RAPPORT DE STAGE M1

RÉMI BONNIN

1. Introduction

J'ai effectué mon stage de M1 à l'IMPA (Institudo de Matematica Pura e Aplicada) à Rio de Janeiro au Brésil auprès du chercheur en théorie des probabilités Hubert Lacoin. L'objet du stage était l'étude des polymères dirigés pour des marches aléatoires à queue très lourde. Dans un premier temps j'ai étudié l'article "Directed polymer for really heavy tailed random walks" [1] de Roberto Viveros, puis j'ai travaillé avec Hubert Lacoin sur la conjecture énoncée dans cet article : à savoir que dans ces conditions, l'existence d'une température critique finie (*i.e.* d'une transition de phase) est équivalente à la finitude de l'entropie. Nous avons obtenu le résultat sauf pour le cas limite.

Je remercie chaleureusement Hubert Lacoin ainsi que tous les membres de l'IMPA pour leur acceuil formidable, les échanges mathématiques précieux que j'ai pu avoir et toute leur bienveillance. J'ai également eu la chance d'être invité une semaine à l'Universidade Federal de Minas Gerais à Belo Horizonte pour rencontrer et discuter avec Roberto Viveros et je remercie aussi grandement les membres de l'UFMG pour leur acceuil.

Après cette introduction, dans la deuxième partie j'introduirai le modèle de polymère dirigé et fixerai le cadre de notre travail ; la troisième partie sera consacrée à l'étude de l'article de Roberto Viveros et des preuves qui nous intéressent pour notre étude, et la quatrième partie présentera notre travail avec la preuve du résultat obtenu au cours de ce stage.

2. Cadre de notre travail

2.1. **Généralités.** Initiallement apparu dans la littérature de la physique pour étudier l'interface du modèle d'Ising, le polymère dirigé dans un milieu aléatoire est aujourd'hui un sujet d'intérêt de beaucoup d'auteurs [2]. Il modélise l'interaction de molécules élastiques avec des impuretés aléatoirement disposées.

Informellement, le modèle est une marche aléatoire (de loi notée $\mathbf{P}$) sur $\mathbb{Z}^{1+d}$ observée selon la direction du temps, qui interagit avec un environnement aléatoire selon l'espace et le temps (de loi notée $\mathbb{P}$) dont l'intensité est paramétrée par une constante $\beta \geq 0$ (température inverse). Une réalisation de l'environnement étant fixée (appelée désordre), de nouveaux poids sont

Date: 2022.

associés à la marche. L'espérance (selon $\mathbf{P}$) est la fonction de partition du système et l'exposant de Liapounov est l'énergie libre (voir définitions formelles plus tard).
Il est connu qu'il y a une transition de phase pour la limite de la fonction de partition. Plus précisemment, il existe une tempéraure inverse critique β_c en dessous de laquelle la fonction de partition renormalisée a une limite strictement postive $\mathbf{P}$-$p.s.$ (désordre faible), alors qu'au dessus la limite est nulle $\mathbf{P}$-$p.s.$ (désordre fort). En quelque sorte, pour le désordre faible les chemins du polymère ne sont globalement pas affectés par l'environnement, au contraire du désordre fort.
Pour le polymère dirigé associé à la marche au plus proche voisin en dimension $d = 1$ et $d = 2$ on a $\beta_c = 0$, tandis que $\beta_c > 0$ dès que la marche est transiente (obtenu facilement par un calcul du moment d'ordre 2 de la fonction de partition).
Ecrivons désormais plus formellement tout ceci.

Définition 2.1. Mesure de polymère. Sur l'espace $\left((\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)^{\otimes \mathbb{N}}\right)$ des suites $(S_n)_{n\geq 0}$, soit $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité vérifiant :

$$\begin{aligned} S_0 = 0 \quad & \mathbf{P}\text{-}p.s. \\ \{S_n - S_{n-1} =: \Delta S_n\}_{n\geq 1} & \text{ est une suite i.i.d.} \end{aligned}$$

On dit que $\mathbf{P}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$.
Indépendamment, on considère un ensemble de variables aléatoires i.i.d. $\omega := \{\omega_{n,z} : n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}^d\}$, appelé l'*environnement*, défini sur l'espace $(\Lambda, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifiant pout tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\big[\exp(\beta\omega_{0,0})\big] < \infty$$

La *mesure de polymère* $\mathbf{P}_N^{\beta,\omega}$ est la mesure de probabilité sur $\left((\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)^{\otimes \mathbb{N}}\right)$ définie par sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à $\mathbf{P}$: pour β fixé et $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d\mathbf{P}_N^{\beta,\omega}}{d\mathbf{P}}(S) = \frac{1}{Z_N^{\beta,\omega}} \exp\left(\beta \sum_{n=1}^{N} \omega_{n,S_n}\right)$$

Le facteur de normalisation positif $Z_N^{\beta,\omega} = \mathbf{E}\Big[\exp\Big(\beta \sum_{n=1}^N \omega_{n,S_n}\Big)\Big]$ est appelé *fonction de partition* et fait de $\mathbf{P}_N^{\beta,\omega}$ une mesure de probabilité.
On considère le fonction de partition renormalisée :

$$W_N^{\beta,\omega} := \frac{Z_N^{\beta,\omega}}{\mathbb{E}\big[Z_N^{\beta,\omega}\big]}$$

Il a été observé par Bolthausen dans [3] que la suite $\{W_N, \mathcal{G}_N\}$, où $\{\mathcal{G}_N\}_{N\geq 0}$ est la filtration définie par $\mathcal{G}_N := \sigma\{\omega_{n,z} : n \in [\![0, N]\!], z \in \mathbb{Z}^d\}$, est une martingale postive. Donc la limite :

$$W_\infty^{\beta,\omega} := \lim_{N\to\infty} W_N^{\beta,\omega}$$

existe $\mathbb{P}$-*p.s.* et est une v.a. positve. De plus, l'évènement $\{W_\infty^{\beta,\omega} = 0\}$ appartient à la tribu asymptotique de $\{\mathcal{G}_N\}_{N\geq 0}$ donc par la loi du $0-1$ de Kolmogorov,

$$\mathbb{P}\big(W_\infty^{\beta,\omega} > 0\big) \in \{0,1\}$$

On dit alors qu'il y a *désordre faible* si $W_\infty^{\beta,\omega} > 0$ $\mathbb{P}$-*p.s.* et *désordre fort* si $W_\infty^{\beta,\omega} = 0$ $\mathbb{P}$-*p.s.* : il est montré dans [4] qu'il existe une valeur critique $\beta_c \in \big[0,\infty\big]$ telle qu'il y ait désordre faible pour $\beta \in \big[0,\beta_c\big)$ et désordre fort pour $\beta > \beta_c$.

