

# Rapport de stage

Az lie Picot

Février-Juillet 2021

## Contents

<b>1</b>	<b>Cadre du stage</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Notations</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Introduction à l'Analyse Topologique des Données</b>	<b>5</b>
3.1	Motivations . . . . .	5
3.2	Homologie persistante . . . . .	5
3.3	Modules de persistance généralisés . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Invariants de suites d'arbres</b>	<b>9</b>
4.1	Arbres . . . . .	9
4.2	Homologie persistante d'un Arbre . . . . .	10
4.3	Un invariant d'une suite d'arbre . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Morphismes de persistance</b>	<b>15</b>
5.1	Morphismes de persistance : définitions et propriétés . . . . .	15
5.2	Décomposition des monomorphismes de persistance . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Introduction aux opérades</b>	<b>20</b>
6.1	Motivations . . . . .	20
6.2	Opérades algébriques . . . . .	20

# 1 Cadre du stage

J'ai effectué mon stage de M1 dans le "Laboratory for Topology and Neuroscience" de l'EPFL dirigé par Professeure Kathryn Hess du premier février au 31 juillet 2021. J'ai passé ce premier mois de février en télétravail (à Paris) et je suis partie vivre à Lausanne en mars. J'ai d'abord été en télétravail en Suisse. J'ai pu travailler au bureau à l'EPFL lorsque le Conseil Fédéral a assoupli les mesures concernant le télétravail.

Tout au long de ce stage, j'ai eu la chance de participer aux activités du groupe de recherche ainsi qu'à des workshops (en ligne et en présentiel).

Je voyais ma superviseuse Kathryn Hess en moyenne une demi-heure par semaine (sur zoom ou à l'EPFL) pour lui expliquer ce que j'avais fait la semaine, lui poser des questions et entendre ses retours sur le rapport écrit que je mettais régulièrement à jour.

J'ai assisté au séminaire de topologie appliquée du laboratoire qui avait lieu une fois par semaine (en ligne malheureusement). Mes collègues m'ont d'ailleurs invitée à donner le séminaire du cinq octobre sur les travaux effectués pendant le stage.

Chaque semaine avait aussi lieu un groupe de lecture. Nous avons travaillé sur deux thématiques : les Laplaciens (combinatoire, Hodge, etc) et l'article [6]. J'ai préparé et donné un exposé pour chacun des thèmes. Cela m'a permis de m'entraîner à la lecture d'article ainsi qu'à préparer et donner des exposés, qui plus est en anglais.

J'ai aussi eu la chance de participer à trois workshops :

- Un workshop sur la "Topological Data Analysis" (TDA) qui devait avoir lieu à Chicago mais qui a finalement eu lieu sur zoom... Il y avait de nombreuses conférences sur des applications de la TDA, des nouvelles méthodes statistiques utilisées en TDA ainsi que sur des travaux plus théoriques en homologie persistante.
- "Topological Insights In Neuroscience" qui devait avoir lieu à Berkeley mais qui a finalement eu lieu sur zoom... sur les apports de la TDA en neurosciences. (<https://www.msri.org/workshops/940>)
- Un workshop sur les opérades, qui a eu lieu en présentiel à l'Université de Lille. Kathryn Hess m'a invitée à y participer. C'était une expérience très enrichissante. Même si je n'ai pas compris la plupart des conférences (Kathryn m'avait prévenue que c'est normal), j'ai découvert des questions de recherche qui m'intéressent. J'ai eu la chance de rencontrer des chercheurs et chercheuses (doctorant(e)s compris(es)) dans le domaine des opérades (qui m'intéresse fortement pour une future thèse).

Concernant mes projets de recherche, j'en ai eu trois pendant ce stage que j'explique dans la suite du rapport :

- Chercher des invariants d'une suite d'arbres



Figure 1: Le lac Léman de nuit

- Classifier et décomposer des modules de persistance sur  $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$
- Introduction aux opérades

Je ne peux pas clôturer cette mise en contexte de mon stage, sans dire quelques mots sur la Suisse que j'ai pu découvrir sous différents aspects pendant ces cinq mois, grâce à mes colocataires, mes collègues et leurs ami(e)s. Les paysages suisses sont très beaux et reposants. Avoir vue sur le lac Léman et les montagnes environnantes depuis les terrasses et les bureaux de l'EPFL ainsi que pouvoir se baigner le midi aux milieux des montagnes était extrêmement inspirant! Vivre en Suisse a été une occasion pour moi de voyager seule et à la dernière minute : réserver un train la veille et partir visiter une ville inconnue à l'autre bout de la Suisse. J'ai aussi découvert la culture suisse, qui est somme toute assez différente de la culture française, des expressions suisses ainsi que leur gastronomie (vive la fondue et la raclette).

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Kathryn Hess pour avoir accepté de m'encadrer pendant six mois, pour m'avoir laissée venir en Suisse, ainsi que m'avoir fait participer à divers workshop dont le fantastique Ochotop-workshop à Lille. Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire qui m'ont si bien intégrée. Je remercie aussi mes deux colocataires, et mes amis pour les moments inoubliables qu'on a partagés ensemble.

## 2 Notations

Ci-dessous sont explicitées quelques notations que j'utilise par la suite.

- $|E|$  désigne le cardinal d'un ensemble  $E$
- Si  $I$  est un intervalle réel, on note  $I_x$  son extrémité gauche et  $I_y$  son extrémité droite.
- Si  $G$  est un graphe,  $V(G)$  désigne l'ensemble de ses sommets tandis que  $E(G)$  désigne l'ensemble de ses arêtes.
- $\mathcal{P}(E)$  désigne l'ensemble des parties d'un ensemble  $E$ .

## 3 Introduction à l'Analyse Topologique des Données

### 3.1 Motivations

En analyse des données, on cherche une description simple et statistiquement analysable des données. L'analyse topologique des données (TDA en anglais) applique des outils de topologie à l'analyse des données. La TDA étudie la "topologie des données" ou autrement dit "approxime leur topologie".

Cependant les données fournies (images, signaux, nuages de points...etc) sont des objets discret, munis d'une topologie triviale. Une application de la TDA est de dire si un nuage de points discret "ressemble" à un cercle ou non, qui est un objet à la topologie non triviale.

L'idée fondatrice de la TDA est d'associer à un ensemble de données (dataset)  $X_0$  une "topologie graduée". On remplace  $X_0$  par une suite croissante pour l'inclusion d'espaces topologiques  $(X_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ . On applique ensuite les foncteurs homologie  $\mathbb{H}_d$  à la suite  $(X_r)_r$ , pour en tirer l'évolution des composantes connexes, trous, etc dans les données en fonction du paramètre  $r$ .

Il est plus simple de d'abord réfléchir avec un nuage de points  $X_0$ . Sur la figure 2, le nuage de points  $X_0$  ressemble à un cercle. On va lui associer une suite d'espaces topologiques  $X_r$ . L'espace  $X_r$  est construit en remplaçant chaque point de  $X_0$  par un disque centré en ce point de rayon  $r$ . Cette suite d'espace topologique est croissante pour l'inclusion. On peut appliquer à la suite  $(X_r)_r$  les foncteurs d'homologie  $\mathbb{H}_1$ . On obtient une suite d'espaces vectoriels reliés par des applications linéaires issues des inclusions. Cette suite nous permet de suivre "l'évolution des trous" dans  $(X_r)_r$ . Un "trou" peut apparaître à un certain rayon et être rempli à un autre rayon plus grand, autrement dit, chaque trou a une certaine "durée de vie". Concernant la ressemblance avec le cercle, l'idée est qu'un "trou central" va apparaître à un certain  $b$  et disparaître à un certain  $d$ . Plus l'intervalle  $(b, d)$  est large, plus on peut dire que ce trou central "persiste" et que le nuage de points ressemble à un cercle. Au contraire, un trou qui ne persiste pas "longtemps" sera considéré comme jouant un rôle négligeable dans la topologie du nuage de points.

