

Rapport de stage

Eliot Beyler, sous la supervision de Pierre Raphaël

Avril – Juillet 2022

Table des matières

1	Déroulement du stage	2
2	Contenu mathématique	4
2.1	Présentation du sujet	4
2.1.1	Dérivation des équations pour une solution auto-similaire	4
2.2	Le portrait de phase	5
2.2.1	Racines de $\Delta, \Delta_1 \Delta_2$	6
2.2.2	Racines doubles	8
2.2.3	Positions relatives de P_2, P_3, P_5	8
2.2.4	Pentes au point P_3	11
2.3	Existence d'une solution allant de P1 à P4	15
2.3.1	Trajectoire sortant de P1	15
2.3.2	Trajectoires traversant P3	16
2.3.3	Trajectoires allant en P4	17
2.4	Connexion P1-P3 – Étude numérique	17

Remerciement

Je tiens à remercier Pierre Raphaël qui m'a accueilli et encadré lors de ce stage, ainsi que Cyril Imbert et Isabelle Gallagher sans lesquelles cette rencontre n'aurait pas eu lieu. Je remercie aussi mon tuteur David, ainsi que Cyril et Ayman dont les conseils ont alimenté ma réflexion dans le choix de ce stage et dans mon parcours à l'école normale. Une pensée toute particulière revient enfin à Marion Pérès. Son accompagnement dans toutes les démarches administratives m'a été précieux, que ce soit lors du stage ou tout au long de l'année scolaire.

1 Déroulement du stage

Je suis parti du 1er avril au 31 juillet 2022 à Cambridge pour effectuer un stage au département de mathématiques (Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics –DPMMS) de l'Université éponyme. J'ai été encadré par Pierre Raphaël, avec lequel j'ai travaillé sur un sujet de recherche en Équations aux Dérivées Partielles. Mon stage s'est basé sur un article intitulé *On smooth self similar solutions to the compressible Euler equations* [2] et a consisté en l'étude d'une solution particulière aux Équations d'Euler — pour un fluide — qui est lisse, présente une densité de fluide nulle sur une boule à l'origine et implose en temps fini. Il fut l'occasion de découvrir au quotidien la vie de chercheur et ces différents aspects.

J'ai eu la chance de pouvoir voyager dans le cadre d'une conférence. Je me suis rendu du 11 au 13 avril à Oxford pour la *Oxbridge PDE Conference 2022*. Pendant trois jours, j'ai pu écouter des conférences sur des sujets variés en EDP et discuter avec des mathématiciens, du doctorant au professeur. Je ne pourrais prétendre avoir tout compris aux sujets exposés, mais ce fut l'occasion d'avoir une vue du paysage actuel en EDP, de découvrir comment les mathématiciens présentent leurs travaux et échangent avec leurs confrères.

J'ai aussi pu assister à des exposés dans le cadre des nombreux séminaires du Centre de mathématiques de l'Université de Cambridge. Je me suis naturellement rendu aux différentes conférences relatives aux EDP, mais j'ai aussi apprécié découvrir d'autres aspects des mathématiques et notamment leurs applications. Travaillant dans les mêmes bureaux que des géomètres, leur séminaire, qui m'a paru d'autant plus obscur que mes connaissances dans ce domaine sont minces, fut l'occasion de passer de bons moments avec des amis et de prendre un peu de recul face à l'étendue du monde mathématique et ces difficultés. J'ai compris qu'il était normal de ne pas toujours tout comprendre, mais que le plus important était de rester attentif à ce que font les autres, dans l'espoir peut-être d'y trouver une source d'inspiration.

Ce stage fut aussi une expérience humaine. Vivre dans un pays étranger, qui malgré sa proximité géographique présente un certain nombre de différences : linguistiques, culinaires (pas toujours pour le meilleur) ou dans les détails de la vie de tous les jours (ne pas se faire écraser par une voiture roulant du mauvais côté) ... Quitter le cocon des habitudes quotidiennes fut pour moi l'occasion de rencontrer de nombreuses personnes qui ont marqué mon séjour. De Stonehenge au Loch Ness, ce fut enfin l'occasion de voir de nouveaux paysages.

Conclusion L'expérience humaine fut sans aucun doute extraordinaire. L'avancement dans mon travail mathématique est plus mitigé. J'ai aimé l'échange avec les autres stagiaires, doctorants, chercheurs, la satisfaction d'avoir mon propre projet, mon travail personnel. Mais ce travail solitaire, qui peut sembler coupé des problématiques « du monde réel », demande à mon avis une certaine passion dont j'ai par moment manqué. J'ai découvert que la recherche mathématique nécessite de passer par des moments de technicité importante, qui peuvent être chronophages et peu satisfaisants, que l'on se retrouve à travailler sur un sujet très restreint, ce qui rend difficile de comprendre ce que les autres font, que l'on peut avoir par moment le sentiment de ne pas

avancer... A posteriori, je ne pense pas que le choix que j'ai fait en ce qui concerne le sujet correspondait parfaitement à mes goûts et mes aspirations actuelles, mais je suis heureux d'avoir pu réaliser cette expérience riche en rencontres qui nourrit ma réflexion sur la suite de mon parcours à l'école normale.



La conférence à Oxford.

2 Contenu mathématique

2.1 Présentation du sujet

L'objet de cette recherche est l'étude des équations d'Euler compressibles isentropiques, en dimension $d \geq 2$, $y \in \mathbb{R}^d$,

$$(\text{Euler}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \\ \rho \partial_t u + \rho u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \\ p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho^\gamma \\ \rho(t, y) > 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Nous cherchons à construire des solutions globales, régulières, à symétrie sphérique et auto-similaires, qui partent de conditions initiales régulières et implosent en temps fini. Rechercher de telles solutions nous ramène, en suivant les travaux de Guderley [1], à l'étude d'un système autonome de 2 équations différentielles ordinaires, que l'on peut facilement représenter par le portrait de phase correspondant.

Dans l'article [2], mon encadrant Pierre Raphaël, avec que Frank Merle, Igor Rodnianski et Jeremie Szeftel, a montré qu'il existait pour certaines valeurs discrètes de la vitesse d'explosion, dans le voisinage d'une valeur limite, une solution C^∞ , régulière à l'origine et qui exhibe une décroissance à l'infini :

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} (\rho(t, y), u(t, y)) = 0. \quad (2.2)$$

et implose en temps fini. Mais ceci échoue en dehors d'un certain intervalle de paramètres. L'objet de mon stage a été donc d'étudier, dans un autre intervalle de paramètre – qui sera précisé plus loin – en partant des outils développés dans [2], l'existence d'une solution présentant une densité de fluide nulle sur un disque centré à l'origine, lisse – sauf sur le bord de ce disque – et qui décroît selon (2.2) à l'infini.

Ce document reprend, parfois en les modifiant, des passages de [2].