Remarque. On peut alors définir l'*énergie libre*

$$\lambda(\beta) := \log \mathbb{E} \exp(\beta\omega)$$

2.2. **Notre cadre.** Dans notre travail nous étudierons le cas où $d = 1$ et la marche aléatoire est à queue très lourde ($\mathbb{P}(S_1 \geq n)$ décroît plus vite que n'importe quelle puissance de n). Plus précisemment, on supposera que la marche aléatoire vaut $S_n = X_1 + .. + X_n$ où $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a.i.i.d. (appelés *incréments*) à valeur dans $\mathbb{Z}$ de distribution *symétrique* vérifiant

$$K(n) := \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{L(n)}{|n|}$$

où L(.) est une fonction à variation lente en $\pm\infty$ (*i.e.* positive telle que $\forall a > 0, \lim_{x\to\infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1$).

3. Etude de l'article de Roberto Viveros

3.1. **Les résultats.** Dans cet article sont prouvés trois théorèmes. Le premier montre qu'il n'y a jamais de désordre *très* fort dans ce cadre, mais c'est une notion que nous n'avons pas introduite car elle n'est pas utile pour notre étude donc nous ne présenterons pas de ce théorème. Les deux autres théorèmes nous intéressent en revanche fortement.

Théorème 3.1. *Si les distributions des incréments et de l'environnement vérifient :*

$$\beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) > \sum_{n\geq 1} K(n) \log \frac{1}{K(n)}$$

Alors, $W_\infty^{\beta,\omega} = 0$ $\mathbb{P}$-*p.s.*
En particulier si $\lim_{\beta\to\infty} \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) = \infty$, *alors*

$$\sum_{n\geq 1} K(n) \log \frac{1}{K(n)} < \infty \Rightarrow \beta_c < \infty$$

Remarque. L'hypothèse $\lim_{\beta\to\infty} \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) = \infty$ est équivalente à supposer que l'environnement ω n'est pas borné supérieurement ou qu'avec probabilité 1 il n'atteint pas son supremum.

Cela tient au lemme classique suivant (*lemme 3.4.* prouvé plus tard) : en notant $s = \text{esssup}\omega_{0,0} := \inf\{c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \mathbb{P}(\omega_{0,0} > c) = 0\}$,

$$\lim_{\beta \to \infty} \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) = \log \frac{1}{\mathbb{P}(\omega_{0,0} = s)}$$

Ce théorème nous donne qu'en supposant l'environnement non borné, s'il existe $\alpha < -1$ tel que pour tout n suffisamment grand

$$K(n) \leq \frac{(\log \log n)^\alpha}{n(\log n)^2}$$

alors le polymère présente une phase désordre fort : en effet on a

$$K(n) \log \frac{1}{K(n)} \sim_{n \to \infty} \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)^{-\alpha}}$$

Le théorème suivant montre au contraire que sous des conditions supplémentaires, s'il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout n suffisamment grand

$$K(n) \geq \frac{(\log \log n)^\alpha}{n(\log n)^2}$$

alors le polymère ne présente pas de phase de désordre fort.

Théorème 3.2. *Si la loi des incréments vérifie :*

(1) *il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout n suffisamment grand*

$$K(n) \geq \frac{(\log \log n)^\alpha}{n(\log n)^2}$$

(2) *$K(.)$ est unimodale*

(3) *il existe $\gamma > \frac{1}{2}$ et $s_n := \min\{s \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(X_1 \geq n) \leq \frac{(\log n)^2}{n}\}$ tels que pour tout n suffisamment grand,*

$$\frac{\mathbf{P}(X_1 \in (s_n, 2ns_n))}{\mathbf{P}(X_1 \geq s_n)} \leq \frac{1}{n^\gamma}$$

Alors $\beta_c = \infty$

Remarque. La condition (3) paraît un peu artificielle bien qu'elle soit vérifiée pour la plupart des distributions avec des queues suffisamment régulières. Nous nous en passerons dans notre travail en partie 4 !

Avec ces deux théorèmes on reste dans l'incapacité de dire s'il existe une phase de désordre fort dans le cas où $K(n) \approx \frac{(\log \log n)^\alpha}{n(\log n)^2}$ avec $\alpha \in [-1, 1]$. Il est conjecturé que non dans l'article.

Conjecture 3.1. Dans un environnement non borné supérieurement, on a l'équivalence

$$\beta_c < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} K(n) \log \frac{1}{K(n)} < \infty$$

Remarque. Dans la partie 4, nous montrerons qu'il n'y a effectivement pas de phase de désordre fort pour $\alpha \in (-1, 1]$. Je ne suis pas parvenu à le montrer dans le cas critique $\alpha = -1$.

3.2. **Size biasing.** On va introduire ici la *mesure de size biasing* qui nous servira dans toute la suite de l'article. Comme

$$\mathbb{E}[W_N^{\beta,\omega}] = 1$$

il existe une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}_N^\beta$ dite de size biasing absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ telle que

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}_N^\beta}{d\mathbb{P}}(S) = W_N^{\beta,\omega}$$

On a alors le lemme suivant qui nous servira pour nos preuves :

Lemme 3.3.

$$\lim_{N\to\infty} W_N^{\beta,\omega} = 0 \quad \mathbb{P}-p.s. \Leftrightarrow \forall L > 0, \lim_{N\to\infty} \widetilde{\mathbb{P}}_N^\beta(W_N^{\beta,\omega} \geq L) = 1$$

Autrement dit $W_N^{\beta,\omega}$ converge vers 0 p.s. si et seulement si cela tend vers l'infini en probabilité sous la mesure de size biasing.

Note. Voir la proposition 4.2 de [5] pour la démonstration de ce lemme.

Remarque. On donne comme en [6] la description suivante de la mesure de size biasing. On considère un ensemble de variables aléatoires i.i.d. $\widetilde{\omega} = \{\widetilde{\omega}_{n,z} : n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$ d'un espace de probabilité $(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ de distribution donnée par

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{\omega}_{0,0} \in \cdot) = \mathbb{E}\big[e^{\beta\omega_{0,0}-\lambda(\beta)}\mathbf{1}_{\{\omega_{0,0}\in\cdot\}}\big]$$

Pour un chemin S fixé et une réalisation des environnements ω et $\widetilde{\omega}$ donnés, on définit $\hat{\omega}^S = \{\hat{\omega}_{n,z}^S : n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\hat{\omega}_{n,z}^S := \omega_{n,z}\mathbf{1}_{\{z\neq S_n\}} + \widetilde{\omega}_{n,z}\mathbf{1}_{\{z=S_n\}}$$

Pour toute fonction bornée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a alors

$$\widetilde{E}_N^\beta\big[F(\omega)\big] = \mathbf{E} \otimes \mathbb{E} \otimes \widetilde{\mathbb{E}}\big[F(\hat{\omega}^S)\big]$$

comme le changement de mesure induit par la densité :

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}_N^{\beta,S}}{d\mathbb{P}}(S) = \exp\Big(\beta\sum_{i=1}^N \omega_{i,S_i} - \lambda(\beta)\Big)$$

maintient l'indépendance des éléments de l'environnement mais modifie la distribution de ceux qui appartiennent au graphe de S par un facteur $e^{\beta\omega-\lambda(\beta)}$ (voir [6]). On pourra donc travailler avec $(\mathbf{P}', S')$ une copie indépendante de $(\mathbf{P}, S)$ et

$$W_N^{\beta,\hat{\omega}^S} = \mathbf{E}'\big[\exp\Big(\sum_{i=1}^N \beta\hat{\omega}_{i,S'_i}^S - \lambda(\beta)\Big)\big]$$

