Comment calculer les classes caractéristiques à l'aide des formes différentielles ?

Oscar Fontaine
Encadrant : Søren Galatius

2022

Table des matières

1 Expériences à Copenhague

Mon stage s'est déroulé à l'université de Copenhague (Danemark) sous la direction de Søren Galatius (sorengalatius.com). Le stage a essentiellement été un travail bibliographique. Les livres étudiés sont deux ouvrages de Shigeyuki Morita [3, 4]. Nous organisions, Søren et moi, des discussions hebdomadaires à propos de mes lectures.

Lors de mon stage, je n'ai pas seulement interagi avec mon encadrant mais avec des membres de l'équipe topologie et géométrie. Notamment, j'ai eu l'opportunité d'échanger avec Patrick Schnider (www.math.ku.dk/english/staff/?pure=en/persons/705310). Il m'a présenté son domaine d'étude et j'ai pu travailler un peu avec lui. Ce fut l'occasion de découvrir un autre domaine de recherche.

Au terme de mon stage, je souhaiterai continuer à étudier les mathématiques et poursuivre vers un cursus de recherche en mathématiques. Je songe donc à m'orienter à terme vers un doctorat en mathématiques dans un domaine proche de la topologie.

En dehors de l'université, la vie à Copenhague est charmante et la ville jolie. Les danois sont très accueillants et parlent parfaitement anglais ou, à défaut, l'allemand. Par conséquent, je n'ai pas appris le danois (pas même un peu).

La ville de Copenhague m'a beaucoup plu. Elle comporte beaucoup de parcs et les avenues sont très larges comparativement aux rues étroites de Paris et de Lyon. Enfin, le Danemark et ses espaces verts possèdent une très large variété d'espèces d'oiseaux relativement faciles à observer.

Pour conclure brièvement sur mon expérience à Copenhague, je garde un bon souvenir de la vie au Danemark et de mes échanges à l'université de Copenhague. Si l'occasion se présente, je serai ravi d'y retourner.

2 Introduction

Ce rapport est composé de trois parties indépendantes. Les deux premières portent sur les classes caractéristiques d'espaces fibrés et sont le résultat de mes études et discussions avec Søren Galatius ainsi que de la lecture de deux ouvrages de Shigeyuki Morita [3, 4]. La troisième partie porte sur un sujet très différent : les applications combinatoires du théorème de Borsuk-Ulam [1]. Cette partie résulte de mes discussions avec Patrick Schnider. Nous présentons ici brièvement les enjeux de chacune de ces parties.

Dans un premier temps, nous évoquons les méthodes permettant de calculer les classes caractéristiques des fibrés vectoriels. L'intérêt de tels objets est de comprendre et de classifier les fibrés vectoriels qui apparaissent régulièrement en mathématiques comme par exemple dans l'étude des variétés différentielles. Étant donné un espace topologique de base, quels sont les fibrés vectoriels différents constructibles sur cette base, à isomorphisme près ? Cette question peut être complètement résolue entre autres par les classes caractéristiques qui sont des classes de cohomologie de la base invariante par isomorphisme de fibrés vectoriels. Malheureusement, ces objets topologiques comme définis par Milnor par exemple [2], sont très difficilement calculables en pratique. Nous proposons donc une méthode pour calculer ces classes caractéristiques efficacement à l'aide des formes différentielles.

La seconde partie concerne l'étude d'un autre type de fibrés : les fibrés principaux. Plutôt que de supposer que la fibre est un espace vectoriel, nous supposerons qu'il s'agit d'un groupe de Lie. La structure de groupe topologique nous permettra de définir plusieurs actions et applications continues sur l'espace fibré ce qui rend la structure très rigide. Nous définirons aussi des classes caractéristiques sur de tels fibrés à l'aide des formes différentielles en utilisant l'algèbre de Weil.

Enfin, la dernière partie porte sur le théorème de Borsuk-Ulam dont nous proposons une preuve et sur des exemples d'application. L'objectif de cette étude est d'appliquer les méthodes topologiques à des problèmes combinatoires.

3 Classes caractéristiques des fibrés vectoriels

Dans cette partie, nous étudions les classes caractéristiques des fibrés vectoriels. Si $\xi : E \to B$ est un fibré vectoriel, une classe caractéristique de ξ notée $\alpha(\xi) \in H^*(B, \mathbb{K})$ est une classe de cohomologie de la base naturelle au sens suivant : si $f : \xi \to \xi'$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels, alors $f^*(\alpha(\xi')) = \alpha(\xi)$. Une méthode pour construire de telles classes caractéristiques consiste à utiliser des méthodes purement topologiques et l'isomorphisme de Thom [2]. Malheureusement, il peut s'avérer difficile en pratique de calculer effectivement cette classe caractéristique pour un fibré vectoriel donné. Une autre méthode consiste à utiliser les formes différentielles en supposant les espaces lisses [3]. Nous présentons cette méthode dans les parties suivantes.

3.1 Définitions et théorème admis

3.1.1 Cohomologie de de Rham

Pour commencer, nous rappelons la définition et des propriétés sur les formes différentielles. Le but étant d'énoncer le théorème de de Rham et de rappeler le lien entre les formes différentielles et les classes de cohomologie d'une variété. Soit M une variété différentiable $\mathscr{C}^\infty$ para-compacte. Notons $\mathfrak{X}(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M. Une **k-forme différentielle** sur M est une application multi-linéaire alternée de $\mathfrak{X}(M)^k$ vers $\mathscr{C}^\infty(M)$ qui est de plus une application de $\mathscr{C}^\infty(M)$-module. Nous notons $\mathcal{A}^k(M)$ l'espace vectoriel des k-formes différentielles.

L'espace $\mathcal{A}^*(M)$ est muni d'un **produit extérieur** $\wedge : \mathcal{A}^k(M) \times \mathcal{A}^\ell(M) \to \mathcal{A}^{k+\ell}(M)$ et d'une **différentielle extérieure** $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ interagissant par $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{k\ell}\omega \wedge d\eta$ où $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ et $\eta \in \mathcal{A}^\ell(M)$. De plus, il est connu que $d \circ d = 0$. Ce produit fait de $\mathcal{A}^*(M)$ une $\mathbb{R}$-algèbre graduée et la différentielle une $\mathbb{R}$-algèbre graduée différentielle.

Nous pouvons alors définir la cohomologie associée à cette algèbre graduée différentielle. Soit $Z^k(M) = \ker(d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M))$, l'espace des formes fermées, et soit $B^k(M) = \mathrm{Im}(d : \mathcal{A}^{k-1}(M) \to \mathcal{A}^k(M))$, l'espace des formes exactes. Comme $d \circ d = 0$, $B^k(M) \subset Z^k(M)$. Le **k-ième groupe de cohomologie de de Rham** est $H^k_{\mathrm{DR}}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Nous appelons **cohomologie de de Rham** $H^*_{\mathrm{DR}}(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^k_{\mathrm{DR}}(M)$. Alors $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ est muni d'une structure d'algèbre graduée par $\wedge$.

Considérons σ un k-simplex singulier de M. Donc σ est une application continue $\sigma : \Delta^k \to M$. Par extension, σ est un **k-simplex singulier lisse** si l'application $\sigma : \Delta^k \to M$ est $\mathscr{C}^\infty$ où Δ^k est muni de la structure de sous-variété de $\mathbb{R}^{k+1}$. Notons $S^\infty_k(M)$ l'espace des k-chaînes singulières lisses à coefficients réels et $S^k_\infty(M) = \hom(S^\infty_k, \mathbb{R})$ l'espace des k-cochaînes singulières lisses. De même, nous noterons $S_k(M)$ l'espace des k-chaînes singulières à coefficients réels. Remarquons que si $c \in S^\infty_k(M)$, alors $\partial c \in S^\infty_{k-1}(M)$. Le complexe de chaînes $S^\infty_*(M)$ est donc un sous-complexe de chaînes de $S_*(M)$. Notons $H^*_\infty(M)$ sa cohomologie et $H^*(M)$ la cohomologie singulière de M. Une propriété importante de ses cohomologies est que l'application d'inclusion $S^\infty_*(M) \subset S_*(M)$ induit un isomorphisme en cohomologie $H^*_\infty(M) \cong H^*(M)$.

À présent, nous allons énoncer le lien entre la cohomologie de de Rham et la cohomologie singulière en énonçant le théorème de de Rham. Pour cela, nous définissons l'intégrale d'une k-forme différentielle sur un k-simplex singulier lisse. Soit ω une k-forme différentielle et σ un k-simplex singulier lisse. Alors, **l'intégrale de ω sur σ** est $\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega$. En étendant cette définition par linéarité, nous définissons l'intégrale d'une k-forme différentielle sur une k-chaîne singulière lisse. Soit alors c une k-chaîne singulière lisse. Définissons $I(\omega)(c) = \int_c \omega$. D'après le théorème de Stokes, $I(d\omega)(c) = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = I(\omega)(\partial c)$. Donc $I : \mathcal{A}^*(M) \to S^*_\infty(M)$ est un morphisme de complexes de cochaînes. Par conséquent, nous pouvons considérer le morphisme en cohomologie $I : H^*_{\mathrm{DR}}(M) \to H^*_\infty(M)$. Le théorème de de Rham affirme alors :

Théorème. 3.1: Théorème de de Rham

$I : H^*_{\mathrm{DR}}(M) \to H^*_\infty(M)$ est un isomorphisme. Par conséquent, $H^*_{\mathrm{DR}}(M) \cong H^*_\infty(M)$

3.1.2 Fibré vectoriel

Dans cette partie, nous allons définir la notion de fibré vectoriel et énoncer certaines de leurs propriétés. Nous nous placerons comme précédemment dans le cas particulier des variétés. Soit M une variété.