2.1.1 Dérivation des équations pour une solution auto-similaire

Posons

$$\ell = \frac{2}{\gamma-1} > 0, \quad r > 1, \quad (2.3)$$

alors la renormalisation auto-similaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t, y) = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \hat{\rho}(\tau, Z) \\ u(t, y) = \frac{\lambda}{\nu} \hat{u}(\tau, Z) \\ Z = \frac{y}{\lambda}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\nu} \\ -\frac{\lambda\tau}{\lambda} = 1, \quad -\frac{\nu\tau}{\nu} = r \end{array} \right. \quad (2.4)$$

envoie (2.1) de $[0, T)$ sur le flot renormalisé et global en temps τ

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\tau \hat{\rho} + \ell(r-1)\hat{\rho} + \Lambda \hat{\rho} + \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{u}) = 0 \\ \partial_\tau \hat{u} + (r-1)\hat{u} + \Lambda \hat{u} + \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} + \nabla(\hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0 \\ \Lambda = Z \cdot \nabla. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Un profil auto-similaire est une solution stationnaire de (2.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell(r-1)\hat{\rho} + \Lambda \hat{\rho} + \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{u}) = 0 \\ (r-1)\hat{u} + \Lambda \hat{u} + \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} + \nabla(\hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

qui donne une solution de (2.1) qui impose avec une vitesse de concentration

$$\lambda(t) = \lambda_0(T-t)^{\frac{1}{r}}, \quad \nu(t) = r(T-t).$$

Le paramètre r est l'exposant de similarité, il est libre et on l'appelle *vitesse*.

La transformée d'Emden et le portrait de phase de Guderley Suivant les travaux de [1], toutes les solutions de (2.6) avec une symétrie sphérique sont envoyées via la transformée d'Emden

$$\begin{cases} (\hat{\rho}(Z))^{\frac{\gamma-1}{2}} = \sqrt{\frac{\ell}{2}} Z \sigma(x) \\ \hat{u}(Z) = -Z w(x) \\ Z = e^x \end{cases} \quad (2.7)$$

sur le système *autonome* d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} (w-1)w' + \ell\sigma\sigma' + (w^2 - rw + \ell\sigma^2) = 0 \\ \frac{\sigma}{\ell}w' + (w-1)\sigma' + \sigma[w(\frac{d}{\ell} + 1) - r] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta w' = -\Delta_1 \\ \Delta \sigma' = -\Delta_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

dont les coefficients sont

$$\begin{cases} \Delta = (w-1)^2 - \sigma^2 \\ \Delta_1 = w(w-1)(w-r) - d(w-w_e)\sigma^2 \\ \Delta_2 = \frac{\sigma}{\ell}[(\ell+d-1)w^2 - w(\ell+d+\ell r-r) + \ell r - \ell\sigma^2] \end{cases} \quad (2.9)$$

avec

$$w_e = \frac{\ell(r-1)}{d}. \quad (2.10)$$

On revient aux variables originales par :

$$\begin{cases} \rho(t, y) = \frac{1}{(T-t)^{\frac{2(r-1)}{r(\gamma-1)}}} \left(\sqrt{\frac{\ell}{2}} Z \sigma(\ln Z) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ u(t, y) = \frac{1}{(T-t)^{\frac{(r-1)}{r}}} - Z w(\ln Z) \\ Z = \frac{y}{\lambda_0(T-t)^{\frac{1}{r}}} \end{cases}$$

où la variable de similarité Z est

$$Z = \frac{|y|}{(T-t)^{\frac{1}{r}}}.$$

Nous étudions ce système grâce à son portrait de phase dans le plan (σ, w) .

2.2 Le portrait de phase

L'étude du portrait de phase consiste tout d'abord en la détermination du signe des polynômes Δ, Δ_1 et Δ_2 . La forme du portrait de phase dépend des paramètres (r, ℓ, d) . On introduit les valeurs particulières suivantes :

$$\begin{cases} r^*(d, \ell) = \frac{d+\ell}{\ell+\sqrt{d}}, \\ r_+(d, \ell) = 1 + \frac{d-1}{(1+\sqrt{\ell})^2}. \end{cases} \quad (2.11)$$

On remarque alors que¹

$$1 < r^*(d, \ell) \leq r_+(d, \ell) \text{ avec égalité ssi } \ell = d. \quad (2.12)$$

1. On calcule $r_+(d, \ell) - r^*(d, \ell) = (\sqrt{d}-1) \frac{(\sqrt{\ell}-\sqrt{d})^2}{(\ell+\sqrt{d})(1+\sqrt{\ell})^2}$.

Nous allons étudier le système pour les valeurs suivantes des paramètres :

$$d \geq 2, \quad 0 < \ell < d, \quad r^*(d, \ell) < r < r_+(d, \ell), \quad (2.13)$$

et nous nous placerons en particulier dans le cas de la limite :

$$|r - r_+(d, \ell)| \ll 1.$$

Nous allons démontrer que le portrait de phase a l'allure donnée par la figure 1. En particulier, il contient cinq points fondamentaux $(P_i)_{1 \leq i \leq 5}$.

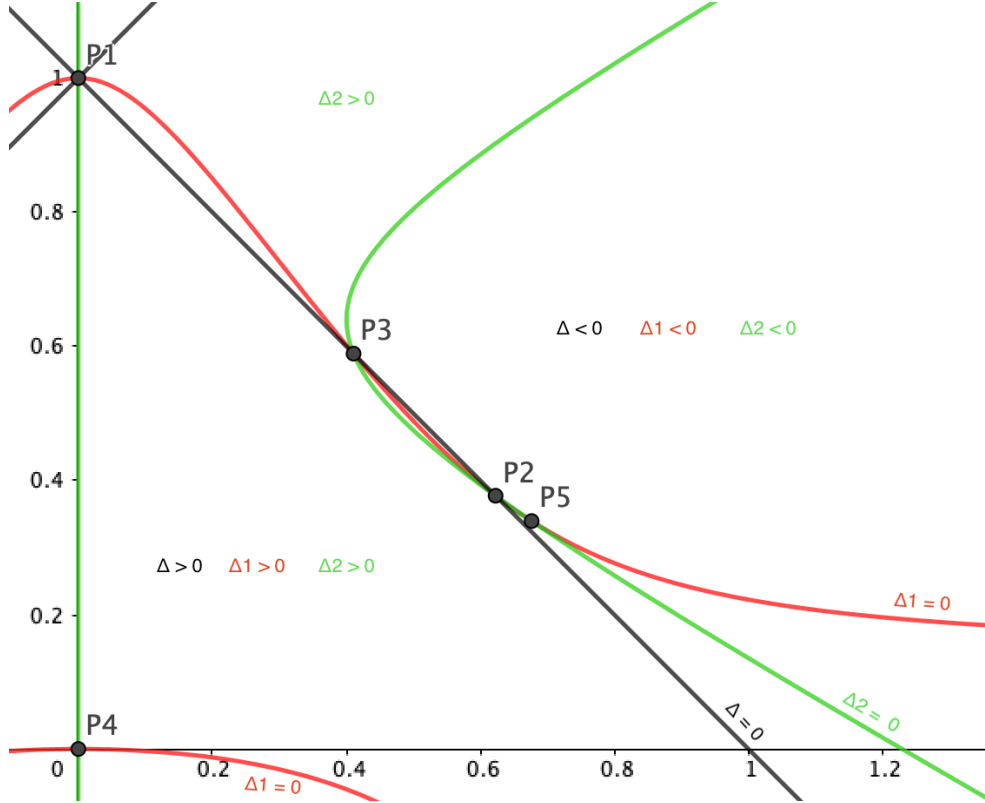


FIGURE 1 – Portrait de phase pour $0 < \ell < d$, $r^*(d, \ell) < r < r_+(d, \ell)$ et $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$.

2.2.1 Racines de $\Delta, \Delta_1 \Delta_2$

Posons

$$w_\ell^- = w_e(r_+) = \frac{\ell(r_+ - 1)}{d} = \frac{\ell(d - 1)}{d(1 + \sqrt{\ell})^2}.$$

On remarque que $w_\ell^- < 1$ et nous nous limitons au cas où

$$\left| \begin{array}{l} d \geq 2 \\ 0 < w_e \leq w_\ell^- \Leftrightarrow 1 < r \leq r_+(d, \ell) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

ce qui n'est pas plus restrictif que (2.13).

