

RAPPORT DE STAGE

BOUSSEYROUX PIERRE

Lors de mon stage de Mathématiques-Physique s'inscrivant dans ma double-licence, j'ai découvert le milieu des matrices aléatoires par le biais de la physique. J'ai alors aperçu de loin l'existence d'une possible connexion entre la répartition des zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann et la théorie des matrices aléatoires, qui m'a semblé fascinante. C'est dans cette logique que mon tuteur m'a aiguillé vers Nina Claire Snaith, spécialiste du rendu effectif de cette connexion et co-directrice du département Maths-Physique à l'université de Bristol où j'ai effectué un stage d'une longueur de 4 mois. Nina met tout en œuvre pour créer une ambiance de travail très agréable grâce notamment au "Snaith Squad", un groupe formé de 4 thésards et moi, où nous retrouvions toutes les deux semaines autour de chocolat et de tours de magie pour discuter de nos recherches actuelles. Au cours de mon stage, j'ai pu approfondir la découverte du monde de la recherche en allant suivre une semaine de séminaires, à l'université de Reading, au sujet de diverses avancées récentes de la théorie des matrices aléatoires. Cette semaine m'a fortement refroidi du métier de recherche par l'omniprésence des mathématiques dans les multiples discussions en dehors des exposés lors des repas par exemple. Fort heureusement pour moi, ce n'était pas le cas à Bristol.

Qu'ai-je fait mathématiquement parlant durant ces 4 mois ? J'avais explicitement demandé à Nina de chercher véritablement et non seulement de lire des livres. Nina m'a donc présenté le premier jour une énorme intégrale dont les probabilistes matriciens et les théoriciens des nombres seraient particulièrement ravis de sa savoir calculer. Ce jour-là, elle m'a dit que c'était un problème difficile voire impossible à résoudre dans le sens où effectivement l'intégrale n'admet pas d'expression sympathique. J'ai alors traversé des émotions variées oscillant entre la persuasion d'avoir enfin trouvé une voie de résolution et le sentiment d'un problème impossible. Ce fut toutefois assez satisfaisant par le fait que j'ai attaqué l'intégrale de plusieurs différents points de vue : essais de généralisations et d'adaptations de preuves fonctionnant pour des cas particuliers, approche probabiliste, angles d'Euler, symétrie, analyse complexe, factorisation de polynômes grâce à Python, recherches de certaines bijections entre des graphes, modélisation par un gaz de Coulomb et recherche de la mesure stationnaire. Pour de multiples raisons, ces approches naïves sont vouées à l'échec. Alors désespéré, lors d'un Snaith Squad, tandis que j'écoutais une thésarde qui présentait une nouvelle intégrale dont elle n'arrivait pas à étudier le comportement asymptotique depuis plusieurs mois, je décidai de me lancer finalement dans cette nouvelle intégrale que j'ai réussi à étudier de ma manière satisfaisante. Ces idées ont conduit à la prépublication présentée à la fin de ce rapport. Le calcul ne m'a jamais effrayé et il fut très satisfaisant d'avoir un challenge aussi clair : celui de calculer une intégrale d'une ligne. En parallèle, je souhaitais quand même découvrir des nouveaux objets plus conceptuels. J'ai évidemment étudié les outils classiques des matrices aléatoires afin de me familiariser dans ce domaine. Je me suis plongé dans la longue preuve d'un des résultats les plus importants de la connexion afin de comprendre les choses plus profondément. En effet, j'ai longtemps travaillé sur l'article de Rudnick-Sanark et j'en ai même fait un exposé d'une heure devant plusieurs personnes.

Ce stage fut une excellente expérience d'un point de vue professionnel me permettant ainsi d'avoir une meilleure vision du milieu de la recherche et d'avancer réellement dans mon orientation, par ailleurs, la rédaction d'un article fut instructive; excellente également d'un point de vue personnel puisqu'il est toujours enrichissant de se confronter à une autre culture au travers notamment d'une langue mais également de la nourriture...

Les pages qui suivent présentent de manière succincte les mathématiques sur lesquelles j'ai travaillées durant ces 4 mois. Les énoncés seront parfois volontairement imprécis. La republication se trouve à la fin du rapport.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Matrices aléatoires	4
3. Quelques rappels sur la fonction ζ	5
4. Une ressemblance troublante	6
5. Moments de la fonction ζ	8
6. Un scénario-type à l'université de Bristol	11
7. Mon travail durant ce stage	12
Références	13

1. INTRODUCTION

Les matrices aléatoires ont d'abord été introduites en physique nucléaire par Wigner dans les années 50 pour tenter de comprendre la spectroscopie des atomes lourds. En effet, les raies spectrales des atomes lourds correspondent à des valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints difficiles. La complexité de la dynamique du système quantique nécessite de remplacer la description déterministe par une description probabiliste. Wigner a eu l'idée, plutôt que d'étudier ces opérateurs, de s'intéresser à leurs propriétés statistiques. On imagine alors que l'hamiltonien d'un noyau donné n'est plus connu exactement, mais qu'il est tiré au hasard parmi un ensemble d'hamiltoniens, dont la distribution de probabilité est à déterminer. Grâce à cette approche, nous pouvons expliquer le phénomène de répulsion locale des niveaux d'énergie.

La théorie des matrices aléatoires a de nombreuses applications en physique, en biologie avec la réplication de l'ADN par exemple mais également dans l'étude de l'optimisation des transports ou plus généralement dans la description d'un système de N points qui se repoussent localement mais qui globalement tendent à être localisés, propriété cruciale des spectres des matrices aléatoires. En 1972, Dyson et Montgomery réalisent par hasard que les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann jouissent des mêmes propriétés statistiques que les valeurs propres d'une matrice aléatoire unitaire.

La prochaine page présente deux figures. La première est tirée de [1] et présente différentes distributions de nombres. Le premier spectre correspond à la simulation d'un grand nombre de variables uniformes indépendantes et on peut alors montrer que la loi des écarts est une loi de poisson. La deuxième provient de [7] et montre de manière stupéfiante la concordance parfaite entre la loi des écarts des zéros non triviaux de la fonction ζ et ceux d'une matrice unitaire aléatoire.

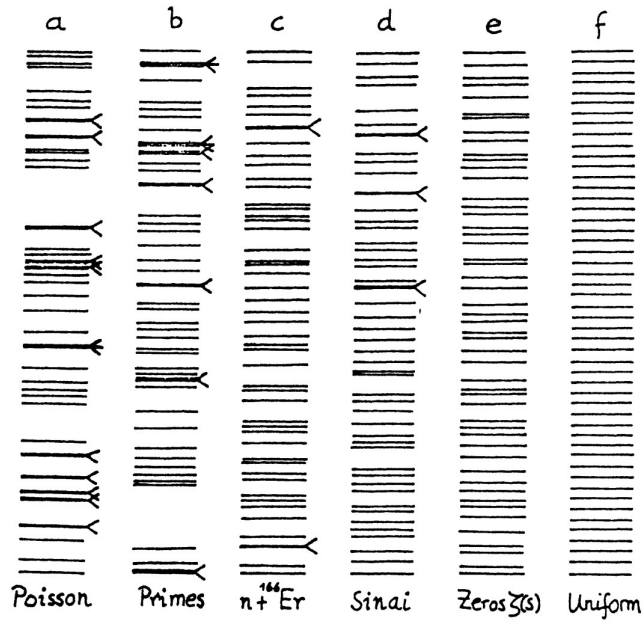
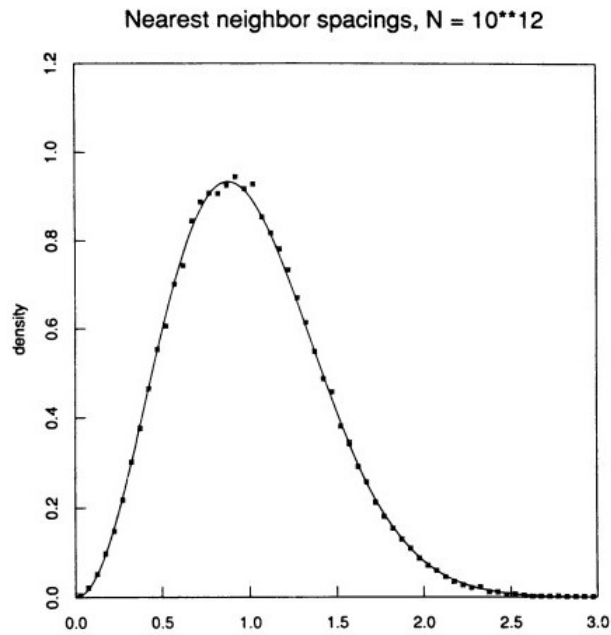


Figure 1.2. Some typical level sequences. From Bohigas and Giannoni (1984). (a) Random levels with no correlations, Poisson series. (b) Sequence of prime numbers. (c) Slow neutron resonance levels of the erbium 166 nucleus. (d) Possible energy levels of a particle free to move inside the area bounded by $1/8$ of a square and a circular arc whose center is the mid point of the square; i.e. the area specified by the inequalities, $y \geq 0$, $x \geq y$, $x \leq 1$, and $x^2 + y^2 \geq r$. (Sinai's billiard table.) (e) The zeros of the Riemann zeta function on the line $\text{Re } z = 1/2$. (f) A sequence of equally spaced levels (Bohigas and Giannoni, 1984).



2. MATRICES ALÉATOIRES

Nous nous restreignons ici aux matrices aléatoires unitaires et orthogonales. D'autres ensembles de matrices sont également étudiés comme les matrices hermitiennes évoquées en introduction.

Les groupes $\mathfrak{U}(N)$, $\text{SO}(2N)$, $\text{SO}(2N + 1)$ sont des groupes compacts, il existe alors une unique mesure de probabilité qui est invariante par translation appelée mesure de Haar.

Quel est alors la loi des valeurs propres induites par cette mesure de probabilité ?

La formule d'intégration très générale de Weyl permet d'exprimer cette loi par des notions de théorie de Lie comme les racines ou groupe de Weyl. Après calculs qui dépassent le cadre des matrices aléatoires, on obtient les résultats suivants.

Pour une matrice unitaire, les valeurs propres peuvent s'écrire sous la forme $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ et la loi de $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ sur $[0, 2\pi]^N$ est alors donnée par :

$$(1) \quad \frac{1}{(2\pi)^N N!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j}|^2.$$

Pour $\text{SO}(N)$, on note les valeurs propres $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}, e^{-i\theta_N}$ et la loi sur $[0, \pi]^N$ devient

$$(2) \quad \frac{2^{(N-1)^2}}{\pi^N N!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\cos(\theta_k) - \cos(\theta_j))^2.$$

Pour $\text{SO}(2N + 1)$, les valeurs propres données par $1, e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}, e^{-i\theta_N}$ donne la loi sur $[0, \pi]^N$ par

$$(3) \quad \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\cos(\theta_k) - \cos(\theta_j))^2 \prod_{k=1}^N \sin^2(\theta_k/2).$$

Ces trois exemples font apparaître ce qu'on appelle un "terme de Vandermonde" (un produit de toutes les différences dit grossièrement). Ce terme est responsable à lui tout seul du phénomène de répulsion des valeurs propres et explique pourquoi un spectre d'une matrice aléatoire est plus proche d'un spectre périodique plutôt qu'un spectre uniforme comme nous pouvons le voir sur cette figure.

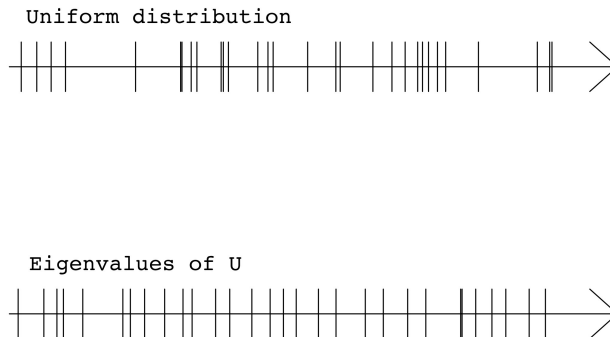


FIGURE 1. Comparaison d'un spectre sans corrélation et celui d'une matrice aléatoire unitaire U .