Définition. 3.1: Fibré vectoriel

Un **fibré vectoriel réel** ξ sur M est la donnée de :

- une variété $E = E(\xi)$
- une application $\mathscr{C}^\infty$ $\pi : E \to M$ appelée application de projection
- pour chaque $p \in M$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie sur la **fibre** au-dessus de p : $F_p(\xi) := \pi^{-1}\{p\}$

vérifiant la condition de trivialisation locale suivante : pour tout $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p, un entier n et un difféomorphisme $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ tels que pour chaque $q \in U$, $x \mapsto h(q, x)$ définisse un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers F_q.

De la même manière, nous pouvons définir un **fibré vectoriel complexe** en supposant que la fibre est un espace vectoriel complexe. Un fibré vectoriel est dit **trivial** si on peut prendre $U = M$ dans la condition de trivialisation.

Notons que dans la définition ci-dessus, la dimension n de la fibre dépend a priori du point. Néanmoins, si M est connexe par arcs, alors n est indépendant du point. Nous supposerons par la suite que M est connexe par arcs et, par conséquent, nous supposerons que la dimension de la fibre est constante sur M.

Soit $\xi = (E, \pi, M)$ et $\xi' = (E', \pi', M')$ deux fibrés vectoriels. Une **application de fibré vectoriel** $f : \xi \to \xi'$ est une application $\mathscr{C}^\infty$ $\overline{f} : E \to E'$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"'] \\ M \arrow[r, "\overline{f}_{|M}"] & M' \end{tikzcd}$$

et telle que l'application induite pour tout $p \in M$, $\overline{f} : F_p(\xi) \to F_{\overline{f}(p)}(\xi')$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si ξ et ξ' sont deux fibrés vectoriels au-dessus du même espace M, ξ et ξ' sont **isomorphes** s'il existe une application de fibrés vectoriels $f : \xi \to \xi'$ qui est l'identité sur M. En particulier, une telle application est un difféomorphisme. C'est un **isomorphisme de fibré**.

Si $\xi = (E, \pi, M)$ est un fibré vectoriel. Une **section** de ξ est une application $\mathscr{C}^\infty$ s telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Une section s telle que $s(p) = 0$ pour tout $p \in M$ est appelée **la section nulle**. L'espace vectoriel des sections de ξ est noté $\Gamma(\xi)$.

Nous pouvons à présent définir les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel. **Une classe caractéristique** $\alpha(\xi)$ d'un fibré vectoriel $\xi = (E, \pi, M)$ est une classe de cohomologie (singulière ou de de Rham) de la base $\alpha(\xi) \in H^*(M)$ naturelle vis-à-vis des applications de fibrés vectoriels. C'est-à-dire que si $f : \xi \to \xi'$ est un morphisme de fibrés vectoriels, alors $\alpha(\xi) = f^*(\alpha(\xi'))$. En particulier, si ξ et ξ' sont isomorphes, alors $\alpha(\xi) = \alpha(\xi')$.

Soit U un ouvert de M tel qu'il existe un difféomorphisme $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ comme dans la définition de fibré vectoriel. Un tel ouvert U est appelé **un ouvert de trivialisation de** ξ et h une **trivialisation locale**. Soit U_α et U_β deux ouverts de trivialisation de ξ et h_α, h_β les trivialisations locales. Alors la composée $h_\alpha^{-1} \circ h_\beta$ définit une application lisse $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl_n(\mathbb{R})$ appelée **fonction de transition**. Ces fonctions de transition vérifient la propriété de cocycle suivante : si U_γ est un autre ouvert de trivialisation et h_γ sa trivialisation, alors $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

3.2 Construction des classes caractéristiques

3.2.1 Connexion et courbures

Considérons un fibré vectoriel $\xi = (E, \pi, M)$ au-dessus d'une variété M. Notons n la dimension de la fibre. Afin de définir les classes caractéristiques de ce fibré, nous définissons les connexions et les courbures d'un fibré vectoriel.

Définition. 3.2: Connexion

Une **connexion** est une application bilinéaire $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ vérifiant $\forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma(\xi), \forall f \in \mathscr{C}^\infty(M)$:

- $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$
- $\nabla_X (fs) = f \nabla_X (s) + (Xf)s$

$\nabla_X s$ désigne $\nabla(X, s)$.

Tout fibré vectoriel possède une connexion. En effet, soit $M \times \mathbb{R}^n \to M$ un fibré trivial. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, considérons les sections $s_i : p \mapsto (p, x_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Définissons la connexion ∇ sur cet espace en posant, pour tout champ de vecteurs X sur M, $\nabla_X s_i = 0$ pour tout i. Enfin, si $s = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$ où $a_i \in \mathscr{C}^\infty(M)$, les conditions sur les connexions impliquent que $\nabla_X s = \sum_{i=1}^{n} (X a_i) s_i$. Nous avons donc bien défini une connexion sur $M \times \mathbb{R}^n$.

Si nous considérons un fibré vectoriel quelconque, soit alors $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de trivialisation localement fini de M. Soit ∇^α la connexion de U_α définie précédemment et $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une partition de l'unité. Définissons alors $\nabla_X s = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \nabla_X^\alpha s$ pour $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $s \in \Gamma(\xi)$.

Soit ∇ une connexion sur ξ. **La courbure de** ∇ est l'application $R : \mathfrak{X}(M)^2 \to \Big(\Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)\Big)$ définie par $R(X, Y) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)$ pour tout $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)^2$.
Ici, $[X, Y]$ désigne le crochet de Lie de X et Y.

Théorème. 3.2: Propriétés de la courbure

La courbure R d'une connexion ∇ vérifie les propriétés suivantes, pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, pour tout $f, g, h \in \mathscr{C}^\infty(M)$, pour tout $s \in \Gamma(\xi)$:
$R(X, Y) = -R(Y, X)$
$R(fX, gY)(hs) = fghR(X, Y)(s)$

Notre objectif à présent est d'associer à une connexion et à sa courbure des formes différentielles. Pour cela, prenons ∇ une connexion de $\xi = (E, \pi, M)$ et R sa courbure. Soit $U \subset M$ un ouvert de trivialisation de ξ. Soit $s_1, \dots, s_n$ des sections de ξ telles que pour tout point de U, $s_1, \dots, s_n$ forment une base de la fibre. Alors, pour tout champ de vecteurs X de M, nous pouvons définir pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$ des applications $\omega_j^i : \mathfrak{X}(U) \to \mathscr{C}^\infty(U)$ par $\nabla_X s_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_j^i(X) s_i$. Par définition d'une connexion, ω_j^i est une 1-forme différentielle sur U. La 1-forme $\omega = (\omega_j^i)$ ainsi obtenue est **une 1-forme de connexion de ∇ sur U**.

De la même manière, on peut définir des 2-formes de courbure Ω_j^i par $R(X, Y)(s_j) = \sum_{i=1}^{n} \Omega_j^i(X, Y) s_i$. La 2-forme (Ω_j^i) ainsi obtenue est **une 2-forme de courbure de ∇ sur U**.

Comme fait précédemment et implicitement par la suite, nous supposerons que ω et Ω sont des formes différentielles à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$. Remarquons aussi que ces définitions dépendent du choix de la famille $(s_1, \dots, s_n)$. Par la suite, nous supposerons simplement que pour un même ouvert de trivialisation, nous avons choisi la même famille pour la forme de connexion et la forme de courbure. Ces formes sont reliées par l'équation de structure suivante :

Théorème. 3.3: Équation de structure

Soit ∇ une connexion, U un ouvert de trivialisation de ξ et ω et Ω les formes de connexion et de courbure de ∇ sur U. Alors $d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega$ ce qui donne composante par composante : $d\omega_j^i = -\sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i$.

À partir de cette équation, nous pouvons calculer explicitement $d\Omega$ en remarquant que $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. Donc $d\Omega = d \circ d\omega + d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega$. Or $d \circ d = 0$. Donc $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$. Nous en déduisons l'identité de Bianchi :

Théorème. 3.4: Identité de Bianchi

$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$

Les formes que nous avons construites précédemment sont définies sur chaque ouvert de trivialisation. Il n'est pas possible a priori de définir une forme de connexion ou de courbure sur l'intégralité de M car il peut ne pas y avoir de famille de section formant une base sur chaque fibre. Par exemple, pour le ruban de Möbius, toute section lisse s'annule. De même, pour la sphère S^2 muni de son fibré tangent, d'après le théorème de la boule chevelue, il n'existe pas de champ de vecteurs (donc de section du fibré tangent) qui ne s'annule pas sur S^2. Pour ces deux fibrés, il n'existe pas de telle famille de sections. Par contre, il est possible de relier les formes de courbures et de connexions définies sur deux ouverts de trivialisation d'intersection non vide.