Δ a été normalisé de telle sorte qu'il s'annule sur les droites

$$\{\Delta = 0\} = \{w = 1 + \sigma\} \cup \{w = 1 - \sigma\}$$

qui sont indépendantes des paramètres. Intéressons-nous maintenant aux racines de Δ_2 .

Lemme 2.1 (Racines de Δ_2). *Supposons (2.14). Il existe $\sigma_2^{(0)}(d, \ell) \in [0, +\infty)$ de telle sorte que les racines de Δ_2 pour $\sigma \geq 0$ sont données par*

$$\left| \begin{array}{l} w_2^\pm(\sigma) = \frac{1}{2(\ell+d-1)} \left[2\ell + d - 1 - \frac{dw_e(1-\ell)}{\ell} \pm \sqrt{I(\sigma)} \right] \\ \sigma \geq \sigma_2^{(0)} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où

$$\left| \begin{array}{l} J(w_e) = d^2 \left(\frac{1-\ell}{\ell} \right)^2 w_e^2 - \frac{2d(d-1)(\ell+1)}{\ell} w_e + (d-1)^2, \\ I(\sigma) = J(w_e) - 4dw_e + 4\ell(\ell+d-1)\sigma^2. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

De plus,

$$\forall \sigma > \sigma_2^{(0)}, \quad (w_2^-)'(\sigma) < 0, \quad (w_2^+)'(\sigma) > 0. \quad (2.17)$$

Les démonstrations de ce lemme, ainsi que des 2 suivants, sont données dans [2], où ils sont énoncés de la même façon.

Remarque 2.2. La valeur $\sigma_2^{(0)}$ est donnée explicitement par (2.16) si $J(w_e) - 4dw_e < 0$ et $\sigma_2^{(0)} = 0$ sinon. Dans la limite $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$ on a $\sigma_2^{(0)} > 0$. En effet, on calcule $J(w_\ell^-) = 0$, d'où $J(w_e) - 4dw_e < 0$ pour $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$.

Lemme 2.3 (Racines de Δ_1). *Supposons (2.14). Pour tout $\sigma \geq 0$, l'équation $\Delta_1(w, \sigma) = 0$ a exactement trois solutions distinctes $w_1(\sigma) < w_2(\sigma) < w_3(\sigma)$ qui satisfont positions relatives : $\forall \sigma \geq 0$,*

$$-w_1(\sigma) \leq 0 < w_e < w_2(\sigma) \leq 1 < r \leq w_3(\sigma). \quad (2.18)$$

monotonicité : $\forall \sigma > 0$,

$$w_1'(\sigma) < 0, \quad w_2'(\sigma) < 0, \quad w_3'(\sigma) > 0 \quad \text{pour } \sigma > 0. \quad (2.19)$$

asymptotiques :

$$\left| \begin{array}{l} w_1(\sigma) = -\frac{dw_e}{r}\sigma^2 + O(\sigma^3), \\ w_2(\sigma) = 1 - \frac{d(1-w_e)\sigma^2}{r-1} + O(\sigma^3), \quad \text{quand } \sigma \rightarrow 0 \\ w_3(\sigma) = r + \frac{d(r-w_e)}{r(r-1)}\sigma^2 + O(\sigma^3), \end{array} \right. \quad (2.20)$$

et

$$\left| \begin{array}{l} w_1(\sigma) = -\sqrt{d}\sigma + O(1), \\ w_2(\sigma) = w_e + O(\sigma^{-2}), \quad \text{quand } \sigma \rightarrow +\infty. \\ w_3(\sigma) = \sqrt{d}\sigma + O(1) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

2.2.2 Racines doubles

Nous nous intéressons maintenant aux racines doubles $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ qui jouent un rôle fondamental dans l'étude de (2.8).

Lemme 2.4 (Racines doubles). *Supposons (2.14). Les solutions de $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ sont :*

$$\begin{cases} P_1 = (0, 1), & P_2 = (1 - w_-, w_-) & P_3 = (1 - w_+, w_+), \\ P_4 = (0, 0), & P_5 = (\sigma_5, w_5), & P'_5 = (0, r), \end{cases} \quad (2.22)$$

où les points sont définis par :

$\underline{P_5}$:

$$P_5 = \left(w_5 = \frac{\ell r}{d + \ell}, \sigma_5 = \frac{r\sqrt{d}}{d + \ell} \right) \quad (2.23)$$

$\underline{P_2}$ et $\underline{P_3}$: Avec $J(w_e)$ donné par (2.16) :

$$w_{\pm} = \frac{1}{2(d-1)} \left(dw_e + d - 1 - \frac{dw_e}{\ell} \pm \sqrt{J(w_e)} \right). \quad (2.24)$$

On a :

$$w_e < w_{\pm} < 1. \quad (2.25)$$

Pour $r = r^+$ on remarque que $P_2 = P_3$.

Position. P_2, P_3, P_5 sont sur la courbe de la racine médiane $(\sigma, w_2(\sigma))$ de Δ_1 . De plus, P_2, P_5 sont sur la courbe de la racine inférieure w_2^- de Δ_2 .

Position de la racine médiane. Prenons $w_e < w_e^-$ (i.e. $r < r^+$) et $w_2(\sigma)$ la racine médiane de Δ_1 , alors la position relative de la racine médiane par rapport à la droite $w + \sigma = 1$ est :

$$\sigma + w_2(\sigma) \begin{cases} > 1 & \text{pour } 0 < \sigma < \sigma(P_3) \\ < 1 & \text{pour } \sigma(P_3) < \sigma < \sigma(P_2) \\ > 1 & \text{pour } \sigma > \sigma(P_2). \end{cases} \quad (2.26)$$

2.2.3 Positions relatives de P_2, P_3, P_5

Nous nous intéressons maintenant aux positions relatives de P_2, P_3 et P_5 et proposons la description suivante du portrait de phase.

Lemme 2.5 (Portrait de phase admissible, voir figure 4). *Supposons $0 < \ell < d$, $r^*(d, \ell) < r \leq r_+(d, \ell)$ alors les conclusions du lemme 2.4 tiennent avec $0 < w_e \leq w_e^-$ et les points P_2, P_3, P_5 sont bien définis. On a :*

$$\underline{1. \text{ pour } r^*(d, \ell) < r < r_+(d, \ell) :} \quad \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_5 \quad (2.27)$$

$\underline{2.}$ Pour $r = r^+$,

$$P_2 = P_3$$

et

$$P_3 \rightarrow P_2 \text{ quand } r \uparrow r_+.$$

$\underline{3.}$: pour $r^*(d, \ell) < r < r_+(d, \ell)$ et $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$: P_3 et P_2 sont sur la racine inférieure w_2^- de Δ_2 .