Ce terme de Vandermonde rend difficile tout calcul. Toutefois, l'écriture de celui-ci sous forme d'un déterminant et quelques théorèmes d'inversion intégrale-déterminant permettent de calculer des grandeurs intéressantes comme par exemple la densité spectrale dont on se contentera d'exposer le résultat graphique.

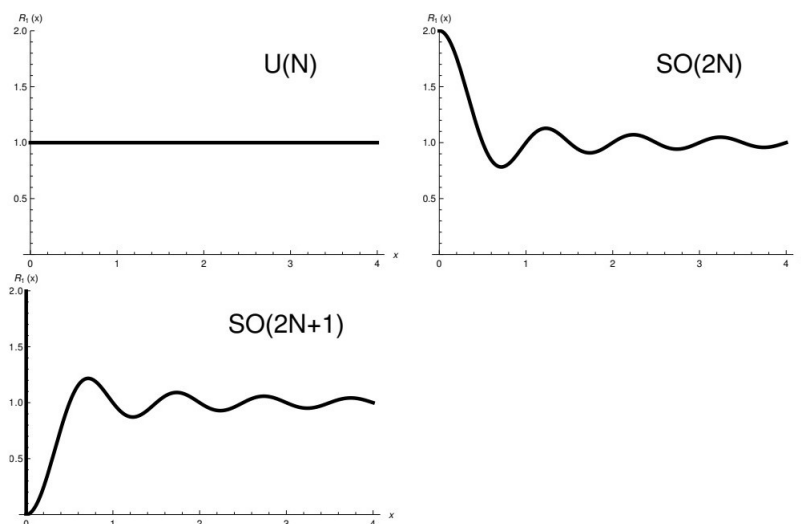


FIGURE 2. Densité spectrale pour $U(N)$, $SO(2N)$ et $SO(2N + 1)$ où l'unité des abscisses est l'écart moyen entre deux valeurs propres successives.

3. QUELQUES RAPPELS SUR LA FONCTION ζ

On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie par

$$(4) \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(z) > 1, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

La fonction ζ contient en un certain sens le théorème fondamental de l'arithmétique au travers de cette proposition suivante démontrée par Euler au XVIIIe siècle.

Lemme 1.

$$(5) \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(z) > 1, \zeta(z) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}.$$

Une piste pour comprendre les nombres premiers est donc d'étudier la fonction ζ . Celle-ci peut être étendue holomorphiquement sur tout le plan complexe privé du point 1 et son prolongement vérifie l'équation fonctionnelle suivante

$$(6) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(\pi z/2) \Gamma(1 - z) \zeta(1 - z).$$

Le monde des fonctions holomorphes étant rigide, l'étude des zéros d'une fonction holomorphe est cruciale au même titre que les racines d'un polynôme.

L'écriture de la fonction ζ comme produit (5) permet de réaliser que la fonction ζ ne s'annule jamais sur le plan $\operatorname{Re}(z) > 1$. La formule des compléments

$$(7) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

montre que la fonction Γ ne s'annule jamais. Nous pouvons ainsi en déduire grâce à l'équation fonctionnelle que dans le plan $\operatorname{Re}(z) < 0$ la fonction ζ s'annule uniquement aux entiers négatifs impairs. On les appelle les zéros triviaux de la fonction ζ . On peut montrer que le théorème des nombres premiers stipulant que $p_n \sim n \ln(n)$ où p_n est le n -ième nombre premier est équivalent à l'absence de zéros sur la droite $\operatorname{Re}(z) = 1$ et donc par symétrie de l'équation fonctionnelle sur la droite $\operatorname{Re}(z) = 0$. Donc les zéros non triviaux de la fonction ζ appartiennent à la bande $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ appelée bande critique.

Pour étudier la position de ces zéros, il est naturel de calculer la dérivée logarithmique de ζ qu'on pourra ensuite intégrer le long d'un contour bien choisi.

Lemme 2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 1$. On a :

$$(8) \quad \frac{-\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$$

où Λ est la fonction de Von Mangoldt définie par

$$(9) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{si } n = p^k \text{ avec } p \text{ premier et } k \text{ entier} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces zéros non triviaux font l'objet de l'une des conjecture les plus importantes des mathématiques appelée hypothèse de Riemann qui stipule qu'ils sont tous de partie réelle $1/2$ ou dit autrement qu'ils sont situés sur ce qu'on appelle la ligne critique. D'après un théorème de 2011 de Bui, Conrey et Young, nous savons que plus de 41% des zéros sont sur la ligne critique. C'est le meilleur résultat actuellement. Nous allons désormais supposer que cette conjecture est vraie et tenter de comprendre la distribution des parties imaginaires de ces zéros. Par symétrie de l'équation, il suffit d'étudier les zéros de partie imaginaire positive. On introduit (γ_n) la suite de ces parties imaginaires. Afin de normaliser cette suite, nous voulons connaître approximativement le nombre de γ_n inférieur à T . En choisissant un bon contour et en utilisant l'équation fonctionnelle, on peut démontrer le théorème suivant volontairement simplifié.

Théorème 1. Soit h est une fonction raisonnable. On a :

$$(10) \quad \sum_n h\left(\frac{\gamma_n}{T}\right) \approx \frac{T}{2\pi} \left(\ln(T) \hat{h}(0) - \left(\sum_n \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \hat{h}(T \ln(n)) + \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \hat{h}(-T \ln(n)) \right) \right).$$

En prenant une fonction h qui approxime la fonction indicatrice de $[0, 1]$, on peut montrer que le deuxième terme c'est-à-dire la contribution des zéros non triviaux est négligeable devant le premier terme c'est-à-dire la contribution des zéros triviaux.

On en déduit que le nombre de γ_n inférieurs à T vaut approximativement $\frac{T \ln(T)}{2\pi}$. De sorte à avoir un écart moyen de 1, nous considérons la suite normalisée $(\frac{\ln(T)}{2\pi} \gamma_n)$.

L'objectif de la suite est de montrer que cette suite ressemble fortement aux valeurs propres d'une matrice aléatoire unitaire.

4. UNE RESSEMBLANCE TROUBLANTE

Nous souhaitons décrire les propriétés locales de ces spectres. Nous allons montrer que les groupes (les clusters) d'une taille donnée n se ressemblent c'est-à-dire que le

comportement local entre les particules est le même. En probabilités, quand on veut déterminer la loi d'une variable aléatoire X , on étudie $E(f(X))$. L'intérêt de cette méthode est que nous lisons les choses en prenant en compte toutes les valeurs de X contrairement à l'étude de $P(X \in B)$.

De la même manière, nous allons regarder la moyenne d'une fonction f définie sur cet ensemble de clusters de taille n fixée. La fonction f peut être réellement vue comme la modélisation de notre cerveau. Notre cerveau prend en entrée le cluster et renvoie un nombre. Il moyenne ensuite sur tous les clusters. Quand on regarde le spectre et en particulier les clusters, notre cerveau ne prend pas en compte la position réelle du cluster. Par ailleurs, l'oeil ne regarde que les particules en tant que telle et non l'ordre. Il est alors assez naturel de demander que les fonctions f soient symétriques et invariants par translation du barycentre du cluster c'est-à-dire que

$$(11) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1 + t, \dots, x_n + t) = f(x_1, \dots, x_n).$$

On demandera évidemment que la fonction f soit suffisamment régulière et qu'elle décroît correctement vite à l'infini de façon à justifier le terme "local".

Finalement, on souhaite étudier

$$(12) \quad \sum_{\gamma_{k_i} \leq T} f\left(\frac{\ln(T)}{2\pi}\gamma_{k_1}, \dots, \frac{\ln(T)}{2\pi}\gamma_{k_n}\right).$$

L'idée va être de lisser les choses en considérant

$$(13) \quad \sum_{k_1, \dots, k_n} h\left(\frac{\gamma_{k_1}}{T}\right) \dots h\left(\frac{\gamma_{k_n}}{T}\right) f\left(\frac{\ln(T)}{2\pi}\gamma_{k_1}, \dots, \frac{\ln(T)}{2\pi}\gamma_{k_n}\right)$$

où h est proche la fonction valant 1 sur $[0, 1]$ et 0 ailleurs.

En faisant des aller-retours dans le monde de Fourier, en utilisant le théorème 1 et de bonnes approximations asymptotiques, Rudnick et Sarnak ont démontré en 1996 le théorème suivant qui est l'un des résultats majeurs dans le domaine.

Théorème 2. Si le support de \hat{f} est contenu dans $\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n |\xi_i| < 2\}$, alors

$$(14) \quad \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n \leq T} f\left(\frac{\ln(T)}{2\pi}\theta_1, \dots, \frac{\ln(T)}{2\pi}\theta_n\right) \approx T \ln(T) \left(f(0) + \int_0^1 \dots \int_0^1 v_1 \dots v_r \sum_{\sigma \in S_r} \hat{f}(v_1, \dots, v_r, -v_{\sigma(1)}, \dots, -v_{\sigma(r)}, 0, \dots, 0) dv \right)$$

Par ailleurs, ce théorème est aussi valable pour les fonction L de Dirichlet.

Faisons exactement la même chose dans le monde des matrices aléatoires unitaires. On rappelle que si $M \in \mathfrak{U}(N)$, on note $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}$ ses valeurs propres. Cette fois-ci, l'espacement moyen entre deux θ_i successifs vaut $\frac{2\pi}{N}$. On considère alors

$$(15) \quad \mathbb{E} \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} h(\theta_{i_1}) \dots h(\theta_{i_n}) f\left(\frac{N}{2\pi}\theta_{i_1}, \dots, \frac{N}{2\pi}\theta_{i_n}\right) \right)$$

où h est une fonction lisse qui rapproche l'indicatrice de $]0, 2\pi[$.

Le lemme suivant est l'analogie de 1 pour les matrices aléatoires unitaires.

Lemme 3. Si h est une fonction telle que $h(0) = h(2\pi) = 0$, alors

$$(16) \quad \sum_{n=1}^N g(\theta_n) = N\hat{g}(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\hat{g}(k) \operatorname{Tr}(M^k) + \hat{g}(-k) \operatorname{Tr}(\overline{M}^k) \right).$$

Il est important de noter que dans ce lemme on considère la transformée de Fourier discrète. C'était attendu puisque les deux spectres que nous étudions ne vivent pas du tout dans le même espace topologique. D'un côté, (γ_n) vivent sur une droite et les (θ_n) vivent sur un tore qui est compact donc la transformée de Fourier est discrète.

En utilisant un magnifique théorème de Diaconis et Shahshahani prouvant que les $\operatorname{Tr}(M^k)$ convergent en loi vers $\sqrt{k}Z_k$ où les Z_k sont des lois gaussiennes complexes indépendantes, on peut montrer que

$$(17) \quad \mathbb{E} \left(\sum_{\theta_1, \dots, \theta_n} f \left(\frac{N}{2\pi} \theta_1, \dots, \frac{N}{2\pi} \theta_n \right) \right) \approx N \left(f(0) + \int_0^1 \dots \int_0^1 v_1 \dots v_r \sum_{\sigma \in S_r} \hat{f}(v_1, \dots, v_r, -v_{\sigma(1)}, \dots, -v_{\sigma(r)}, 0, \dots, 0) dv \right)$$

dont la ressemblance avec 2 ne vous aura pas échapper.

Cette similarité est bluffante au regard des résultats, mais elle l'est encore plus dans les preuves respectives elles-mêmes. En effet, à plusieurs reprises, nous avons la sensation d'observer un même phénomène avec des objets de nature a priori complètement différents.

Les matrices aléatoires semblent être un bon modèle pour décrire la fonction zeta. qui prend bien en compte les corrélations entre les zéros.

5. MOMENTS DE LA FONCTION ζ

Dans cette partie, on s'intéresse aux moments de la fonction ζ définis par

$$(18) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^{2\lambda} dt$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

Pourquoi s'intéresser à de telles quantités? Nous pouvons évoquer deux raisons.