Théorème. 3.5: Formule de transfert

Soit U_α et U_β deux ouverts de trivialisation locale de ξ. Soit ω_α, Ω_α et ω_β, Ω_β leurs formes respectives de connexion et de courbure.
Alors $\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$ et $\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$

Bien entendu, dans le théorème ci-dessus, les équations n'ont de sens et ne sont définies que sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Enfin, $dg_{\alpha\beta}$ désigne la différentielle de $g_{\alpha\beta}$ vu comme une fonction lisse $g_{\alpha\beta} : M \to Gl_n(\mathbb{R})$. C'est donc une 1-forme différentielle à valeurs dans $Gl_n(\mathbb{R})$.

3.2.2 Polynômes invariants

Notre objectif dans cette partie est de définir les classes caractéristiques de ξ. Pour rappel, il s'agit de classes de cohomologie de la base. En particulier, nous souhaitons qu'elles soient définies sur l'intégralité de M. Malheureusement, comme vu précédemment, les formes de connexion et de courbure ne peuvent pas être définies sur l'intégralité de M. Pour contourner ce problème, nous utilisons les formules de transfert du théorème précédent et, particulièrement, celle de la forme de courbure. Nous introduisons donc les polynômes invariants.

Une fonction polynomiale $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est dite **invariante** si $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $f(X) = f(AXA^{-1})$. Notons $\mathscr{I}_n$ l'algèbre commutative des polynômes invariants. Un théorème d'algèbre linéaire affirme que $\mathscr{I}_n$ est engendrée en tant qu'algèbre par $s_1, \ldots, s_n$ où pour $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i : X \mapsto \mathrm{Tr}(X^i)$.

Maintenant, nous sommes toujours en train de considérer une connexion ∇ de ξ. Soit $f \in \mathscr{I}_n$ de degré k. Soit U_α un ouvert de trivialisation et Ω_α une forme de courbure de ∇ sur α. Alors $f(\Omega_\alpha)$ est une $2k$-forme différentielles sur U_α. Néanmoins, remarquons que si Ω_β est une autre forme de courbure de ∇ sur un ouvert de trivialisation U_β. Alors, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, $f(\Omega_\beta) = f(g_{\alpha\beta}^{-1}\Omega_\alpha g_{\alpha\beta}) = f(\Omega_\alpha)$ car f est un polynôme invariant. Nous pouvons donc définir une $2k$-forme globale sur M que nous noterons $f(\Omega)$.

Théorème. 3.6:

Pour tout polynôme invariant $f \in \mathscr{I}_n$ de degré k, $f(\Omega)$ est un élément de $\mathcal{A}^{2k}(M)$ et est fermée.

Pour prouver ce résultat, remarquons que comme $\mathscr{I}_n$ est engendrée par $s_1, \ldots, s_n$, il est suffisant de prouver cela pour les s_i. Soit donc $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $d(s_i(\Omega)) = d(\mathrm{Tr}(\Omega^i)) = \mathrm{Tr}(d\Omega^i)$. Or $d\Omega^i = d\Omega \wedge \Omega^{i-1} + \Omega \wedge d\Omega \wedge \Omega^{i-2} + \cdots + \Omega^{i-1} \wedge d\Omega$. Comme $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$ par l'indentité de Bianchi, $d\Omega^i = -\omega \wedge \Omega^{i-1} + \Omega^{i-1} \wedge \omega$. Donc $d(s_i(\Omega)) = \mathrm{Tr}(-\omega \wedge \Omega^{i-1} + \Omega^{i-1} \wedge \omega) = 0$ car les coefficients de Ω et de ω commutent. $\square$

À ce stade, nous savons qu'étant donné une connexion ∇ de ξ, nous pouvons définir une $2k$-forme fermée sur M et donc, en considérant sa classe de cohomologie, nous pouvons définir une classe caractéristique (il faudra prouver la naturalité) de ξ dépendant du choix d'une connexion. En fait, la classe $[f(\Omega)] \in H^{2k}_{\mathrm{DR}}(M)$ est indépendante du choix de connexion.

Théorème. 3.7: Définition des classes caractéristiques

Soit $f \in \mathscr{I}_n$ de degré k. Soit ∇ une connexion et Ω une forme de courbure.
La classe caractéristique de ξ associée à f est la classe $[f(\Omega)] \in H^{2k}_{DR}(M)$.
Elle est indépendante du choix de ∇.

Pour prouver l'indépendance vis-à-vis du choix de la connexion, considérons ∇^0 et ∇^1 deux connexions de ξ avec comme forme de courbure Ω^0 et Ω^1 respectivement. Soit $\pi\times\mathrm{id} : E\times\mathbb{R} \to M\times\mathbb{R}$. Alors $\eta := (E\times\mathbb{R}, \pi, M\times\mathbb{R})$ est un fibré vectoriel. Sur ce fibré vectoriel, nous définissons la connexion $\overline{\nabla}$ en posant, pour tout section $s \in \Gamma(\eta)$ indépendante de t la coordonnée réelle, $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} s = 0$ et $\overline{\nabla}_X s = (1-t)\nabla^0_X s + t\nabla^1_X s$ où $X \in T_{(p,t)}(M) \times \{t\}$. Par les propriétés d'une connexion, cette définition suffit puisque tout champ de vecteurs de $M \times \mathbb{R}$ est combinaison linéaire de $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et d'un champ de vecteurs sur M et puisque toute section de $M \times \mathbb{R}$ est combinaison linéaire de sections indépendantes de t où les coefficients sont des fonctions lisses. Définissons alors $\overline{\Omega}$ une forme de courbure associée à $\overline{\nabla}$ et $f(\overline{\Omega})$ sa classe caractéristique. Soit $i_\varepsilon : M \to M \times \mathbb{R}$ défini par $i_\varepsilon(p) = (p, \varepsilon)$ pour $\varepsilon = 0$ ou 1. Alors $i_\varepsilon^*\overline{\Omega} = \Omega^\varepsilon$ par définition de $\overline{\Omega}$. Donc $i_\varepsilon^* f(\overline{\Omega}) = f(\Omega^\varepsilon)$. Enfin, i_0 et i_1 sont homotopiques. Donc, par le théorème de de Rham, $[f(\Omega^0)] = i_0^*[f(\overline{\Omega})] = i_1^*[f(\overline{\Omega})] = [f(\Omega^1)]$.$\square$

Comme nous avons prouvé que les classes $[f(\Omega)]$ sont indépendantes du choix de la connexion, $[f(\Omega)]$ ne dépend que du fibré vectoriel ξ. Nous notons donc $f(\xi)$ la classe caractéristique de ξ associée à f. Comme nous l'avons précisé plus haut, pour parler de classes caractéristiques, il est nécessaire de montrer la naturalité de ces classes. Soit donc $\xi = (E, \pi, M)$ et $\xi' = (E', \pi', M')$ deux fibrés vectoriels. Soit $g : \xi \to \xi'$ un morphisme de fibré vectoriel. Nous avons alors la propriété de naturalité suivante :

Théorème. 3.8: Naturalité des classes caractéristiques

Sous les conditions précédemment énoncées, $f(\xi) = g^*(f(\xi'))$.

Soit ∇ une connexion de ξ'. Nous définissons une connexion sur ξ notée $g^*\nabla$. Pour cela, remarquons que si s est une section de ξ', alors g^*s est une section de ξ. De plus, toute section de ξ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathscr{C}^\infty(M)$ de sections g^*s où s est une section de ξ'. Donc, nous pouvons définir une connexion en posant : $(g^*\nabla)_X(g^*s) = g^*(\nabla_{g_*X}s)$. Une forme de connexion de $g^*\nabla$ est par définition $g^*\omega$ où ω est une forme de connexion de ∇ et sa forme de courbure est $g^*\Omega$ où Ω est une forme de courbure de ∇. La naturalité est une conséquence immédiate de cette propriété. $\square$

3.2.3 Classes de Pontrjagin et de Chern

D'après les théorèmes de la partie précédente, nous pouvons construire et calculer beaucoup de classes caractéristiques. Néanmoins, toutes ne sont pas pertinentes. Les classes de Pontrjagin et de Chern sont des classes caractéristiques possédant quelques propriétés intéressantes que nous allons énoncer dans cette partie.

Pour étudier les classes caractéristiques plus en détail, nous introduisons la notion de métrique riemannienne d'un fibré vectoriel. Une **métrique riemanienne** sur $\xi = (E, \pi, M)$ est la donnée en tout point $p \in M$ d'un produit scalaire sur F_p, la fibre au-dessus de p qui soit lisse par rapport à p. Nous le notons g_p. Comme pour les variétés, le théorème suivant est vérifié :

Théorème. 3.9: Existence d'une métrique riemannienne

Tout fibré vectoriel ξ admet une métrique riemannienne.

