

Outils de théorie analytique des nombres pour compter des points rationnel sur des variétés (Conjecture de Manin)

Olivier GARCONNET

Second semestre 2022

Résumé

Soit

$$N(T) = \#\{x, y \in \mathbb{Z}_{\neq 0}^4, \text{pgcd}(x_i, x_j) = 1 \text{ pour } i \neq j, x_i \text{ sans facteur carré et } \text{pgcd}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1 \\ x_1y_1^2 + x_2y_2^2 + x_3y_3^2 + x_4y_4^2 = 0, |x_1y_1^2| > |x_iy_i^2|, |x_1x_2x_3x_4x_1y_1^2| < T\}$$

Dans cette article on va calculer la borne supérieure et inférieure de cet espace, pour cela on va prouver ce théorème

Théorème 0.1. *Il existe des entiers positifs non nuls c_1, c_2, c_3 tel que*

$$c_1T \log(T) < N(T) < c_2T \log(T)$$

pour tous $T > c_3$.

Pour cela on va principalement s'inspirer de la preuve faite par Browning et Heath-Brown dans [BH18]

Table des matières

1	Introduction	2
2	Borne Inférieure	3
3	Borne Supérieure	4
3.1	Etape préliminaire	4
3.2	Fonctions multiplicatives sur des valeurs d'une forme quadratique	7
3.3	La dernière étape	8
3.4	Retour à notre problème	12
4	Remarque	12
5	Une autre methode pour compter des points rationnels sur une variété : la méthode linéaire	13

1 Introduction

J'ai effectué un stage de recherche à l'université de Bath en Angleterre sous la direction de Daniel Loughran entre début mars et fin mai que j'ai complété d'un stage d'un mois avec Régis de la Bretèche. Je remercie mes deux encadrants pour la spontanéité de leur réponse et le temps passé pour moi car j'ai trouvé mes stages très tard. Avec Farrell Brumley, mon tuteur à l'ENS, on a reçu beaucoup de refus dans nos nombreuses demandes.

Mon premier stage ne durant que 3 mois et comme je n'avais pas les bases de géométrie algébrique, je n'ai pas compris la partie la plus théorique de mon sujet (les stacks). Mais j'espère qu'avec les cours de M2 que je prendrai l'année prochaine ce sera plus simple.

J'ai travaillé sur une toute petite partie de la conjecture de Manin Batyrev notamment développé dans l'article [ESZ21], cette conjecture dit approximativement que

$$N(B) = \#\{y \in Y | H(y) \leq B\}$$

avec Y une variété normale et H une fonction de hauteur, vaut asymptotiquement

$$C B^\alpha (\log B)^\beta.$$

avec C, α, β des constantes à déterminer.

Pour cela mon tuteur, Dan, m'a donné en premier à lire l'article de Brett Nasserden et Stanley Yao Xiao [NX20], il est composé de deux parties, la première expliquant algébriquement quelle fonction de hauteur choisir et la deuxième faisant le calcul de

$$N(T) = \#\{x, y \in \mathbb{Z}_{\neq 0}^3, \text{pgcd}(x_i, x_j) = \text{pgcd}(y_i, y_j) = 1 \text{ pour } i \neq j, \\ x_i \text{ sans facteur carré}, x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + x_3 y_3^2 = 0, |x_1 x_2 x_3| \max |x_i y_i^2| < T\}$$

Ils trouvèrent que c'est de l'ordre de grandeur (sans connaître les constantes) $T^{1/2}(\log T)^3$. Mon tuteur m'a posé alors la question qu'est ce que le résultat donne si on passe de $n = 3$ variables à $n = 4$.

Pour cela j'ai dans un premier temps essayé de faire de la même manière que dans l'article, en regardant du côté linéaire puis du côté quadratique (voir section 5) mais dans notre cas le côté quadratique est dominant. Dans ma recherche du calcul du côté dominant, j'ai d'abord voulu appliquer le théorème 7 de [BH05] mais ça donne seulement comme borne $T^{1+\epsilon}$. C'est Dan qui m'a montré la voix à prendre en me conseillant l'article [BH18] et après plusieurs semaines de travail sur les détails du théorème j'ai pu répondre à sa question.

Le résultat est moins jolie que dans le cas $n = 3$ car la majorité des solutions se situe dans l'équation $y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 + y_4^2$.