3.3. **Preuve du théorème 3.1.** On va montrer que si

$$\beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) > -\sum_{n\geq 1} K(n)\log K(n)$$

alors $W_N^{\beta,\omega}$ tend vers l'infini $\mathbf{P}\otimes\mathbb{P}\otimes\widetilde{\mathbb{P}}$-$p.s.$ (et donc en probabilité) ce qui prouve le *théorème 3.1* d'après le lemme et la remarque pécédents. On écrit :

$$W_N^{\beta,\hat{\omega}^S} = \mathbf{E}'\big[\exp\Big(\sum_{i=1}^N \beta\big(\omega_{i,S'_i}\mathbf{1}_{\{S_i\neq S'_i\}} + \widetilde{\omega}_{i,S'_i}\mathbf{1}_{\{S_i=S'_i\}}\big) - \lambda(\beta)\Big)\big]$$

avec $(\mathbf{P}', S')$ une copie indépendante de $(\mathbf{P}, S)$. Alors

$$\begin{aligned} W_N^{\beta,\hat{\omega}^S} &\geq \mathbf{P}'\big(S'_1 = S_1, ..., S'_N = S_N\big)\exp\Big(\sum_{i=1}^N \beta\widetilde{\omega}_{i,S_i} - \lambda(\beta)\Big) \\ &= \prod_{i=1}^N K(X_i)\exp\big(\beta\widetilde{\omega}_{i,S_i} - \lambda(\beta)\big) \end{aligned}$$

d'où

$$\log W_N^{\beta,\hat{\omega}^S} \geq \sum_{i=1}^N \Big(\log K(X_i) + \beta\widetilde{\omega}_{i,S_i} - \lambda(\beta)\Big)$$

Donc il suffit de prouver que

$$\sum_{i=1}^N \Big(\log K(X_i) + \beta\widetilde{\omega}_{i,S_i} - \lambda(\beta)\Big) \to \infty$$

$\mathbf{P}\otimes\widetilde{\mathbb{P}}$-$p.s.$ Or

$$\begin{aligned} m_\beta &:= \mathbf{E}\otimes\widetilde{\mathbb{E}}\Big[K(X_i) + \beta\widetilde{\omega}_{i,S_i} - \lambda(\beta)\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[K(X_i)\Big] + \beta\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\widetilde{\omega}_{i,S_i}\Big] - \lambda(\beta) \\ &= \sum_{n\geq 1} K(n)\log K(n) + \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) \end{aligned}$$

Et donc par hypothèse, on a précisemment $m_\beta > 0$. On peut donc appliquer la loi des grand nombres qui nous donne

$$\frac{\sum_{i=1}^N \Big(\log K(X_i) + \beta\widetilde{\omega}_{i,S_i} - \lambda(\beta)\Big)}{N} \to m_\beta > 0$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^N \Big(\log K(X_i) + \beta\widetilde{\omega}_{i,S_i} - \lambda(\beta)\Big) \to \infty$$

D'où le résultat.

3.4. **Preuve du théorème 3.2.** De nouveau par le lemme et la remarque vus en 3.2, on veut ici montrer qu'il existe $L > 0$ tel que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\otimes\mathbb{P}\otimes\widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big] \neq 1$$

ce qui prouvera le *théorème 3.2.*

3.4.1. *Stratégie.* On fixe un chemin S. Par l'inégailté de Markov puis Fubini,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\otimes\widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}}\big] &\leq \frac{1}{L}\mathbb{E}\otimes\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\mathbf{E}'\big[\exp\Big(\sum_{i=1}^N \beta\big(\omega_{i,S'_i}\mathbf{1}_{\{S_i\neq S'_i\}} + \widetilde{\omega}_{i,S'_i}\mathbf{1}_{\{S_i=S'_i\}}\big) - \lambda(\beta)\Big)\big]\Big] \\ &= \frac{1}{L}\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N\cap S_1'^N|}\Big]\end{aligned}$$

où on a écrit

$$W_N^{\beta,\hat{\omega}} = \mathbf{E}'\big[\exp\Big(\sum_{i=1}^N \beta\big(\omega_{i,S'_i}\mathbf{1}_{\{S_i\neq S'_i\}} + \widetilde{\omega}_{i,S'_i}\mathbf{1}_{\{S_i=S'_i\}}\big) - \lambda(\beta)\Big)\big]$$

avec $(\mathbf{P}', S')$ une copie indépendante de $(\mathbf{P}, S)$,

$$G(\beta) = \widetilde{\mathbb{E}}\big[\exp(\beta\widetilde{\omega} - \lambda(\beta))\big] = \exp\big(\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)\big)$$

$$S_m^n = \{(i, S_i) : m \leq i \leq n\}$$

En considérant la dernière intersection entre S et S' :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N\cap S_1'^N|}\Big] &= \sum_{n=0}^N \mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^n\cap S_1'^n|}\mathbf{1}_{\{S_n=S'_n\}}\mathbf{1}_{\{S_{n+1}^N\cap S_{n+1}'^N=\emptyset\}}\Big] \\ &\leq \sum_{n=0}^N G(\beta)^n\mathbf{P}'(S_n = S'_n)\end{aligned}$$

Remarque. On a utilisé le fait que $G(\beta) \geq 1$ ce qui est légitime car l'environnement étant non borné, on a $G(\beta) \to \infty$ quand $\beta \to \infty$ (voir le *lemme 3.4* prouvé en partie 3.5, en remarquant que par convexité, $\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) \geq \beta\lambda'(\beta)$) et on peut se placer à β grand (pour avoir $\beta_c = \infty$ il suffit de montrer que $\beta_c > \beta$ pour tous les β supérieurs à un certain β_0).

3.4.2. *Majoration de la probabilité.* On a de plus

$$\mathbf{P}'\Big(S_n = S'_n\Big) \leq \frac{1}{|S_n|}$$

En effet, la loi de X_1 est supposée unimodale. Comme elle est également symétrique dans tout l'article, elle est unimodale autour de 0 et la loi de S_n est encore symétrique et unimodale autour de 0 (voir [7] pour plus d'éventuels détails). Et on a alors

$$1 \geq \sum_{|y|\leq|x|} \mathbf{P}(S_n = y) \geq (2|x| + 1)\mathbf{P}(S_n = x)$$

donc
$$\mathbf{P}\Big(S_n = x\Big) \leq \frac{1}{2|x|+1} \leq \frac{1}{|x|}$$

3.4.3. *Majoration de la somme.* On montre ensuite qu'avec $\alpha > 1$ et l'hypothèse (3) supplémentaire, il existe $K_S > 0$ tel que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} G(\beta)^n \frac{1}{|S_n|} < K_S$$
Pour cela, on montre que pour tout $K > 0$, pour n suffisamment grand,
$$|S_n| > K^n$$
sur tous les chemins de S $\mathbf{P}$-$p.s.$. Cela s'appuie sur 2 points : si l'on note $X_n^{(n)}$ et $X_n^{(n-1)}$ la plus grande et la deuxième plus grande valeur de $\{|X_1|, ..., |X_n|\}$, alors pour $K > 0$ et n suffisamment grand,

(1) $X_n^{(n)} > K^n \quad \mathbf{P}$-$p.s.$
(2) $X_n^{(n-1)} > \frac{1}{2n} X_n^{(n)} \quad \mathbf{P}$-$p.s.$

Cela suffit puisqu'on a alors
$$|S_n| \geq X_n^{(n)} - (n-1)X_n^{(n-1)} \geq X_n^{(n)} - \frac{n-1}{2n} X_n^{(n)} > \frac{1}{2} K^n$$
(1) est facile à montrer : il suffit d'observer que
$$\mathbf{P}(X_n^{(n)} \leq K^n) = \Big(1 - \mathbf{P}(X_1 > K^n)\Big)^n \leq \Big(1 - \frac{C_K (\log n)^\alpha}{n}\Big)^n \leq e^{-C_K (\log n)^\alpha}$$
avec $C_K > 0$ et on obtient directement (1) par Borel Cantelli.