5.1. Première raison. La conjecture de Lindelöf énonçant que

$$(19) \quad \forall \varepsilon > 0, |\zeta(1/2 + it)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(t^\varepsilon)$$

est en réalité équivalente à

$$(20) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt \underset{T \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(T^\varepsilon).$$

5.2. **Deuxième raison.** Un lemme de Littlewood de 1924 montre qu'en outre

$$(21) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^T \ln(|\zeta(a+it)|) dt \approx \sum_{\substack{\operatorname{Re}(\rho) \geq a \\ 0 \leq \operatorname{Im}(\rho) \leq T}} |\operatorname{Re}(\rho) - a|$$

où $a > 1/2$ tel que la fonction ζ ne s'annule pas sur $\operatorname{Re}(z) = a$.

On démontre ce lemme par des méthodes élémentaires d'analyse complexe : on déforme un rectangle de hauteur T évitant les zéros de ζ et de longueur suffisamment longue pour pouvoir considérer un logarithme de ζ , en réalisant certaines approximations et en prenant la partie imaginaire, on obtient le résultat.

On peut minorer la dernière expression de droite par $N(b, T)|b - a|$ avec $N(b, T)$ le nombre de zéros de partie imaginaire entre 0 et T et de partie réelle supérieure à b avec $b > a$.

Donc,

$$(22) \quad N(b, T) \leq \frac{1}{2\pi|b-a|} \int_0^T \ln(|\zeta(a+it)|) dt$$

On aimerait donc bien connaître le comportement asymptotique de

$$(23) \quad \int_0^T \ln(|\zeta(a+it)|) dt.$$

Or, nous remarquons que cette quantité vaut

$$(24) \quad \frac{d}{dk} \int_0^T |\zeta(a+it)|^k dt.$$

Voilà une des raisons qui motive l'étude des moments non entiers.

Aujourd'hui, la meilleure chose que nous puissions faire est le trick suivant :

$$(25) \quad \int_0^T \ln(|\zeta(a+it)|) dt \leq \frac{T}{2} \int_0^T \ln(|\zeta(a+it)|^2) \frac{dt}{T} \leq T \ln \left(\int_0^T |\zeta(a+it)|^2 \right)$$

par l'inégalité de Jensen.

Or, comme nous allons le voir, on sait que

$$(26) \quad \int_0^T |\zeta(a+it)|^2 = \mathcal{O}(T)$$

et donc si on note N le nombre de zéros non triviaux de ζ de partie imaginaire compris entre 0 et T dont on sait d'après Riemann que $N \sim \frac{T \log(T)}{2\pi}$, on obtient que

$$(27) \quad \frac{N(b, T)}{N} = \mathcal{O}(1/\ln(T)).$$

Ainsi, si $b > 1/2$, il y a une proportion infime de zéros de partie réelle supérieure à b .

Il existe plusieurs formulations de l'hypothèse de Riemann comme conjectures sur les zéros de ses dérivées motivant ainsi aussi l'étude des moments des dérivées de la fonction ζ .

5.3. Résultats connus et conjectures. L'étude des moments de la fonction ζ est encore un large champ de conjectures.

En 1918, Hardy et Littlewood montre que

$$(28) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^2 \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(T)$$

En 1926, Ingham prouve que

$$(29) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^4 \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi^2} \ln(T)^4.$$

Des calculs classiques sur la fonction ζ montrent que si $\sigma > 1/2$, alors

$$(30) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \zeta(2\sigma)$$

et

$$(31) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^4 \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

Aucun autre moment n'a été calculé jusqu'à maintenant.

Nous remarquons que les moments sur la ligne critique et ceux sur les autres demi-droites de partie réelle strictement supérieure à $1/2$ sont différents. On pouvait s'y attendre. En effet, l'hypothèse de Riemann nous murmure qu'il se passe "quelque chose" sur cette ligne critique.

Nina, mon encadrante, et Jonathan Keating, son directeur de thèse, ont établi une conjecture sur les moments sur la ligne critique il y a une vingtaine d'années.

Conjecture 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > 1/2$. On aurait

$$(32) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2\lambda} \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} f(\lambda)g(\lambda) \ln(T)^{\lambda^2}$$

où le coefficient $f(\lambda)$, de nature purement arithmétique, vaut

$$(33) \quad \prod_p \left[(1 - 1/p)^{\lambda^2} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\Gamma(\lambda + m)}{m! \Gamma(\lambda)} \right)^2 p^{-m} \right) \right]$$

et

$$(34) \quad g(\lambda) = \frac{G^2(1 + \lambda)}{G(1 + 2\lambda)}$$

avec en particulier

$$(35) \quad g(k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

si k est un entier.

La fonction G de Barnes est l'unique prolongement de la superfactorielle aux nombres complexes qui vérifie l'équation fonctionnelle $G(z + 1) = \Gamma(z)G(z)$ avec la condition $G(1) = 1$ et telle que $G^{(3)}(x) \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ .

Le terme $f(\lambda)$ apparaît naturellement si on attaque le problème d'un point de vue arithmétique. En revanche, comme nous allons le voir le terme $g(\lambda)(\ln(T))^{\lambda^2}$ peut être entièrement compris avec la théorie des matrices aléatoires. Il est toujours magnifique d'observer un scindage des domaines des mathématiques. Ce phénomène mystérieux est classique en théorie des nombres, lieu de rencontres de différentes spécialités des mathématiques. Par exemple, la résolution du problème de Waring par la méthode de Vinogradov fait émerger une sorte d'indépendance entre un terme arithmétique et un terme géométrique.

L'explication d'une conjecture est toujours nécessairement subjective. Voici mon interprétation.

Quand nous calculons un moment, nous pouvons imaginer que nous sommes en train de nous déplacer sur la droite critique à une vitesse constante et que nous sommes en train de noter la valeur $|\zeta(1/2 + it)|^{2k}$ afin d'effectuer une moyenne. On pourrait alors imaginer un changement de point de vue où maintenant ce sont les zéros qui se meuvent et que nous restons fixe. Imaginons désormais qu'on enrôle le segment $[1/2, 1/2 + iT]$ sur le cercle unité et que nous observons tranquillement au point 1 les zéros se déplacer. Or nous savons que les statistiques des zéros de la fonction ζ sont les mêmes que ceux des valeurs propres d'une matrice unitaire. Quel est la fonction la plus facile qu'on pourrait créer qui admet comme zéros ces valeurs propres et donc qui pourrait imiter le comportement de la fonction ζ enrôlée sur ce cercle unité ? Réponse : le polynôme caractéristique.

Si on définit le polynôme caractéristique comme

$$(36) \quad \Lambda(U, s) = \prod_{n=1}^N (s - e^{i\theta_n}),$$

notre raisonnement nous invite à penser que

$$(37) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2\lambda} \underset{T \rightarrow +\infty}{\approx} \int_{U(N)} |\Lambda(U, 1)|^{2\lambda} dU$$

avec $N = \ln(T)$ (relation régulièrement observée dans les théorèmes plus haut).

Nina et Keating on réussit à calculer cette valeur :

$$(38) \quad \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(j)\Gamma(2\lambda + j)}{\Gamma(j + \lambda)^2}.$$

L'ingrédient principal de ce calcul est la formule de Selberg après plusieurs changements de variables.

En peut alors faire tendre N vers l'infini et on trouve $g(\lambda)N^{\lambda^2}$ ce qui donne le résultat après l'identification $N = \ln(T)$.

6. UN SCÉNARIO-TYPE À L'UNIVERSITÉ DE BRISTOL

Les théoriciens des nombres sont très friands de conjectures développées par la théorie des matrices aléatoires. En effet, il arrive fréquemment qu'ils sèchent sur des problèmes concernant la fonction ζ ou sur des fonctions L plus générales. Ils les présentent alors à l'université de Bristol. Les probabilistes matriciens font alors un travail de traduction qui consiste heuristiquement à remplacer la fonction ζ par le polynôme caractéristique d'une matrices aléatoire unitaire, $\ln(T)$ par N et l'intégrale sur $[0, T]$ par une intégrale sur le groupe $U(N)$. Nous pouvons alors faire le calcul dans le monde des matrices aléatoires afin d'obtenir un résultat que nous traduisons

enfin dans le monde de la théorie des nombres qui devient alors une conjecture. Cette dernière connaît alors usuellement deux destins. Elle est soit très difficile à démontrer bien que vérifiée numériquement ou alors elle est tout simplement fausse ce qui se produit lorsque la quantité que nous souhaitons calculer dépend trop des propriétés arithmétiques de nos objets.

Cette usine à conjectures est assez unique en mathématiques.

7. MON TRAVAIL DURANT CE STAGE

Nous pouvons résumer mon travail en 4 parties présentées chronologiquement.

Évidemment, celui-ci est accompagné par de nombreuses lectures sur les diverses techniques classiques de la théorie des matrices aléatoires.

7.1. Première question. On rappelle que Nina et Keating ont démontré que

$$(39) \quad \int_{U(N)} |\Lambda(U, 1)|^{2\lambda} dU = \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(j)\Gamma(2\lambda + j)}{\Gamma(j + \lambda)^2}.$$

Le problème était d'étudier le comportement asymptotique de cette grandeur lorsque N et λ tendent vers $+\infty$ selon plusieurs vitesses.

J'ai alors démontré le résultat suivant qui met en exergue une transition de phase.

Théorème 4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda = \alpha N^\beta$. Alors, on a

$$(40) \quad \ln \left(\int_{U(N)} |\Lambda(U, 1)|^{2\lambda} dU \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \alpha^2(1 - \beta)N^{2\beta} \ln N & \text{si } \beta < 1 \\ f(\alpha)N^2 & \text{si } \beta = 1 \\ 2 \ln(2)\alpha N^{1+\beta} & \text{if } \beta > 1 \end{cases}$$

avec

$$(41) \quad f(\alpha) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} \right) + \alpha^2 \log \left(\frac{(2\alpha + 1)^2}{2\alpha(\alpha + 1)} \right) + 2\alpha \log \left(\frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1} \right).$$

Il s'agissait d'être particulièrement soigneux et attentif dans les calculs en utilisant les résultats asymptotiques de la fonction de Barnes.

7.2. Deuxième question. En suivant la même idée de Nina et Keating, nous pouvons raisonnablement penser que les moments de ζ en dehors de la ligne critique sont reliés à

$$(42) \quad \int_{U(N)} |\lambda(U, s)|^{2\lambda} dU$$

où s est différent de 1.

La question était alors de calculer cette quantité. Comme raconté dans l'introduction, j'ai essayé de nombreuses choses en vain. Le cas $s = 1$ fait en réalité apparaître de nombreuses symétries permettant le calcul effectif ce qui n'est plus vrai si $s \neq 1$. On peut se douter qu'il faille inventer de nouvelles façons de calculs de ces quantités puisque le comportement des moments est différent selon qu'on est ou non sur la droite critique.

7.3. La preuve du théorème de Rudnick et Sarnak. Nina m'avait proposé d'effectuer un exposé d'une heure sur le sujet de mon choix afin de parfaire mes qualités pédagogiques et mon anglais. J'ai alors décidé de me plonger dans les profondeurs du très célèbre article de Rudnick et Sarnak [4] et d'en présenter les idées essentielles. J'ai par ailleurs ajouté des calculs personnels pour mettre en lumière que les calculs sont essentiellement les mêmes dans l'univers des matrices aléatoires.

7.4. Troisième question. Nous avons vu l'intérêt de l'approche par les polynômes caractéristiques aléatoires pour comprendre la fonction ζ . Il est donc maintenant essentiel de développer la théorie des polynômes caractéristiques aléatoires.

C'est à ce titre que Emilia Alvarez et Nina ont décidé de travailler sur

$$(43) \quad \int_{A \in G} \left(\frac{\Lambda'(A, s)}{\Lambda(A, s)} \right)^K d\mu_{Haar}$$

où G peut être $SO(2N)$, $SO(2N + 1)$ ou $U(N)$, K un réel positif et s un réel se rapprochant de 1 à mesure que N grandit.