À présent, supposons que nous avons en plus d'un fibré vectoriel ξ une métrique riemannienne g sur ξ. Une connexion ∇ est appelée une connexion **métrique** si $X(g(s, s')) = g(\nabla_X s, s') + g(s, \nabla_X s')$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$ et tous $s, s' \in \Gamma(\xi)$. Tout fibré vectoriel admet une connexion métrique. Cette propriété est une conséquence du procédé de Gram-Schmidt. Cette connexion est intéressante puisque alors pour tout ouvert de trivialisation U_α et toute base orthonormée $s_1, \ldots, s_n$ sur U_α, les formes de connexion et de courbure associées sont anti-symétriques. En particulier, $\mathrm{Tr}(\Omega^i) = 0$ pour i impair. Nous déduisons de ce fait le théorème suivant :

Théorème. 3.10: Trivialité des classes de degrés impairs

Si f est de degré impair, alors $f(\xi) = 0$

Par le fait précédent, nous avons montré que beaucoup de classes caractéristiques ne sont pas pertinentes à étudier. Certaines de ces classes ne sont pas nulles pour tout fibré ξ mais nous ne le prouverons pas ici. En particulier, nous pouvons définir les classes de Pontrjagin. Soit k un entier naturel plus petit que $\frac{n}{2}$. Soit $\sigma_{2k} \in \mathscr{I}_n$ défini par $\sigma_{2k}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k}$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A avec multiplicité.

La k**-ième classe de Pontrjagin de** ξ est $p_k(\xi) := \dfrac{1}{(2\pi)^{2k}}\sigma_{2k}(\Omega) \in H^{4k}(M)$. Nous pouvons aussi écrire : $\left[\det\left(I + \dfrac{1}{2\pi}\Omega\right)\right] = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_i(\xi)$. Nous notons $p(\xi) := 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_i(\xi)$ la classe totale de Pontrjagin. On peut prouver que cette classe correspond à une classe à coefficients entiers que l'on peut définir de manière topologique.

Contrairement à la classe de Pontrjagin, la classe de Chern est une classe caractéristique des fibrés vectoriels complexes et non réels. Un fibré vectoriel complexe a la même définition qu'un fibré vectoriel réel si ce n'est qu'en tout point $p \in M$, $F_p \cong \mathbb{C}^n$. Les définitions et les propriétés énoncées précédemment sont les mêmes si ce n'est que nous travaillons avec $\mathcal{A}^*(M, \mathbb{C}) := \mathcal{A}^*(M) \otimes \mathbb{C}$, l'espace des formes différentielles à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $H^*(M, \mathbb{C})$ la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{C}$. Sur un tel fibré, nous pouvons définir des connexions de manière similaire aux fibrés vectoriels réels en ajoutant la condition $\nabla_X(is) = i\nabla_X s$ pour tout $X \in \mathcal{A}^*(M, \mathbb{C})$ et $s \in \Gamma(\xi)$. Nous obtenons alors des formes de connexion et de courbure pour ∇ et nous pouvons définir des classes caractéristiques de fibrés vectoriels complexes. Soit $\xi = (E, \pi, M)$ un fibré vectoriel complexe.

La classe de Chern de ξ **notée** $c_k(\xi)$ de degré k est la classe caractéristique associée à $\left(\dfrac{-1}{2i\pi}\right)^k \sigma_k$. Autrement dit, $\left[\det\left(I - \dfrac{1}{2\pi i}\Omega\right)\right] = 1 + \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi)$. Cette dernière classe est appelée **la classe totale** de Chern notée $c(\xi)$.

Si, par sa définition, la classe de Chern est une classe cohomologique complexe, il s'avère en pratique que ce n'est pas le cas. On peut prouver que ses coefficients sont réels et même entiers.

L'intérêt de ces classes sont les propriétés suivantes qu'elles vérifient. Étant donné $\xi = (E, \pi, M)$ et $\eta = (F, \psi, M)$ nous pouvons définir le fibré vectoriel $\xi \oplus \eta$ comme la somme de ces deux fibrés. Formellement, $\xi \oplus \eta = (E \oplus F, \pi \oplus \psi, M)$ où $E \oplus F := \{(u, v) \in E \times F | \pi(u) = \psi(v)\}$ et $\pi \oplus \psi(u, v) = \pi(u) = \psi(v)$. Les classes de Pontrjagin et de Chern se comportent bien vis-à-vis de la somme de fibrés selon la formule de Whitney :

Théorème. 3.11: Formule de Whitney

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $c_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} c_i(\xi)c_{k-i}(\eta)$ ou encore $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta)$.

Pour tout $k \in \left[\!\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\!\right]$, $p_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} p_i(\xi)p_{k-i}(\eta)$ ou encore $p(\xi \oplus \eta) = p(\xi)p(\eta)$.

De plus, ces deux classes caractéristiques sont reliées. Si $\xi = (E, \pi, M)$ est un fibré vectoriel réel, alors nous pouvons considérer le fibré complexe associé : $\xi' = (E \otimes \mathbb{C}, \pi, M)$. Alors $p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi')$.

De même, si $\xi = (E, \pi, M)$ est un fibré vectoriel complexe, nous pouvons oublier la structure complexe et le considérer comme un fibre vectoriel réel de dimension 2 fois plus grande. Notons $\xi_{\mathbb{R}}$ le fibré réel ainsi construit. Notons $c = c(\xi)$ et $p = p(\xi_{\mathbb{R}})$. Alors $1 - p_1 + p_2 - \ldots + (-1)^n p_n = (1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n)(1 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^n c_n)$.

4 Classes caractéristiques des fibrés principaux

La structure de fibré que nous avons évoquée dans la partie précédente possède des exemples bien plus nombreux que la seule étude des fibrés vectoriels. Dans cette partie, nous étudions les fibrés principaux et leurs classes caractéristiques. Un fibré principal est un espace fibré où la fibre est un groupe de Lie et ce même groupe de Lie agit sur l'espace total. Nous définirons ici les classes caractéristiques d'un tel espace en utilisant les formes différentielles [4].

4.1 Propriétés des fibrés principaux

4.1.1 Définition

Définition. 4.1: Espace fibré

Soit G un groupe de Lie et B une variété. **Un espace fibré ξ de fibre G** est la donnée de :

- deux variétés différentielles E et B
- une application $\mathscr{C}^\infty$ $\pi : E \to B$ appelé application de projection

vérifiant la condition de trivialisation locale suivante : pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tel que le diagramme suivant commute où π_1 désigne la projection sur la première coordonnée :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times G \arrow[d, "\pi_1"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}"] & B \end{tikzcd}$$

Cette définition peut être étendue à un cadre plus général mais nous n'en aurons pas besoin. L'intérêt d'introduire un groupe de Lie est de pouvoir l'utiliser pour agir sur la fibre. Malheureusement, dans le cas général, il n'est pas possible de faire agir un groupe de Lie G sur un espace fibré de fibre G. Pour palier ce problème, nous contraignons davantage les espaces que nous étudions.

Soit $\xi = (E, \pi, B, G)$ un espace fibré de fibre G. Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de B tel que chaque U_α est un ouvert de trivialisation de ξ. Soit α et β dans A. Supposons $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. Alors $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ induit une application $\mathscr{C}^\infty$: $g_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}\ G$ où $\mathrm{Diff}\ G$ désigne l'espace des difféomorphismes de G. Comme pour les fibrés vectoriels, nous appelons cette application **application de transition**. Ces applications de transition vérifient la propriété de cocycle suivante : si $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma$ sont des ouverts de trivialisation, alors $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

La difficulté de l'étude des espaces fibrés vient du fait que l'espace $\mathrm{Diff}\ G$ est très gros. Il est donc difficile d'en déduire des propriétés générales sur la structure. Néanmoins, nous savons que $G \subset \mathrm{Diff}\ G$ par l'application $g \mapsto (h \mapsto gh)$.

Définition. 4.2: Fibré principal

Un **G-fibré principal** est un espace fibré de fibre G muni d'un recouvrement ouvert de trivialisation (U_α) tel que les applications de transition $g_{\alpha\beta}$ sont à valeurs dans G.

Si $\xi = (E, \pi, B, G)$ est un G-fibré principal. Une **section** de ξ est une application s $\mathscr{C}^\infty$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$. Comme pour les fibrés vectoriels, nous pouvons définir des morphismes entre G-fibrés principaux. Soit $\xi = (E, \pi, B, G)$ et $\xi' = (E', \pi', B', G)$ deux G-fibrés principaux. Un **morphisme de G-fibré principal** $f : \xi \to \xi'$ est une application $\mathscr{C}^\infty$ $\overline{f} : E \to E'$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, "\overline{f}_{|M}"] & B' \end{tikzcd}$$

telle que l'application induite pour tout $p \in M$, $\overline{f} : F_p(\xi) \to F_{\overline{f}(p)}(\xi')$ est un difféomorphisme et telle que, pour toute trivialisation (U, ϕ) de ξ et toute trivialisation (V, ψ) de ξ', alors $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : (U \cap f^{-1}(V)) \times G \to V \times G$ définit une application $\mathscr{C}^\infty$ $h : (U \cap f^{-1}(V)) \to G$ par $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(b, g) = (f(p), h(p)g)$.

4.1.2 Caractérisation des fibrés principaux

L'intérêt des G-fibrés principaux est qu'ils sont naturellement munis d'une action de G sur eux-même.

Théorème. 4.1: Action sur un fibré principal

Soit $\xi = (P, \pi, B, G)$ un fibré principal alors il existe une action libre à droite de G sur P préservant la fibre. De plus, l'espace P/G peut être identifié comme B.