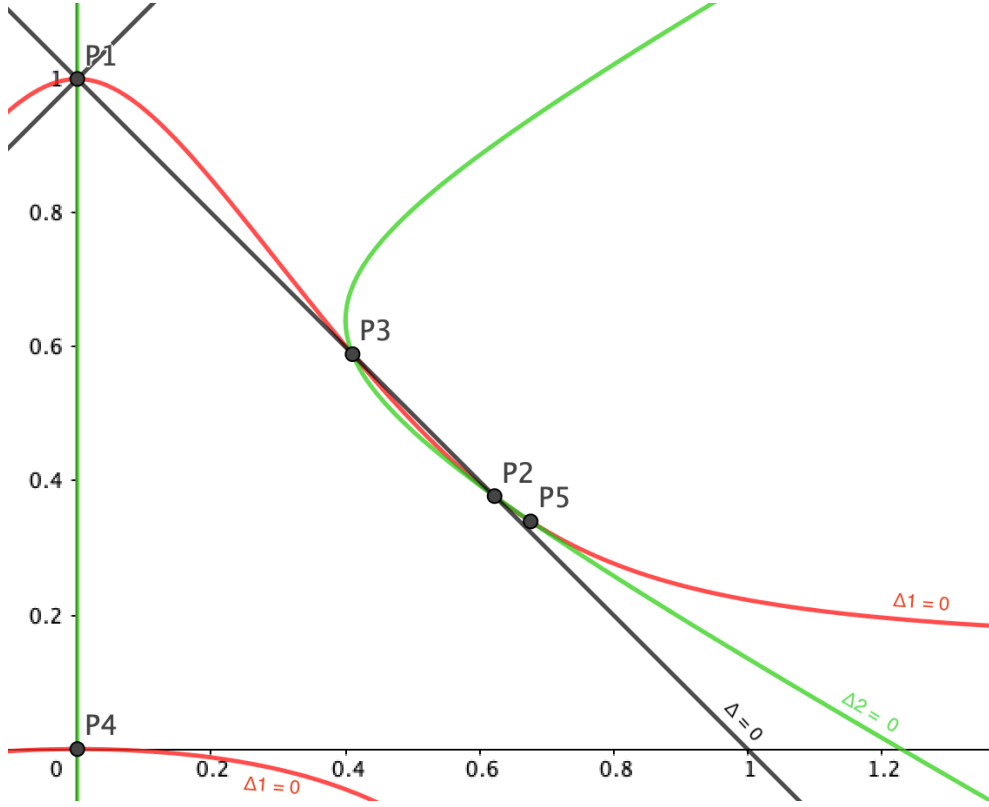


FIGURE 2 – Portrait de phase pour $0 < \ell < d$, $r^*(d, \ell) < r < r_+(d, \ell)$ et $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$.

Preuve du lemme 2.5. 1. Posons $J = J(w_e) \geq 0$ donné par (2.16) et avec (2.24),

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\equiv \sigma(P_2) = 1 - w_- = 1 - \frac{1}{2(d-1)} \left(dw_e + d - 1 - \frac{dw_e}{\ell} - \sqrt{J} \right) \\ &= \frac{1}{2(d-1)} \left[d - 1 + d \left(\frac{1}{\ell} - 1 \right) w_e + \sqrt{J} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_3 &\equiv \sigma(P_3) = 1 - w_+ = 1 - \frac{1}{2(d-1)} \left(dw_e + d - 1 - \frac{dw_e}{\ell} + \sqrt{J} \right) \\ &= \frac{1}{2(d-1)} \left[d - 1 + d \left(\frac{1}{\ell} - 1 \right) w_e - \sqrt{J} \right]. \end{aligned}$$

En soustrayant $\sigma_5 = \frac{r\sqrt{d}}{d+\ell}$, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_2 - \sigma_5 = \frac{\sqrt{J}-A}{2(d-1)} \\ \sigma_3 - \sigma_5 = \frac{-\sqrt{J}-A}{2(d-1)} \end{cases} \quad (2.28)$$

avec

$$\begin{cases} A = 2(d-1)\sqrt{d}\frac{r}{d+\ell} - d + 1 - (1-\ell)(r-1) = \left(\frac{2(d-1)\sqrt{d}}{d+\ell} - 1 + \ell \right) (r - r_0(\ell)) \\ r_0(\ell) = \frac{d+\ell-2}{2(d-1)\sqrt{d}-1+\ell} > 0, \end{cases}$$

en remarquant que

$$\forall \ell > 0, \quad \forall d \geq 2, \quad \frac{2(d-1)\sqrt{d}}{d+\ell} - 1 + \ell > 0.$$

On calcule

$$\begin{aligned} r^*(d, \ell) - r_0 &= \frac{d+\ell}{\sqrt{d}+\ell} - \frac{d+\ell-2}{\frac{2(d-1)\sqrt{d}}{d+\ell} + \ell - 1} \\ &= \frac{d+\ell}{(\sqrt{d}+\ell)(2(d-1)\sqrt{d} + (\ell-1)(d+\ell))} \left[2(d-1)\sqrt{d} + (\ell-1)(d+\ell) - (\sqrt{d}+\ell)(d+\ell-2) \right] \\ &= \frac{(\sqrt{d}-1)(d+\ell)}{(\sqrt{d}+\ell)(2(d-1)\sqrt{d} + (\ell-1)(d+\ell))} (d-\ell). \end{aligned}$$

Comme $\ell < d$, on a $r^*(d, \ell) > r_0$. Ainsi pour $r^*(d, \ell) < r < r^+(d, \ell)$, on a $A > 0$. Avec (2.28) on obtient $\sigma_3 < \sigma_5$. De plus, on calcule :

$$w_5 + \sigma_5 = \frac{\ell r}{d+\ell} + \frac{r\sqrt{d}}{d+\ell} = \frac{r}{r^*(d, \ell)} > 1 \quad (2.29)$$

ainsi P_5 est situé strictement en dessus de la droite $w + \sigma = 1$. Comme P_5 est sur la courbe $(\sigma, w_2(\sigma))$ où $w_2(\sigma)$ est la racine médiane de Δ_1 , les inégalités (2.26) impliquent que $\sigma_5 < \sigma_3$ ou $\sigma_2 < \sigma_5$. Comme $\sigma_3 < \sigma_5$, il reste $\sigma_2 < \sigma_5$, d'où finalement $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_5$.

2. Avec (2.16), on calcule $J = 0$ pour $r = r_+$. Il suit $\sigma_2 = \sigma_3$, les deux points étant sur la même droite $w + \sigma = 1$, on a $P_2 = P_3$. Les expressions étant continues en r , on en déduit que $P_3 \rightarrow P_2$ quand $r \uparrow r_+$.