En 2020, dans [9], Emilia et Nina ont démontré des résultats asymptotiques de cette quantité pour les trois groupes avec $s = e^{-a/N}$ où $a = o(1) > 0$ et K entier en utilisant des méthodes assez puissantes d'intégration complexe. Depuis, elles cherchaient à généraliser le résultat pour K non entier. Un jour, lors d'un "Snaith Squad", Emilia marqua le problème au tableau. J'ai alors compris que je pouvais éventuellement calculer l'intégrale avec des méthodes plus élémentaires. Je me suis donc lancé dans ce nouveau problème et ai démontré que le résultat d'Emilia et Nina stipulant que

$$(44) \quad \left(\frac{-a}{N} \right)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \left(A, e^{-a/N} \right) \right)^K dA \underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 - Ka + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2)$$

est en réalité aussi avec K non entier, et que si on supposait que a allait suffisamment vite vers 0, on pouvait obtenir un développement asymptotique plus étoffé dont le théorème suivant en cours de relecture est son contenant.

Théorème 5. Soit m un entier impair tel que $m \geq 3$ et $m \geq \lfloor K \rfloor$. Si $a = o\left(\frac{1}{N^{m+2}}\right)$ quand $N \rightarrow \infty$, alors

$$(45) \quad \left(\frac{-a}{N} \right)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda} \left(A, e^{-a/N} \right) \right)^K dA \underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 - Ka + \frac{Ka}{2N} + \frac{K(K+1)}{2} a^2 - \frac{Ka^2}{2N} + K \frac{4K+1}{24} \frac{a^2}{N^2} + \mathcal{O}(N^m a^3).$$

La première extension 44 se démontre en utilisant le résultat dans le cas entier et l'approximation d'une fonction par son polynôme de Taylor. Le dernier théorème est la consécration d'un certain nombre d'idées calculatoires dont vous pouvez lire les détails plus bas.

RÉFÉRENCES

- [1] M. L. Mehta, *Random matrices*, Third edition, Pure and Applied Mathematics Series 142, Elsevier, London, 2004.
- [2] Keating, J., Snaith, N. *Random Matrix Theory and $\zeta(1/2 + it)$* . Commun. Math. Phys. 214, 57–89 (2000)
- [3] J P Keating and N C Snaith, *Random matrices and L-functions* 2003 J. Phys. A : Math. Gen. 36 2859

- [4] Rudnick, Z. and Sarnak, P. : *Zeros of principal L-functions and random-matrix theory*. Duke Math. J. 81, 269–322 (1996)
- [5] Montgomery, H.L. : *The pair correlation of the zeta function*. Proc. Symp. Pure Math. 24, 181–93 (1973)
- [6] Keating, J.P. : *The Riemann zeta function and quantum chaology*. In : G. Casati, I. Guarneri, and U. Smilansky (eds.), Quantum Chaos. Amsterdam : North-Holland, 1993, pp. 145–85
- [7] A.M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between the zeros of the zeta function*, Math. Comp. 48 (1987), 273–308.
- [8] P. Diaconis, M. Shahshahani, *On the eigenvalues of random matrices*, Studies in applied probability, J. Appl. Probab. 31A (1994), 49–62.
- [9] Emilia Alvarez and Nina Snaith. *Moments of the logarithmic derivative of characteristic polynomials from $SO(N)$ and $USp(2N)$* . J. Math. Phys., 61(10), 2020.

ASYMPTOTICS OF NON-INTEGER MOMENTS OF THE LOGARITHMIC DERIVATIVE OF CHARACTERISTIC POLYNOMIALS OVER $SO(2N + 1)$

E. ALVAREZ, P. BOUSSEYROUX AND N.C. SNAITH

The following work provides a rigorous proof to a heuristic argument made in [AS20], that the asymptotics of the integer moments of the logarithmic derivative of characteristic polynomials from the classical compact ensembles evaluated at a point approaching 1, are dominated by the term corresponding to the eigenvalue closest to 1. Since the logarithmic derivative has the characteristic polynomial in the denominator, an eigenvalue at 1 causes a singularity in the logarithmic derivative when evaluated at $s = 1$. This behaviour is observed most clearly in the odd orthogonal ensemble $SO(2N + 1)$, since all matrices in this ensemble have a fixed eigenvalue at the point 1. As a result of the proof, we are also able to show that the result holds for non-integer moment parameter as well.

1. PRELIMINARIES

We define the characteristic polynomial of a matrix X to be

$$(1) \quad \Lambda_X(s) = \det(I - sX^*),$$

where X^* is the conjugate transpose of X . The eigenvalues of an odd orthogonal $SO(2N + 1)$ matrix X come in conjugate pairs $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}, e^{-i\theta_N}$, plus one eigenvalue at 1, and so its characteristic polynomial can also be expressed as:

$$(2) \quad \Lambda_X(s) = (1 - s) \prod_{j=1}^N (1 - se^{-i\theta_j})(1 - se^{i\theta_j}).$$

We recall the infinity (or max) norm over an interval \mathcal{I} denoted

$$(3) \quad \|f(x)\|_{\infty, \mathcal{I}}$$

is given by the supremum of $f(x)$ for $x \in \mathcal{I}$. Finally, we recall that a homographic function is of the form

$$(4) \quad h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

It has a singularity at $\frac{-d}{c}$ and if $ad - bc < 0$, it is decreasing on the intervals $(-\infty, \frac{-d}{c})$ and $(\frac{-d}{c}, \infty)$.

We will use the following generalization of binomial coefficients:

$$(5) \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j)$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$.

Writing out the logarithmic derivative in terms of its eigenvalues $(1, e^{\pm i\theta_1}, \dots, e^{\pm i\theta_N})$, we can isolate the term that dominates as s approaches 1. We have that

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(s) &= \frac{-1}{1-s} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{-e^{i\theta_n}}{1 - se^{i\theta_n}} - \frac{e^{-i\theta_n}}{1 - se^{-i\theta_n}} \right) \\ &= \frac{-1}{1-s} + \sum_{n=1}^N \frac{2s - 2\cos(\theta_n)}{s^2 - 2s\cos(\theta_n) + 1} \\ &= \frac{-1}{1-s} \left(1 + (s-1) \sum_{n=1}^N \frac{2s - 2\cos(\theta_n)}{s^2 - 2s\cos(\theta_n) + 1} \right). \end{aligned}$$

In [AS20], we argue that the leading order behaviour, $\left(\frac{-N}{a}\right)^K$ in Theorem 1, comes entirely from substituting $s = e^{-a/N}$ into $\frac{-1}{1-s}$ as $N \rightarrow \infty$ and raising to the K^{th} power. Indeed, the asymptotic computation of integer moments is given by

Theorem 1 (Alvarez and Snaith, 2021). *Let $\Lambda_X(s)$ denote the characteristic polynomial of a matrix $X \in SO(2N + 1)$, the group of odd dimensional random orthogonal matrices with determinant 1 equipped with the Haar measure $d_{\text{Haar}}(X)$. Let $K \in \mathbb{N}$, $\alpha = a/N$ where $a = o(1)$ as $N \rightarrow \infty$ and $\Re(\alpha) > 0$. Then, as N tends to ∞ , the moments of the logarithmic derivative of $\Lambda_X(s)$ evaluated at $e^{-\alpha}$ are given by:*

$$(7) \quad \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(e^{-\alpha}) \right)^K d_{\text{Haar}}(X) = (-1)^K \left[\left(\frac{N}{a} \right)^K - \frac{N^K}{a^{K-1}} K \right] + \mathcal{O}\left(\frac{N^{K-1}}{a^{K-1}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{N^K}{a^{K-2}} \right).$$

In the present work, we extend this result to non-integer moments. Our main result is

Theorem 2. *Let $\Lambda_X(s)$ denote the characteristic polynomial of a matrix $X \in SO(2N + 1)$, the group of odd orthogonal random matrices of odd dimension and determinant 1, equipped with the Haar measure $d_{\text{Haar}}(X)$. Let $\alpha = a/N > 0$ with $a = o(1)$ as $N \rightarrow \infty$, and the moment parameter $K \in \mathbb{R}_+$. Then,*

$$(8) \quad \left(\frac{-a}{N} \right)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(e^{-\alpha}) \right)^K d_{\text{Haar}}(X) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 - Ka + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2).$$

This theorem proves that the main contribution of the moments of the logarithmic derivative of characteristic polynomials over $SO(2N + 1)$ comes from the term corresponding to the eigenvalue at 1. Let's try to intuitively understand the second term “ $-Ka$ ” in the Taylor's expansion. The following arguments will not be precise, the purpose is just to give a feeling of the result.

We recall that $s = e^{-a/N}$. We have factored out the leading order term $\frac{-1}{1-s} \sim \frac{-N}{a}$ in (6), and we want to study

$$(9) \quad \int_{SO(2N+1)} \left(1 + (s-1) \sum_{n=1}^N \frac{2s - 2\cos(\theta_n)}{s^2 - 2s\cos(\theta_n) + 1} \right)^K d_{\text{Haar}}(X).$$

If N is fixed and all the θ_j 's are not equal to 0, we have that

$$(10) \quad \sum_{n=1}^N \frac{2s - 2\cos(\theta_n)}{s^2 - 2s\cos(\theta_n) + 1} \xrightarrow{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^N \frac{2 - 2\cos(\theta_n)}{2 - 2\cos(\theta_n)} = N.$$

Now, it is unlikely that an eigenvalue will be anywhere near 1 because of the repulsion from the eigenvalue at 1 inherent in the eigenvalue joint probability density function for $SO(2N + 1)$. Indeed, for $SO(2N + 1)$, the matrix eigenvalues can be written as $1, e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}, e^{-i\theta_N}$ and the joint probability density function on $[0, \pi]^N$ is

$$(11) \quad \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \Delta^2(\cos(\theta)) \prod_{m=1}^N \sin^2(\theta_m/2),$$

where $\Delta^2(\cos(\theta)) := \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\cos \theta_k - \cos \theta_j)^2$ and the factor $\sin^2(\theta_m/2)$ encodes the repulsion from the point 1.

By using (10) and the last sentence, we are then tempted to write

$$(12) \quad \left(1 + (s-1) \sum_{n=1}^N \frac{2s - 2\cos(\theta_n)}{s^2 - 2s\cos(\theta_n) + 1} \right)^K \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} (1 + (s-1)N)^K \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} (1-a)^K \approx 1 - Ka$$

which gives us the good result.

Nevertheless, we need to be careful about N because it is not fixed. We can be more precise by doing the following reasoning. One can check that

$$(13) \quad \sum_{n=1}^N \frac{2s - 2 \cos(\theta_n)}{s^2 - 2s \cos(\theta_n) + 1} = \frac{N}{s} + \frac{s^2 - 1}{s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_n/2)}.$$

We know that

$$(14) \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_n/2)} = \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta$$

where $R_1(\theta)$ is the 1-point correlation function of eigenvalues of matrices from $SO(2N+1)$.

The behaviour of R_1 close to 0 measures the strength of the repulsion from the point 1. If $R_1(\theta)$ goes to 0 fast enough when θ goes to 0, the above integral can be bounded by something which does not depend on s or N because we avoid the singularity $\frac{1}{4 \sin^2(\theta/2)}$ when $s \rightarrow 1$. In the section 3, we will see that it is indeed the case. And so, by using (13), the approximation

$$(15) \quad \sum_{n=1}^N \frac{2s - 2 \cos(\theta_n)}{s^2 - 2s \cos(\theta_n) + 1} \approx \frac{N}{s} \approx N$$

seems to be more justified than (10) even when N is not fixed.

How can we make the above reasoning rigorous? Our idea is to approximate $(1+x)^K$ by a polynomial:

$$(16) \quad (1+x)^K \approx \sum_{n=0}^{\lfloor K \rfloor} \binom{K}{n} x^n,$$

where x corresponds to the sum over the complex conjugate pairs of eigenvalues divided by the contribution from the eigenvalue at 1, i.e. $(s-1) \sum_{n=1}^N \frac{2s-2 \cos(\theta_n)}{s^2-2s \cos(\theta_n)+1}$.