Pour définir cette action, prenons $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de trivialisation de ξ. Soit $u \in P$ et $g \in G$. Soit α tel que $p := \pi(u) \in U_\alpha$ et soit $h \in G$ tel que $\phi_\alpha(u) = (p, h)$. Alors $ug = \phi_\alpha^{-1}(p, hg)$. Cette action est bien défini puisque si on a aussi $p \in U_\beta$, alors $\phi_\beta(u) = (p, g_{\beta\alpha}(p)h)$. Donc $\phi_\beta^{-1}(u, g_{\beta\alpha}(p)hg) = \phi_\beta \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(u, hg) = \phi_\alpha^{-1}(u, hg) = ug$ par définition des applications de transition. $\square$

Réciproquement, nous aurions pu définir les G-fibrés principaux en les supposant munis d'une G-action à droite compatible avec la trivialisation locale mais les deux constructions sont équivalentes.

Il est aisé de déterminer si un fibré principal est trivial comme le montre le théorème suivant :

Théorème. 4.2: Critère de trivialité

Soit $\xi = (P, \pi, B, G)$ un fibré principal. Alors ξ est trivial si et seulement si il admet une section.

Ici, par trivial, nous entendons qu'il existe un isomorphisme de fibré $f : \xi \to \xi_0$ où ξ_0 est le fibré $(B \times G, \pi_1, B, G)$ où π_1 désigne la projection sur la première coordonnée.

Montrons à présent ce résultat. Supposons que ξ admette une section s. Soit $\overline{f} : P \to B \times G$ défini par : pour tout $u \in P$, $\overline{f}(u) = (p, g)$ où $p = \pi(u)$ et g est l'unique élément de G tel que $s(\pi(u))g = u$. Alors $\overline{f}$ est un isomorphisme de fibré vers le fibré produit $B \times G$.

Supposons que ξ est trivial. Alors l'application $b \mapsto (b, e)$ où e est le neutre de G défini une section de ξ. $\square$

En fait, nous pouvons même théoriquement être plus précis que ça. Nous pouvons classifier les G-fibré principaux à isomorphisme près. En effet, à l'instar des fibrés vectoriels, il existe un **G-fibré universel** $\pi : EG \to BG$ pour lequel la propriété suivante est vérifiée :

Théorème. 4.3: Classification des G-fibrés principaux

Soit B une variété différentielle. Soit ξ un G-fibré principal au-dessus de B. Alors il existe une application différentielle $f : B \to BG$, unique à homotopie près, telle que le tiré-en-arrière par f du G-fibré universel soit isomorphe à ξ.

Dans ce théorème, nous considérons une version étendue de la définition de fibré principal que nous avons présentée. Les espaces EG et BG ne sont pas des variétés différentielles de dimension finie comme nous le supposons dans ce rapport. Ce sont des variétés différentielles de dimension infinie. Nous admettrons ce théorème et ne rentrerons pas davantage dans les détails. Nous retiendrons simplement que la détermination des espaces EG et BG est difficile. Par conséquent, nous introduisons d'autres invariants topologiques : les classes caractéristiques.

Une classe caractéristique $\alpha(\xi)$ d'un fibré principal $\xi = (P, \pi, B, G)$ est une classe de cohomologie de la base $\alpha(\xi) \in H^*(B)$ naturel vis-à-vis des applications de fibrés principaux. C'est-à-dire que si $f : \xi \to \xi'$ est un morphisme de fibrés vectoriels, alors $\alpha(\xi) = f^*(\alpha(\xi'))$. En particulier, si ξ et ξ' sont isomorphes, alors $\alpha(\xi) = \alpha(\xi')$.

4.2 Algèbre de Weil

4.2.1 Connexions et courbures

Notre objectif pour décrire les fibrés principaux est de mesurer à quel point ils se "tordent". Pour mesurer cette idée, nous introduisons la notion de connexions. Contrairement aux fibrés vectoriels, un fibré principal ne possède a priori pas de sections. Une connexion sur un fibré principal sera donc un choix en chaque point de la base d'un espace horizontal.

Soit $\xi = (P, \pi, B, G)$ un fibré principal. Pour tout point $u \in P$, on peut définir un espace vertical $V_u \subset T_uP$ par $V_u := T_uF_b$ où F_b est la sous-variété de P définie par $F_b = \pi^{-1}(\pi(u))$. On peut aussi définir V_u par $V_u := \{X \in T_uP | \pi_* X = 0\}$. L'espace V_u représente l'ensemble des vecteurs verticaux, c'est-à-dire parallèle à la fibre. Néanmoins, il n'est pas possible de définir naturellement la notion d'espace horizontal. La notion de connexion permet de palier à ce problème.

Définition. 4.3: Connexion

Une **connexion** sur ξ est la donnée en tout point $u \in P$ d'un espace $H_u \subset T_uP$ tel que :

- H_u est transverse à la fibre, c'est-à-dire que $T_uP = H_u \oplus V_u$
- H_u est invariante par l'action à droite de G sur P. Donc si $R_g : u \mapsto ug$, alors $H_{ug} = (R_g)_* H_u$
- H_u est différentiable en u

Tout fibré principal admet une connexion. L'idée pour le prouver est la même que pour les fibrés vectoriels à savoir utiliser un recouvrement ouvert de trivialisation, définir des connexions sur chacun et utiliser une partition de l'unité pour l'étendre sur l'ensemble de P.

Comme pour les fibrés vectoriels, nous souhaitons donc associer à une connexion une forme différentielle. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Rappelons que $\mathfrak{g}$ s'injecte dans $\mathfrak{X}(G)$ par les champs de vecteurs invariants à gauche. Notons aussi $L_g : h \mapsto gh$ et $R_g : h \mapsto hg$ les actions à gauche et à droite de G sur lui même. Enfin, notons $\iota_g : h \mapsto ghg^{-1}$ et $\mathrm{Ad}(g)$ sa différentielle.

Revenons à notre fibré principal ξ. Comme il est localement trivial, pour tout point $b \in B$, il existe un difféomorphisme $i_b : G \cong \pi^{-1}(b)$ tel que pour tout $g, h \in G$, $i_b(gh) = i_b(g)h$. De plus, si un autre difféomorphisme i'_b de la sorte existe alors il existe $g \in G$ tel que $i'_b = i_b \circ L_g$. Par conséquent, les différentielles de i_b et de i'_b correspondent sur les champs de vecteurs invariants à gauche de G, c'est-à-dire sur les éléments de $\mathfrak{g}$. D'où une identification naturelle pour tout point $u \in P$, $V_u \cong \mathfrak{g}$. Cela signifie aussi que tout $A \in \mathfrak{g}$ induit un champ de vecteurs sur P noté A^* et appelé le **champ de vecteurs fondamental**.

Avec l'identification ci-dessus, nous pouvons définir une 1-forme différentielle ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$ sur P en posant, pour tout $u \in P$, que ω_u est la projection de T_uP sur $V_u \cong \mathfrak{g}$ parallèlement à H_u. Alors $\omega(A^*) = A$ et $R_g * \omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$. Réciproquement, si ω est connu, nous pouvons définir H_u pour tout u en posant : $H_u = \{X \in T_uP | \omega(X) = 0\}$. Nous rassemblons les résultats ci-dessus dans le théorème suivant :

Théorème. 4.4: Forme de connexion

Si une connexion est donnée sur ξ, alors il existe une 1-forme de P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ défini par $\omega(A^*) = A$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$ et $R_g^* \omega = Ad(g^{-1})\omega$.
Réciproquement, si une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ vérifiant $\omega(A^*) = A$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$ et $R_g^* \omega = Ad(g^{-1})\omega$, alors une connexion est définie sur ξ.

Soit donc $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$ une 1-forme de connexion de ξ. Nous définissons une 2-forme de courbure $\Omega := d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$. Cette définition se justifie par le fait que si ξ est trivial, alors $\Omega = 0$. La 2-forme de courbure $\Omega \in \mathcal{A}^2(P, \mathfrak{g})$ hérite de certaines propriétés de la forme de connexion :

Théorème. 4.5: Propriétés de la forme de courbure

$\forall g \in G$, $R_g^*\Omega = Ad(g^{-1})\Omega$
$\forall X, Y \in T_uP$, $\Omega(X,Y) = d\omega(X_h, Y_h)$ où X_h et Y_h sont les projections de X et Y sur H_u.
Si X et Y sont horizontaux, alors $\Omega(X,Y) = -\dfrac{1}{2}\omega([X,Y])$
(Identité de Bianchi) $d\Omega = [\Omega, \omega]$

À ce stade, nous pourrions, comme pour les fibrés principaux, utiliser les polynômes invariants pour définir des classes de cohomologie naturelle et s'en servir comme classe caractéristique. Malheureusement, ceci ne serait pas pertinent. En effet, ω et Ω sont des formes différentielles de l'espace totale et non de la base. En particulier, étant donné deux fibrés principaux ξ et ξ de même base B mais d'espace total P et P' respectivement, alors les classes de cohomologies associées vivraient dans deux espaces différents et nous ne pourrions pas les comparer.

4.2.2 Définition de l'algèbre de Weil

Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Alors $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$ désigne l'espace vectoriel des k-formes multi-linéaires alternées sur $\mathfrak{g}$. Il est alors connu que si $(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ est une base de $\mathfrak{g}^*$, alors $(\theta_{i_1} \wedge \cdot \wedge \theta_{i_k})_{i_1,\ldots,i_k \in [\![1,m]\!]}$ est une base de $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$. De plus, nous notons $S^*\mathfrak{g}^*$ l'algèbre des polynômes de $\mathfrak{g}^*$. Formellement, $S^*\mathfrak{g}^* = \{f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R} | f \text{ polynomial}\}$.