Lors de mon deuxième stage qui était trop court pour pouvoir réellement travailler sur mon sujet avec Régis de la Bretèche mais avec d'autres mastériens, on a présenté chaque semaine notre boulot. Ainsi avec en plus des séminaires j'ai pu apercevoir un large panel de mathématiques proche de la théorie analytiques des nombres.

Les conférences à Bath étaient plus compliqués à comprendre car en anglais et c'était plus sur la géométrie algébrique et j'aime moins cette partie des maths. Cependant j'ai pu assisté à une conférences de Vlad Mitankin (Hannover) sur "Integral points on diagonal affine quadrics" qui était proche de mon sujet et que j'ai vraiment apprécié.

J'ai vraiment préféré la partie recherche que la partie lecture/apprendre de nouvelle théorie, c'est pour ça que mon travail ne demande aucun objet compliqué, je dois cependant apprendre à organiser mon travail pour ne pas travailler de minuit à trois heures du matin.

2 Borne Inférieure

On cherche une borne inférieure à

$$N'(T) = \#\{y \in \mathbb{Z}^4 | y_1^2 - y_2^2 = y_3^2 - y_4^2, \max(y_i^2) < T, \text{pgcd}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1\}$$

On peut écrire les solutions avec quatres variables a, b, j, k avec comme conditions supplémentaires $(a, b) = 1, (j, k) = 1,$

$$y_1 = \frac{aj + bk}{2}, y_2 = \frac{aj - bk}{2}, y_3 = \frac{ak + bj}{2}, y_4 = \frac{ak - bj}{2}.$$

Cela vérifie bien $y_1^2 - y_2^2 = y_3^2 - y_4^2$. On suppose $a > b > 0$ et $j > k > 0$, on veut seulement une borne inférieure donc on rajoute comme condition a, b, j, k sont tous impaires. Soit $d = \text{pgcd}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $d|y_1 + y_2 = aj$ la même astuce donne $d|bj$ donc avec la primalité $d|j$ et symétriquement $d|k$ donc $d = 1$. Nos points appartiennent bien à $N'(T)$.

La condition $\max(y_i^2) \ll T$ correspond à $aj \ll T$,

$$N'(T) \gg \sum_{\substack{a>b>0, (a,b)=1 \\ a<\sqrt{T}}} \sum_{\substack{j>k>0, (j,k)=1 \\ aj<\sqrt{T}}} 1 = \sum_{\substack{a>b>0, (a,b)=1 \\ a<\sqrt{T}}} \sum_{j<\sqrt{T}/a} \varphi(j).$$

On a $\sum_{n<x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x^{1+\epsilon})$, donc on obtient la borne souhaitée

$$N'(T) \gg \sum_{\substack{a>b>0, (a,b)=1 \\ a<\sqrt{T}}} \frac{T}{a^2} = T \sum_{a<\sqrt{T}} \frac{\varphi(a)}{a^2} = T \log(T),$$

parce que $\sum_{n<x} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^\epsilon)$ et

$$\sum_{n<x} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{x} \sum_{n<x} \frac{\varphi(n)}{n} + \int_1^T \sum_{n \leq t} \frac{\varphi(n)}{n} \frac{dt}{t^2} = \int_1^T \frac{6}{\pi^2} \frac{dt}{t} + O(1) \gg \log(T).$$

3 Borne Supérieure

Dans cette partie j'ai tiré toute ma réflexion de "Counting Rational Points on Quadric Surfaces" de T.D. Browning D.R. Heath-Brown[BH18], duquel j'ai suivi la ligne directrice en m'adaptant à mon problème, à savoir, que dans mon cas $\|Q\|^4$ est grand devant Δ_Q . Ce que j'ai changé par rapport à l'article se situe dans la troisième partie.

Nous fixons x_1, x_2, x_3, x_4 des entiers vérifiant nos conditions $\text{pgcd}(x_i, x_j) = 1$ pour $i \neq j$, x_i sans facteur carré. Cela donne une forme quadratique $Q \in \mathbb{Z}[y_1, y_2, y_3, y_4]$, et nous allons estimer le nombre de points rationnels de hauteur borné sur la surface quadratique $Q = 0$.