La TDA permet d'étudier des objets plus complexes que des nuages de points, comme les graphes, les arbres ou même les fonctions.

L'analyse de ces suites de groupes d'homologie d'espace repose sur l'homologie persistante. Le lecteur trouvera une introduction détaillée à la TDA dans [11].

### 3.2 Homologie persistante

On commence par définir proprement les "suites de groupes homologiques" évoquées précédemment. On fixe un corps  $\mathbb{k}$ .

**Définition 3.1** (Module de persistance sur  $\mathbb{R}$ ). Un *module de persistance* sur  $\mathbb{R}$  à coefficients dans  $\mathbb{k}$  est un foncteur  $M : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow \mathbf{Vect}$ , où  $\mathbf{Vect}$  est la catégorie des espaces vectoriels sur  $\mathbb{k}$  et  $(\mathbb{R}, \leq)$  est vu comme la catégorie dont les objets sont les réels et

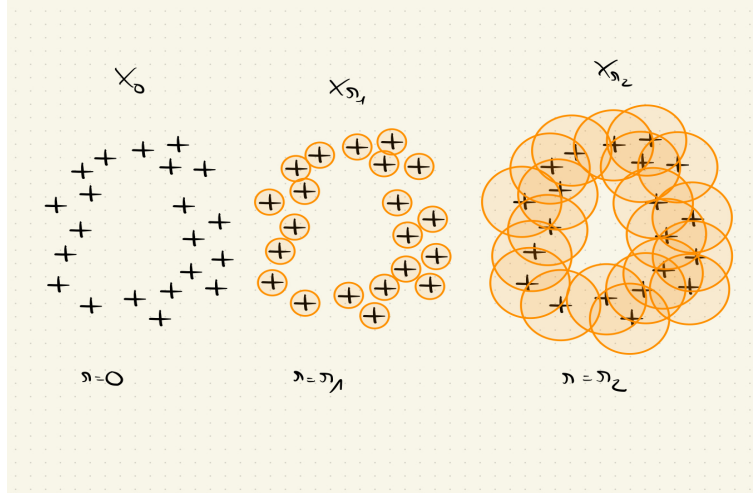


Figure 2: Filtration d'un nuage de points

$$\text{Hom}(s, t) = \begin{cases} \{s \mapsto t\} & \text{si } s \leq t \\ \emptyset & \text{else} \end{cases}$$

Soit  $M$  un module de persistance sur  $\mathbb{R}$ . Le module  $M$  est de dimension finie point-par-point si  $\dim M_x < \infty$  pour tout  $x$ .

**Remarque 3.2.** *Autrement dit, un module de persistance  $M$  sur  $(\mathbb{R}, \leq)$  est une suite d'espaces vectoriels indexée par  $\mathbb{R}$  et reliés par des applications linéaires en suivant l'ordre des indices. Pour tous  $x \leq y \in \mathbb{P}$ , il y a une application linéaire  $M(x, y) : M_x \rightarrow M_y$ . Pour tous  $x \leq y \leq z$ ,  $M(x, z) = M(x, y) \circ M(y, z)$ . On a aussi  $M(x, x) = \text{id}$ .*

On peut définir comme pour les espaces vectoriels la somme directe de deux modules de persistance, les sous-modules de persistance, le module nul, ainsi que les morphismes de modules de persistance.

**Définition 3.3** (Morphisme de modules de persistance). Soient  $M, N$  deux modules de persistance sur  $\mathbb{R}$ . Un morphisme  $\phi : M \rightarrow N$  est une transformation naturelle entre les deux foncteurs  $M$  et  $N$ .

**Remarque 3.4.** *Autrement dit, un morphisme  $\phi : M \rightarrow N$  est une collection d'applications linéaires  $\phi_x : M_x \rightarrow N_x$  pour  $x \in \mathbb{R}$  telles que le carré suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} M_x & \xrightarrow{\phi_x} & N_x \\ M(x,y) \downarrow & & \downarrow N(x,y) \\ M_y & \xrightarrow{\phi_y} & N_y \end{array}$$

**Définition 3.5.** Le module nul est le foncteur nul  $0 : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow \mathbf{Vect}$ .

Soient  $M, N$  deux modules de persistance sur  $\mathbb{R}$ . Le module  $M$  est un sous-module de  $N$  si et seulement si  $M_x$  est un sous-espace vectoriel de  $N_x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $M(x, y) = N(x, y)|_{M_x}$  pour  $x \leq y$ .

Soient  $M, N$  deux modules de persistance sur  $\mathbb{R}$ . La *somme directe* de  $M$  et  $N$  est le module  $M \oplus N$  défini par  $(M \oplus N)_x = M_x \oplus N_x$  pour tout  $x$  et  $(M \oplus N)(x, y) = M(x, y) \circ \pi_M + N(x, y) \circ \pi_N$  pour  $x \leq y$ , où  $\pi_M, \pi_N$  sont les projections sur  $M, N$ .

Comment obtenons-nous un module de persistance à partir d'un dataset? Définissons d'abord la notion de filtration topologique.

**Définition 3.6** (Filtration topologique). Soit  $X$  un espace topologique. Une filtration de  $X$  est une suite croissante pour l'inclusion  $(X_r)_{r \in \mathbb{R}}$  de sous-espaces topologiques de  $X$ .

Soit une filtration  $(X_r)_{r \in \mathbb{R}}$  de  $X$ . Chaque inclusion  $X_r \hookrightarrow X_t$  pour  $r \leq t$  donne lieu à une application entre groupes homologiques

$$\iota(r, t) : \mathbb{H}_d(X_r) \rightarrow \mathbb{H}_d(X_t)$$

, où  $d \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , on a alors un module de persistance  $M_d$  défini par  $M_{d,r} = \mathbb{H}_d(X_r)$  et  $M_d(r, t) = \iota(r, t)$  pour tous  $r \leq t$ .

La question est désormais de trouver un invariant simple des modules de persistance. Un invariant complet, le code-barre, est donné par le théorème suivant.

Le code-barre répond à la question de la décomposition des modules de persistance en somme directe de modules indécomposables, similaire à la question de la classification des espaces vectoriels de dimension finie.

Avant toute chose, on définit une classe de modules : *les modules intervalles*.

**Définition 3.7** (Module Intervalle). Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Le *module intervalle*  $\mathbb{k}_I$  est le module défini de la façon suivante :

- $\mathbb{k}_{I_x} = \mathbb{k}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\mathbb{k}_I(x, y) = \begin{cases} \text{id si } x \leq y \text{ et } x, y \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

**Théorème 3.8** (Théorème de Gabriel). Soit  $M$  un module de persistance sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie point par point. Il existe un unique multi-ensemble d'intervalles  $\mathcal{B}$  tel que

$$M \cong \bigoplus_{I \in \mathcal{B}} \mathbb{k}_I.$$

Cet ensemble d'intervalle est appelé le code-barre de  $M$  et est usuellement noté  $\mathcal{B}(M)$ .

Les modules intervalles sont indécomposables, i.e. si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , il n'existe pas de modules non nuls  $V, W$  tels que  $\mathbb{k}_I = V \oplus W$ .

**Remarque 3.9.** *Le code-barre est un invariant complet des modules de persistance. Deux modules de persistance sont en effet isomorphes si et seulement si ils ont le même code-barre.*

*Le code-barre fournit un résumé simple d'un module de persistance. Des pseudométriques ont été définies sur l'espace des code-barres telles que la distance bottleneck. On peut alors jauger la différence entre deux modules de persistance ou deux filtrations topologiques en comparant leurs code-barres.*

*Le code-barre est stable vis-à-vis de la perturbation des données. Cela signifie que deux datasets proches ont deux code-barres (issus de la filtration décrite pour le nuage de point par exemple) proches.*

*Le code-barre en tant que tel ne vit pas dans un espace vectoriel. On ne peut pas faire simplement des analyses statistiques plus poussées sur les code-barres. D'autres invariants issus des code-barres et "vectorisés" ont vu le jour comme le paysage de persistance ([3]) ou les images de persistance ([1]).*

### 3.3 Modules de persistance généralisés

Au lieu d'utiliser un seul paramètre dans nos filtrations d'espaces topologiques, on pourrait utiliser deux paramètres, voire plus. Dans l'exemple figure 2, on peut filtrer par le rayon des disques ainsi que la densité de points. On a besoin d'une notion plus générale de module de persistance.