Définition. 4.4:

L'algèbre de Weil de $\mathfrak{g}$ notée $W(\mathfrak{g})$ est l'algèbre graduée $\Lambda^*g^* \otimes S^*\mathfrak{g}^*$ où les éléments de $S^*\mathfrak{g}^*$ sont de degrés pairs. Ainsi, si $f \in S^*g^*$ est de degré n alors sont degré dans $W(\mathfrak{g})$ est $2n$.

L'intérêt de ces constructions est qu'on peut les relier aux formes différentielles de P par les formes de connexion et de courbure. En effet, si $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, alors pour tout $u \in P$, $\alpha \circ \omega : T_uP \to \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$. Donc ω définit aussi une application linéaire $\omega : \mathfrak{g}^* \to \mathcal{A}^1(P)$ que nous noterons également abusivement ω. En étendant cette définition au produit $\wedge$, nous obtenons une application $\omega : \Lambda^*\mathfrak{g}^* \to \mathcal{A}^*(P)$ par $\omega(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}) = \omega(\theta_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \omega(\theta_{i_k})$.
De même, Ω induit une application linéaire $\Omega : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}^2(P)$. Nous pouvons l'étendre de manière similaire en $\Omega : S^*\mathfrak{g}^* \to \mathcal{A}^*(P)$.

Théorème. 4.6: Morphisme de Weil

L'application $w := \omega \otimes \Omega : W(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}(P)$ est un morphisme d'algèbres graduées.

Comme pour les formes différentielles, l'algèbre de Weil est munie de certaines opérations que nous définissons ci-dessous.

L'algèbre de Weil est munie d'un produit intérieur. Soit $A \in \mathfrak{g}$. Alors nous définissons **le produit intérieur par** A noté $i(A)$ sur $W(\mathfrak{g})$ en posant pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^* \subset W(\mathfrak{g})$, $i(A)\alpha = \alpha(A)$ et, pour tout $\beta \in S^1g^*$, $i(A)\beta = 0$. Enfin, nous étendons $i(A)$ sur $W(\mathfrak{g})$ tout entier en supposant que c'est une anti-dérivation de degré -1. C'est-à-dire que $i(A)(\alpha \wedge \beta) = i(A)\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i(A)\beta$ où $\alpha, \beta \in W(\mathfrak{g})$ et α de degré k.

L'algèbre de Weil est munie d'une action à droite de G. Soit $g \in G$. Alors nous définissons **l'action de** g notée g^* sur $W(\mathfrak{g})$ en posant pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^* \subset W(\mathfrak{g})$, $g^*\alpha = \mathrm{Ad}(g^{-1})^*\alpha$ et, pour tout $\beta \in S^1g^*$, $g^*\beta = \mathrm{Ad}(g^{-1})^*\beta$. Enfin, nous étendons g^* sur $W(\mathfrak{g})$ tout entier en préservant le produit $\wedge$, c'est-à-dire que $g^*(\alpha \wedge \beta) = g^*\alpha \wedge g^*\beta$.

L'algèbre de Weil est munie d'une dérivée de Lie. Soit $A \in \mathfrak{g}$. Alors nous définissons **la dérivée de Lie de** A notée L_A sur $W(\mathfrak{g})$ en posant pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^* \subset W(\mathfrak{g})$ et $B \in \mathfrak{g}$, $L_A\alpha(B) = -\alpha([A,B])$ et, pour tout $\beta \in S^1g^*$ et tout $B \in \mathfrak{g}$, $L_A\beta(B) = -\beta([A,B])$. Enfin, nous étendons $i(A)$ sur $W(\mathfrak{g})$ tout entier en supposant que c'est une dérivation de degré 0. C'est-à-dire que $L_A(\alpha \wedge \beta) = L_A\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_A\beta$.

Ces opérations s'identifient à des opérations sur les formes différentielles par le morphisme de Weil. Notons, pour $X \in \mathfrak{X}(M)$, $i(X)$ le produit intérieur par un champ de vecteurs X. Notons R_g^* pour $g \in G$ le tiré-en-arrière d'une forme différentielle de P par l'action à droite de G sur P. Et notons L_{A^*} la dérivée de Lie par un vecteur fondamental où $A \in \mathfrak{g}$. Alors les diagrammes suivants commutent avec $A \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{tikzcd} W(\mathfrak{g}) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "i(A)"'] & \mathcal{A}^*(P) \arrow[d, "i(A^*)"] \\ W(\mathfrak{g}) \arrow[r, "w"] & \mathcal{A}^*(P) \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} W(\mathfrak{g}) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g^*"'] & \mathcal{A}^*(P) \arrow[d, "R_g^*"] \\ W(\mathfrak{g}) \arrow[r, "w"] & \mathcal{A}^*(P) \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} W(\mathfrak{g}) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "L_A"'] & \mathcal{A}^*(P) \arrow[d, "L_{A^*}"] \\ W(\mathfrak{g}) \arrow[r, "w"] & \mathcal{A}^*(P) \end{tikzcd}
\end{array}$$

4.2.3 Morphisme de Weil et classes caractéristiques

Nous souhaitons à présent restreindre les éléments de l'algèbre de Weil à une sous-algèbre $\mathscr{I} \subset W(\mathfrak{g})$ telle que $w : \mathscr{I} \to \mathcal{A}^*(P)$ puisse se factoriser en $\mathscr{I} \to \mathcal{A}^*(M) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{A}^*(P)$. Nous introduisons donc les définitions nécessaires.
Soit $\eta \in \mathcal{A}^*(P)$ une forme différentielle de P. η est dite **basique** si η est dans l'image de π^*, c'est-à-dire s'il existe $\eta' \in \mathcal{A}^*(B)$ tel que $\eta = \pi^*\eta'$. Les formes basiques sont caractérisées par le lemme suivant :

Théorème. 4.7: Caractérisation des formes basiques

Soit $\eta \in \mathcal{A}^*(P)$ une forme différentielle. η est basique si et seulement si :
- $\forall A \in \mathfrak{g}$, $i(A^*)\eta = 0$
- $\forall g \in G$, $R_g^*\eta = \eta$

Enfin, si G est connexe, la deuxième condition peut être remplacée par : $\forall A \in \mathfrak{g}$, $L_{A^*}\eta = 0$.

Un élément x de l'algèbre de Weil $W(\mathfrak{g})$ est dit **basique** si son image par w l'est. De manière équivalente, d'après le lemme ci-dessus, x est basique si $\forall A \in \mathfrak{g}$, $i(A)x = 0$ et si $\forall g \in G$, $g^*x = x$. Notons $\mathscr{I}(G)$ l'algèbre des formes basiques de G.
Si f est un élément de $\mathscr{I}(G)$, $w(f)$ est basique dans $\mathcal{A}^*(P)$. Comme π^* est injective, il existe donc un unique $\eta \in \mathcal{A}^*(B)$ tel que $w(f) = \pi^*\eta$. Nous en déduisons une application $w : \mathscr{I}(G) \to \mathcal{A}^*(B)$. Cette application vérifie la propriété suivante :

Théorème. 4.8:

Pour tout élément $f \in \mathscr{I}(G)$, $w(f)$ un élément de $A^*(B)$ est fermée.

Comme $w(f)$ est fermée, nous pouvons considérer sa classe de cohomologie. Nous en déduisons un morphisme $w : \mathscr{I}(G) \to H^*(B, \mathbb{R})$ que nous appelons **le morphisme de Weil**. L'intérêt de ce morphisme est la propriété suivante :

Théorème. 4.9: Théorème de Chern-Weil

Soit $\xi = (P, \pi, B, G)$ un G-fibré principal. Si nous choisissons une connexion sur ξ, alors le morphisme de Weil $w : \mathscr{I}(G) \to H^*(B, \mathbb{R})$ est défini. Il est indépendant du choix de la connexion.
De plus, si nous posons $f(\xi) = w(f)$ pour $f \in \mathscr{I}(G)$, alors $f(\xi)$ est une classe caractéristique de ξ.

4.3 Fibrés plats et morphismes d'holonomie

Dans cette partie, nous étudions un type particulier de fibré principaux : les fibrés plats. L'objectif de cette étude est entre autres de montrer l'insuffisance des classes caractéristiques définies plus haut.

4.3.1 Définition des fibrés plats

Soit $\xi = (P, \pi, B, G)$ un fibré principal.

Définition. 4.5: Fibré plat

ξ est dit **plat** si sa forme de courbure Ω est identiquement nulle.

Soit $\xi_1 = (P_1, \pi_1, B_1, G)$ et $\xi_2 = (P_2, \pi_2, B_2, G)$ deux fibrés principaux plats et soit ω_1, ω_2 leur forme de connexion respective. Une application de fibré principal $f : \xi_1 \to \xi_2$ est une application de fibrés principaux plats si l'application induite $\overline{f} : P_1 \to P_2$ vérifie $\overline{f}^* \omega_2 = \omega_1$.