Remarque. On a utilisé dans le calcul précédent que
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 \geq a) &= \int_a^\infty \frac{(\log\log u)^\alpha}{u(\log u)^2} du \\ &= \int_{\log a}^\infty \frac{(\log v)^\alpha}{v^2} dv \\ &= (\log\log a)^\alpha \int_{\log a}^\infty \frac{du}{u(\log u)^2}(1 + o(1)) \\ &= \frac{(\log\log a)^\alpha}{\log a}(1 + o(1))\end{aligned}$$
quand $a \to \infty$. Donc
$$\mathbf{P}(X_1 > K^n) \sim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n \log K}$$

(2) est en revanche plus embêtant à montrer. La preuve est technique et s'appuie fortement sur l'hypothèse supplémentaire. Nous ne la présenterons pas en détails car elle n'a pas de grand intérêt conceptuel et qu'elle ne nous servira pas pour notre étude : cela ne fonctionne plus dès que $\alpha \leq 1$ et notre

approche sera toute autre. Pour se faire une idée et comprendre comment apparaît cette hypothèse (3), l'idée de la preuve est de dire que pour $s, t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_n^{(n-1)} = s, X_n^{(n)} = t) \leq \binom{n}{2}\mathbf{P}(|X_1| \leq s)^{n-2}\mathbf{P}(|X_1| = s)\mathbf{P}(|X_1| = t)$$

et donc

$$\mathbf{P}(X_n^{(n-1)} > \frac{1}{2n}X_n^{(n)}) \leq \sum_{s=0}^{+\infty}\binom{n}{2}\mathbf{P}(|X_1| \leq s)^{n-2}\mathbf{P}(|X_1| = s)\mathbf{P}(|X_1| \in [s, 2ns])$$

puis de majorer cette somme pour appliquer Borel Cantelli.

3.4.4. *Conclusion de la preuve.* On obtient donc $K_S > 0$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} G(\beta)^n \frac{1}{|S_n|} < K_S$$

Ainsi il existe $K_\infty > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{E}'\left[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\right] \leq K_\infty\right) \geq \frac{1}{2}$$

En notant l'évènement $\mathcal{A} = \left\{\mathbf{E}'\left[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\right] \leq K_\infty\right\}$, on a

$$\mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big]\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{L}\mathbf{E}'\left[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\right]\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \leq \frac{K_\infty}{L}$$

et

$$\mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big]\mathbf{1}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}} \leq 1$$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \otimes \mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big] &\leq \frac{K_\infty}{L}\mathbf{P}\big(\mathcal{A}\big) + \mathbf{P}\big(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}\big) \\ &\leq \frac{K_\infty}{L} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

En prenant $L \geq 3K$, on a bien

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P} \otimes \mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big] \neq 1$$

D'où le résultat : $\beta_c = \infty$

3.5. **Un lemme classique.** Avant de passer à notre travail personnel on montre rapidement le lemme suivant que l'on a utilisé auparavant.

Lemme 3.4. *On note* $s = \operatorname{esssup}\omega_{0,0}$. *Alors on a :*

1. *Si* $u < s$, *alors* $\lim_{\beta\to\infty} \widetilde{\mathbb{P}}^\beta(\widetilde{\omega} < u) = 0$
2. $\lim_{\beta\to\infty} \lambda'(\beta) = s$
3. $\lim_{\beta\to\infty} \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) = -\log \mathbb{P}(\omega = s)$

Preuve. (1) : On a $\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}^\beta}{d\mathbb{P}} = e^{\beta\omega-\lambda(\beta)}$. Pour $u < U_1^{(n)} < s$, $\mathbb{P}(\omega > U_1^{(n)}) = \delta > 0$ et

$$\widetilde{\mathbb{P}}^\beta(\widetilde{\omega} < u) = \frac{\mathbb{E}(e^{\beta\omega}\mathbf{1}_{\{\omega<u\}})}{\mathbb{E}(e^{\beta\omega})} \leq \frac{e^{\beta u}}{\mathbb{E}(e^{\beta\omega}\mathbf{1}_{\{\omega>U_1^{(n)}\}})} \leq \frac{e^{-\beta(U_1^{(n)}-u)}}{\delta} \to_{\beta\to\infty} 0$$

(2) : Supposons $s < \infty$ pour la suite ($s = \infty$ analogue). Soit $\epsilon > 0$ et $u > 0$ *t.q.* $0 < s - u < \epsilon$. D'une part $\lambda'(\beta) = \widetilde{\mathbb{E}}^\beta(\widetilde{\omega}) = \mathbb{E}(\omega e^{\beta\omega-\lambda(\beta)}) \leq s$. D'autre part,

$$\lambda'(\beta) = \widetilde{\mathbb{E}}^\beta(\widetilde{\omega}) \geq \widetilde{\mathbb{E}}^\beta(\widetilde{\omega}\mathbf{1}_{\{\widetilde{\omega}\geq u\}}) \geq (s-\epsilon)\widetilde{\mathbb{P}}^\beta(\widetilde{\omega} \geq u) \geq (s-\epsilon)(1-\epsilon)$$

pour β grand par (1). On fait $\epsilon \to 0$ et on obtient (2).
(3) : Soit $\epsilon > 0$. Soit $u > 0$ *t.q.* $0 < s - u < \epsilon$ et $\mathbb{P}(\omega \geq u) \leq \mathbb{P}(\omega = s) + \epsilon$. Alors,

$$\begin{aligned} e^{\beta s-\lambda(\beta)}(\mathbb{P}(\omega = s) + \epsilon) \geq \mathbb{E}(\omega e^{\beta\omega-\lambda(\beta)}\mathbf{1}_{\{\omega} \geq u\}) = \widetilde{\mathbb{P}}^\beta(\widetilde{\omega} \geq u) &\geq e^{\beta u-\lambda(\beta)}\mathbb{P}(\omega \geq u) \\ &\geq e^{\beta(s-\epsilon)-\lambda(\beta)}\mathbb{P}(\omega = s) \end{aligned}$$

En prenant le logarithme puis la limite quand $\beta \to \infty$:

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) = \lim_{\beta\to\infty} \beta s - \lambda(\beta) = -\log \mathbb{P}(\omega = s)$$

4. Travail sur la conjecture

4.1. **Notre résultat.** La conjecture est donc que dans un environnement non borné :

$$\beta_c < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} K(n) \log \frac{1}{K(n)} < \infty$$

Le sens réciproque a été montré (*théorème 3.1*). Le sens direct a été montré pour $K(n) \geq \frac{(\log\log n)^\alpha}{n(\log n)^2}$ avec $\alpha > 1$ sous certaines conditions supplémentaires (*théorème 3.2*). Il nous reste donc à étudier le cas où $K(n) \approx \frac{(\log\log n)^\alpha}{n(\log n)^2}$ avec $-1 \leq \alpha \leq 1$.