**Définition 3.10** (Module de persistance). Soit  $(\mathbb{P}, \leq)$  un ensemble ordonné. Un *module de persistance* sur  $\mathbb{P}$  à coefficients dans  $\mathbb{k}$  est un foncteur

$$M : (\mathbb{P}, \leq) \rightarrow \mathbf{Vect}$$

où l'ensemble ordonné  $(\mathbb{P}, \leq)$  est vu comme la catégorie dont les objets sont les éléments de  $\mathbb{P}$  et  $\text{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{x \rightarrow y\} & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$ .

Soit  $M$  un module de persistance sur  $\mathbb{P}$ . Le module  $M$  est de dimension finie point-par-point si  $\dim M_x < \infty$  pour tout  $x$ .

**Remarque 3.11.** *Autrement dit, un module de persistance  $M$  sur  $(\mathbb{P}, \leq)$  est une suite d'espaces vectoriels indexée par  $\mathbb{P}$  et reliés par des applications linéaires en suivant l'ordre des indices. Pour tous  $x \leq y \in \mathbb{P}$ , il y a une application linéaire  $M(x, y) : M_x \rightarrow M_y$ . Pour tous  $x \leq y \leq z$ ,  $M(x, z) = M(x, y) \circ M(y, z)$ . On a aussi  $M(x, x) = \text{id}$ .*

**Remarque 3.12.** *Dans la suite du rapport, les ensembles ordonnés que nous utilisons sont principalement  $(\mathbb{R}, \leq)$  et  $(\mathbb{R} \times \{1, 2\}, \leq)$  où la relation d'ordre est la suivante :*

$$(x, 1) \leq (y, 1) \leq (y, 2) \leq (z, 2)$$

si  $x \leq y \leq z$ .

Tout module de persistance se décompose en somme directe de modules indécomposables plus simples, une preuve peut se trouver [2].

**Théorème 3.13** (Théorème de Crawley-Boevey). *Soit  $M$  un module de persistance de dimension finie point-par-point sur un ensemble ordonné  $(\mathbb{P}, \leq)$ . Alors  $M$  s’écrit de manière unique (à permutation des termes près) comme une somme directe de modules indécomposables sur  $(\mathbb{P}, \leq)$ .*

Pouvons-nous généraliser le théorème de décomposition de 3.8 aux modules de persistance sur  $\mathbb{R}^d$ , où  $d \in \mathbb{N}$ ? La réponse est non. On n’a pas de généralisation du code-barre pour  $d \geq 2$ ... Carlsson et Zomorodian démontrent même dans [4] qu’il n’existe pas d’invariant complet “gentil” des modules de persistance sur  $\mathbb{R}^d$  pour  $d \geq 2$ .

## 4 Invariants de suites d’arbres

Les neurones se répartissent en groupes correspondant à diverses fonctions dans le cerveau selon leur morphologie. Cependant, classifier les neurones en divers groupes à l’oeil nu est difficile et subjectif pour des neurones avec un nombre élevé de branches. Il faut donc trouver des invariants comparables pour les neurones (soit des arbres) dans le but d’y appliquer les algorithmes classiques de “clustering”. Dans l’article [5], les auteur(e)s associent un code-barre aux neurones en suivant l’homologie persistante. Elles et ils obtiennent une classification satisfaisante des neurones issus de cortex de divers animaux (en particulier rats).

Dans la continuité de cette question, Kathryn m’a proposé de travailler sur la neurogénèse (i.e. la croissance des neurones). L’idée est donc de trouver un invariant d’une suite de neurones, à la fois simple (pour pouvoir comparer deux processus de croissance d’un neurone) et précis.

### 4.1 Arbres

Nous définissons tout d’abord proprement la notion d’arbre utilisé. Ces arbres sont appelés en anglais “merge trees” mais le terme n’a pas d’équivalent français. Nous les appellerons par la suite “arbres gradués”. Cette notion d’arbre est inspirée des neurones dans notre contexte, mais apparaît en réalité dans l’étude des fonctions de Morse (voir [11] pour plus de détails).

**Définition 4.1** (Arbre). Un *arbre*  $T$  est un graphe orienté acyclique binaire, c’est-à-dire dont les sommets sont de degré au plus 2.

Un *arbre binaire enraciné*  $(T, r)$  est un arbre binaire dont un des sommets de degré 1  $r$  est désigné comme *racine*.

L’ensemble des sommets d’un arbre  $T$  est noté  $V(T)$ . L’ensemble des feuilles de  $T$  est l’ensemble des sommets de degré 1 de  $T$  excepté la racine lorsque l’arbre est enraciné. Il est noté  $L(T)$ .

On introduit une relation d’ordre partielle sur  $V(T)$ , notée  $\preceq$ , telle que  $v \preceq w$  si le noeud  $v$  est un descendant du noeud  $w$ .

**Définition 4.2** (Sous-Arbre). Soit  $T, T'$  deux arbres.  $T$  est un *sous-arbre* de  $T'$  si  $V(T) \subset V(T')$  et  $E(T) = \{(v, w) \in E(T'), \mid v, w \in V(T)\}$ . On dit aussi que  $T$  est le sous-arbre de  $T'$  engendré par  $V(T)$ .

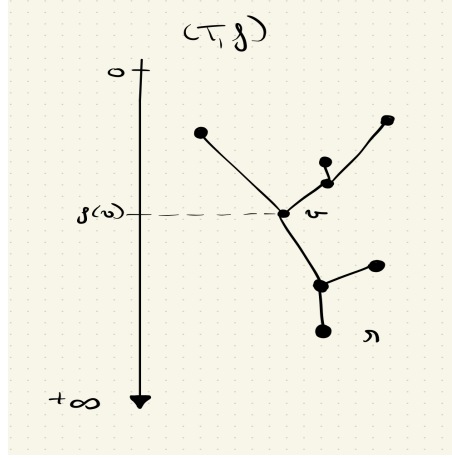


Figure 3: Un arbre gradué  $(T, f)$

Si  $(T, r)$  et  $(T', r')$  sont enracinés,  $(T, r)$  est un *sous-arbre* de  $(T', r')$  lorsque  $r = r'$  et  $T$  est un sous-arbre de  $T'$ .

**Définition 4.3** (Arbre Gradué ou Merge Tree). Un *arbre gradué*  $(T, r, f)$  est un arbre enraciné  $(T, r)$  muni d'une fonction de hauteur  $f : V(T) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

- $f(r) = \infty$
- $f(w) \leq f(v)$  si  $w \preccurlyeq v$ .

**Définition 4.4.** Soient  $(T, f)$  et  $(T', f')$  deux arbres gradués. L'arbre  $(T, f)$  est un sous-arbre gradué de  $(T', f')$  si  $T$  est un sous-arbre de  $T'$  ayant la même racine et si  $f' \leq f$ .

**Remarque 4.5.** Dans le cadre d'un arbre gradué  $(T, f)$  (la racine est sous-entendue), la fonction  $f$  peut être vue comme la fonction inverse de la distance d'un sommet à la racine.

**Remarque 4.6.** Un arbre  $(T, f)$  est dit strict lorsque  $f$  est injective. Par la suite, nous ne considérons que des arbres stricts.

La figure 3 présente un arbre gradué.