Dans notre cas on pose $M = \text{Mat}_Q = \text{Diag}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $\Delta_Q = |x_1 x_2 x_3 x_4|$, de plus x_i sont premier entre eux et sans facteur carré donc Δ_Q est aussi sans facteur carré (et donc $\Delta_{bad} = 1$, dans l'article étudié on aura seulement le cas $h = 1$).

On suppose $|x_1| > |x_2| > |x_3| > |x_4|$. Soit

$$N_Q(B) = \#\{y \in \mathbb{Z}_{\neq 0}^4, \text{pgcd}(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1, Q(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0, |y_i| \leq B\}$$

Dans cette section on va montrer ce théorème :

Théorème 3.1. *Si $|x_1| < B^2$ alors*

$$N_Q(B) \ll \left(B^{2-\epsilon} + B^2 |x_1 x_2 x_3|^{-1/3} \right) \log(B) \log(\Delta_Q).$$

Je pense que la condition $x_1 < B^2$ peut être enlevé ou déjà amélioré mais ça apportera plusieurs problèmes dans la preuve.

3.1 Etape préliminaire

Ce premier lemme est essentiel dans la preuve de notre théorème

Lemme 1. *Soit $y \in \mathbb{Z}^4$ tel que $|y| \leq B$. Alors il existe un vecteur $c \in \mathbb{Z}_{prim}^4$ avec $|c| \ll B^{1/3}$, tel que $y \cdot c = 0$.*

Ce lemme donne pour chaque solution y de Q un vecteur c , on se ramènera ensuite à compter nos points dans l'espace orthogonal de c .

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{Z}^4$, on pose $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z}^4, x \cdot y = 0\}$, c'est un réseau de dimension 3 et de $\det(\Gamma) = |y|$. Il existe une base b_i de Γ (on prend par exemple les vecteurs primitifs) tel que $\det \Gamma \ll \prod_i |b_i| \ll \det \Gamma$. Enfin il existe parmi les b_i une valeur qui vérifie $|b_i| \ll (\det \Gamma)^{1/3} \leq B^{1/3}$. \square

On introduit Q^* , la forme dual de notre forme quadratique, de matrice $M_{adj} = \Delta_Q M^{-1}$, comme Q est dans notre cas une forme diagonale, Q^* peut facilement s'écrire en fonction de nos variables,

$$Q^*(y) = x_1 x_2 x_3 x_4 \left(\frac{y_1^2}{x_1} + \frac{y_1^2}{x_1} + \frac{y_2^2}{x_2} + \frac{y_3^2}{x_3} + \frac{y_4^2}{x_4} \right).$$

Le projet des prochains lemmes est de décomposer notre espace orthogonal en ellipsoïdes puis chaque ellipsoïde obtenu on le découpe en réseau. Là on connaît des estimations du nombre de solution et donc cela donne une borne supérieure du nombre de solutions à $Q(y) = y \cdot c = 0$.

Dans un premier temps on regarde le cas $Q^*(c) \neq 0$.

Lemme 2. *Soit $c \in \mathbb{Z}_{prim}^4$, avec $Q^*(c) \neq 0$. Alors il existe des ellipsoïdes E_0, \dots, E_m avec*

$$m \ll \log \left(2 + \frac{|c|^2 \|Q\|^3}{|Q^*(c)|} \right),$$

tels que pour chaque E_j est centrée à l'origine, vérifie

$$meas(E_j) \ll B^3,$$

et enfin vérifie cette inclusion

$$\{y \in \mathbb{R}^4 : Q(y) = y \cdot c = 0, |y| \leq B\} \subset \bigcup_{j=0}^m E_j.$$

La preuve est lemme 2.2 de [BH18] avec comme seul changement la mesure des ellipsoïdes qui est évident dans la preuve. Par la suite dans cette souspartie, il ne va pas avoir de changement par rapport à [BH18], je donne les idées principales aux comptages de points.

Un lemme intermédiaire

Lemme 3. *Soit $V \subset \mathbb{R}^4$ un espace vectoriel de dimension 3, et soit $\Lambda \subset V$ un réseau de dimension 3. Soit E un ellipsoïde inclu dans V et centrée sur l'origine. Alors il existe une base f_1, f_2, f_3 de Λ et des entiers positifs L_1, L_2, L_3 avec*

$$L_1 L_2 L_3 \ll \frac{meas(E)}{\det(\Lambda)},$$

tel que si pour $x \in \Lambda \cap E$ écrit de la forme $x = \sum_i \lambda_i f_i$, alors on a $|\lambda_i| \leq L_i$.