Théorème 4.1. *S'il existe $\alpha > -1$ tel que pour tout n suffisamment grand,*

$$K(n) \geq \frac{(\log\log n)^\alpha}{n(\log n)^2}$$

Alors, $\beta_c = \infty$

4.2. **Entame de la preuve.** On reprend initiallement la preuve du *théorème 3.2.* On veut montrer que pour L suffisamment grand

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P} \otimes \mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L] \neq 1$$

Par l'inégailté de Markov puis Fubini,

$$\mathbb{P}\otimes\widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}}\geq L\big]\leq\frac{1}{L}\mathbb{E}\otimes\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\mathbf{E}'\big[\exp\Big(\sum_{i=1}^{N}\beta\big(\omega_{i,S_i'}\mathbf{1}_{\{S_i\neq S_i'\}}+\widetilde{\omega}_{i,S_i'}\mathbf{1}_{\{S_i=S_i'\}}\big)-\lambda(\beta)\Big)\big]\Big]$$
$$=\frac{1}{L}\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N\cap S_1'^N|}\Big]$$

où on a écrit

$$W_N^{\beta,\hat{\omega}}=\mathbf{E}'\big[\exp\Big(\sum_{i=1}^{N}\beta\big(\omega_{i,S_i'}\mathbf{1}_{\{S_i\neq S_i'\}}+\widetilde{\omega}_{i,S_i'}\mathbf{1}_{\{S_i=S_i'\}}\big)-\lambda(\beta)\Big)\big]$$

avec S' une copie indépendante de S, de loi notée $\mathbf{P}'$

$$G(\beta)=\widetilde{\mathbb{E}}\big[\exp(\beta\widetilde{\omega}-\lambda(\beta))\big],\quad S_m^n=\{(i,S_i):m\leq i\leq n\}$$

On considère la dernière intersection entre S et S' puis on scinde la somme en 2 :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N\cap S_1'^N|}\Big]&=\sum_{n=0}^{N}\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^n\cap S_1'^n|}\mathbf{1}_{\{S_n=S_n'\}}\mathbf{1}_{\{S_{n+1}^N\cap S_{n+1}'^N=\emptyset\}}\Big]\\&\leq\sum_{n=0}^{N}\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^n\cap S_1'^n|}\mathbf{1}_{\{S_n=S_n'\}}\Big]\\&=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}G(\beta)^k\mathbf{P}'\Big((|S_1^n\cap S_1'^n|=k)\cap(S_n=S_n')\Big)\\&=\sum_{n=0}^{N}\Bigg[\sum_{k=0}^{n(\log n)^{\alpha-2}-1}G(\beta)^k\mathbf{P}'\Big((|S_1^n\cap S_1'^n|=k)\cap(S_n=S_n')\Big)\\&\quad+\sum_{k=n(\log n)^{\alpha-2}}^{n}G(\beta)^k\mathbf{P}'\Big((|S_1^n\cap S_1'^n|=k)\cap(S_n=S_n')\Big)\Bigg]\end{aligned}$$

4.3. **Lemmes utiles.** Avant de s'intéresser aux deux parties de cette somme on montre les trois lemmes suivants qui nous serviront dans les deux cas.

Lemme 4.2. *Quand $a\to\infty$,*

$$\mathbf{P}(X_1\geq a)=\frac{(\log\log a)^{\alpha}}{\log a}(1+o(1))$$

Preuve. Pour $a \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 \geq a) &= \int_a^\infty \frac{(\log\log u)^\alpha}{u(\log u)^2} du \\
&= \int_{\log a}^\infty \frac{(\log v)^\alpha}{v^2} dv \\
&= \int_{\log a}^{(\log a)^3} \frac{(\log v)^\alpha}{v^2} dv + \int_{(\log a)^3}^\infty \frac{(\log v)^\alpha}{v^2} dv \\
&= (\log\log a)^\alpha (1+o(1)) \int_{\log a}^{(\log a)^3} \frac{dv}{v^2} + o(\int_{(\log a)^3}^\infty \frac{1}{v^{3/2}} dv) \\
&= (\log\log a)^\alpha (\frac{1}{\log a} - \frac{1}{(\log a)^3})(1+o(1)) + o(\frac{1}{\sqrt{(\log a)^3}}) \\
&= \frac{(\log\log a)^\alpha}{\log a}(1+o(1))
\end{aligned}$$

Lemme 4.3. *Pour $x \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} \geq M)\big) \leq \frac{n}{M}$$

Preuve. Par interchangabilité des incréments, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} \geq M)\big) &\leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (|\Delta S'_k| \geq M)\big) \\
&= n\mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (|\Delta S'_n| \geq M)\big) \\
&\leq n \max_{m \geq M} K(m) \\
&\leq \frac{n}{M}
\end{aligned}$$

Lemme 4.4. *Il existe x_0 tel que pour tout $x > x_0$:*

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}'(S'_n = x) \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

autrement dit la probabilité que la marche tombe en x est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

Preuve. En se plaçant à x suffisamment grand et en prenant $n_0 := \lfloor |x|^{1/6} \rfloor$, on a

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}'(S'_n = x) = \sum_{n=1}^{n_0} \mathbf{P}'(S'_n = x) + \sum_{n>n_0} \mathbf{P}'(S'_n = x)$$

où pour $n \leq n_0$:

$$\mathbf{P}'(S'_n = x) = \mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} \geq \frac{|x|}{n})\big) \leq \frac{n^2}{|x|} \leq \frac{n_0^2}{|x|}$$

par le *lemme 4.3*. D'où

$$\sum_{n=1}^{n_0} \mathbf{P}'(S'_n = x) \leq \frac{n_0^3}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

et pour $n > n_0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'(S'_n = x) =& \mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} \leq n^{10})\big) \\ &+ \mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} > n^{10})\big)\end{aligned}$$

avec :

$$\mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} > n^{10})\big) \leq \frac{n}{n^{10}} = \frac{1}{n^9}$$

puis

$$\sum_{n > n_0} \frac{1}{n^9} \leq \frac{1}{n_0^8} \leq \frac{1}{|x|}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'\big((S'_n = x) \cap (\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} \leq n^{10})\big) &\leq \mathbf{P}'(\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} \leq n^{10}) \\ &\leq \mathbf{P}'(\max\{|\Delta S'_1|, ..., |\Delta S'_n|\} \leq n_0^{10}) \\ &= \big(1 - \mathbf{P}'(S'_1 > n_0^{10})\big)^n\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{n > n_0} \big(1 - \mathbf{P}'(S'_1 > n_0^{10})\big)^n &= \frac{\big(1 - \mathbf{P}'(S'_1 > n_0^{10})\big)^{n_0}}{\mathbf{P}'(S'_1 > n_0^{10})} \\ &= \frac{\frac{5}{3}\log|x|}{(\log\log|x|)^\alpha} \exp(-|x|^{\frac{1}{6}} \frac{(\log\log|x|)^\alpha}{\frac{5}{3}\log|x|})\Big) \\ &\leq \frac{1}{|x|}\end{aligned}$$