## 4.2 Homologie persistante d'un Arbre

Pour obtenir un invariant d'un neurone, les auteur(e)s de [5] associent un module de persistance à un arbre gradué de la façon suivante :

**Définition 4.7.** Soit  $(T, f)$  un arbre gradué. Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Soit  $T_r$  le sous-arbre de  $T$  engendré par l'ensemble des sommets  $V(T_r) = \{v \in V(T) \mid f(v) \leq r\}$ . La suite  $((T_r, f|_{V(T_r)}))$  forme une filtration de l'arbre  $(T, f)$ .

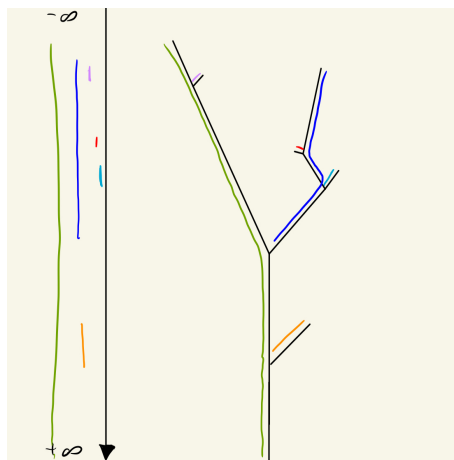


Figure 4: Code-barre d'un arbre gradué. Chaque couleur représente un intervalle. Les extrémités d'une branche colorée sont les extrémités de l'intervalle correspondant.

On a désormais une filtration d'un arbre gradué  $(T, f)$ . On peut appliquer à cette filtration le foncteur homologie en degré 0  $H_0$  (les groupes d'homologie en degré supérieur étant tous nuls). On obtient un module de persistance sur  $\mathbb{R}$ . Il admet donc un code-barre noté  $\mathcal{B}((T, f))$  ou simplement lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté  $\mathcal{B}(T)$ .

Le code-barre traque les longueurs des branches principales de l'arbre  $(T, f)$ . La figure 4 présente une illustration du code-barre d'un arbre.

### 4.3 Un invariant d'une suite d'arbre

Inspirée par la neurogénèse, on cherche un invariant d'une suite de neurones. Il est naturel de supposer qu'il ne peut y avoir que création ou allongement de branches. Un neurone ne peut pas perdre une branche ou voir une de ses branches se rétrécir au cours de la croissance. Par suite, on cherche un "bon" invariant des suites croissantes d'arbres gradués pour l'inclusion.

Soit une suite  $((T_i, f_i))_{i=1}^n$  croissante d'arbres gradués pour l'inclusion. Le premier invariant auquel on pense est tout simplement la suite des code-barres des arbres gradués  $(\mathcal{B}(T_i))_{i=1}^n$  cependant cette suite n'est pas suffisamment discriminante comme le montre l'exemple 5.

La simple suite des code-barres ne permet pas de dire quantitativement comment les branches grandissent : si elles ont "beaucoup" grandi ou au contraire "peu" grandi.

On va compléter la suite des code-barres par des *matchings* (autrement dit des applications partielles) entre deux barcodes consécutifs.

**Définition 4.8.** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux code-barres. Un *matching*  $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  est

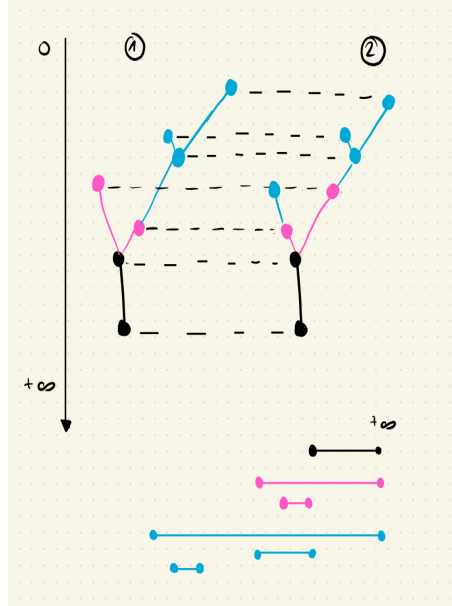


Figure 5: Deux suites d'arbres ayant la même suite de code-barres

une application partielle (c'est-à-dire définie sur un sous-ensemble de  $\mathcal{B}$ ) de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ .

Le sous-ensemble de  $\mathcal{B}$  sur lequel est défini  $\sigma$  est noté  $\text{coim}(\sigma)$ ,  $\text{im}(\sigma)$  est l'image classique de  $\sigma$ .

On prouve facilement le lemme suivant :

**Lemme 4.9.** *Soit  $(T, f)$  un arbre gradué. Notons  $\mathcal{B}$  son code-barre. Il existe une bijection  $\omega : L(T) \rightarrow \mathcal{B}$  telle que*

$$f(v) = \omega(v)_x$$

pour toute feuille  $v$ .

On associe maintenant à une inclusion d'arbres gradués  $(T, f) \subset (T', f')$  un matching  $\sigma : \mathcal{B}(T) \rightarrow \mathcal{B}(T')$ .

**Définition 4.10.** Soient  $(T, f) \subset (T', f')$  deux arbres gradués. Notons

$$\omega : L(T) \rightarrow \mathcal{B}(T) \text{ et } \omega' : L(T') \rightarrow \mathcal{B}(T')$$

les bijections du lemme 4.9.

On définit une application  $m : L(T) \rightarrow L(T')$  de la manière suivante. Soit  $v \in L(T)$ , alors  $v \in V(T')$ . Soit l'ensemble  $E = \{w \in L(T') \mid w \preceq v\}$ . L'image  $m(v)$  est définie comme étant la feuille qui minimise  $f'$  sur  $E$ .

On pose alors  $\sigma = \omega' \circ m \circ \omega^{-1}$  qui définit bien un matching.

On appelle ce matching *matching d'inclusion*.

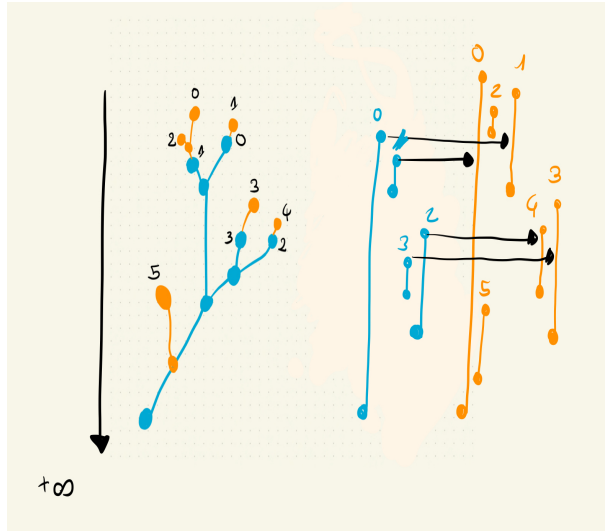


Figure 6: Construction du matching

La figure 6 montre un exemple de la construction de ce matching d'inclusion. On peut ainsi définir un invariant pour les suites croissantes d'arbres gradués:

**Définition 4.11** (“Giga code-barre” ou “Gigabarcode”). Soit  $((T_i, f_i))_{i=1}^n$  une suite croissante d'arbres gradués. On appelle gigabarcode de la suite le couple  $((\mathcal{B}(T_i))_{i=1}^n, (\sigma_i)_{i=1}^{n-1})$ , où  $\sigma_i : \mathcal{B}(T_i) \rightarrow \mathcal{B}(T_{i+1})$  est le matching 4.10 de l'inclusion  $T_i \subset T_{i+1}$ .

La figure 7 présente les giga code-barres de l'exemple précédent. Le gigabarcode permet de distinguer les deux suites dans ce cas.

**Remarque 4.12.** La suite des code-barres “résume” l'état de l'arbre à chaque étape, tandis que le matching nous renseigne sur le taux de croissance des branches.

