On nomme longitude tout autre lacet l de ∂N tel que (m, l) soit une base de $H_1(\partial N, \mathbb{Z})$. Soit $M = \mathbb{S}^3 - N$ le complémentaire de K . L'application $\mathbb{Z}^2 = H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M) = \mathbb{Z}$ envoie m sur un élément non nul, donc le noyau est engendré par une longitude $\pm l$; en exigeant que m et l représentent des lacets qui fournissent une base positivement orientée de $T_p \partial M$ en leur unique point d'intersection p , on a déterminé une base (m, l) de $H_1(\partial M)$ unique à changement de signe simultané près. Voici une interprétation géométrique de l : on peut montrer qu'il existe une surface compacte orientable $S \subseteq \mathbb{S}^3$ de bord K et que pour toute telle surface, $[\partial N \cap S] = [l] \in H_1(\partial N)$.

Introduisons une nouvelle opération sur une 3-variété M , appelée chirurgie de Dehn, et consistant en :

1. la suppression d'un tore solide plongé dans M , ce qui crée une nouvelle composante de bord T , puis
2. un remplissage de Dehn, ie. le collage d'un nouveau tore solide le long de T .

On peut identifier clairement une telle opération en précisant :

1. le noeud au centre du tore solide à supprimer et
2. le recollage, identifié par un nombre $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, la base (m, l) ayant été fixée canoniquement.

Notons que recoller avec un coefficient ∞ revient à ne rien faire ; on ignorera donc cette possibilité. On peut représenter plusieurs chirurgies de Dehn dans \mathbb{S}^3 à l'aide d'un diagramme sur lequel figurent : premièrement, l'entrelacs le long duquel découper ; deuxièmement, un nombre rationnel pour chaque noeud. Si le coefficient n est entier, on recollera ainsi un tore plein en envoyant son méridien sur $[nm + l]$. On appellera chirurgies de Dehn entières une suite de chirurgies de Dehn à coefficients entiers le long d'un entrelacs. Notons $A \cup_f B$ le recollement de A et B via f .

Rappelons que le mapping class group $MCG(S)$ d'une surface orientable S est le groupe des difféomorphismes $S \rightarrow S$ préservant l'orientation, à isotopie fixant ∂S près ; il est engendré par les twists de Dehn T_γ , définis pour chaque lacet simple γ comme suit : on choisit un voisinage tubulaire $A = \mathbb{U} \times [0; 1]$ de γ et on pose $T(x, t) = (xe^{2i\pi t}, t)$ sur A , $T(x) = x$ ailleurs.

Théorème 3.1 (de Lickorish-Wallace). *Toute 3-variété fermée orientable M s'obtient par chirurgies de Dehn entières le long d'un entrelacs $L \subseteq \mathbb{S}^3$.*

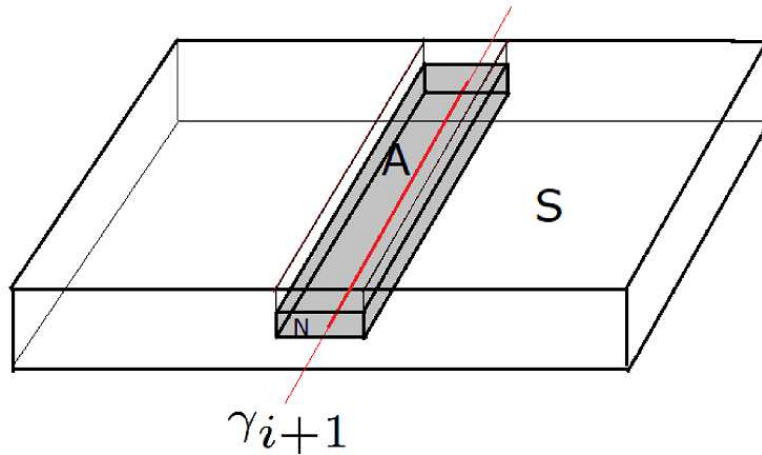
Démonstration. Choisissons un scindement de Heegaard $M = H_1 \cup_\varphi H_2$, et identifions une fois pour toutes H_1 et H_2 à H_g , de sorte que $\varphi : \partial H_g = S_g \rightarrow S_g$ est un élément de $MCG(S_g)$. Nous avons déjà remarqué que $\mathbb{S}^3 = H_1 \cup_\psi H_2$ pour un $\psi \in MCG(S_g)$. $MCG(S_g)$ étant engendré par les twists de Dehn, on a : $\varphi \circ \psi^{-1} = T_{\gamma_k}^{\pm 1} \circ \dots \circ T_{\gamma_1}^{\pm 1}$ avec γ_i des lacets simples dans S_g .