D'où le résultat

Remarque. En particulier pour $|x| > x_0$

$$\mathbf{P}'(S'_n = x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}'(S'_n = x) \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

4.4. **Première partie de la somme.** Celle-ci ne pose alors pas vraiment de problème. En effet, pour $k < n(\log n)^{\alpha-2}$

$$G(\beta)^k \leq \exp\left[n(\log n)^{\alpha-2}\log(G(\beta))\right]$$

et par ailleurs

$$\mathbf{P}'\Big((|S_1^n \cap S_1'^n| = k) \cap (S_n = S'_n)\Big) \leq \mathbf{P}'\Big(S_n = S'_n\Big) \leq \frac{1}{\sqrt{|S_n|}}$$

Or pour $\gamma < \alpha - 1$, on a pour tout n suffisamment grand,

$$|S_n| > \exp\left[n(\log n)^\gamma\right] \quad p.s.$$

En effet comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big(|S_n| \leq \exp\big[n(\log n)^\gamma\big]\Big) &= \mathbf{P}\big((\max\{|\Delta S_1|, ..., |\Delta S_n|\} \leq \frac{1}{n}\exp\big[n(\log n)^\gamma)\big) \\
&+ \mathbf{P}\big((|S_n| \leq \exp\big[n(\log n)^\gamma) \cap (\max\{|\Delta S_1|, ..., |\Delta S_n|\} > \frac{1}{n}\exp\big[n(\log n)^\gamma)\big) \\
&\leq \mathbf{P}\Big(|S_1| \leq \frac{1}{n}\exp\big[n(\log n)^\gamma\big]\Big)^n + \frac{n^2}{\exp\big[n(\log n)^\gamma\big]} \\
&\leq \Big(1 - \frac{(\log n)^\alpha}{n(\log n)^\gamma}\Big)^n + n^2\exp\big[-n(\log n)^\gamma\big] \\
&\leq \exp\big(-(\log n)^{\alpha-\gamma}\big)(1+o(1))
\end{aligned}$$

Et $\alpha - \gamma > 1$, ceci est sommable d'où le résultat par Borel Cantelli.
Ainsi,

$$G(\beta)^k\mathbf{P'}\Big((|S_1^n \cap S_1'^n| = k) \cap (S_n = S_n')\Big) = O\Bigg(\exp\big[-n(\log n)^{\alpha-\frac{3}{2}}\big]\Bigg)$$

$$\sum_{k=0}^{n(\log n)^{\alpha-2}-1} G(\beta)^k\mathbf{P'}\Big((|S_1^n \cap S_1'^n| = k) \cap (S_n = S_n')\Big) = O\Bigg(n\exp\big[-n(\log n)^{\alpha-\frac{3}{2}}\big]\Bigg)$$

4.5. **Deuxième partie de la somme.** C'est en revanche plus compliqué pour cette partie. Soient $n \in [\![0, N]\!]$ et $k \in [\![n(\log n)^{\alpha-2}, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P'}\Big((|S_1^n \cap S_1'^n| = k) \cap (S_n = S_n')\Big) &\leq \mathbf{P'}\Big(|S_1^n \cap S_1'^n| = k\Big) \\
&\leq \binom{n}{k} \max_{I \subset [\![1,n]\!], |I| = k} \mathbf{P'}\Big(S_1^n \cap S_1'^n = I\Big)
\end{aligned}$$

Remarque. Notons qu'ici $k \geq n(\log n)^{\alpha-2}$ donc il existe $c_1 > 0$ *t.q.* pour n suffisamment grand,

$$\binom{n}{k} \leq \exp(c_1 k \log\log n)$$

En effet, on a

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

Donc par Stirling pour n suffisamment grand,

$$\binom{n}{k} \leq \Big(\frac{en}{k}\Big)^k = \exp(k\log\frac{n}{k}) \leq \exp(c_1 k \log\log n)$$

puisque $\frac{n}{k} \leq (\log n)^{2-\alpha}$

4.5.1. *Pour $\alpha > 0$.* L'idée est désormais de montrer que I contiendra presque sûrement un nombre suffisament grand de grands sauts. On va d'abord montrer le résultat pour $\alpha > 0$ et on étendra à $\alpha > -1$ par la suite. On fixe $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $|I| = k$. Soient :

$$H_n := \{i \in \mathbb{N}^* : \Delta S_i \geq \exp(\sqrt{n})\}$$

$$\widetilde{H}_n := H_n \cap [\![1, n]\!]$$

$$J_n := \{i \in I : [\![p_I(i) + 1, i]\!] \cap \widetilde{H}_n \neq \emptyset\}$$

où $p_I(i) := \max\{j \in I \cup \{0\} : j < i\}$ est le prédécesseur de i dans $I \cup \{0\}$.
On pose

$$r_n = 2\sqrt{n}(\log n)^\alpha$$

On définit ensuite les $(V_j^{(n)})_{1 \leq j \leq r_n}$ comme suit : en écrivant $H_n = \{h_i\}_{i \geq 1}$ où $h_i < h_{i+1}$, soient $U_1^{(n)}, ..., U_{r_n}^{(n)}$ les v.a. telles que $U_i^{(n)} := h_i - h_{i-1}$ (avec $h_0 = 0$). On les classe par ordre décroissant $V_1^{(n)} \geq V_2^{(n)} \geq ... \geq V_{r_n}^{(n)}$.
En fait, $U_i^{(n)}$ vaut alors le nombre de sauts de S inférieurs à $\exp(\sqrt{n})$ entre le $(i-1)$-ème et le i-ème saut de S supérieurs à $\exp(\sqrt{n})$). Ce sont des v.a.i.i.d *géométriques* de paramètre

$$p_n = P(S_1 \geq \exp(\sqrt{n})) = \frac{(\log \sqrt{n})^\alpha}{\sqrt{n}}$$

4.5.1.1. On va désormais montrer 3 résultats qui sont, pour n suffisamennt grand, vrais *p.s.*. En se plaçant à n grand, ceci définit trois événements $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de probabilité 1 ; par la suite on pourra donc travailler sous $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ qui est de probabilité 1, et ainsi supposer vrais les résultats de ces trois lemmes sans rappeler qu'on travaille *p.s* systématiquement.