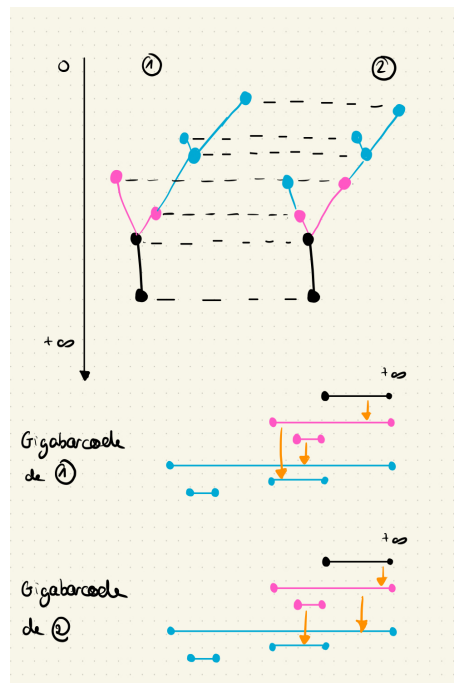


Figure 7: Le giga code-barre distingue les suites (1) et (2)

## 5 Morphismes de persistance

Nous avons vu dans la section 3.3 qu'on ne sait pas classifier "simplement" les modules de persistance sur  $\mathbb{R}^2$ . Partant du constat qu'un module de persistance sur  $\mathbb{R}^2$  peut se voir comme une famille de morphismes de modules de persistance, on veut étudier la "décomposition" des morphismes de persistance.

### 5.1 Morphismes de persistance : définitions et propriétés

**Définition 5.1.** Soient  $M, N$  deux modules de persistance sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un morphisme de modules de persistance.

Le morphisme  $\phi$  est un *monomorphisme* si  $\phi_x$  est injective pour tout  $x$ .

Le morphisme  $\phi$  est un *épimorphisme* si  $\phi_x$  est surjective pour tout  $x$ .

Le morphisme  $\phi$  est un *isomorphisme* si  $\phi_x$  est bijective pour tout  $x$ .

Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un morphisme du module  $M$  au module  $N$ . Le module  $M$  admet un code-barre. Pour chaque intervalle  $I \in \mathcal{B}(M)$ , on va s'intéresser à l'ensemble des "intervalles image" de  $I$  par  $\phi$  dans  $\mathcal{B}(N)$ . Cette notion est définie proprement ci-dessous.

**Définition 5.2.** Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un morphisme. Quitte à appliquer un isomorphisme, on écrit  $M = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(M)} \mathbb{k}_I$  et  $N = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(N)} \mathbb{k}_I$ . On définit une fonction

$$\mu_\phi : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B}(N))$$

telle que

$$\mu_\phi(I) = \{J \in \mathcal{B}(N) \mid \pi_J \circ \phi \neq 0\},$$

où  $\pi_J : N \rightarrow \mathbb{k}_J$  est la projection sur le module  $\mathbb{k}_J$ .

On énonce ensuite une propriété (la preuve est simple et n'est pas donnée ici) sur les monomorphismes et les épimorphismes, qu'on utilise par la suite.

**Lemme 5.3.** Soit  $\phi : M \hookrightarrow N$  un monomorphisme. Pour tout  $I \in \mathcal{B}(M)$ , il existe un intervalle  $J \in \mu_\phi(I)$  tel que  $J_y = I_y$  et  $J_x \leq I_x$ .

Soit  $\phi : M \hookrightarrow N$  un épimorphisme. Pour tout  $I \in \mathcal{B}(M)$ , il existe un intervalle  $J \in \mu_\phi(I)$  tel que  $J_x = I_x$  et  $J_y \leq I_y$ .

La figure 8 illustre la fonction  $\mu_\phi$ .

### 5.2 Décomposition des monomorphismes de persistance

Nous cherchons à décomposer en "briques simples" les monomorphismes. Voyons tout d'abord ce que cela signifie, via la propriété suivante.

**Proposition 5.4.** Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un morphisme de modules de persistance. On associe à  $\phi$  un module de persistance  $P(\phi)$  sur  $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$  défini par :

- $P(\phi)_{x,1} = M_x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

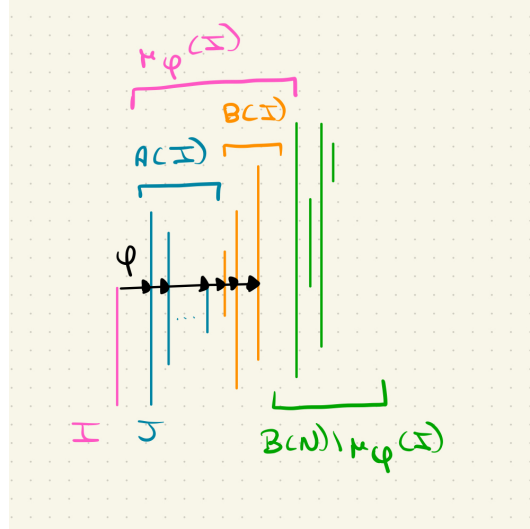


Figure 8: Illustration des ensembles  $\mu_\phi(I), A(I), B(I)$  d'un monomorphisme  $\phi : \mathbb{k}_I \hookrightarrow N$

- $P(\phi)_{x,2} = N_x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $P(\phi)((x, 1), (y, 1)) = M(x, y)$  pour  $x \leq y$
- $P(\phi)((x, 2), (y, 2)) = N(x, y)$  pour  $x \leq y$
- $P(\phi)((x, 1), (x, 2)) = \phi_x$

Réciproquement, on peut associer à tout module de persistance  $P$  sur  $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$  un morphisme  $\phi : P_{.,1} \rightarrow P_{.,2}$  défini par  $\phi_x = P((x, 1), (x, 2))$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et où  $P_{.,i}$  désigne la restriction de  $P$  à la  $i$ -ème colonne pour  $i = 1, 2$ .

Chaque morphisme peut donc se voir comme un module de persistance sur  $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$  et réciproquement. On verra indistinctement un monomorphisme comme un module de persistance, et un module de persistance sur  $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$  comme un morphisme. D'après le théorème de Crawley-Boevey, les modules de persistance sur  $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$  admettent une unique décomposition en somme directe de modules indécomposables. Le théorème suivant donne une caractérisation "combinatoire" des monomorphismes indécomposables. Dans la suite, on suppose tous les code-barres stricts et finis.

**Définition 5.5.** Soit  $\mathcal{B}$  un ensemble d'intervalles. Il est dit strict si pour tous  $I \neq J \in \mathcal{B}$ ,  $I_x \neq J_x$  et  $I_y \neq J_y$ .

**Définition 5.6.** Soit  $\phi : M \hookrightarrow N$  un monomorphisme. Soit  $I \in \mathcal{B}(M)$ . Il existe  $J \in \mu_\phi(I)$  tel que  $J_y = I_y$ .

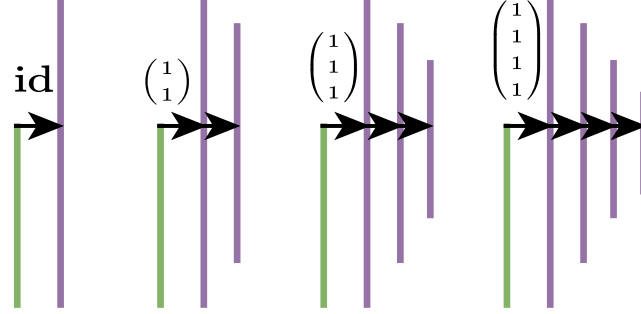


Figure 9: Monomorphismes indécomposables  $\phi : k_I \hookrightarrow N$

La partie essentielle de  $\mu_\phi(I)$  est l'ensemble

$$A(I) = \{K \in \mu_\phi(I), K \subset J \text{ et il n'existe pas } L \in \mu_\phi(I), | K_y < L_y, K_x < L_x\}$$

On note  $B(I) = \mu_\phi(I) \setminus A(I)$  son complémentaire.