La preuve utilise les résultats 2.3 et 2.4 de [BH18], on construit une base adaptée grâce aux minimats successifs du réseau.

Maintenant il y a un travail sur les coniques. Le but des prochains lemmes est de partager nos ellipsoïdes en réseau puis

Lemme 4. *Soit $q(x_1, x_2, x_3)$ une forme quadratique entière non singulière. Soit $L_1, L_2, L_3 > 0$, alors il y a $O(1 + (L_1 L_2 L_3)^{1/3})$ entiers primitives solutions de $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ satisfaisant $|x_i| \leq L_i$.*

Soit q une forme quadratique comme précédemment de discriminant Δ_q , soit p un nombre premier, \bar{q} est la réduction de q modulo p . On introduit la fonction complètement multiplicative $\chi_q : \mathbb{N} \rightarrow \{0, \pm 1\}$,

$$\chi_q(p) = \begin{cases} 1, & \text{si le rang de } \bar{q} = 2 \text{ et } \bar{q} \text{ est réductible sur } \mathbb{F}_p \\ -1, & \text{si le rang de } \bar{q} = 2 \text{ et } \bar{q} \text{ est irréductible sur } \mathbb{F}_p \\ 0, & \text{si le rang de } \bar{q} \neq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Pour tout entier non nul M , on note $M^\square = \prod_{p^e \parallel M, e \geq 2} p^e$, cela correspond à la partie entière carré, par exemple dans notre cas on a $\Delta_Q^\square = 1$.

Lemme 5. *Soit q une forme quadratique non singulière à trois variables sur \mathbb{Z} de matrice A . Soit $\Delta_q = \det A$ et soit $D(q)$ le facteur commun le plus élevé des matrices mineurs 2×2 de A . Alors il existe des réseaux Λ_i pour $1 \leq i \leq I$ tels que*

$$\{y \in \mathbb{Z}_{prim}^3 : q(y) = 0\} \subseteq \bigcup_{i=1}^I \Lambda_i.$$

De plus on a

$$\det(\Lambda_i) \gg \frac{|\Delta_q|}{(D(q)^\square)^{3/2}}$$

pour tous i et $I \ll C(q)$, où

$$C(q) = R(N) = \prod_{\substack{p^\xi \parallel \Delta_q \\ p \nmid 2D(q)}} \tau(p^\xi) \prod_{\substack{p^\xi \parallel \Delta_q \\ p \nmid 2D(q)}} \left\{ \sum_{k=0}^{\xi} \left(\chi_q(p^k) \right) \right\}.$$

Ainsi ce lemme (2.6 de [BH18]) donne le nombre de réseau pour couvrir l'espace des solutions de q . Maintenant il faut faire le lien entre ces deux lemmes et notre problème, pour cela on a $x \cdot c = 0$ qui forme un réseau Λ_c de dimension trois et de déterminant $\|c\|_2$. On choisi une base e_1, e_2, e_3 de ce réseau et soit

$$q(y) = Q_c(y) = Q(y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3).$$

On a comme propriété sur cette forme quadratique :

$$\det M_c = Q^*(c),$$

où M_c est la matrice associé à Q_c .

$D(Q_c) |2^8 \Delta_Q$ donc

$$D(Q_c)^\square \ll 1$$

On pose $\widehat{\Lambda}_i = \{y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, y \in \Lambda_i\}$, et on a

$$\det \widehat{\Lambda}_i = \|c\|_2 \det \Lambda_i \gg \|c\|_2 |Q^*(c)|.$$

Toutes ses affirmations sont prouvés dans [BH18]. Maintenant on peut mettre bout à bout tous nos lemme pour obtenir

$$\ll 1 + \frac{B}{(|c| \cdot |Q^*(c)|)^{1/3}}$$

points rationnel vérifiant $Q(y) = y \cdot c = 0$ et contenu dans un réseau et un ellipsoïde donné. On somme maintenant sur tous les réseaux puis tous les ellipsoïdes pour obtenir cette conclusion :

Lemme 6. *Soit*

$$R(N) = \prod_{\substack{p^\xi || N \\ p | 2\Delta_Q}} \tau(p^\xi) \prod_{\substack{p^\xi || N \\ p \nmid 2\Delta_Q}} \left\{ \sum_{k=0}^{\xi} \left(\frac{\Delta_Q}{p^k} \right) \right\}$$

Alors si $Q^*(c) \neq 0$ alors il y a

$$\ll R(Q^*(c)) \left(1 + \frac{B}{(|c| \cdot |Q^*(c)|)^{1/3}} \right) \log \left(2 + \frac{|c|^2 \|Q\|^3}{|Q^*(c)|} \right)$$

vecteurs primitifs y avec $|y| \leq B$ et qui vérifie $Q(y) = y.c = 0$.