Then, we will expand this polynomial approximation in the basis $((1+x)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in order to use the main result for integer moments (Theorem (1)).

Actually, this method of polynomial approximation can provide a more precise Taylor expansion if you assume that a goes to 0 fast enough. Indeed, by using some changes of variables and some good approximations of the 1 and 2-point correlation functions, we will improve Theorem 2 in Section 3 without applying Theorem 1.

Theorem 3. *Let $\Lambda_X(s)$ denote the characteristic polynomial of a matrix $X \in SO(2N+1)$, the group of odd orthogonal random matrices of odd dimension and determinant 1, equipped with the Haar measure $d_{\text{Haar}}(X)$. Let m be an odd integer such as $m \geq 3$ and $m \geq \lfloor K \rfloor$. Let $\alpha = a/N > 0$ with $a = o(\frac{1}{N^{m+2}})$ as $N \rightarrow \infty$, and the moment parameter $K \in \mathbb{R}_+$.*

Then,

$$(17) \quad \left(\frac{-a}{N}\right)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(e^{-\alpha})\right)^K d_{\text{Haar}}(X) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 - Ka + \frac{Ka}{2N} + \frac{K(K+1)}{2} a^2 - \frac{K(K+1)a^2}{2N} + \frac{a^2}{N^2} K \frac{3K-1}{24} + \mathcal{O}(N^m a^3).$$

2. PROOF OF THEOREM 2

The proof of Theorem 2 for general moments begins in the same manner, first expanding the moment using Weyl's integration formula and pulling out the $\frac{-1}{1-s}$ term which is the contribution from the eigenvalue at 1. Let K be a positive real, and $s \in \mathbb{R}$ such as $0 \leq s < 1$. Then,

$$(18) \quad \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(s)\right)^K d_{\text{Haar}}(X)$$

$$(19) \quad = \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left(\frac{-1}{1-s} + \sum_{m=1}^N \frac{(2s-2 \cos \theta_m)}{1+s^2-2s \cos \theta_m}\right)^K \Delta^2(\cos \theta) \prod_{m=1}^N \sin^2(\theta_m/2) d\theta.$$

We factor out $\left(\frac{-1}{1-s}\right)^K$ and now focus on the remainder

$$(20) \quad \int_{[0,\pi]^N} \left(1 + (s-1) \sum_{m=1}^N \frac{2s - 2 \cos \theta_m}{1 + s^2 - 2s \cos \theta_m}\right)^K \Delta^2(\cos \theta) \prod_{m=1}^N \sin^2(\theta_m/2) d\theta.$$

In the following Lemma, we show that we can approximate the multinomial sum inside the integral by a polynomial.

Lemma 1. *Let $m \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{R}$ with $\lfloor K \rfloor \leq m$. Then, for all $\frac{-1}{2} \leq x$,*

$$(21) \quad \left| (1+x)^K - \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} x^n \right| \leq C_{K,m} |x|^{m+1},$$

where $C_{K,m} > 0$ is a constant which depends only on K and m .

Proof. Let $g(x) = (1+x)^K$. By Taylor's theorem, we can truncate the multinomial expansion of $g(x)$ into a sum and an integral remainder:

$$(22) \quad g(x) = \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} x^n + \int_0^x \frac{g^{(m+1)}(t)(x-t)^m}{m!} dt.$$

Next, we can bound the integral remainder using Taylor's inequality which tells us that for $\lfloor K \rfloor \leq m$,

$$(23) \quad \left| g(x) - \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} x^n \right| \leq \|g^{(m+1)}\|_{\infty, [-1/2, +\infty)} \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!},$$

where

$$(24) \quad \frac{\|g^{(m+1)}\|_{\infty, [-1/2, +\infty)}}{(m+1)!} = \left| \binom{K}{m+1} \right| \frac{1}{(1-1/2)^{m+1-K}}.$$

We note that the condition $\lfloor K \rfloor \leq m$, ensures that $g^{(m+1)}$ is bounded on $[-1/2, +\infty)$. Therefore, let

$$(25) \quad C_{K,m} = \left| \binom{K}{m+1} \right| 2^{m+1-K},$$

and we have proven Lemma 1. □

The next Lemma allows us to bound the sum in the logarithmic derivative, so we can apply the previous lemma to our moment calculation. It relies on the theory of homographic functions.

Lemma 2. *Let $0 \leq s < 1$. Then,*

$$(26) \quad \frac{2(s-1)}{s+1} N \leq (s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s - 2 \cos \theta_j}{1 + s^2 - 2s \cos \theta_j} \leq 2N$$

where $\theta_j \in [0, 2\pi]$ and $N \in \mathbb{N}$.

Proof. For $0 \leq s < 1$, define

$$(27) \quad f(x) := \frac{2s - 2x}{1 + s^2 - 2sx}$$

for $x \in [-1, 1]$.

Note that $1 + s^2 - 2sx \geq 1 + s^2 - 2s = (1-s)^2$, therefore for $s < 1$, $f(x)$ is well defined and is a homographic function with $a = -2, b = 2s, c = -2s$ and $d = 1 + s^2$. The singularity at $\frac{-d}{c}$ is given by $\frac{1+s^2}{2s} > 1$ and $ad - bc$ is given by $2(s^2 - 1) < 0$, therefore f is a decreasing homographic function on the interval $[-1, 1]$ and so,

$$(28) \quad f(1) = \frac{2s-2}{1+s^2-2s} \leq f(x) \leq \frac{2s+2}{1+s^2+2s} = f(-1)$$

holds for all $x \in [-1, 1]$. Equation (28) implies

$$(29) \quad \frac{2}{s-1} \leq f(x) \leq \frac{2}{s+1}.$$

Multiplying all terms by $(s-1)$ which is negative inverts the inequalities, and finally we have that

$$(30) \quad \frac{2(s-1)}{s+1} N \leq (s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_j)}{1+s^2-2s\cos(\theta_j)} \leq 2N.$$

□

The following proposition simply applies the two lemmas above to our moment computation

Proposition 1. For $K \in \mathbb{R}_+$, pick $s < 1$ and m such that $\frac{-1}{2} \leq \frac{2(s-1)}{s+1} N$ and $\lfloor K \rfloor \leq m$. For simplicity, let $m+1$ be even as well. Then,

$$(31) \quad \left| (s-1)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(s) \right)^K d_{\text{Haar}}(X) - \left[\sum_{n=0}^m \binom{K}{n} h(n, s, N) \right] \right| \leq C_{K,m} h(m+1, s, N)$$

where

$$(32) \quad h(n, s, N) := \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left((s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_j)}{1+s^2-2s\cos(\theta_j)} \right)^n \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_i/2) d\theta$$

with $n \in \mathbb{N}$, and

$$(33) \quad C_{K,m} = \left| \binom{K}{m+1} \right| 2^{m+1-k}.$$

Proof.

$$(34) \quad \left| (s-1)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(s) \right)^K d_{\text{Haar}}(X) - \left[\sum_{n=0}^m \binom{K}{n} h(n, s, N) \right] \right|$$

$$(35) \quad = \left| \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left(1 + (s-1) \sum_{m=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_m)}{1+s^2-2s\cos(\theta_m)} \right)^K \Delta(\cos(\theta_m))^2 \prod_{m=1}^N \sin^2(\theta_m/2) d\theta \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left((s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_j)}{1+s^2-2s\cos(\theta_j)} \right)^n \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_i/2) d\theta \right|$$

$$(36) \quad = \left| \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left[\left(1 + (s-1) \sum_{m=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_m)}{1+s^2-2s\cos(\theta_m)} \right)^K \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} \left((s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_j)}{1+s^2-2s\cos(\theta_j)} \right)^n \right] \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_i/2) d\theta \right| \\ \leq \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left| \left(1 + (s-1) \sum_{m=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_m)}{1+s^2-2s\cos(\theta_m)} \right)^K \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} \left((s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_j)}{1+s^2-2s\cos(\theta_j)} \right)^n \right| \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_i/2) d\theta$$

Now we apply Lemma 1 with

$$x = (s-1) \sum_{m=1}^N \frac{2s-2\cos(\theta_m)}{1+s^2-2s\cos(\theta_m)}$$

which yields the result. Note that since $m+1$ is even, we may drop the absolute value on x on the right hand side. □

The calculations to this point have been evaluating the logarithmic derivative at a point s ; if we wish to let s depend on N , as in [AS20], we may take $s = e^{-\alpha} = e^{-a/N}$ where $a = o(1)$ as N goes to infinity with $a > 0$, and compute the asymptotic behaviour of $h(n, s, N)$ for each fixed n .

The following lemma allows us to rewrite $h(n, s, N)$ using a polynomial change of basis, which allows us to use the asymptotic expansion of Theorem 1.

Lemma 3. Consider a polynomial X^n expanded in the basis $((1 + X)^k)_{k \leq n}$ with coefficients $a_{k,n}$:

$$(37) \quad X^n = \sum_{k=0}^n a_{k,n} (1 + X)^k.$$

Then,

$$(38) \quad \sum_{k=0}^n a_{k,n} = \delta_{0,n}$$

and

$$(39) \quad \sum_{k=0}^n a_{k,n} k = \delta_{1,n}.$$

Proof. Equation (38) follows simply by taking $X = 0$, and (39) follows by differentiating with respect to X , then setting $X = 0$. \square

Now, the condition on Proposition (1) we need to satisfy is $\frac{-1}{2} \leq \frac{2(s-1)}{(s+1)} N = \frac{2N(e^{-a/N}-1)}{e^{-a/N}+1} \sim \frac{-2aN}{2N-a} \sim -a$ which is met if $a = o(1)$.

Proposition 2. With $h(n, s, N)$ defined as in (32) and $a = o(1)$ as $N \rightarrow \infty$ as before,

$$(40) \quad h(n, e^{-a/N}, N) = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2) & \text{if } n = 0 \\ -a + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2) & \text{if } n = 1 \\ \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. Factoring out $\left(\frac{1}{e^{-a/N}-1}\right)^n \sim \left(\frac{-N}{a}\right)^n$ from Theorem 1, we have

$$(41) \quad \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left(1 + (e^{-a/N} - 1) \sum_{j=1}^N \frac{2e^{-a/N} - 2\cos(\theta_j)}{1 + e^{-2a/N} - 2e^{-a/N} \cos(\theta_j)}\right)^n \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_j/2) d\theta = 1 - na + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2).$$

Therefore, applying Lemma 3, $h(n, e^{-a/N}, N)$ equals

$$(42) \quad \begin{aligned} & \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left((e^{-a/N} - 1) \sum_{j=1}^N \frac{2e^{-a/N} - 2\cos(\theta_j)}{1 + e^{-2a/N} - 2e^{-a/N} \cos(\theta_j)} \right)^n \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_j/2) d\theta \\ &= \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \sum_{k=0}^n a_{k,n} \left(1 + (e^{-a/N} - 1) \sum_{j=1}^N \frac{2e^{-a/N} - 2\cos(\theta_j)}{1 + e^{-2a/N} - 2e^{-a/N} \cos(\theta_j)} \right)^k \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_j/2) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^n a_{k,n} \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \int_{[0, \pi]^N} \left(1 + (e^{-a/N} - 1) \sum_{j=1}^N \frac{2e^{-a/N} - 2\cos(\theta_j)}{1 + e^{-2a/N} - 2e^{-a/N} \cos(\theta_j)} \right)^k \Delta(\cos(\theta_j))^2 \prod_{i=1}^N \sin^2(\theta_j/2) d\theta. \end{aligned}$$

Now, taking the asymptotic expansion as in (41), (42) equals

$$(43) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=0}^n a_{k,n} (1 - ka + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2)) \\ &= \sum_{k=0}^n a_{k,n} - a \sum_{k=0}^n a_{k,n} k + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

$$(44) \quad = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2) & \text{if } n = 0 \\ -a + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2) & \text{if } n = 1 \\ \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

We now ready to prove the main result.