**Remarque 5.7.** On peut montrer que l'ensemble  $A(I)$  est de la forme

$$A(I) = \{J_1, \dots, J_n\}$$

où  $J_1 = J$  et  $J_n \subset J_{n-1} \subset \dots \subset J_1$ .

La figure 8 illustre la partie essentielle de  $\mu_\phi(I)$ .

**Théorème 5.8.** Soit  $\phi : M \hookrightarrow N$  un monomorphisme. On note  $\mathcal{B}(M) = \{I_1, \dots, I_n\}$ . On définit un graphe  $G(\phi)$  de la manière suivante :

- L'ensemble de ses sommets  $V(G(\phi)) = \{1, \dots, n\}$ .
- $(i, j)$  est une arête de  $G(\phi)$  si et seulement si  $A(I_i) \cap A(I_j) \neq \emptyset$ .

Le module  $\phi$  est indécomposable si et seulement si le graphe  $G(\phi)$  est connexe et

$$\mu_\phi(I) = \cup_{j=1}^n A(I_j)$$

La figure 9 présente des monomorphismes indécomposables  $\phi : k_I \hookrightarrow N$ .

La figure 10 présente des monomorphismes indécomposables dans le cas général. Par soucis de lisibilité, on écrit  $A_j$  au lieu de  $A(I_j)$ . Les graphes  $G(\phi)$  sont représentés à droite des morphismes.

L'interprétation de ce résultat est qu'à chaque fois qu'un intervalle  $L \in \mu_\phi(I)$  chevauche un intervalle  $K \in \mu_\phi(I)$  pour un certain  $I \in \mathcal{B}(M)$  (c'est-à-dire

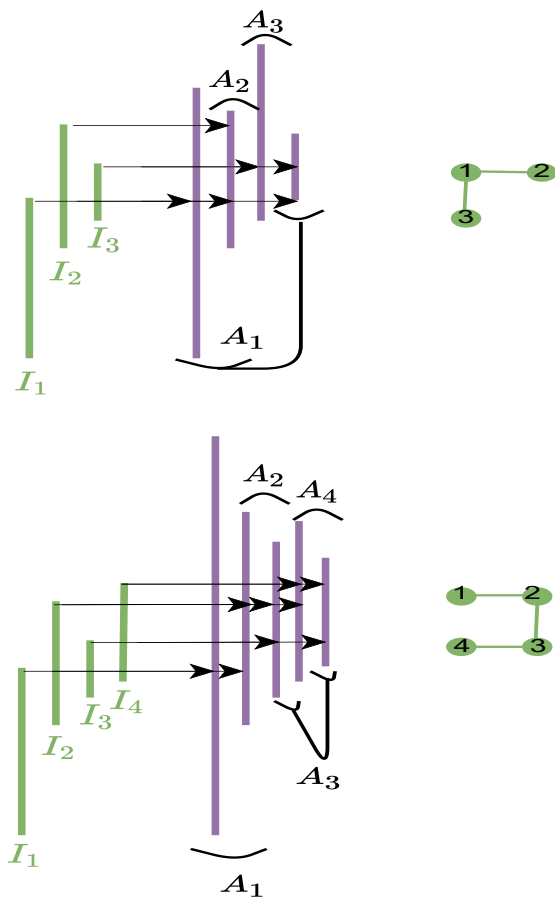


Figure 10: Monomorphismes indécomposables

$L_y \leq K_y, L_x \leq K_x$ ), on peut trouver un monomorphisme  $\psi$  qui est “isomorphe” à  $\phi$  en tant que module sur  $\times\{1, 2\}$  tel que  $K \in \mu_\psi(I)$  mais  $L \in \mu_{\psi i}(I)$ . Intuitivement, lorsqu’un intervalle  $L$  chevauche un intervalle  $K$ , on peut les “séparer” et même “séparer” l’intervalle  $L$  de l’image de  $I$ .

On déduit du théorème 5.8 un théorème de décomposition des monomorphismes. Un argument de dualité permet de déduire la décomposition des épimorphismes. Des preuves et plus de détails seront disponibles dans un papier à venir.

## 6 Introduction aux opérades

Dans la dernière partie de mon stage, je me suis intéressée aux opérades en suivant les papiers introductifs [12], [8] ainsi que le livre [7]. J’ai eu la chance de pouvoir participer au workshop Ochotop de Lille les 5,6,7 juillet en présentiel. Je décris d’abord les motivations des opérades, et ensuite je définis les opérades algébriques.

Cette partie tente de donner la définition d’opérade algébrique, tout en donnant des intuitions sur les objets.

### 6.1 Motivations

Les opérades ont été introduites dans les années 70 par Jon Peter May [9] dans l’étude des espaces de lacets itérés d’un espace topologique. Les opérades se révèlent utiles pour étudier les relations entre les homotopies supérieures.

Les opérades permettent de voir différemment les structures algébriques (algèbres associatives, algèbres de Lie, etc). Au lieu de considérer les éléments d’une algèbre et leur multiplication, on va plutôt regarder les opérations sur les éléments et la composition de ces opérations.

On a plusieurs types d’algèbres : algèbres associatives, algèbres de Lie, algèbres commutatives... etc. Plutôt que de considérer à chaque fois la catégorie de ces algèbres, on aimerait une structure algébrique appelée opérade **As**, **Lie**, **Com** qui décrit ou encode respectivement toutes les algèbres associatives, algèbres de Lie, algèbres commutatives. Chaque opérade encoderait les opérations et les propriétés que doivent posséder les opérations dans chaque type d’algèbres. La théorie permet donc d’unifier la théorie des algèbres en l’étude d’une autre structure algébrique.

Les opérades interviennent dans l’étude des homotopies supérieures ainsi que le transfert de structure à homotopie près. Imaginons deux complexes de chaînes homotopes  $(A, d_A)$  et  $(H, d_H)$ , tels que  $(A, d_A)$  est muni d’une multiplication  $\mu$  associative. On peut munir  $(H, d_H)$  d’une multiplication  $\nu$  via  $(A, d_A)$  cependant cette multiplication n’est pas toujours associative. En regardant un peu plus près, cette multiplication  $\nu$  est “associative à homotopie près”. Le formalisme des opérades permet de décrire correctement cette nouvelle structure d’algèbre différentielle graduée (ou complexe de chaîne muni d’une multiplication) associative à homotopie près.

La théorie des opérades a aussi des liens avec la géométrie symplectique ([10]).

On donne ci-dessous la définition d’une opérade algébrique non-symétrique ainsi que la définition d’algèbre sur une opérade. On décrit aussi l’opérade associative **As**.

### 6.2 Opérades algébriques

On souhaite qu’une opérade encode les opérations d’une algèbre. Chaque opération a un certain nombre d’entrées. On va encoder toutes les opérations à disons  $n$

entrées dans un module, d'où la définition suivante. On fixe un corps  $\mathbb{k}$  dans toute la suite.

**Définition 6.1** ( $\mathbb{N}$ -modules). Un  $\mathbb{N}$ -module est une suite de  $\mathbb{k}$ -modules

$$V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Un *morphisme* de  $\mathbb{N}$ -modules  $f : V \rightarrow W$  de *degré*  $r$  est une collection d'applications linéaires  $f_n : V_n \rightarrow W_{n+r}$ . Le degré de  $f$  est noté  $|f|$ .

On note  $\mathbb{N} - \mathbf{Mod}$  la catégorie des  $\mathbb{N}$ -modules.

**Définition 6.2** (Composition des  $\mathbb{N}$ -modules). Soient  $V, W$  deux  $\mathbb{N}$ -modules. La composition de  $V$  par  $W$  est le  $\mathbb{N}$ -module défini par

$$(V \circ W)(n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V(k) \otimes W^{\otimes k}(n)$$

où

$$W^{\otimes k}(n) = \bigoplus_{i_1 + \dots + i_k = n} W(i_1) \otimes \dots \otimes W(i_k).$$

Soit  $A$  un espace vectoriel. On note  $\text{End}_A$  le  $\mathbb{N}$ -module des opérations de  $A$  défini par  $\text{End}_A(n) = \text{Hom}(A^{\times n}, A)$ .