L'intérêt d'introduire les fibrés plats est que si ξ est plat, comme sa forme de courbure $\Omega = 0$, alors ses classes de caractéristique au sens de Weil comme vu si dessus sont toutes nulles. En particulier, on espérerait que ξ soit trivial. Malheureusement, comme nous le verrons plus loin, ce n'est pas le cas. Pour l'instant, nous montrons le résultat suivant sur les fibrés plats.

Théorème. 4.10: Caractérisation des fibrés plats

Soit $\xi = (P, \pi, B, G)$ un fibré principal. Soit ω sa forme de connexion.
La correspondance $H_u = \{X \in T_u P, \omega(X) = 0\}$ est une distribution.
Alors ξ est plat si et seulement si H est complètement intégrable c'est-à-dire que pour tout $u \in P$, il existe une sous-variété N contenant u de P tel que $H_u = T_u N$.

Pour prouver ce résultat, nous utilisons le théorème de Fröbenius. H est complètement intégrable si et seulement si H est involutive c'est-à-dire que, pour tous champs de vecteurs X, Y de P, $X, Y \in H$. Alors, si $X, Y \in H$, $\omega(X) = \omega(Y) = 0$. Donc $d\omega(X,Y) = \dfrac{1}{2}(X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])) = -\dfrac{1}{2}\omega([X,Y])$ d'une part. D'autre part, $d\omega(X,Y) = -\dfrac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y) = 0$. Donc $\Omega = 0$ implique que H est involutive. Réciproquement, si H est involutive, alors, pour tout couple de champ de vecteurs X et Y, $\Omega(X,Y) = \Omega(X_h, Y_h)$ où X_h et Y_h sont les projections sur H de X et Y. Donc $\Omega(X_h, Y_h) = 0$. Donc ξ est plat.$\square$

Grâce à ce fait, on remarque que l'on peut, dans le cas d'un fibré plat, définir des variétés horizontales en tout point u de P. Soit $\xi = (P, \pi, B, G)$ un fibré principal plat. Soit $u \in P$. On note par L_u la variété intégrable maximale passant par u. L_u est donc la plus grande variété au sens de l'inclusion connexe contenant u tel que pour tout point $v \in L_u$, $T_v L_u = H_v$. Alors L_u est appelée **la variété horizontale en** u. La projection π restreinte à L_u devient une application surjective $\pi : L_u \to B$. C'est même un revêtement de B.

4.3.2 Morphisme d'holonomie

Maintenant que nous avons défini un revêtement sur B, nous pouvons relever des lacets de B sur les espaces horizontaux et définir un morphisme $\rho : \pi_1(B) \to G$.
Formellement, soit p_0 un point de B. Soit $u_0 \in \pi^{-1}(p_0)$. Soit l un lacet de B d'origine p_0. Soit $\overline{l}$ le relevé de l par le revêtement $\pi : L_{u_0} \to B$ avec comme point de base u_0. Alors $\pi(\overline{l}(1)) = p_0$ par définition. Donc il existe $g \in G$ tel que $\overline{l}(1) = u_0 g$. Enfin, comme $\pi : L_{u_0} \to B$ est un revêtement, $\overline{l}(1)$ est uniquement déterminé par α la classe d'homotopie de l. Donc nous définissons $\rho(\alpha) = g^{-1}$. ρ est un morphisme de groupe $\rho : \pi_1(B) \to G$ appelé **le morphisme d'holonomie ou de monodronie**.

Si nous changeons le point de base u_0' dans la construction ci-dessus, les deux morphismes sont conjugués l'un de l'autre. En effet, si u_0' est un autre point de la fibre au-dessus de p_0, alors notons ρ' le morphisme d'holonomie associé. Soit $h \in G$ tel que $u_0 h = u_0'$. Alors $\pi \circ (\overline{l}h) = l$. Donc $\overline{l}h$ est un relevé de l de point de base u_0'. Par conséquent, comme $\overline{l}(1)h = gh$, $\rho'(\alpha) = hg^{-1}h^{-1}$. Donc ρ et ρ' sont conjugués l'un à l'autre.

En particulier, si ξ et ξ' sont deux fibrés principaux au-dessus de la même base B, alors leurs morphismes d'holonomie coïncident à conjugaison près. Ce procédé est même une équivalence comme le montre le théorème suivant :

Théorème. 4.11: Critère d'isomorphisme des fibrés plats

L'application qui envoie un G-fibré plat au-dessus de B sur son morphisme d'holonomie induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes des G-fibrés plats au-dessus de B vers l'ensemble des classes de conjugaison des morphismes de groupes $\rho : \pi_1(B) \to G$.

5 Combinatoire topologique

Dans cette partie, nous étudions un thème complètement différent des autres parties. Notre sujet d'étude est les applications de la topologie à la combinatoire. Les discussions ci-dessous sont essentiellement issues de l'étude du livre "Using the Borsuk-Ulam Theorem" [1]. La méthode générale pour appliquer la topologie à la combinatoire est d'introduire des applications continues sur les objets combinatoires quitte à les plonger dans un espace topologique. Pour cette raison, toutes les fonctions de cette partie seront supposées continues.

5.1 Théorème de Borsuk-Ulam et applications

5.1.1 Énoncé et démonstration

Comme l'indique le titre de cette partie, nous nous concentrons sur le théorème de Borsuk-Ulam et sur ses applications à la combinatoire.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous notons $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ la sphère de dimension n et $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leqslant 1\}$ la boule de dimension n.

Une application continue $f : S^n \to \mathbb{R}^m$ est dite **antipodale** si $\forall x \in S^n$, $f(-x) = -f(x)$.
Avec ces définitions, nous avons tous les éléments pour énoncer le théorème de Borsuk-Ulam :

Théorème. 5.1: Théorème de Borsuk-Ulam

Tous les propositions suivantes sont équivalentes et vraies :

1. Pour toute application continue $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.
2. Pour toute application continue antipodale $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in S^n$ tel que $f(x) = 0$.
3. Il n'existe pas d'application continue antipodale $f : S^n \to S^{n-1}$.
4. Il n'existe pas d'application continue $f : B^n \to S^{n-1}$ qui soit antipodale sur la frontière de B^n c'est-à-dire tel que $f_{|\partial B^n} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ soit antipodale.
5. Pour tout recouvrement $F_1, \dots, F_{n+1}$ de S^n par $n+1$ fermés, il existe au moins un fermé F_i contenant une paire de points antipodaux.
6. Pour tout recouvrement $U_1, \dots, U_{n+1}$ de S^n par $n+1$ ouverts, il existe au moins un ouvert U_i contenant une paire de points antipodaux.

Les équivalences sont faciles à prouver alors que la preuve globale du théorème est plus difficile. Nous montrons les équivalences ci-dessous.

($1 \Rightarrow 2$) Soit $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue antipodale. Alors d'après 1, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. De plus, comme f est antipodale, $f(-x) = -f(x)$. Donc $f(x) = -f(x) = 0$.

($2 \Rightarrow 3$) Raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe une application $f : S^n \to S^{n-1}$ continue antipodale. Alors comme $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ et que $0 \notin S^{n-1}$, f induit une application continue antipodale de S^n vers $\mathbb{R}^n$ ne s'annulant jamais.

($3 \Rightarrow 1$) Raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe une application $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ continue tel que $\forall x \in S^n$, $f(x) \neq f(-x)$. Alors $g : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$ est une application bien définie, continue et antipodale, $g : S^n \to S^{n-1}$.

($3 \Leftrightarrow 4$) La projection $\pi : S^n \to B^n : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ est un homéomorphisme de l'hémisphère nord de S^n vers B^n. Par conséquent, si $f : S^n \to S^{n-1}$ est une application continue antipodale, $f \circ \pi^{-1} : B^n \to S^{n-1}$ est une application continue antipodale sur ∂B^n. Réciproquement, si $g : B^n \to S^{n-1}$ est continue antipodale sur ∂B^n, alors le recollement de $g \circ \pi$ sur l'hémisphère nord et de $x \mapsto -g \circ \pi(-x)$ sur l'hémisphère sud est une application continue antipodale de S^n vers S^{n-1}.

($1 \Rightarrow 5$) Soit $(F_1, \dots, F_{n+1})$ un recouvrement de S^n par $n+1$ fermés.
Soit $f : S^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (d(x, F_1), \dots, d(x, F_n))$. Alors il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x) = y$. Si la i-ème coordonnée de y est 0, alors x et $-x$ sont tous deux dans F_i. Si y n'a pas de coordonnées nulles, alors x et $-x$ sont tous deux dans F_{n+1}.

($5 \Rightarrow 6$) Soit $(U_1, \ldots, U_{n+1})$ un recouvrement de S^n par $n+1$ ouverts. Pour tout $x \in S^n$, soit V_x un voisinage fermé de x tel qu'il existe i tel que $V_x \subset U_i$. Alors $S^n \subset \bigcup_{x \in S^n} V_x$. Donc par compacité de S^n, il existe un ensemble fini $X \subset S^n$ tel que $S^n \subset \bigcup_{x \in X} V_x$. Soit $F_i := \bigcup_{x \in X \cap U_i} V_x$. Alors F_i est fermé et $F_i \subset U_i$. 5 permet de conclure.