Theorem 4. Let $\Lambda_X(s)$ denote the characteristic polynomial of a matrix $X \in SO(2N+1)$, the group of odd orthogonal random matrices of odd dimension and determinant 1, equipped with the Haar measure $d_{\text{Haar}}(X)$. Let $\alpha = a/N$ with $a = o(1)$ as $N \rightarrow \infty$, and the moment parameter $K \in \mathbb{R}_+$. Then,

$$(45) \quad \left(\frac{-N}{a}\right)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(e^{-\alpha})\right)^K d_{\text{Haar}}(X) = 1 - Ka + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2)$$

Proof. Fix an integer m which satisfies three things: $m \geq \lfloor K \rfloor$, m is odd and $m \geq 2$. By the last condition, we know from Proposition 2, that

$$(46) \quad h(m+1, e^{-a/N}, N) = \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2).$$

By Proposition 1, we know that

$$(47) \quad \begin{aligned} & (e^{-a/N} - 1)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(e^{-a/N})\right)^K d_{\text{Haar}}(X) \\ &= \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} h(n, e^{-a/N}, N) + \mathcal{O}\left(h(m+1, e^{-a/N}, N)\right) \end{aligned}$$

$$(48) \quad = h(0, e^{-a/N}, N) + Kh(1, e^{-a/N}, N) + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2)$$

$$(49) \quad = 1 - Ka + \mathcal{O}(a/N) + \mathcal{O}(a^2),$$

where the last line comes from applying Proposition 2 again and

$$(50) \quad (e^{-a/N} - 1)^K \sim \left(\frac{-N}{a}\right)^K$$

as $N \rightarrow \infty$. □

3. PROOF OF THEOREM 3

Let f and g be some functions. In this section, we will note $f \ll g$ or $f = \mathcal{O}(g)$ if it exists a constant $A > 0$, independent of any variables (like s , N or θ), such as $f \leq Ag$. In this section, please don't be worried by some error terms which appear not to be dominated by leading-order terms. At the end, we will arrange s and N in such a way as to make a sane error term.

We will use the 1 and 2-point correlation functions of eigenvalues of matrices from $SO(2N+1)$. We recall the expression of the n -point correlation functions R_n :

$$(51) \quad R_n(\theta_1, \dots, \theta_n) = \det_{n \times n} (S_{2N}(\theta_k - \theta_j) - S_{2N}(\theta_k + \theta_j)),$$

where

$$(52) \quad S_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

In particular, we have that

$$(53) \quad R_1(\theta) := S_{2N}(0) - S_{2N}(2\theta) = \frac{N}{\pi} - \frac{\sin(2N\theta)}{2\pi \sin(\theta)}$$

and

$$(54) \quad R_2(\theta_1, \theta_2) = \begin{vmatrix} S_{2N}(0) - S_{2N}(2\theta_1) & S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2) \\ S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2) & S_{2N}(0) - S_{2N}(2\theta_2) \end{vmatrix}$$

$$(55) \quad = R_1(\theta_1)R_1(\theta_2) - (S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2))^2.$$

Finally, we recall the formula which explains why these functions will be useful:

$$(56) \quad \int_{[0, \pi]^N} f(\theta_1, \dots, \theta_n) d\mu(\theta) = \frac{(N-n)!}{N!} \int_{[0, \pi]^n} f(\theta_1, \dots, \theta_n) R_n(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n,$$

where $d\mu(\theta) = d\mu(\theta_1, \dots, \theta_n) := \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \Delta^2(\cos(\theta)) \prod_{m=1}^N \sin^2(\theta_m/2) d\theta_1 \dots d\theta_n$ and f is a function of n variables with $1 \leq n \leq N$.

As we have seen, $h(n, s, N)$, previously defined by

$$(57) \quad h(n, s, N) = \int_{[0, \pi]^N} \left((s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s - 2 \cos(\theta_j)}{1 + s^2 - 2s \cos(\theta_j)} \right)^n d\mu(\theta)$$

where $n \in \mathbb{N}$, is the key quantity to asymptotically study. This is our next goal.

We notice that

$$(58) \quad \frac{2s - 2 \cos(\theta_j)}{1 + s^2 - 2s \cos(\theta_j)} = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{s^2 - 1}{1 + s^2 - 2s \cos(\theta_j)} \right) = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{s^2 - 1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} \right).$$

The above integral h is now equal to

$$(59) \quad \frac{(s-1)^n}{s^n} \int_{[0, \pi]^N} \left(N + \sum_{j=1}^N \frac{s^2 - 1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} \right)^n d\mu(\theta)$$

Let's develop the expression with the multinomial theorem:

$$(60) \quad \frac{(s-1)^n}{s^n} \int_{[0, \pi]^N} \sum_{p+l_1+\dots+l_N=n} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p \prod_{j=1}^N \left(\frac{s^2 - 1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} \right)^{l_j} d\mu(\theta),$$

where

$$(61) \quad \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} = \frac{n!}{p! l_1! \dots l_N!}.$$

Finally,

$$(62) \quad h(n, s, N) = \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{p+l_1+\dots+l_N=n} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (s^2 - 1)^{n-p} \int_{[0, \pi]^N} \prod_{j=1}^N \frac{1}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2))^{l_j}} d\mu(\theta).$$

So, we have to understand the asymptotic behaviour of

$$(63) \quad g(l, s, N) := \int_{[0, \pi]^N} \prod_{j=1}^N \frac{1}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2))^{l_j}} d\mu(\theta)$$

with $l = (l_1, \dots, l_N)$ and $l_1 + \dots + l_N = n - p$.

We will begin by studying g by studying g in two cases (which can overlap):

- at least one of the l_j 's is bigger than or equal to 2 or
- at least two the l_j 's are equal to 1.

3.1. First case. Here, we will assume that at least one of the l_j 's is bigger than or equal to 2. Without loss of generality, we can assume that $l_1 \geq 2$ (g is invariant under a permutation of the components of l).

For all $j \geq 2$, we use this inequality

$$(64) \quad [(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)]^{l_j} \geq [1-s]^{2l_j}$$

in order to state that

$$(65) \quad g(l, s, N) \leq \frac{1}{(1-s)^{2\sum_{j \geq 2} l_j}} \int_{[0, \pi]^N} \frac{1}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_1/2))^{l_1}} d\mu(\theta).$$

Hence,

$$(66) \quad g(l, s, N) \leq \frac{1}{(1-s)^{2n-2(p+l_1)}} \int_{[0, \pi]^N} \frac{1}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_1/2))^{l_1}} d\mu(\theta)$$

because $\sum_{j \geq 2} l_j = n - p - l_1$.

Using the 1-point correlation function (which is positive), we can rewrite this above integral and so we have that

$$(67) \quad g(l, s, N) \leq \frac{1}{N(1-s)^{2n-2(p+l_1)}} \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2))^{l_1}} d\theta.$$

We want to bound R_1 by something which keeps track of the behaviour of R_1 close to 0. In other words, we want to keep in mind the fact that the θ_n 's are repelled by 1.

Lemma 4. *Let $\theta \in [-\pi, \pi]$. We have that*

$$(68) \quad R_1(\theta) = \left(\frac{N}{\pi} - \frac{\sin(2N\theta)}{2\pi \sin(\theta)} \right) \ll N^3 \sin^2(\theta/2),$$

where the constant behind \ll doesn't depend on θ and on N .

Proof. Let's begin by noticing that

$$(69) \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta} = \frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i\frac{\theta}{2}(N-1)}$$

and so

$$(70) \quad \sum_{k=0}^{2N-1} e^{i2k\theta} = \frac{\sin(2N\theta)}{\sin(\theta)} e^{i\theta(2N-1)}.$$

Hence, we can rewrite the 1-point correlation function in the following way:

$$(71) \quad R_1(\theta) := \frac{N}{\pi} - \frac{\sin(2N\theta)}{2\pi \sin(\theta)} = \frac{N}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} e^{i\theta(2k+1-2N)}.$$

Once again, we use Taylor's formula:

$$(72) \quad R_1(\theta) = R_1(0) + R_1'(0)\theta + \int_0^\theta R_1''(t)t dt.$$

Well, $R_1(0) = 0$ and $R_1'(0) = 0$. Indeed,

$$(73) \quad R_1'(0) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} (2k+1-2N) = -\frac{i}{2\pi} \left(2 \sum_{k=0}^{2N-1} k + (1-2N)2N \right) = 0.$$

So, we have

$$(74) \quad R_1(\theta) = \int_0^\theta R_1''(t)(\theta-t)t dt.$$

We notice that

$$(75) \quad |R_1''(t)| = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} (2k+1-2N)^2 e^{i\theta(2k+1-2N)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} (2k+1-2N)^2.$$

So, we can find $M > 0$ such as $|R_1''(t)| \leq MN^3$ for all $t \in [0, \pi]$.

Finally, we have proved that

$$(76) \quad |R_1(\theta)| \leq MN^3 \int_0^\theta t dt = \frac{M}{2} N^3 \theta^2.$$

Then, we can find $C > 0$ such as $\frac{M}{2} N^3 \theta^2 \leq CN^3 \sin^2(\theta/2)$. Indeed, the function $\theta \mapsto \frac{M\theta^2}{2C \sin^2(\theta/2)}$ is continuous on the compact $[-\pi, \pi]$ (the function can be extended by continuity at 0) and so is bounded. □

Let's come back to inequality (67). By using this lemma, we have proved that

$$(77) \quad g(l, s, N) \ll \frac{N^2}{(1-s)^{2n-2(p+l_1)}} \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{[(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)]^{l_1}} d\theta.$$

And so, we need to study

$$(78) \quad I_{l_1} := \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{[(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)]^{l_1}} d\theta.$$

Let's do the well-known change of variable $t = \tan(\theta/2)$. We recall some formulas:

$$(79) \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ and } d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$(80) \quad \sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\theta)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$(81) \quad (1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2) = 1 + s^2 - 2s \cos(\theta)$$

So,

$$(82) \quad I_{l_1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2/(1+t^2)}{(1+s^2-2s\frac{1-t^2}{1+t^2})^{l_1}} \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$(83) \quad = 2 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^{l_1-2} t^2}{((1+s^2)(1+t^2)-2s(1-t^2))^{l_1}} dt$$

$$(84) \quad = 2 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^{l_1-2} t^2}{[t^2(1+s)^2+(1-s)^2]^{l_1}} dt.$$

Using the change of variable $u = \frac{1+s}{1-s}t$, we obtain that

$$(85) \quad I_{l_1} = \frac{2}{(1-s)^{2l_1-3}(1+s)^3} \int_0^{+\infty} \frac{(1+(\frac{1-s}{1+s}u)^2)^{l_1-2} u^2}{(1+u^2)^{l_1}} du.$$

As $l_1 \geq 2$, we have that

$$(86) \quad I_{l_1} \leq \frac{2}{(1-s)^{2l_1-3}(1+s)^3} \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^2)^{l_1-2} u^2}{(1+u^2)^{l_1}} du$$

$$(87) \quad \leq \frac{2}{(1-s)^{2l_1-3}(1+s)^3} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du$$

$$(88) \quad \leq \frac{1}{(1-s)^{2l_1-3}(1+s)^3} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^2} \frac{2du}{1+u^2}$$

$$(89) \quad \leq \frac{1}{(1-s)^{2l_1-3}(1+s)^3} \int_0^\pi \sin^2(\theta/2) d\theta$$

$$(90) \quad \leq \frac{\pi}{2(1-s)^{2l_1-3}(1+s)^3}$$

$$(91) \quad \ll \frac{1}{(1-s)^{2l_1-3}}.$$

We can now state the main theorem of this section.

Theorem 5. *If at least one of the l_j 's is bigger than or equal to 2. We have that*

$$(92) \quad g(l, s, N) \ll N^2 \frac{(1-s)^3}{(1-s)^{2n-2p}}.$$

Proof. We just have to use both inequalities (77) and (91). □

3.2. Second case. Let's come back to (63). We will now assume that at least two of the l_j 's are equal to 1. We can assume that $l_1 = l_2 = 1$.