On définit enfin la composition de deux morphismes de  $\mathbb{N}$ -modules.

**Définition 6.3.** Soient  $f : V \rightarrow V'$  et  $g : W \rightarrow W'$  de degré 0. Le morphisme  $f \circ g : V \circ W \rightarrow V' \circ W'$  est le morphisme de degré 0 défini par

$$(f \circ g)_n(\mu, \nu_1, \dots, \nu_k) = (f_k(\mu), g_{i_1}(\nu_1), \dots, g_{i_k}(\nu_k))$$

où  $\mu \in \mathcal{P}(k)$ , et  $\nu_j \in \mathcal{P}(i_j)$  tel que  $i_1 + \dots + i_k = n$ .

Nous pouvons désormais donner la définition classique d'opérate algébrique

:

**Définition 6.4** (Opérate algébrique, définition classique). Une *opérate algébrique non-symétrique non-unitaire* est un  $\mathbb{N}$ -module  $\mathcal{P}$  qu'on munit d'un morphisme de *composition* de  $\mathbb{N}$ -modules  $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  qui vérifie la condition d'*associativité*:

$$\gamma(\gamma \circ \text{id}_{\mathcal{P}}) = \gamma(\text{id}_{\mathcal{P}} \circ \gamma).$$

L'opérate est dite *unitaire* si il existe un morphisme  $\eta : (0, \mathbb{k}, 0, \dots) \rightarrow \mathcal{P}$  vérifiant la condition

$$\gamma(\eta \circ \text{id}_{\mathcal{P}}) = \gamma(\text{id}_{\mathcal{P}} \circ \eta).$$

L'opération  $\text{id} = \eta(1_{\mathbb{k}})$  est appelée *identité*.

**Remarque 6.5.** Dans un soucis de lisibilité, la composition usuelle des fonctions  $f \circ g$  est notée  $fg$ .

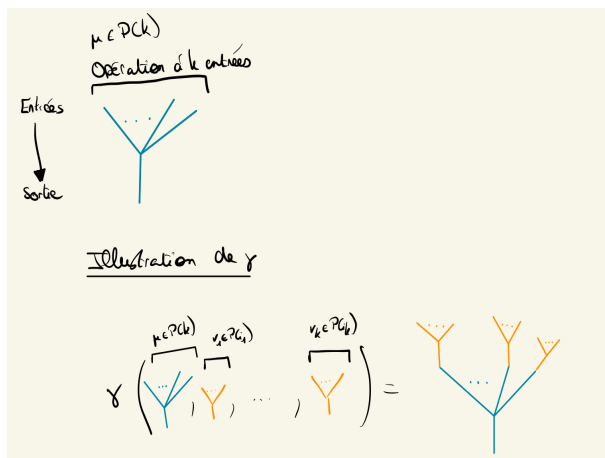


Figure 11: Représentation d'une opération à  $n$  entrées et illustration de la composition  $\gamma(\mu, \nu_1, \dots, \nu_k)$

**Exemple 6.6.** On munit  $End_A$  d'une structure d'opérate algébrique non-symétrique unitaire via la composition suivante

$$\gamma(f, f_1, \dots, f_k) = f(f_1 \otimes \dots \otimes f_k).$$

ainsi que de l'identité  $id = id_A$ .

**Remarque 6.7.** Si  $\mathcal{P}$  est une opérade, les éléments de  $\mathcal{P}(n)$  sont appelées opérations d'arité  $n$  ou opérations à  $n$  entrées.

Un élément  $\mu \in \mathcal{P}(n)$  peut être représenté par un arbre à  $n$  feuilles (par soucis de simplicité, on les représente schématiquement par un arbre corolle mais d'autres arbres pourraient convenir). La composition  $\gamma$ , ainsi que l'associativité et l'élément unitaire  $\eta$  sont illustrés figures 11 et 12.

On donne ici une autre définition d'opérate algébrique, dans laquelle on commence les opérations deux à deux au lieu de composer plusieurs opérations d'un coup.

**Définition 6.8** (Opérate algébrique, définition partielle). Une opérade non-symétrique non-unitaire est un  $\mathbb{N}$ -module  $\mathcal{P}$  muni d'une famille d'applications linéaires de compositions partielles pour chaque entier  $m$  :

$$- \circ_i - : \mathcal{P}(m) \circ \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n + m - 1),$$

avec  $1 \leq i \leq m$  qui satisfont les propriétés de composition séquentielle et composition parallèle suivantes pour  $\lambda \in \mathcal{P}(l), \mu \in \mathcal{P}(m), \nu \in \mathcal{P}(n)$ :

1.  $\lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu) = (\lambda \circ_i \mu) \circ_{i+j-1} \nu$  pour tous  $1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m$ .
2.  $(\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu = (\lambda \circ_i \mu) \circ_{k-1+m} \nu$  pour  $1 \leq i < k \leq l$ .

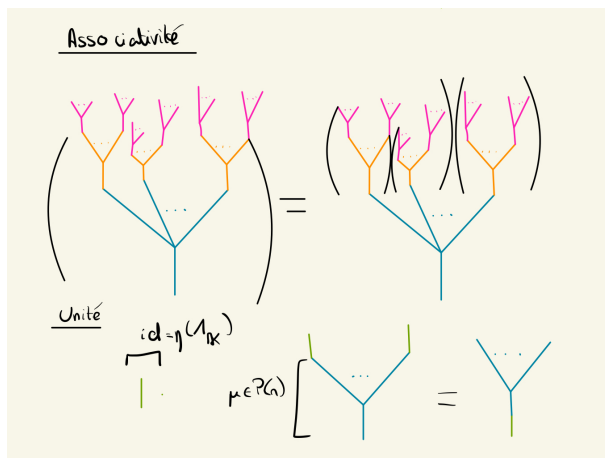


Figure 12: Illustration des propriétés d'associativité de  $\gamma$  ainsi que d'unité  $\text{id}$

L'opérade  $\mathcal{P}$  est *unitaire* s'il existe un élément  $\text{id} \in \mathcal{P}(1)$  tel que  $\text{id} \circ_1 \nu = \nu$  et  $\mu \circ_i \text{id} = \mu$ .

On peut montrer que les deux définitions d'opérades algébriques unitaires sont équivalentes.

La figure 13 illustre de nouveau les compositions partielles  $\circ_i$  ainsi que l'élément  $\text{id}$  dans le cas unitaire. Les illustrations des propriétés de composition séquentielle et parallèle sont laissées au lecteur.

On peut définir une notion de morphismes d'opérades. Un morphisme d'opérades est un morphisme de  $\mathbb{N}$ -modules de degré 0 "compatible" avec les opérations de composition.

**Définition 6.9.** Soient  $(\mathcal{P}, \gamma)$  et  $(\mathcal{Q}, \delta)$  deux opérades algébriques non-symétriques. Un morphisme d'opérades  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  est un morphisme de  $\mathbb{N}$ -modules tel que

$$\alpha \gamma = \delta(\alpha \otimes \alpha).$$

Si de plus les opérades  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont respectivement munies d'éléments unités  $\eta^{\mathcal{P}}$  et  $\eta^{\mathcal{Q}}$ , alors  $\alpha$  doit aussi vérifier

$$\alpha \eta^{\mathcal{P}} = \eta^{\mathcal{Q}}.$$

On définit désormais la notion d'algèbre sur une opérade. Une algèbre sur une opérade  $\mathcal{P}$  est un espace vectoriel dont les opérations sont les éléments de  $\mathcal{P}$ .