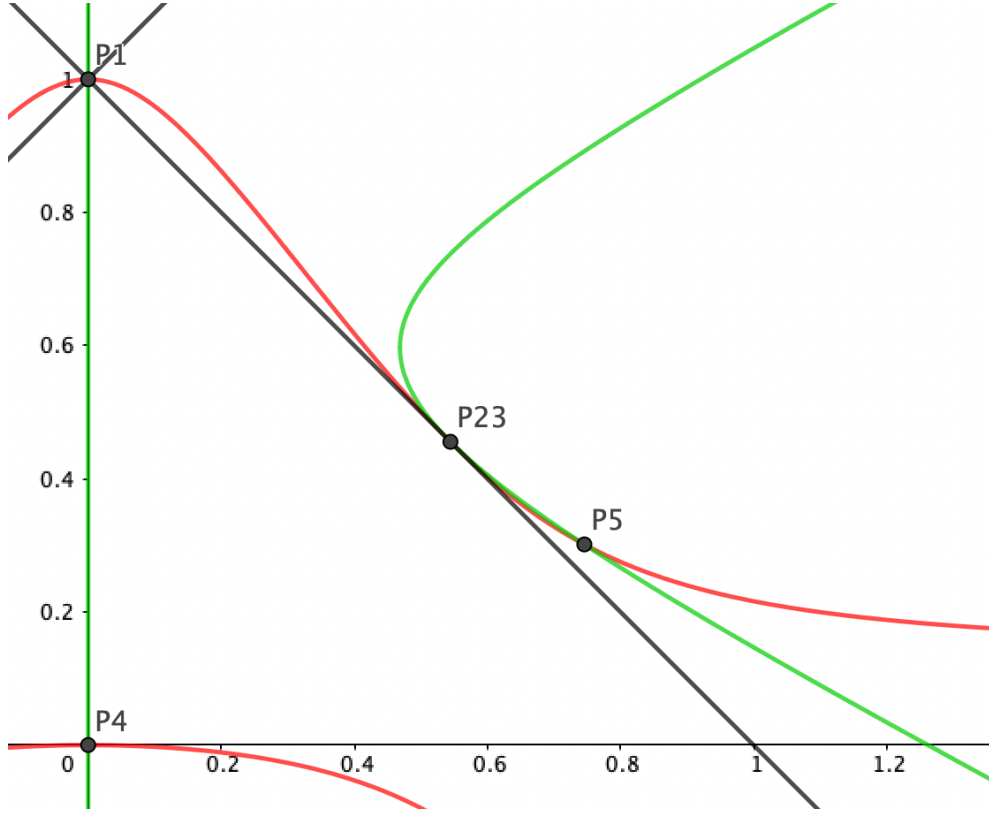


FIGURE 3 – Pour $r = r_+$, $\ell < d$

3. On sait par le lemme 2.4 que P_2 est sur la racine inférieure $w_2^-(\sigma)$ de Δ_2 . Pour $r = r_+$, on a $P_2 = P_3$. Les courbes et les positions des points variant continument en r , on en déduit que aussi que P_3 est sur la racine inférieure $w_2^-(\sigma)$ de Δ_2 pour $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$. \square

2.2.4 Pentés au point P_3

Le point P_3 a un rôle essentiel dans la trajectoire que nous allons étudier. On note

$$\sigma_3 = \sigma(P_3), \quad w_3 = 1 - \sigma_3.$$

Définition des pentés Pour calculer les pentés des courbes $w_2(\sigma)$ (courbe rouge) $w_2^-(\sigma)$ (courbe verte) au point P_3 , nous définissons les coefficients suivants :

$$\begin{cases} c_1 = \partial_w \Delta_1(P_3) = 3w_3^2 - 2(r+1)w_3 + r - d\sigma_3^2 \\ c_2 = \partial_w \Delta_2(P_3) = \frac{\sigma_3}{\ell} [2w_3(\ell + d - 1) - (\ell + d + \ell r - r)] \\ c_3 = \partial_\sigma \Delta_1(P_3) = -2d\sigma_3 w_3 + 2\ell(r-1)\sigma_3 \\ c_4 = \partial_\sigma \Delta_2(P_3) = -2\sigma_3^2, \end{cases} \quad (2.30)$$

de telle sorte que les pentés correspondantes sont $-\frac{c_3}{c_1}$ and $-\frac{c_4}{c_2}$.

Lemme 2.6 (Signe des pentés). *Supposons*

$$d \geq 2, \quad 0 < \ell < d, \quad r^*(d, \ell) < r < r_+(d, \ell), \quad |r - r_+(d, \ell)| \ll 1. \quad (2.31)$$

alors

$$\begin{cases} c_i < 0, & 1 \leq i \leq 4 \\ c_2 c_3 - c_1 c_4 < 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Preuve du lemme 2.6. La preuve repose sur la position de P_3 quand on a (2.31), que l'on a détaillé dans le lemme 2.5. Tout d'abord, au vu de la discussion sur les racines de Δ_1 , et comme on a montré que P_3 est situé sur la racine médiane de Δ_1 , nous avons

$$c_1 = \partial_w \Delta_1(P_3) < 0.$$

Comme P_3 est situé sur la racine inférieure w_2^- de Δ_2 et que Δ_2 est un polynôme du second degré en w avec un coefficient strictement positif devant le terme w^2 , on a

$$c_2 = \partial_w \Delta_2(P_3) < 0.$$

Ensuite, comme $\sigma > 0$ à P_2 , et $w_e < w_3 < 1$, on a

$$\begin{aligned} c_3 &= \partial_\sigma \Delta_1(P_3) = -2d(w_3 - w_e)(1 - w_3) < 0, \\ c_4 &= \partial_\sigma \Delta_2(P_3) = -2(1 - w_3)^2 < 0. \end{aligned}$$

Enfin, on calcule

$$\begin{aligned} c_2 c_3 - c_1 c_4 &= \partial_w \Delta_2(P_3) \partial_\sigma \Delta_1(P_3) - \partial_w \Delta_1(P_3) \partial_\sigma \Delta_2(P_3) \\ &= \partial_w \Delta_2(P_3) \partial_w \Delta_1(P_3) \left(\frac{\partial_\sigma \Delta_1(P_3)}{\partial_w \Delta_1(P_3)} - \frac{\partial_\sigma \Delta_2(P_3)}{\partial_w \Delta_2(P_3)} \right) \\ &= c_1 c_2 \left((w_2^-)'(\sigma_3) - w_1'(\sigma_3) \right) \end{aligned}$$

où on a utilisé que P_3 est à la fois sur la racine médiane de Δ_1 , i.e., $w_2(\sigma)$, et la plus petite racine de Δ_2 , i.e., $w_2^-(\sigma)$, avec les expressions pour w_2^-' (σ) et w_1' (σ) qui proviennent du théorème des fonctions implicites. À P_3 , la pente de Δ_2 est strictement plus négative que celle de Δ_1 car à gauche de P_3 , la courbe verte est située au-dessus de la courbe rouge – on aurait sinon un autre point d'intersection entre situé entre P_1 et P_3 , or ce n'est pas le cas. Nous avons donc $(w_2^-)'(1 - w_3) - w_1'(1 - w_3) < 0$ et ainsi

$$c_2 c_3 - c_1 c_4 < 0.$$

□

Pentes et valeurs propres En plus des pentes des courbes $w_2(\sigma)$ et $w_2^-(\sigma)$ nous calculons les pentes de toutes courbes intégrales qui passent à travers P_2 . Il n'y a que 2 valeurs possibles :

$$c_\pm = \frac{c_4 - c_1 \pm \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3}}{2|c_2|} \quad (2.33)$$

En effet, c_\pm sont les solutions de l'équation :

$$c_\pm = \frac{c_1 c_\pm + c_3}{c_2 c_\pm + c_4}. \quad (2.34)$$

La matrice caractéristique²

$$\mathcal{A}(P_3) = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix}$$

2. N.B. l'ordre des variables est (w, σ) alors que les courbes sont tracées dans le plan (σ, w) . Par souci de cohérence avec [2] nous avons ici gardé cette convention.

a les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_{\pm} = \frac{c_1 + c_4 \pm \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3}}{2} \quad (2.35)$$

Elle peut être diagonalisée comme ceci :

$$P^{-1}[\mathcal{A}(P_2)]P = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} c_- & c_+ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{c_+ - c_-} \begin{pmatrix} -1 & c_+ \\ 1 & -c_- \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Lemme 2.7 (Estimation des pentes). *Supposons (2.31) et posons*

$$A = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{c_1c_4 - c_2c_3}{(c_4 + c_2c_-)^2}, \quad (2.37)$$