$R(Q^*(c))$ compte le nombre de réseau et $\log \left(2 + \frac{|c|^2 \|Q\|^3}{|Q^*(c)|} \right)$ le nombre d'ellipsoïdes.

L'article montre que si $Q^*(c) = 0$ alors il y a exactement un point rationnel tel que $Q(y) = y.c = 0$ donc on a $O(B)$ tels solutions.

On rappelle que on cherche à majorer :

$$N_Q(B) \leq \sum_{\substack{|c| \ll B^{1/3} \\ c \in \mathbb{Z}_{prim}^4}} \#\{y \in \mathbb{Z}_{prim}^4 : y.c = 0, Q(x) = 0, |y| \leq B\}$$

D'après le lemme 6

$$N_Q(B) \ll B + S + BS_1$$

où

$$S = \sum_{\substack{|c| \ll B^{1/3}, Q^*(c) \neq 0 \\ c \in \mathbb{Z}_{prim}^4}} R(Q^*(c)) \log \left(2 + \frac{|c|^2 \|Q\|^3}{|Q^*(c)|} \right) \quad (2)$$

$$S_1 = \sum_{\substack{|c| \ll B^{1/3}, Q^*(c) \neq 0 \\ c \in \mathbb{Z}_{prim}^4}} \frac{R(Q^*(c))}{|c|^{1/3} |Q^*(c)|^{1/3}} \log \left(2 + \frac{|c|^2 \|Q\|^3}{|Q^*(c)|} \right). \quad (3)$$

3.2 Fonctions multiplicatives sur des valeurs d'une forme quadratique

Dans cette partie on décrit une estimation de la borne max de $R(Q^*(c))$. Pour cela on se donne pour $u \in \mathbb{R}^4$, la boîte $\mathfrak{R}_u = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x - u| \leq X, Q^*(x) \neq 0\}$. Cet ensemble à pour mesure $O(X^4)$. On pose

$$S^{(1)}(X) = \sup_{u \in \mathbb{R}^4} \sum_{x \in \mathbb{Z}^4 \cap \mathfrak{R}_u} R(|Q^*(x)|).$$

Enfin le prochain théorème donne une borne supérieure de la somme des $R(Q^*(c))$ dans une boîte de taille X .

Théorème 3.2. *Supposons que $\sup_{x \in \mathfrak{R}} |Q^*(x)| \leq X^A$ pour une constante A . Alors on a*

$$S^{(1)} \ll_A \mathfrak{S} \frac{X^4}{\log(X)},$$

$$\text{où } \mathfrak{S} = \prod_{p \leq X} \left(1 + \frac{R(p)}{p}\right).$$

La preuve est la section 3[BH18]

3.3 La dernière étape

Soit,

$$S_1(J, K) = \sum_{\substack{J \leq |c| \leq 2J \\ K \leq |Q^*(c)| \leq 2K}} R(Q^*(c)),$$

for $J, K \geq 1$. On divise les intervalles disponible de $|c|$ et $|Q^*(c)|$ en intervalles dyadiques et on a aussi $|Q^*(c)| \ll |x_1 x_2 x_3| |c|^2 \ll x_1 x_2 x_3 J^2$, ainsi on obtient

$$S \ll \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ K \ll x_1 x_2 x_3 J^2}} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K}\right) S_1(J, K),$$

$$S_1 \ll \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ K \ll x_1 x_2 x_3 J^2}} \frac{1}{J^{1/3} K^{1/3}} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K}\right) S_1(J, K).$$

,Pour contrôler la valeur de la somme, on veut utiliser le théorème 3.2, on doit diviser l'espace de définition de $c \in \mathbb{Z}^4$ en boîte de taille $X = B^\beta$ et donc il faut compter combien on a de tel boîte. Pour cela, dans le cas de S_1 on va le faire de deux manières différentes dépendant si K est grand ou pas

$$S_1 \ll \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ B^\alpha \leq K \ll x_1 x_2 x_3 J^2}} + \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ K \leq B^\alpha}} = S_a + S_b,$$

avec S_a correspond à la somme où K est supérieur à $B \geq B^\alpha$ et S_b où K est inférieur à B^α . α et β sont deux constantes très petites (par exemple inférieur à $1/100$).