Lemme 4.5 (A). *Pour tout n suffisamment grand, on a p.s.*

$$h_{r_n} \geq n$$

autrement dit S fait au plus $2np_n$ sauts plus grands que $\exp(\sqrt{n})$ *sur* $[\![1, n]\!]$, *ou encore $U_1^{(n)} + ... + U_{2np_n}^{(n)} \geq n$.*

Preuve. La valeur typique du nombre de sauts plus grands que $\exp(\sqrt{n})$ sur $[\![1, n]\!]$ est

$$\frac{n}{E\big[U_1^{(n)}\big]} = np_n$$

Puisque $r_n = 2np_n$, on a par la loi des grands nombres,

$$\frac{h_{r_n}}{n} = 2 \times \frac{U_1^{(n)} + ... + U_{2np_n}^{(n)}}{2np_n E\big[U_1^{(n)}\big]} \to 2 \quad p.s.$$

D'où le résultat

Lemme 4.6 (B)**.** *Soit* $m_1 := \frac{kp_n}{(\log n)^2}$*. Il existe* $c_2' > 0$ *tel que pour* n *suffisamment grand,*

$$V_1^{(n)} \leq c_2' \frac{1}{p_n} \log n \quad p.s.$$

$$V_{m_1}^{(n)} \leq c_2' \frac{1}{p_n} \log \log n \quad p.s.$$

Preuve. D'abord, pour $a \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(V_1^{(n)} > a) &= \binom{2np_n}{1} P(U_1^{(n)} > a) \\ &= 2np_n(1-p_n)^a \\ &\leq ne^{-ap_n}\end{aligned}$$

Et avec $a = 3 \times \frac{1}{p_n} \log n$, on peut appliquer Borel Cantelli pour obtenir le résultat. Puis,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(V_{m_1}^{(n)} > a) &= \binom{2np_n}{m_1} \Big(P(U_1^{(n)} > a)\Big)^{m_1} \\ &\leq \Big(\frac{2np_n}{m_1}(1-p_n)^a\Big)^{m_1} \\ &\leq \exp(n \log((\log n)^t e^{-ap_n})) \quad , t > 0\end{aligned}$$

et de même on peut appliquer Borel Cantelli avec $a = (t+1) \times \frac{1}{p_n} \log \log n$.

Lemme 4.7 (C)**.** *Pour* n *suffisamment grand, s'il existe* $t \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $|\Delta S_t'| > n^6$ *(en particulier si* $|\Delta S_t'| > \exp(\sqrt{n})$*), alors*

$$m_1 < t < m_2 \Rightarrow |S_{m_1}' - S_{m_2}'| > \sqrt{|\Delta S_t'|} \quad p.s.$$

Preuve. Par 4.2, pour n grand, la probabilité que la marche touche un point donné entre $n^6 - \sqrt{n^3}$ et $n^6 + \sqrt{n^3}$ est inférieure à $\frac{1}{n^3}$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'\Big(\exists m_1, t, m_2 \in [\![0, n]\!], m_1 < t < m_2, (|\Delta S_t'| > n^6) \cap (|S_{m_1}' - S_{m_2}'| \leq \sqrt{|\Delta S_t'|}\Big) \\ \leq 2\sqrt{n^3} \times \frac{1}{n^3} = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)\end{aligned}$$

d'où le résultat par Borel Cantelli.

4.5.1.2. On a $|J_n|$ est le nombre d'écarts entre points de $\widetilde{H}_n$ qui contiennent au moins un point de I et donc $I = \bigsqcup_{j \in J_n} I_j$ où I_j est inclus entre deux points consécutifs de $\widetilde{H}_n$. D'où

$$k = |I| = \sum_{j=1}^{|J_n|} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{|J_n|} V_j^{(n)}$$

On consière $m := \inf\{l : \sum_{j=1}^{l} V_j^{(n)} \geq k\}$ (existe d'après le *lemme A*). Alors par le *lemme B*,

$$k \leq \sum_{j=1}^{m} V_j^{(n)} \leq m V_1^{(n)} \leq m \times \frac{1}{p_n} \log n$$

i.e. $m \geq \frac{kp_n}{\log n} =: m_0$.
D'où

$$k \leq \sum_{j=1}^{m} V_j^{(n)} \leq \frac{m}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} V_j^{(n)} \qquad (m \geq m_0 \Rightarrow \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} V_j^{(n)} \leq \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} V_j^{(n)})$$

Puis, comme $m_1 := \frac{m_0}{\log n}$, on a par le *lemme B* :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} V_j^{(n)} &\leq \frac{m_1}{m_0} V_1^{(n)} + \frac{1}{m_0} m_0 V_{m_1}^{(n)} \\ &\leq \frac{1}{p_n} + c_2' \frac{1}{p_n} \log\log n \\ &\leq c_2'' \frac{1}{p_n} \log\log n\end{aligned}$$

d'où

$$k \leq m c_2'' \frac{1}{p_n} \log\log n$$

Et donc finalement

$$m \geq c_2 \frac{kp_n}{\log\log n} \qquad , c_2 > 0$$

Or on a vu que $k \leq \sum_{j=1}^{|J|} V_j^{(n)}$ donc par définition de m, $|J_n| \geq m$.
On a donc

$$|J_n| \geq c_2 \frac{k(\log n)^{\alpha}}{\sqrt{n} \log\log n}$$

Alors en écrivant $J_n = \{j_1 < ... < j_{|J_n|}\}$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P'}\Big(S_1^n \cap S_1'^n = I\Big) &\leq \mathbf{P'}\Big(S_1^n \cap S_1'^n \supset J_n\Big) \qquad (J_n \subset I) \\ &\leq \prod_{i=1}^{|J_n|} \frac{1}{\sqrt{|S_{j_i} - S_{j_{i-1}}|}} \qquad (4.2.) \\ &= \exp\big(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|J_n|} \log|S_{j_i} - S_{j_{i-1}}|\big)\end{aligned}$$

Or par le *lemme C*, pour $j_i \in J_n$,

$$|S_{j_i} - S_{j_{i-1}}| \geq \exp(\frac{1}{2}\sqrt{n})$$

donc

$$\sum_{i=1}^{|J_n|} \log|S_{j_i} - S_{j_{i-1}}| \geq |J_n| \times \frac{1}{2}\sqrt{n} \geq c_2 \frac{k(\log n)^\alpha}{\log\log n}$$

D'où

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\mathbf{P}'\Big(S_1^n \cap S_1'^n = I\Big) &\leq \exp\big(c_1 k \log\log n - c_2 \frac{k(\log n)^\alpha}{\log\log n}\big) \\ &= O\Bigg(\exp\big(-k(\log n)^{\alpha/2}\big)\Bigg) \quad si \quad \alpha > 0\end{aligned}$$

Pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n(\log n)^{\alpha-2}}^{n} & G(\beta)^k \mathbf{P}'\Big((|S_1^n \cap S_1'^n| = k) \cap (S_n = S_n')\Big) \\ &= O\Bigg(n \times \max_{n(\log n)^{\alpha-2} \leq k \leq n} \exp\big(-k(\log n)^{\alpha/2}\big)\Bigg) \\ &= O\Bigg(n \exp\big(-n(\log n)^c\big)\Bigg) \quad , c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Et ceci va nous permettre de conclure. Mais on veut d'abord obtenir le résultat pour tout $\alpha > -1$ et pas seulement $\alpha > 0$.