Alors,

$$\begin{cases} c_- < 0 < c_+ \\ c_4 + c_2c_- < 0 \\ A > 1 \\ -\frac{c_4}{c_2} < c_- < -\frac{c_3}{c_1} < -1 \\ \lambda_- < \lambda_+ < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Preuve du lemme 2.7. De $c_2c_3 > 0$ on déduit :

$$\frac{c_4 - c_1 - \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3}}{2|c_2|} < 0 < \frac{c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3}}{2|c_2|}$$

et donc

$$c_- < 0 < c_+.$$

On calcule ensuite

$$c_4 + c_2c_- = \frac{c_4 + c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3}}{2} = \frac{2(c_2c_3 - c_1c_4)}{-c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3}} < 0.$$

On observe alors

$$\begin{cases} c_2c_- + c_4 = c_4 - \frac{c_4 - c_1 - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{c_4 + c_1 + \sqrt{\Delta}}{2} = \lambda_+ \\ c_2c_+ + c_4 = c_4 - \frac{c_4 - c_1 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{c_4 + c_1 - \sqrt{\Delta}}{2} = \lambda_- \end{cases} \quad (2.39)$$

et donc $\lambda_- < \lambda_+ < 0$. Cherchons maintenant à estimer A :

$$\begin{aligned} & c_4c_1 - c_3c_2 - (c_4 + c_2c_-)^2 \\ = & c_4c_1 - c_3c_2 - \frac{4(c_2c_3 - c_1c_4)^2}{(-c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3})^2} \\ = & -(c_4 + c_2c_-) \frac{\left[(-c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3})^2 - 4(c_4c_1 - c_2c_3)\right]}{2(-c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3})} \\ = & -(c_4 + c_2c_-) \frac{\left[(c_4 + c_1)^2 + 2(-c_4 - c_1)\sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3} + (c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3 - 4(c_4c_1 - c_2c_3)\right]}{2(-c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3})} \\ = & -(c_4 + c_2c_-) \frac{\left[(-c_4 - c_1)\sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3} + (c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3\right]}{(-c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3})^2} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
A - 1 &= \frac{c_1 c_4 - c_2 c_3}{(c_4 + c_2 c_-)^2} - 1 \\
&= -\frac{\left((-c_4 - c_1)\sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3} + (c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3\right)}{(c_4 + c_2 c_-)(-c_4 - c_1 + \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3})}.
\end{aligned}$$

En utilisant en particulier que $c_1, c_2, c_3, c_4 < 0$, on obtient :

$$A > 1.$$

Ensuite, remarquons que l'on a

$$-\frac{c_3}{c_1} < -1$$

du fait des positions relatives des courbes rouge et noire données par le lemme 2.4 – la courbe rouge étant au-dessus de noire à gauche de P_3 . Il reste à comparer c_- à $-c_3/c_1$. On calcule

$$\begin{aligned}
c_- + \frac{c_3}{c_1} &= c_- + \frac{|c_3|}{|c_1|} \\
&= \frac{|c_1|(c_4 - c_1 - \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3}) + 2c_2 c_3}{2|c_1||c_2|} \\
&= \frac{c_1(c_1 - c_4) + 2c_2 c_3 - |c_1|\sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3}}{2|c_1||c_2|}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\left(c_1(c_1 - c_4) + 2c_2 c_3\right)^2 - \left(|c_1|\sqrt{(c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3}\right)^2 \\
&= c_1^2(c_1 - c_4)^2 + 4c_2 c_3 c_1(c_1 - c_4) + 4c_2^2 c_3^2 - c_1^2(c_1 - c_4)^2 - 4c_1^2 c_2 c_3 \\
&= 4c_2 c_3(c_2 c_3 - c_1 c_4) < 0
\end{aligned}$$

et donc

$$c_- + \frac{c_3}{c_1} < 0.$$

Ce qui conclut la preuve de (2.38). □

2.3 Existence d'une solution allant de P1 à P4

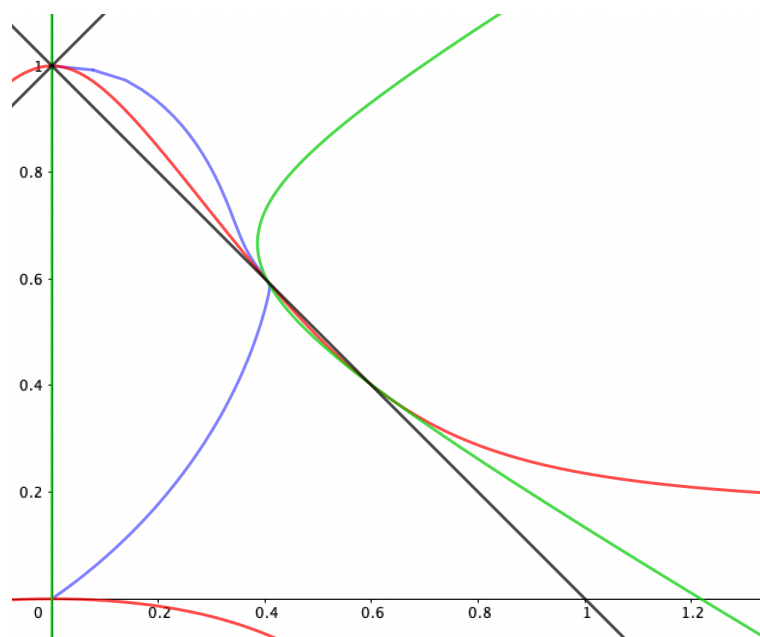


FIGURE 4 – Trajectoire sortant de P_1 pour $\ell = 1$, $d = 3$ et $r = 1.482$.

2.3.1 Trajectoire sortant de P1

La matrice caractéristique en P_1 est

$$\mathcal{A}(P_1) = \frac{r-1}{\ell} \begin{pmatrix} -\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $r-1 > 0$. On a donc un point-selle. Il y a une unique trajectoire qui sort à droite de P_1 selon la droite $w = 1$.

Prenons une solution correspondant à cette trajectoire $(\sigma, w)(x)$ qui est définie sur un intervalle I (qu'on suppose contenir 0), notons $x_\infty = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de telle sorte que $(w, \sigma)(x) \rightarrow (1, 0)$ quand $x \rightarrow x_\infty$. On va montrer que $x_\infty \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que P_1 est atteint en temps fini.

$$x_\infty = \int_0^{x_\infty} 1 dx = \int_{\sigma(x=0)}^0 \frac{dx}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma(x=0)}^0 \frac{\Delta}{\Delta_2} d\sigma$$

Il suffit de remarquer que $\frac{\Delta}{\Delta_2}$ est borné quand $(\sigma, w)(x) \rightarrow (0, 1)$. Comme $\text{grad}_{(0,1)} \Delta = 0$ et $\text{grad}_{(0,1)} \Delta_2 = (0, \frac{r-1}{\ell})$, et que l'on sort selon la direction $(0, 1)$, on a $\frac{\Delta}{\Delta_2} = \frac{0+o(\sigma)}{\frac{r-1}{\ell}\sigma+o(\sigma)} = o(\sigma)$ quand $(w, \sigma)(x) \rightarrow (1, 0)$.

Interprétation Rappelons que σ correspond à la densité du fluide. Pour t fixé, on a dans les variables d'origine $|y| \sim e^x$. Ainsi le fait que $x_\infty \in \mathbb{R}$ nous donne un rayon $r_0 = e^{x_\infty} > 0$. On obtient donc finalement une solution qui s'annule sur le disque de rayon r_0 .