For all $j \geq 3$, we use this inequality

$$(93) \quad [(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)]^{l_j} \geq [1-s]^{2l_j}$$

in order to state that

$$(94) \quad g(l, s, N) \leq \frac{1}{(1-s)^{2\sum_{j \geq 3} l_j}} \int_{[0, \pi]^N} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2))^{l_j}} d\mu(\theta).$$

But, we know that $\sum_{j \geq 3} l_j = n - (p + l_1 + l_2) = n - p - 2$ and so,

$$(95) \quad g(l, s, N) \leq \frac{1}{(1-s)^{2n-2p-4}} \int_{[0, \pi]^N} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2))^{l_j}} d\mu(\theta).$$

Using the pair correlation function (which is positive), we can write this integral as the following way:

$$(96) \quad \frac{1}{(1-s)^{2n-2p-4}} \frac{1}{N(N-1)} \int_0^\pi \int_0^\pi \prod_{j=1}^2 \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} R_2(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

Hence, we obtain that

$$(97) \quad g(l, s, N) \leq \frac{1}{N(N-1)(1-s)^{2n-2p-4}} \left[\left(\int_0^\pi \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} R_1(\theta) d\theta \right)^2 - \int_0^\pi \int_0^\pi \prod_{j=1}^2 \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} (S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2))^2 d\theta_1 d\theta_2 \right]$$

because $R_1(\theta_1)R_1(\theta_2) - (S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2))^2$ from (55).

But, by using $R_1(\theta) \ll N^3 \sin^2(\theta/2)$ (Lemma (4)), we have that

$$(98) \quad \int_0^\pi \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} R_1(\theta) d\theta \ll N^3 \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta$$

$$(99) \quad \ll N^3 \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{4s \sin^2(\theta/2)} d\theta$$

$$(100) \quad \ll N^3 \int_0^\pi \frac{1}{4s} d\theta$$

$$(101) \quad \ll N^3.$$

So, we obtain that

$$(102) \quad g(l, s, N) \ll \frac{1}{N(N-1)(1-s)^{2n-2p-4}} \left[N^3 + \int_0^\pi \int_0^\pi \prod_{j=1}^2 \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} (S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2))^2 d\theta_1 d\theta_2 \right].$$

We know that $S_{2N}(x) = \frac{N}{\pi} + \mathcal{O}(N^3 x^2)$ using Lemma 4. However, this estimation provides the term N^3 which is too big for what we want. We will use the following lemma instead.

Lemma 5. *Let $x \in \mathbb{R}$. We have that*

$$(103) \quad S_{2N}(x) = \frac{N}{\pi} + \mathcal{O}(N^2|x|)$$

Proof. We have that

$$(104) \quad \left| S_{2N}(x) - \frac{N}{\pi} \right| = |R_1(x)|$$

$$(105) \quad \leq \left| \int_0^x R_1'(t) dt \right|$$

$$(106) \quad \leq |x| \left\| \frac{-i}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} (2k+1-2N) e^{it(2k+1-2N)} \right\|_{\infty, t} \quad \text{using (71)}$$

$$(107) \quad \ll |x| \sum_{k=0}^{2N-1} |2k+1-2N|$$

$$(108) \quad \ll N^2|x|.$$

□

So, we can say that

$$(109) \quad [S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2)]^2 = \left[\frac{N}{\pi} - \frac{N}{\pi} + \mathcal{O}(N^2|\theta_1 - \theta_2|) + \mathcal{O}(N^2|\theta_1 + \theta_2|) \right]^2$$

$$(110) \quad = [\mathcal{O}(N^2(|\theta_1 - \theta_2| + |\theta_1 + \theta_2|))]^2$$

$$(111) \quad \ll N^4(|\theta_1 - \theta_2| + |\theta_1 + \theta_2|)^2$$

$$(112) \quad \ll N^4(|\theta_1 - \theta_2|^2 + |\theta_1 + \theta_2|^2)$$

because $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 - (a - b)^2) \leq 2(a^2 + b^2)$.

Hence,

$$(113) \quad [S_{2N}(\theta_1 - \theta_2) - S_{2N}(\theta_1 + \theta_2)]^2 \ll N^4(|\theta_1 - \theta_2|^2 + |\theta_1 + \theta_2|^2)$$

$$(114) \quad \ll N^4(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2)$$

$$(115) \quad \ll N^4(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$(116) \quad \ll N^4(\sin^2(\theta_1/2) + \sin^2(\theta_2/2))$$

where the last line can be justified by noticing that the function $\theta \mapsto \frac{\theta^2}{\sin^2(\theta/2)}$, naturally extended at 0 by continuity, is bounded on the compact $[0, \pi]$.

Let's use (116) in (102) in order to obtain that

$$(117) \quad g(l, s, N) \ll \frac{1}{N(N-1)(1-s)^{2n-2p-4}} \left[N^3 + N^4 \int_0^\pi \int_0^\pi \prod_{j=1}^2 \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} (\sin^2(\theta_1/2) + \sin^2(\theta_2/2)) d\theta_1 d\theta_2 \right]$$

$$(118) \quad g(l, s, N) \ll \frac{1}{N(N-1)(1-s)^{2n-2p-4}} \left[N^3 + 2N^4 \left(\int_0^\pi \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta \right) \right].$$

We know that

$$(119) \quad \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta \leq \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{4s \sin^2(\theta/2)} d\theta = \mathcal{O}(1)$$

is bounded.

Moreover, we can compute the other integral by using the following lemma.

Lemma 6. *We have that*

$$(120) \quad I(s) := \int_0^\pi \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta = \frac{\pi}{1-s^2}$$

Proof. We do the change of variable $t = \tan(\theta/2)$ to obtain

$$(121) \quad I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \frac{t^2}{1-t^2}} \frac{2}{1-t^2} dt$$

$$(122) \quad = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1-s)^2(1-t^2) + 4st^2} dt$$

$$(123) \quad = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1-s)^2 + (1+s)^2 t^2} dt$$

$$(124) \quad = \frac{2}{(1-s)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1+s}{1-s}t\right)^2} dt$$

We do the change of variable $u = \frac{1+s}{1-s}t$ and so,

$$(125) \quad I(s) = \frac{2}{1-s^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du$$

$$(126) \quad = \frac{\pi}{1-s^2}$$

□

Let's come back to (118). By using this lemma and 119, we have that

$$(127) \quad 2N^4 \left(\int_0^\pi \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta \right) = \mathcal{O} \left(\frac{2\pi N^4}{1-s^2} \right)$$

$$(128) \quad = \mathcal{O} \left(\frac{2\pi N^4}{(1-s)(1+s)} \right)$$

$$(129) \quad = \mathcal{O} \left(\frac{N^4}{1-s} \right),$$

which dominates N^3 . Finally, we have that

$$(130) \quad g(l, s, N) \ll \frac{1}{N(N-1)(1-s)^{2n-2p-4}} \frac{N^4}{1-s}.$$

and so the following theorem.

Theorem 6. *If at least two of the l_j 's are equal to 1. We have that*

$$(131) \quad g(l, s, N) \ll \frac{N^2(1-s)^3}{(1-s)^{2n-2p}}.$$

3.3. **Back to h .** Let's sum up what we have seen. We want to study the quantity $h(n, s, N)$ which is equal, using (62), to

$$(132) \quad \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{p+l_1+\dots+l_N=n} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} (s^2-1)^{n-p} g(l, s, N)$$

where

$$(133) \quad g(l, s, N) := \int_{[0, \pi]^N} \prod_{j=1}^N \frac{1}{((1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2))^{l_j}} d\mu(\theta).$$

The two last sections proved the following theorem.

Theorem 7. *If at least one of the l_j 's is bigger than or equal to 2 or if at least two of the l_j 's are equal to 1, we have that*

$$(134) \quad g(l, s, N) \ll N^2 \frac{(1-s)^3}{(1-s)^{2n-2p}}.$$

We are now ready to study the asymptotic of h depending of three cases $n \geq 2$, $n = 1$ and $n = 0$.

3.4. **Case $n \geq 2$.** We can split the sum in three parts according to the value of p :

$$(135) \quad h(n, s, N) = \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p=n}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (s^2-1)^{n-p} g(l, s, N) + \\ \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p=n-1}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (s^2-1)^{n-p} g(l, s, N) + \\ \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p \leq n-2}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (s^2-1)^{n-p} g(l, s, N).$$

which is equal to

$$(136) \quad \frac{(s-1)^n}{s^n} N^n + \\ \frac{(s-1)^n}{s^n} n (s^2-1) N^{n-1} \int_{[0, \pi]^N} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} \right) d\mu(\theta) + \\ \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p \leq n-2}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (s^2-1)^{n-p} g(l, s, N).$$

where

$$(137) \quad \int_{[0, \pi]^N} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta_j/2)} \right) d\mu(\theta) = \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta$$

$$(138) \quad \ll N^3 \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} d\theta \text{ using Lemma (2)}$$

$$(139) \quad \ll N^3 \int_0^\pi \frac{\sin^2(\theta/2)}{4s \sin^2(\theta/2)} d\theta$$

$$(140) \quad \ll N^3.$$

So, we have that

$$(141) \quad h(n, s, N) = \frac{(s-1)^n}{s^n} N^n + \mathcal{O}(N^{n+2}(1-s)^{n+1}) + \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p \leq n-2}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (s^2-1)^{n-p} g(l, s, N).$$

Furthermore, if $p \leq n-2$, we have that $l_1 + \dots + l_N \geq 2$ since $p + \dots + l_N = n$ and so, either at least one of the l_j 's is bigger than or equal to 2 or at least two of the l_j 's are equal to 1. We can apply the Theorem 7 and so,

$$\begin{aligned}
(142) \quad & \left| \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p \leq n-2}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (s^2-1)^{n-p} g(l, s, N) \right| \ll \\
& \frac{(s-1)^n}{s^n} \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p \leq n-2}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p |(s^2-1)|^{n-p} N^2 \frac{(1-s)^3}{(1-s)^{2n-2m}} \\
(143) \quad & \ll N^2(1-s)^3 \sum_{\substack{p+l_1+\dots+l_N=n \\ p \leq n-2}} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (1-s)^p \\
(144) \quad & \ll N^2(1-s)^3 \sum_{p+l_1+\dots+l_N=n} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} N^p (1-s)^p \\
(145) \quad & \ll N^2(1-s)^3 \sum_{p+l_1+\dots+l_N=n} \binom{n}{p, l_1, \dots, l_N} [N(1-s)]^p 1^{l_1} 1^{l_2} \dots 1^{l_N} \\
(146) \quad & \ll N^2(1-s)^3 (N(1-s) + 1 + \dots + 1)^n \\
(147) \quad & \ll N^2(1-s)^3 (N(1-s) + N)^n \\
(148) \quad & \ll N^2(1-s)^3 N^n \\
(149) \quad & \ll N^{n+2}(1-s)^3.
\end{aligned}$$

We use this inequality in (141) and we obtain that

$$(150) \quad h(n, s, N) = \frac{(s-1)^n}{s^n} N^n + \mathcal{O}(N^{n+2}(1-s)^{n+1}) + \mathcal{O}(N^{n+2}(1-s)^3)$$

. and so the following theorem.