**Définition 6.10** (Algèbre sur une Opérade). Soit  $A$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel.  $A$  est une  $\mathcal{P}$ -algèbre si et seulement si il existe un morphisme d'opérades

$$\phi : \mathcal{P} \rightarrow \text{End}_A$$

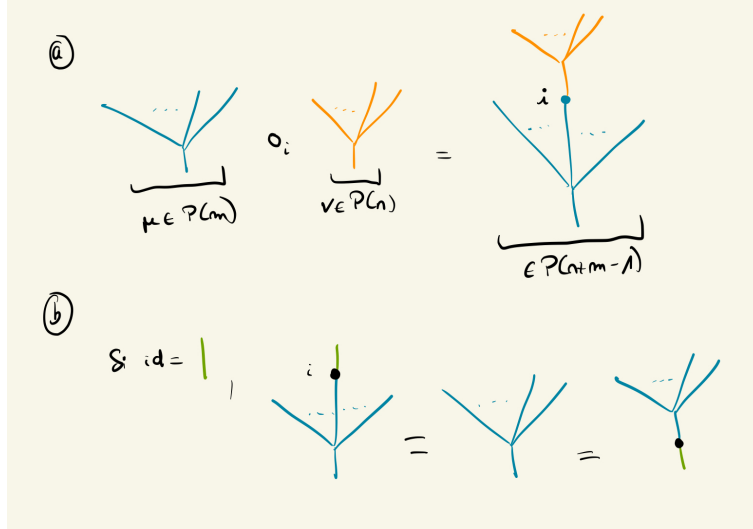


Figure 13: Illustration de l'action  $o_i$  et  $id$

On note  $\mathcal{P}\text{-Alg}$  la catégorie des  $\mathcal{P}$ -algèbres.

**Exemple 6.11** (Opérate Associative). Dans l'introduction on souhaite construire une opérade dite *associative* qui encode toutes les algèbres associatives. En fait, on cherche une opérade notée **As** telle que la catégorie **As** – Alg des algèbres sur **As** coïncide avec la catégorie des algèbres associatives.

On pose  $\mathbf{As} = (0, \mathbb{k}\mu_1, \mathbb{k}\mu_2, \dots)$ , avec l'application de composition

$$\gamma(\mu_k, \mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k}) = \mu_{i_1 + \dots + i_k}.$$

**As** est opérade algébrique non-symétrique unitaire car  $\gamma$  vérifie trivialement la condition d'associativité et l'application  $\eta : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}\mu_1$  telle que  $\eta(1_{\mathbb{k}}) = \mu_1$  vérifie la condition d'unité.

On vérifie maintenant que les algèbres sur **As** sont les algèbres associatives.

Soit  $A$  une **As**-algèbre. Il existe un morphisme d'opérades  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \text{End}_A$ . Posons

$$\mu = \phi(\mu_2).$$

$\mu$  est un produit de  $A$ . Puisque  $\phi$  est un morphisme d'opérades,  $\phi(\mu_1) = id_A$ . Le produit  $\mu$  est associatif car

$$\mu(\mu \otimes id_A) = \phi(\mu_2)(\phi(\mu_2) \otimes \phi(\mu_1)) \quad (1)$$

$$= \phi(\gamma(\mu_2, \mu_2, \mu_1)) \quad (2)$$

$$= \phi(\gamma(\mu_2, \mu_1, \mu_2)) \quad (3)$$

$$= \mu(id_A \otimes \mu) \quad (4)$$

Dans un soucis de lisibilité, on omet les indices  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ .

Réciproquement, toute algèbre associative est bien une algèbre sur l'opéradé **As**. En effet, si  $(A, \mu)$  est une algèbre associative, on pose  $\phi : \mathbf{As} \rightarrow \text{End}_A$  telle que  $\phi(\mu_n) : a_1 \otimes \dots \otimes a_n \rightarrow a_1 \dots a_n$ . On vérifie aisément que  $\phi$  est un morphisme d'opéradés.

L'opéradé  $uAs = (\mathbb{k}\mu_0, \mathbb{k}\mu_1, \mathbb{k}\mu_2, \dots)$  code quant à elle les algèbres associatives unitaires.

**Remarque 6.12.** *On peut de façon similaire définir l'opéradé non-symétrique commutative **Com** qui encode les algèbres commutatives ou encore l'opéradé de Lie **Lie** qui encode les algèbres de Lie.*

**Remarque 6.13.** *Nous n'avons considéré jusqu'ici que les opéradés non-symétriques. Une opéradé symétrique est une opéradé  $\mathcal{P}$  munie d'une action du groupe symétrique  $\Sigma_n$  sur chaque module  $\mathcal{P}(n)$  telle que l'opération de composition est équivariante.*

**Remarque 6.14** (Opéradés et Monoïdes). *Nous venons de définir dans cette section les opéradés algébriques. Les opéradés sont des  $\mathbb{N}$ -modules munis d'une opération de composition. Nous pouvons en réalité définir les opéradés sur d'autres catégories. Les opéradés algébriques sont ainsi définies sur la catégorie  $\mathbb{N} - \text{Mod}$ .*

*Nous pouvons définir les opéradés sur des catégories dites catégories monoïdales. Une catégorie  $\mathcal{C}$  est monoïdale si elle peut être munie d'un bifoncteur  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , d'un isomorphisme d'associativité ainsi que d'un objet vérifiant certaines propriétés. Les catégories monoïdales principalement considérées sont*

- *La catégorie des ensembles  $(\text{Ens}, \times)$  munie du produit cartésien*
- *La catégorie des  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels  $(\mathbf{Vect}, \otimes)$  munie du produit tensoriel*
- *La catégorie des espaces topologiques  $(\text{Top}, \times)$  munie du produit cartésien*
- *La catégorie des  $\mathbb{N}$ -modules munie du produit de composition  $(\mathbb{N} - \text{Mod}, \circ)$*

*Une opéradé sur une telle catégorie symétrique  $(\mathcal{C}, \otimes)$  va en fait être ce qu'on appelle un monoïde dans la catégorie  $\mathcal{C}$ . Une opéradé unitaire dans  $\mathcal{C}$  est donc un objet  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{C}$  muni d'un morphisme de multiplication  $\mu : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  vérifiant la condition d'associativité et d'un morphisme d'unité  $\eta : I \rightarrow \mathcal{P}$ .*

*Un monoïde dans la catégorie  $\text{Ens}$  est un monoïde au sens ensembliste du terme. Un monoïde dans la catégorie  $(\mathbf{Vect}, \otimes)$  est une algèbre associative. Un monoïde dans la catégorie  $(\mathbb{N} - \text{Mod}, \circ)$  est une opéradé algébrique unitaire telle que définie plus haut.*

## References

- [1] Henry Adams, Sofya Chepushtanova, Tegan Emerson, Eric Hanson, Michael Kirby, Francis Motta, Rachel Neville, Chris Peterson, Patrick Shipman, and Lori Ziegelmeier. Persistence images: A stable vector representation of persistent homology, 2016.
- [2] Magnus Bakke Botnan and William Crawley-Boevey. Decomposition of persistence modules, 2019.
- [3] Peter Bubenik. The persistence landscape and some of its properties. *Abel Symposia*, page 97–117, 2020.
- [4] Afra Carlsson, Gunnar Zomorodian. The theory of multidimensional persistence. *Discrete and Computational Geometry*, pages 71–93, 2007.
- [5] L.Kanari et al. A topological representation of branching neuronal morphologies. *Neuroinform* 16, 3–13, 2018.
- [6] Dejan Govc and Richard Hepworth. Persistent magnitude. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 225(3):106517, Mar 2021.
- [7] Bruno Vallette Jean-Louis Loday. *Algebraic Operads*.
- [8] Guillaume Laplante-Anfossi. La diagonale de l’associaèdre, mémoire de m2, 2019.
- [9] J.P. May. The geometry of iterated loop spaces, 1972.
- [10] Thibaut Mazuir. Higher algebra of  $a_\infty$  and  $\omega$ bas-algebras in morse theory i, 2021.
- [11] Steve Y. Oudot. *Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis*. Number 209 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2015.
- [12] Bruno Vallette. Algebra+homotopy=operad, 2012.