2.3.2 Trajectoires traversant P3

Le fait que la trajectoire qui sort de P_1 entre à droite en P_3 n'est pas toujours correct et fait l'objet de l'étude de la section 2.4.

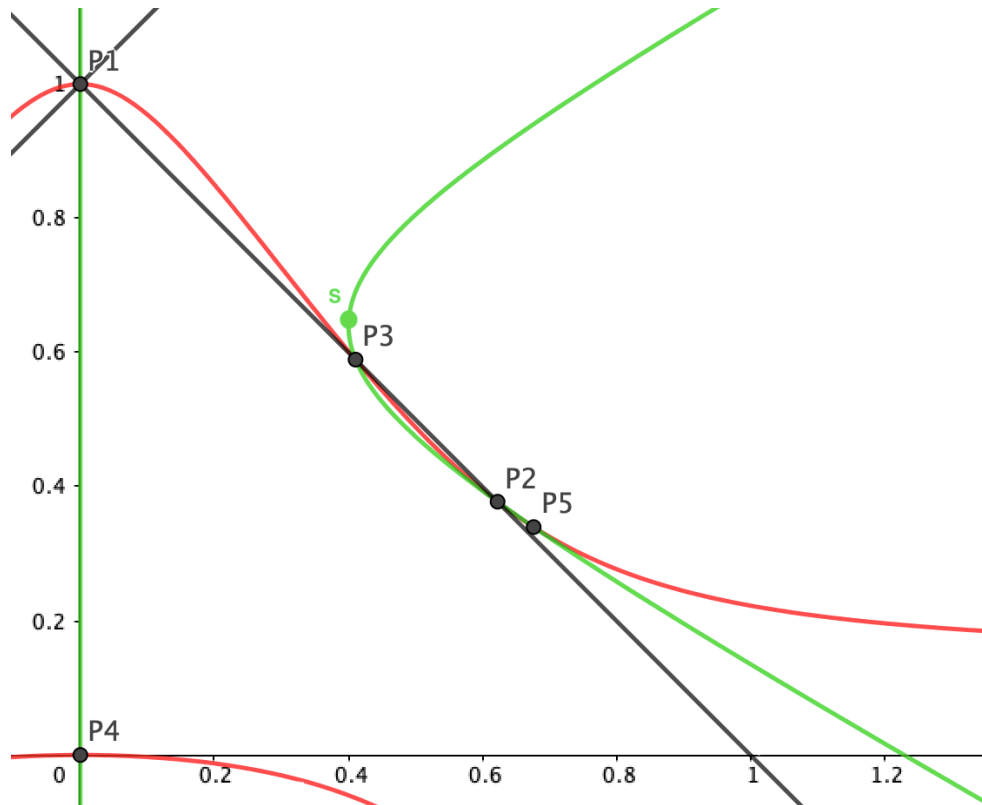


FIGURE 5 – Point S.

Introduisons un raisonnement qui est fondamental quand on travaille avec ce type de diagramme. L'étude du signe des polynômes nous dit que l'on ne peut traverser les lignes rouges qu'horizontalement et les lignes vertes que verticalement. De plus pour la courbe rouge entre P_1 et P_3 , on va couper de gauche à droite et pour la courbe verte entre S (le point $(w_2^\pm, \sigma_2^{(0)})$) point le plus à gauche de la courbe verte, voir figure 5) et P_3 de haut en bas. Ainsi une trajectoire partant d'un point situé entre rouge et vert avec une ordonné inférieure à celle de S , ne peut ni couper rouge ni vert et va donc nécessairement en P_3 .

De même, si on part d'un point de vert entre P_3 et P_2 et que l'on regarde pour x décroissant alors la trajectoire va nécessaire en P_3 car elle ne peut couper ni vert ni rouge. De même si on part de rouge entre P_3 et P_2 . Finalement, les trajectoires qui sortent de P_3 ont un de ces trois comportements : une infinité "monte" et coupe rouge, une unique rejoint P2 et une infinité "descend" et coupe vert.

Les trajectoires atteignent P_3 en temps fini. Comme pour P_1 , il suffit de montrer que $\frac{\Delta}{\Delta_1}$ est borné quand $(w, \sigma) \rightarrow P_3$. Le comportement de ces deux valeurs nous est donné par :

$$\text{grad } \Delta_2 \cdot \begin{pmatrix} c_\pm \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\text{grad } \Delta \cdot \begin{pmatrix} c_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

grâce au lemme 2.7. Les trajectoires qui entrent et qui sortent de P_3 en temps fini, on peut les recoller de telle sorte que l'on obtient des trajectoires traversant ce point. Ainsi, le fait que le problème ne soit pas de Cauchy en P_3 permet aux trajectoires de traverser P_3 .

La suite du projet serait de montrer, à l'instar de [2], qu'une seule de ces trajectoires est lisse, et qu'elle réalise la connexion $P_1 - P_4$ pour des valeurs discrètes du paramètre r .

2.3.3 Trajectoires allant en P4

La matrice caractéristique en P_4 est

$$\mathcal{A}(P_4) = - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

P_4 est un noeud stable sans direction privilégiée. Le signe des polynômes nous donne que toute trajectoire qui coupe vert entre P_3 et P_2 va en P_4 pour $x \rightarrow +\infty$ (ce point n'est pas atteint en temps fini, car Δ ne s'annule pas en P_4).

En effet, dans cette zone σ décroît et ne peut pas s'annuler, car $\sigma = 0$ correspond à des courbes intégrales. Si la trajectoire ne coupe pas la racine inférieure de Δ_1 (courbe rouge sortant de $(0,0)$), alors nécessairement elle va en $(0,0)$, seul point fixe atteignable. Si elle coupe celle-ci, alors on sait que w va de nouveau croître, et elle ne peut pas à nouveau couper rouge (qui ne peut être coupé qu'horizontalement de droite à gauche), elle va alors aussi nécessairement en $(0,0)$.

2.4 Connexion P1-P3 – Étude numérique

Contrairement à ce que l'on pensait pouvoir montrer au début, il n'est pas toujours vrai que la trajectoire sortant de P_1 va en P_3 . L'expérimentation numérique – réalisée à l'aide du logiciel *Mathematica* – pour différentes valeurs de l et r le montre (voir figure 7).

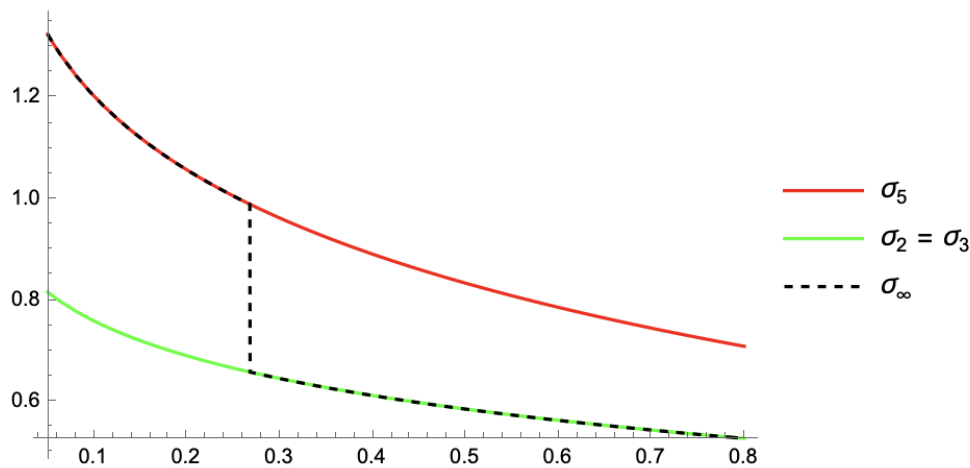


FIGURE 6 – Tracé de l'abscisse σ_∞ en fonction de l pour $r = r_+$ ($d = 3$).