Posons $\varphi_i = T_{\gamma_i}^{\pm 1} \circ \dots \circ T_{\gamma_1}^{\pm 1} \circ \psi$ et $M_i = H_1 \cup_{\varphi_i} H_2$; on a $M_0 = \mathbb{S}^3$ et $M_k = M$. Montrons qu'on peut obtenir M_i par chirurgies de Dehn entières sur un entrelacs à i noeuds à partir de \mathbb{S}^3 ; supposons cela vrai pour i . On a $M_i = H_1 \cup_{\varphi_i} H_2$ et $M_{i+1} = H_1 \cup_{T_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1} \circ \varphi_i} H_2$.

Choisissons un voisinage-collier de ∂H_2 dans H_2 et poussons γ_{i+1} à l'intérieur (cf. figure explicative ; γ_{i+1} est en rouge). Creusons ensuite un tore solide N dans H_2 autour de γ_{i+1} comme celui en gris sur la figure. On considère que le support de $T_{\gamma_{i+1}}$ est dans l'anneau $A \subseteq \partial H_2$ au-dessus de N . On étend ensuite $T_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}$ en une application T définie sur le produit $A \times [0; 1]$ situé entre A et N (par $T_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1} \times id$), puis à $H_2 - N$ (par l'identité).

Posons $M_j^{trou} = H_1 \cup_{\varphi_j} (H_2 - N)$ pour $j = i, i + 1$. $T|_{\partial H_2} = T_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}$, T s'étend en un difféomorphisme $M_i^{trou} \rightarrow M_{i+1}^{trou}$; on passe donc de M_i à M_{i+1} par chirurgie de Dehn. Cette chirurgie est entière car le méridien du tore solide N est envoyé sur une latitude (ie. un lacet qui coupe exactement une fois le méridien).

Théorème 3.2 (de Lickorish-Wallace pour les variétés à bord). *Toute 3-variété compacte orientable M s'obtient comme suit : choisir un entrelacs L et*



un 1-complexe dans \mathbb{S}^3 ; supprimer un petit voisinage ouvert de C et effectuer une chirurgie de Dehn entière le long d'un entrelacs.

Démonstration. Transformer M en une variété fermée M' en rebouchant son bord avec des corps en anses. Choisir dans M' un 1-simplexe C dont un petit voisinage ouvert consiste en les corps en anses (ainsi, en enlevant ce voisinage à M' , on obtient à nouveau M). On obtient M' à partir d'une chirurgie de Dehn entière le long d'un entrelacs L ; isotoper un peu pour que C et L soient disjoints dans \mathbb{S}^3 .

Corollaire 3.1. *Toute 3-variété fermée orientable M est le bord d'une 4-variété compacte simplement connexe.*

Pour démontrer cela, remarquons qu'en dimension 4, coller une 2-anse $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$ à une 4-variété orientable W par un plongement $\varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \partial W$ change son bord en remplaçant le tore solide $\varphi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$ par le tore solide $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$: c'est une chirurgie de Dehn, entière car les méridiens de ces deux tores ont nombre d'intersection 1. Inversement, toute chirurgie de Dehn entière sur un noeud $K \subseteq \partial W$ peut être vue de cette façon comme le collage d'une 2-anse à W .

Démonstration du corollaire. M est obtenue par chirurgie de Dehn entière sur $\mathbb{S}^3 = \partial \mathbb{D}^4$, donc est le bord d'une 4-variété obtenue en collant des 2-anses à \mathbb{D}^4 , qui est simplement connexe vu le théorème de Van Kampen.

Références

- [1] Bruno Martelli. *An Introduction to Geometric Topology*. 2016.