($6 \Rightarrow 3$) Raisonnons par contraposée. Soit $U_1, \ldots, U_{n+1}$ un recouvrement ouvert de S^{n-1} tel qu'aucun ouvert ne contiennent deux points antipodaux. Pour construire un tel recouvrement, nous pouvons par exemple considérer un n-simplex de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et projeter sur S^{n-1}. Puis, considérer un petit voisinage de chaque face. Alors si une application continue antipodale $f : S^n \to S^{n-1}$ existe, alors la collection $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_{n+1})$ est un recouvrement ouvert de S^n ne satisfaisant pas la condition 6.

À présent, nous donnons des éléments de la preuve du théorème. Certains détails ne seront pas expliciter, faute de place. Pour prouver la véracité de ces propositions, nous prouvons la proposition 2. Soit $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue antipodale. Supposons que f ne s'annule jamais.
Soit $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $g : (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$.
Alors g a exactement deux zéros : $n := (0, \ldots, 0, 1)$ et $s := (0, \ldots, 0, -1)$ et g est continue et antipodale.
Soit $F : S^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n : (x, t) \mapsto tg(x) + (1 - t)f(x)$. Alors $F(x, t) = -F(-x, t)$ et F est continue.
Intéressons nous aux zéros de F. Si f est lisse (ce que l'on peut supposer quitte à approcher f), alors l'ensemble Z des zéros de F est une sous-variété différentielle de dimension 1 de $S^n \times [0, 1]$. Donc Z est composé de chemins et de cycles. De plus, les extrémités des chemins de Z sont des points (x, t) tels que $t = 0$ ou $t = 1$. Par conséquent, les extrémités des chemins de Z sont $(n, 0)$ et $(s, 0)$. Donc il existe un chemin de zéros de F reliant $(n, 0)$ et $(s, 0)$. Enfin, Z est invariant sous $(x, t) \mapsto (-x, t)$. Donc, le chemin reliant n et s doit être son propre symétrique par cette action ce qui est impossible. On aboutit bien à une contradiction. $\square$

5.1.2 Une application : le théorème du sandwich au jambon

À l'aide du théorème de Borsuk-Ulam, nous allons démontrer le théorème du sandwich au jambon (Ham Sandwich theorem) que nous énonçons plus bas. Le principe de ce théorème est de couper en deux part égale une distribution de masse (le pain) par un hyperplan (le jambon).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ est appelée **une distribution de masse** si :

- tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est mesurable par μ
- $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$
- pour tout hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$, $\mu(H) = 0$

Théorème. 5.2: Théorème du sandwich au jambon

Soit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des distributions de masse sur $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un hyperplan H tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i(H^+) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^n)$ où H^+ désigne l'une des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \backslash H$.

Soit $u = (u_0, \ldots, u_n) \in S^n$. Nous associons à u le demi-espace $H^+(u) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n \leqslant u_0\}$. En particulier, $H^+(1, 0, \ldots, 0) = \mathbb{R}^n$ et $H^+(-1, 0, \ldots, 0) = \varnothing$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $f_i : S^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto \mu_i(H^+(u))$. Soit $f : u \mapsto (f_i(u))_i$. Alors f est une application continue (prouvé plus loin) de S^n vers $\mathbb{R}^n$.
Donc, d'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe $u \in S^n$ tel que $f(u) = f(-u)$. En particulier, $u \neq (1, 0, \ldots, 0)$ et $u \neq (-1, 0, \ldots, 0)$. Alors l'hyperplan $H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = u_0\}$ satisfait les conditions du théorème.

Pour conclure, il nous suffit de montrer que f est continue. Pour cela, montrons qu'elle est séquentiellement continue. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de S^n admettant une limite u. Soit $x \notin \partial H^+(u)$, alors pour n suffisamment grand, $x \in H^+(u)$ si et seulement si $x \in H^+(u_n)$. Soit g la fonction indicatrice de $H^+(u)$ et g_n celle de $H^+(u_n)$.
Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Alors, comme $\mu_i(H(u)) = 0$, $g_n(x) \to g(x)$ pour μ_i-presque tout x. Enfin, toutes les indicatrices sont dominées par la constante 1 qui est μ_i-intégrable. Donc $\mu_i(H^+(u_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} g_n d\mu_i \to \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu_i = \mu_i(H^+(u))$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. D'où la continuité de f. $\square$

5.2 Actions continues sur un espace topologique

5.2.1 G-index

Soit G un groupe fini non trivial. Soit X un espace topologique. Une **action continue** de G sur X est une action de groupe telle que toutes les fonctions $x \mapsto gx$ soient continues. Sous ces conditions, X est appelé un **G-espace topologique.**

Une application continue $f : X \to Y$ entre deux G-espaces topologiques est une application **G-équivariante** si $f(gx) = gf(x)$ pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$. Nous notons alors $X \leqslant_G Y$.

Un G-espace topologique X est dit **libre** si $\forall x \in X, \forall g \in G, gx = x \Rightarrow g = e$ où e est le neutre de G.

Par exemple, la sphère S^n est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace topologique libre où l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n est l'action d'antipodie.

Un **espace** E_nG pour $n \in \mathbb{N}$ est un G-espace topologique libre qui est G-complexe simplicial fini de dimension n, $(n-1)$-connexe. Par G-complexe simplicial, nous entendons un complexe simplicial tel que chaque fonction $x \mapsto gx$ induit par l'action de G soit une application simpliciale.

La sphère S^n est un $E_n\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace.

L'intérêt d'avoir sélectionné certains espace particulier, c'est que nous allons pouvoir définir une grandeur sur tous les G-espaces topologiques.

Définition. 5.1: G-index

Soit X un G-espace topologique. Alors le G-index de X est $\text{ind}_G(X) := \min\{n \in \mathbb{N} | X \leqslant_G E_nG\}$.

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour l'index :

Théorème. 5.3: Propriétés de l'index

1. Si $X \leqslant_G Y$ alors $\text{ind}_G(X) \leqslant \text{ind}_G Y$
2. $\text{ind}_G(E_nG) = n$
3. Si X est $n-1$ connexe, alors $\text{ind}_G(X) \geqslant n$

La propriété 1 est claire par définition. La propriété 2 est plus difficile et nous ne la démontrerons pas ici. Néanmoins, dans le cas, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il s'agit du théorème de Borsuk-Ulam énoncé ci-dessus. Enfin la proposition 3 est une conséquence de la propriété 2. Si X est $n-1$ connexe, alors $E_nG \leqslant_G X$. Donc $\text{ind}_G(E_nG) \leqslant \text{ind}_G(X)$. Donc $n \leqslant \text{ind}_G(X)$. □

5.2.2 Une application

Nous allons appliquer la théorie présentée ci-dessus à un exemple. Considérons la sphère S^2. Un dôme de S^2 est l'une des composante connexe de $S^2 \backslash H$ où H est un hyperplan affine. Nous souhaitons montrer le théorème suivant :

Théorème. 5.4: Théorème du sandwich au jambon pour les sphères

Soit μ_1, μ_2, μ_3 des distributions de masse qui sont aussi des mesures de probabilité sur S^2. Alors il existe un dôme $D \subset S^2$ tel que $\mu_1(D) = \mu_2(D) = \mu_3(D) = \dfrac{1}{2}$.

Pour prouver ce résultat, nous introduisons les notations suivantes. Soit $x \in S^2$ et $r \in [0,1]$. Le dôme de S^2 $D(x,r)$ est défini par $D(x,r) := \{y \in S^2 | d(x,y) < 2r\}$.

Soit alors $F : (x,r) \mapsto (\mu_1(D(x,r)), \mu_2(D(x,r)), \mu_3(D(x,r)))$. F est une application continue car μ_1, μ_2 et μ_3 sont des distributions de masse.

À présent, supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de dôme comme dans le théorème. Alors F n'atteint jamais $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Nous pouvons alors définir une application $G : S^2 \times [0,1] \to S^2$ par $G(x,r) = \dfrac{1}{||F(x,r) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})||}\left(F(x,r) - \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Remarquons que $D(x,0) = \varnothing$ et que $D(x,1) = S^2$ pour tout x. En particulier, nous pouvons définir une application continue $G' : S^3 \to S^2$ en contractant l'application précédente en 0 et en 1.

Il nous reste à montrer que cette application est bien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-équivariante. Pour cela, remarquons que l'action d'antipodie sur S^3 s'identifie sur $S^2 \times [0,1]$ à l'action $(x,r) \mapsto (-x, 1-r)$. De plus, $\mu_i(D(-x,1-r)) = 1 - \mu_i(D(x,r))$. Donc $F(-x,1-r) = (1,1,1) - F(x,r)$. Donc $G(-x,1-r) = -G(x,r)$. Donc G' est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-équivariante.

Donc $S^3 \leqslant_G S^2$. Cette dernière propriété est impossible d'après la théorie développée dans cette partie. Nous aboutissons donc à une contradiction. D'où le théorème. $\square$

Références

[1] Jiri Matousek. Using the Borsuk-Ulam Theorem. Springer, 2003.

[2] John W Milnor and James D Stasheff. Characteristic classes. Princeton University Press, 1974.

[3] Shigeyuki Morita. Geometry of Differential Forms. American Mathematical Society, 1997.

[4] Shigeyuki Morita. Geometry of Characteristic Classes. American Mathematical Society, 1999.