Une difficulté lors de cette étude est que les paramètres r^* et r^+ varient en fonction de l , donc pour chaque valeur de l , on a un choix de valeur de r à faire. Comme on se place dans la

limite $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$, on peut dans un premier temps chercher à étudier le cas $r = r^+$. On étudie numériquement le système :

$$\begin{cases} w' = -\Delta_1 \\ \sigma' = -\Delta_2 \end{cases}$$

Les courbes intégrales restent les mêmes, car Δ ne change que la vitesse et le sens selon lesquelles on les parcourt. Avec ce système, les trajectoires ne peuvent plus traverser P_3 ou un autre point fixe, mais vont y tendre à la limite $x \rightarrow \infty$. Dans la figure 6, on a tracé en fonction de ℓ l'abscisse limite σ_∞ de la solution sortant de P_1 quand $x \rightarrow \infty$, ainsi que les abscisses $\sigma_2 = \sigma_3$ de $P_2 = P_3$ et σ_5 de P_5 . On remarque que pour $\ell < \ell_0$ (avec $\ell_0 \simeq 0.267$), la solution va en P_5 et que pour $\ell > \ell_0$ elle va en $P_3 = P_2$.

Piste pour continuer cette étude Dans un premier temps, il serait possible de justifier certaines propriétés de la figure 6. La première est la décroissance de $\sigma_\infty(\ell)$. Une piste pour cela vient du fait que l'on remarque numériquement que les solutions qui sortent de P_1 pour différents ℓ ne se coupent pas. On peut donc étudier leur position relative en faisant leur développement limité au voisinage de P_1 , puis montrer qu'elles ne peuvent pas se couper en étudiant le signe de :

$$\det \begin{pmatrix} \Delta_1(l_1) & \Delta_1(l_2) \\ \Delta_2(l_1) & \Delta_2(l_2) \end{pmatrix} = \Delta_1(l_1)\Delta_2(l_2) - \Delta_1(l_2)\Delta_2(l_1)$$

qui nous donne l'angle selon lequel se coupent 2 solutions du système pour des valeurs de ℓ différentes.

Ensuite, on pourra chercher à montrer que pour une certaine valeur de $\ell_1 > \ell_0$, la trajectoire sortant de P_1 va bien en $P_3 = P_2$. On peut utiliser le numérique à condition de contrôler suffisamment l'erreur, car on a une certaine marge de manoeuvre. En effet, on a vu qu'il y avait une zone en dessous du sommet S (figure 5) telle que toute trajectoire entrant dans cette zone va nécessairement en P_3 . Il suffit de montrer qu'une trajectoire située au-dessus de celle sortant de P_1 va dans cette zone pour que celle de sortant de P_1 y aille aussi, puisque deux trajectoires ne peuvent se couper. Pour montrer cela, on peut se permettre d'avoir une certaine erreur numérique du moment que l'on a une majoration suffisamment bonne.

Enfin, on pourra essayer de prouver que pour $\ell \geq \ell_1$ et $|r - r_+(d, \ell)| \ll 1$, la trajectoire sortant de P_1 va bien en P_3 , en montrant qu'elle est suffisamment proche de celle pour $r = r^+$.

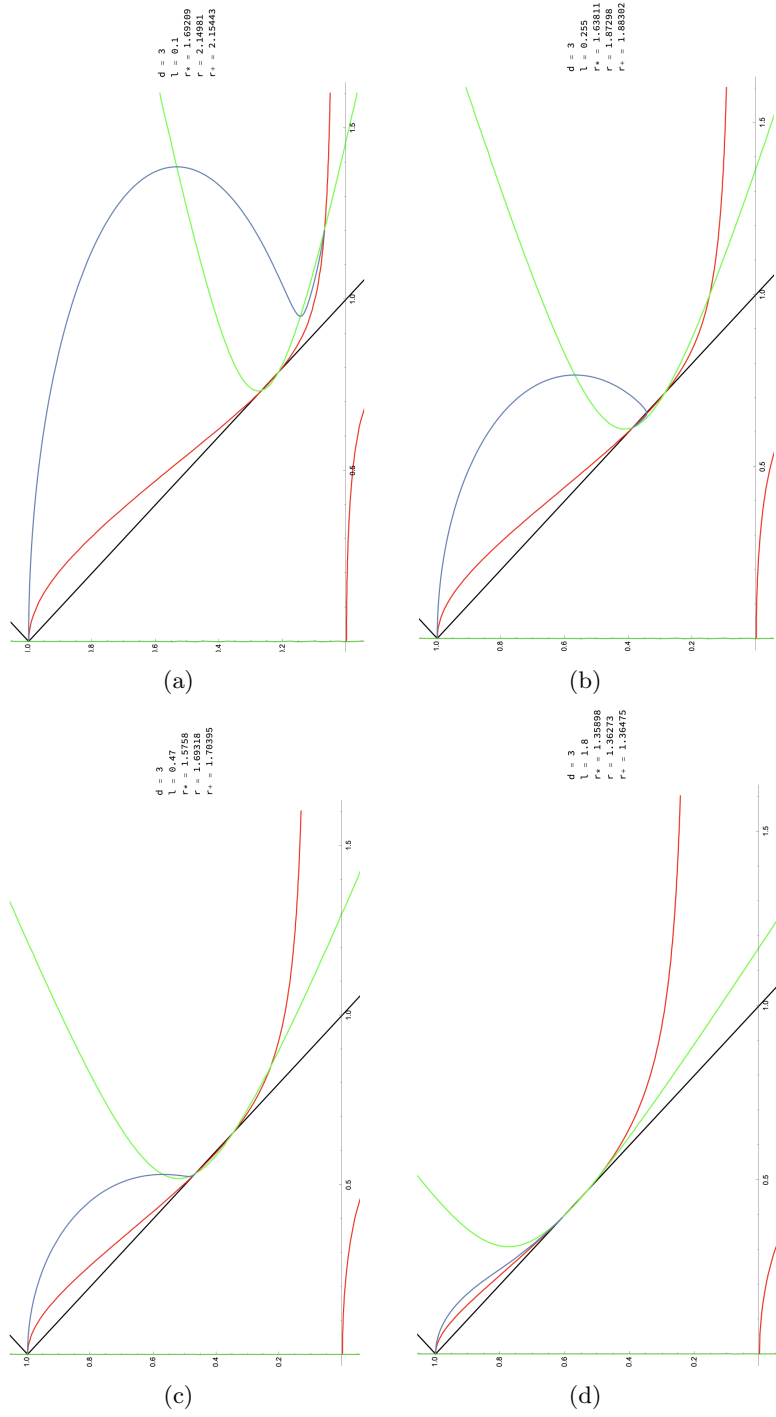


FIGURE 7 – Trajectoire sortant de P_1 pour différentes valeurs de l et r

Références

- [1] G. Guderley, “Starke kugelige und zylindrische verdichtungsstösse in der nähe des kugelmittelpunktes bzw. der zylinderachse,” *Luftfahrtforschung*, vol. 19, p. 302, 1942.
- [2] F. Merle, P. Raphael, I. Rodnianski, and J. Szeftel, “On smooth self similar solutions to the compressible euler equations,” 2019.