Theorem 8. *If $n = 2$, we have that*

$$(151) \quad h(n = 2, s, N) = N^2(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^4(1-s)^3).$$

and if $n \geq 3$, we have that

$$(152) \quad h(n, s, N) = \mathcal{O}(N^{n+2}(1-s)^3).$$

Proof. We just have to use (150) and that

$$(153) \quad \frac{(s-1)^n}{s^n} = (1-s)^n + \mathcal{O}((1-s)^{n+1}).$$

□

3.5. Case $n = 1$. We have that

$$(154) \quad h(1, s, N) = \int_{[0, \pi]^N} (s-1) \sum_{j=1}^N \frac{2s - 2 \cos(\theta_j)}{1 + s^2 - 2s \cos(\theta_j)} d\mu(\theta)$$

$$(155) \quad = (s-1) \int_0^\pi \frac{2s - \cos(\theta)}{1 + s^2 - 2s \cos(\theta)} R_1(\theta) d\theta.$$

We use

$$(156) \quad \frac{2s - 2 \cos(\theta)}{1 + s^2 - 2s \cos(\theta)} = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{s^2 - 1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} \right)$$

and

$$(157) \quad \int_0^\pi R_1(\theta) d\theta = N$$

to state that

$$(158) \quad h(1, s, N) = \frac{N(s-1)}{s} + \frac{(s+1)(1-s)^2}{s} \int_0^\pi \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} R_1(\theta) d\theta.$$

We can rewrite the integral as

$$(159) \quad \int_0^\pi \frac{1}{4s \sin^2(\theta/2)} R_1(\theta) d\theta + \int_0^\pi \left(\frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} - \frac{1}{4s \sin^2(\theta/2)} \right) R_1(\theta) d\theta.$$

So,

$$(160) \quad h(1, s, N) = \frac{N(s-1)}{s} + \frac{(s+1)}{4s^2} (1-s)^2 \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta - \frac{(s+1)(1-s)^4}{s} \int_0^\pi \frac{1}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} \frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta.$$

We know that $\frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} \ll N^3$ (Lemma 4) and $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1-s)^2 + 4s \sin^2(\theta/2)} \ll \frac{1}{1-s}$ (Lemma 6) and so,

$$(161) \quad h(1, s, N) = \frac{N(s-1)}{s} + \frac{(s+1)}{4s^2} (1-s)^2 \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3).$$

The following lemma enables us to compute the above integral.

Lemma 7. *We have that*

$$(162) \quad \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta = 2N^2.$$

Proof. We have seen that

$$(163) \quad R_1(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \left(1 - e^{i\theta(2k+1-2N)} \right).$$

The result must be real, so,

$$(164) \quad R_1(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} (1 - \cos((2k+1-2N)\theta))$$

$$(165) \quad = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \sin^2((2k+1-2N)\theta/2).$$

We use this to state that

$$(166) \quad \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_0^\pi \frac{\sin^2((2k+1-2N)\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta.$$

Moreover, if $A \in \mathbb{N}^*$, we know that

$$(167) \quad \sum_{k=0}^{A-1} e^{ik\theta} = \frac{\sin(A\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i\theta/2(A-1)}$$

and so that

$$(168) \quad \frac{\sin(A\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \sum_{k=0}^{A-1} e^{i\theta(k-A/2+1/2)}.$$

Since the sine function is an odd function, we have that

$$(169) \quad \left(\frac{\sin(A\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{|A|-1} e^{i\theta(k-|A|/2+1/2)} \right)^2.$$

even A is a negative integer.

We use the above formula in (166) with $A = 2k + 1 - 2N$ and we have that

$$(170) \quad \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_0^\pi \left(\sum_{j=0}^{|2k+1-2N|-1} e^{i\theta(j-|2k+1-2N|/2+1/2)} \right)^2 d\theta$$

$$(171) \quad = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq |2k+1-2N|-1 \\ 0 \leq j_2 \leq |2k+1-2N|-1}} \int_0^\pi e^{i\theta(j_1+j_2-|2k+1-2N|+1)} d\theta$$

$$(172) \quad = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq |2k+1-2N|-1 \\ 0 \leq j_2 \leq |2k+1-2N|-1}} \int_0^\pi \cos(\theta(j_1 + j_2 - |2k + 1 - 2N| + 1)) d\theta$$

because the result must be real.

If n is an integer, one can easily check that $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) = \delta_n$ i.e. 1 if $n = 0$ and 0 otherwise.

Therefore,

$$(173) \quad \int_0^\pi \frac{R_1(\theta)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta = \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq |2k+1-2N|-1 \\ 0 \leq j_2 \leq |2k+1-2N|-1}} \delta_{j_1+j_2-|2k+1-2N|+1}$$

$$(174) \quad = \sum_{k=0}^{2N-1} |2k + 1 - 2N|$$

$$(175) \quad = \sum_{k=0}^{N-1} (2N - 2k - 1) + \sum_{k=N}^{2N-1} (2k + 1 - 2N)$$

$$(176) \quad = \sum_{k=0}^{N-1} (2N - 2k - 1) + \sum_{k=0}^{N-1} (2k + 1)$$

$$(177) \quad = \sum_{k=0}^{N-1} 2N$$

$$(178) \quad = 2N^2.$$

□

Using this lemma in (161), we obtain that

$$(179) \quad h(1, s, N) = \frac{N(s-1)}{s} + \frac{s+1}{2s^2} N^2 (1-s)^2 + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3).$$

We can now state the main theorem of this subsection.

Theorem 9. *We have that*

$$(180) \quad h(1, s, N) = N(s-1) + N(N-1)(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3).$$

Proof. We expand (179) when s goes to 1:

$$(181) \quad h(1, s, N) = \frac{N(s-1)}{s} + \frac{s+1}{2s^2} N^2(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3)$$

$$(182) \quad = \frac{N(s-1)}{1+(s-1)} + N^2(1-s)^2 + \left(\frac{s+1}{2s^2} - 1 \right) N^2(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3)$$

$$(183) \quad = N(s-1)(1+(1-s)) + N^2(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3)$$

$$(184) \quad = N(s-1) + N(N-1)(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3).$$

□

3.6. **Case $n = 0$.** This is the simplest case. We just have

$$(185) \quad h(0, s, N) = 1.$$

3.7. **Conclusion.** In the last section, we have proved the following theorem (which is more precise than Proposition 2 if a goes to 0 fast enough).

Theorem 10.

$$(186) \quad h(n, s, N) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ N(s-1) + N(N-1)(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^3(1-s)^3) & \text{if } n = 1 \\ N^2(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^4(1-s)^3) & \text{if } n = 2 \\ \mathcal{O}(N^{n+2}(1-s)^3) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By assuming that $\frac{-1}{2} \leq \frac{2(s-1)}{s+1} N$ and using Proposition 1, we know that

$$(187) \quad (s-1)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X(s)}{\Lambda_X(s)} \right)^K d_{\text{Haar}}(X) = \sum_{n=0}^m \binom{K}{n} h(n, s, N) + \mathcal{O}(h(m+1, s, N))$$

where m is odd and $m \geq \lfloor K \rfloor$.

Let's assume that $m \geq 3$. By applying the above theorem we have arrived at the following theorem.

Theorem 11. Let $\Lambda_X(s)$ denote the characteristic polynomial of a matrix $X \in SO(2N+1)$, the group of odd orthogonal random matrices of odd dimension and determinant 1, equipped with the Haar measure $d_{\text{Haar}}(X)$. Let $K \in \mathbb{R}_+$ the moment parameter. Let's assume that $\frac{2(1-s)}{s+1} N \leq \frac{1}{2}$ and take m an odd integer such as $m \geq \lfloor K \rfloor$ and $m \geq 3$. We have that

$$(188) \quad (s-1)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X(s)}{\Lambda_X(s)} \right)^K d_{\text{Haar}}(X) = 1 - KN(1-s) - KN(1-s)^2 + \frac{K(K+1)}{2} N^2(1-s)^2 + \mathcal{O}(N^{m+3}(1-s)^3)$$

or, in other words,

$$(189) \quad \left| (s-1)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X(s)}{\Lambda_X(s)} \right)^K d_{\text{Haar}}(X) - \left[1 - KN(1-s) - KN(1-s)^2 + \frac{K(K+1)}{2} N^2(1-s)^2 \right] \right| \leq M_K N^{m+3}(1-s)^3$$

where $M_K > 0$ is a constant which only depends on K .

We will apply this theorem to the specific case where $s = e^{-a/N}$ with a is a positive function which goes to 0 when N gets large.

Theorem 12. Let $\Lambda_X(s)$ denote the characteristic polynomial of a matrix $X \in SO(2N+1)$, the group of odd orthogonal random matrices of odd dimension and determinant 1, equipped with the Haar measure $d_{\text{Haar}}(X)$. Let $\alpha = a/N > 0$ with $a = o(1)$ as $N \rightarrow \infty$, the moment parameter $K \in \mathbb{R}_+$, and m be an odd integer such as $m \geq 3$ and $m \geq \lfloor K \rfloor$. Then,

$$(190) \quad \left(\frac{-a}{N}\right)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(e^{-\alpha})\right)^K d_{\text{Haar}}(X) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \\ 1 - Ka + \frac{Ka}{2N} + \frac{K(K+1)}{2}a^2 - \frac{K(K+1)a^2}{2N} + \frac{a^2}{N^2}K\frac{3K-1}{24} + \mathcal{O}(N^m a^3).$$

To obtain an interesting result, we can ask that $N^m a^3 = o(\frac{a^2}{N^2})$ i.e. $a = o(\frac{1}{N^{m+2}})$ as $N \rightarrow \infty$. And so, we can see that this theorem provides a better result than Theorem 2.

Proof. By using that

$$(191) \quad 1 - s = 1 - e^{-a/N}$$

$$(192) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{N} - \frac{a^2}{2N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a^3}{N^3}\right)$$

and that

$$(193) \quad (1 - s)^2 = \left(1 - e^{-a/N}\right)^2$$

$$(194) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{a}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{N^2}\right)\right)^2$$

$$(195) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{a^2}{N^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{a}{N}\right)\right)^2$$

$$(196) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{a^2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a^3}{N^3}\right)$$

and that

$$(197) \quad \frac{1}{(s-1)^k} = \frac{1}{(e^{-a/N} - 1)^K}$$

$$(198) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\left(\frac{-a}{N} + \frac{a^2}{2N^2} - \frac{a^3}{6N^3} + \mathcal{O}\left(\frac{a^4}{N^4}\right)\right)^K}$$

$$(199) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{-N}{a}\right)^K \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{2N} + \frac{a^2}{6N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a^3}{N^3}\right)\right)^K}$$

$$(200) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{-N}{a}\right)^K \left(1 - K\left(\frac{-a}{2N} + \frac{a^2}{6N^2}\right) + \frac{K(K+1)}{2}\left(\frac{a}{2N}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{a^3}{N^3}\right)\right)$$

$$(201) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{-N}{a}\right)^K \left(1 + \frac{Ka}{2N} + \frac{a^2}{N^2}K\frac{3K-1}{24} + \mathcal{O}\left(\frac{a^3}{N^3}\right)\right)$$

(202)

in (188), we obtain that

$$(203) \quad \left(\frac{-a}{N}\right)^K \int_{SO(2N+1)} \left(\frac{\Lambda'_X}{\Lambda_X}(s)\right)^K d_{\text{Haar}}(X) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \\ \left(1 + \frac{Ka}{2N} + \frac{a^2}{N^2}K\frac{3K-1}{24}\right) \left(1 - KN\left(\frac{a}{N} - \frac{a^2}{2N^2}\right) - KN\frac{a^2}{N^2} + \frac{K(K+1)}{2}N^2\frac{a^2}{N^2}\right) + \mathcal{O}(N^m a^3)$$

$$(204) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{Ka}{2N} + \frac{a^2}{N^2} K \frac{3K-1}{24} \right) \left(1 - Ka + \frac{K(K+1)}{2} a^2 - K \frac{a^2}{2N} \right) + \mathcal{O}(N^m a^3)$$

$$(205) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 - Ka + \frac{Ka}{2N} + \frac{K(K+1)}{2} a^2 - \frac{Ka^2}{2N} - \frac{K^2 a^2}{2N} + \frac{a^2}{N^2} K \frac{3K-1}{24} + \mathcal{O}(N^m a^3)$$

$$(206) \quad \underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 - Ka + \frac{Ka}{2N} + \frac{K(K+1)}{2} a^2 - \frac{K(K+1)a^2}{2N} + \frac{a^2}{N^2} K \frac{3K-1}{24} + \mathcal{O}(N^m a^3).$$

In contrast with Theorem 11, we really need here that N goes to $+\infty$ because we want that $\frac{2(1-s)}{s+1}N \leq \frac{1}{2}$ holds which is true since $\frac{2(1-s)}{s+1}N \sim a = o(1)$. □

REFERENCES

- [AS20] Emilia Alvarez and Nina Snaith. Moments of the logarithmic derivative of characteristic polynomials from $SO(N)$ and $USp(2N)$. *J. Math. Phys.*, 61(10), 2020.