4.5.2. *Pour $\alpha > -1$.* Pour cela on adapte la preuve précédente : on pose pour $l \in [\![1, \lfloor \frac{1}{4}\log_2(n) \rfloor + 1]\!]$:

$$\overline{H_{n,l}} := \{i \in [\![1, n]\!] : \Delta S_i \geq \exp(2^l \sqrt{n})\}$$

$$H_{n,l} := \overline{H_{n,l}} \backslash \overline{H_{n,l+1}}$$

$$\overline{J_{n,l}} := \{i \in I : [\![p_I(i) + 1, i]\!] \cap \overline{H_{n,l}} \neq \emptyset\}$$

$$J_{n,l} := \overline{J_{n,l}} \backslash \overline{J_{n,l+1}}$$

Les $J_{n,l}$ étant disjoints on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}'\Big(S_1^n \cap S_1'^n = I\Big) &\leq \mathbf{P}'\Big(S_1^n \cap S_1'^n \supset \bigcup_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} J_{n,l}\Big) \\
&\leq \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} \prod_{i=1}^{|J_{n,l}|} \frac{1}{\sqrt{|S_{j_i^{(l)}} - S_{j_{i-1}^{(l)}}|}} \\
&= \exp\big(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor}\sum_{i=1}^{|J_{n,l}|} \log|S_{j_i^{(l)}} - S_{j_{i-1}^{(l)}}|\big) \\
&\leq \exp\big(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor}\sum_{i=1}^{|J_{n,l}|} 2^l\sqrt{n}\big) \\
&= \exp\big(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} 2^l|J_{n,l}|\big)
\end{aligned}$$

Or comme précédemment :

$$|\overline{J_{n,l}}| \geq c_3'\frac{kp_{n,l}}{\log\log n} = c_3'\frac{k(\log n)^\alpha}{2^l\sqrt{n}\log\log n}$$

De plus,

$$\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} 2^l|J_{n,l}| \geq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor}(2^l - 2^{l-1})|\overline{J_{n,l}}|$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} 2^l|J_{n,l}| &= \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} 2^l(|\overline{J_{n,l}}| - |\overline{J_{n,l+1}}|) \\
&= \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} 2^l|\overline{J_{n,l}}| - \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor+1} 2^{l-1}|\overline{J_{n,l}}| \\
&\geq \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor}(2^l - 2^{l-1})|\overline{J_{n,l}}| - 2^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor}|\overline{J_{n,\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor+1}}| \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor}(2^l - 2^{l-1})|\overline{J_{n,l}}|
\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{2^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor}|\overline{J_{n,\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor+1}}|}{\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor+1}(2^l - 2^{l-1})|\overline{J_{n,l}}|} \leq \frac{1}{\log n} \to_{n\to\infty} 0$$

Donc

$$\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} 2^l |J_{n,l}| \geq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} (2^l - 2^{l-1}) c_3' \frac{k(\log n)^\alpha}{2^l \sqrt{n}\log\log n}$$

$$= \frac{k(\log n)^\alpha}{\sqrt{n}\log\log n} \times \frac{c_3'}{2} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{4}\log_2(n)\rfloor} (1 - \frac{1}{2})$$

$$\geq c_3 \frac{k(\log n)^{\alpha+1}}{\sqrt{n}\log\log n} \qquad , c_3 > 0$$

D'où

$$\binom{n}{k} \mathbf{P}'\Big(S_1^n \cap S_1'^n = I\Big) \leq \exp\big(c_1 k \log\log n - c_3 \frac{k(\log n)^{\alpha+1}}{\log\log n}\big)$$

$$= O\bigg(\exp\big(-k(\log n)^{(\alpha+1)/2}\big)\bigg) \quad si \quad \alpha > -1$$

Pour $\alpha > -1$,

$$\sum_{k=n(\log n)^{\alpha-2}}^{n} G(\beta)^k \mathbf{P}'\Big((|S_1^n \cap S_1'^n| = k) \cap (S_n = S_n')\Big)$$

$$= O\bigg(n \times \max_{n(\log n)^{\alpha-2} \leq k \leq n} \exp\big(-k(\log n)^{(\alpha+1)/2}\big)\bigg)$$

$$= O\bigg(n \exp\big(-n(\log n)^c\big)\bigg) \quad , c \in \mathbb{R}$$

4.6. **Conclusion de la preuve.** Finalement il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\Big] = O\bigg(\sum_{n=0}^{N} n \exp\big(-n(\log n)^C\big)\bigg)$$

et on dispose donc de $K_S > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\Big] \leq K_S$$

On peut ensuite conclure comme en 3.4.4 : il existe $K_\infty > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\bigg(\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\Big] \leq K_\infty\bigg) \geq \frac{1}{2}$$

En notant l'évènement $\mathcal{A} = \bigg\{\mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\Big] \leq K_\infty\bigg\}$, on a

$$\mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big] \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{L} \mathbf{E}'\Big[G(\beta)^{|S_1^N \cap S_1'^N|}\Big] \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \leq \frac{K_\infty}{L}$$

et

$$\mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big] \mathbf{1}_{\mathcal{A}^c} \leq 1$$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \otimes \mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big] &\leq \frac{K_\infty}{L}\mathbf{P}\big(\mathcal{A}\big) + \mathbf{P}\big(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}\big) \\ &\leq \frac{K_\infty}{L} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

En prenant $L \geq 3K$, on a donc :

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P} \otimes \mathbb{P} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\big[W_N^{\beta,\hat{\omega}} \geq L\big] \neq 1$$

D'où le résultat : $\beta_c = \infty$

5. Conclusion

Ce stage a été une opportunité exceptionnelle ; j'ai découvert plus en profondeur le monde de la recherche, et en particulier la façon dont il fonctionne à l'IMPA où j'ai apprécié la très grande liberté intellectuelle laissée aux chercheurs. Je remercie encore Hubert Lacoin qui m'a accompagné avec énormément de bienveillance. Ces 5 mois ont été une incroyable aventure mathématique et humaine. J'ai aussi eu la chance de pouvoir beaucoup voyager en Amérique du Sud et j'en reviens la tête pleine de souvenirs !

References

[1] R. Viveros. *Directed polymer for really heavy tailed random walks.* 2020. URL : `https://arxiv.org/pdf/2003.14280.pdf`.

[2] F. Comets. *Directed Polymers in Random Environments.* Lecture Notes in Mathematics, 2175. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour, 2016.

[3] E. Bolthausen. "A Note on the Diffusion of Directed Polymers in a Random Environment". In : *Commun. Math. Phys.* 123 (1989), p. 529-534.

[4] N. Yoshida F. Comets. "Directed Polymers in Random Environment are Diffusive at Weak Disorder". In : *Ann. Probab.* 34 (2006).

[5] H. Lacoin. *Existence of an intermediate phase for oriented percolation.* 2012. URL : `https://arxiv.org/pdf/1201.4552.pdf`.

[6] H. Lacoin J. Sohier. "Disorder relevance without Harris Criterion : the case of pinning model with -stable environment". In : *Electronic Journal of Probability* 122 (2016).

[7] S. Purkayastha. *Simple proofs of two results on convolutions of unimodal distributions.* Statistics Probability Letters Volume 39, Issue 2, 97-100.