Dans la somme S ou si K est grand on utilisera le prochain lemme,

Lemme 7. *La région de \mathbb{Z}^4*

$$|c| \leq J, |Q^*(c)| \leq K$$

peut être couverte par

$$(J^3/X^3 + 1) \left(K^{1/2} X^{-1} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + J^{1/2}/X^{1/2} + 1 \right)$$

boîtes de taille X .

Démonstration. Ce lemme est le lemme 4.1 de [BH18] avec un petit changement, on a

$$\text{Mat}(Q^*) = \text{Diag}(x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_1x_3x_4) = D$$

et donc le coefficient maximal est $d_1 = x_1x_2x_3$. L'idée du reste de la preuve est de prendre des boules de rayon $X/2$ de centre $\frac{1}{8}Xn$ où n parcourt \mathbb{Z}^4 , alors on compte le nombre des boules admettant au moins un point $x = \frac{1}{8}Xn + y$. On a comme inégalité $|\frac{1}{8}Xn| \leq J + X/2$ et

$$|D(\frac{1}{8}Xn)| = |D(x - y)| \leq K + X|x|||D|| + \frac{X^2}{4}||D||.$$

On cherche maintenant $n \in \mathbb{Z}^4$ qui vérifie ses deux inégalité, pour les choix de n_2, n_3, n_4 on obtient $(J/X + 1)$ possibilités et pour n_1 ,

$$\left(K^{1/2}X^{-1}|x_1x_2x_3|^{-1/2} + J^{1/2}/X^{1/2} + 1 \right)$$

possibilités. □

Si K est petit, ce sera plutôt ce lemme qui sera appliqué

Lemme 8. *La région de \mathbb{Z}^4*

$$|c| \leq J, |Q^*(c)| \leq L$$

peut être couverte par

$$J^3 \left(L^{1/2}X^{-1}|x_1x_2x_3|^{-1/2} + 1 \right)$$

boîtes de taille X .

Démonstration. Soit c_2, c_3, c_4 points tels que $|c_i| \leq J$, on compte le nombre de boîtes que l'on a besoin pour couvrir le segment donné par c_2, c_3, c_4 et borné par l'inégalité $|Q^*(c)| \leq L$,

$$-d_2c_2^2 - d_3c_3^2 - d_4c_4^2 - L \leq |d_1c_1^2| \leq -d_2c_2^2 - d_3c_3^2 - d_4c_4^2 + L$$

On obtient $\ll L^{1/2}|x_1x_2x_3|^{-1/2}$ possibilité pour c_1 car $d_1 = x_1x_2x_3$ et donc on a

$$\left(L^{1/2}X^{-1}|x_1x_2x_3|^{-1/2} + 1 \right)$$

boîtes sur le segment concernant la coordonnée $i = 1$ et on a J^3 possibilités pour le choix de c_2, c_3, c_4 . □

Premièrement si $K \gg B^\alpha$

Le lemme 4 donne comme formule qui est simple à borner,

$$S \ll S^{(1)}(X) \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ K \ll x_1 x_2 x_3 J^2}} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K} \right) (J^3/X^3 + 1) \left(K^{1/2} X^{-1} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + J^{1/2}/X^{1/2} + 1 \right)$$

$$S_a \ll S^{(1)}(X) \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ B^\alpha \leq K \ll x_1 x_2 x_3 J^2}} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K} \right) J^{-1/3} K^{-1/3} \\ \times \left(\frac{J^3}{X^3} + 1 \right) \left(\frac{K^{1/2}}{X} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + \frac{J^{1/2}}{X^{1/2}} + 1 \right).$$

On travaille avec des boites de la forme B^β , $\beta > 0$ mais petit pour que l'on puisse retirer $+1$. L'hypothèse du théorème 3.2 est satisfait car $|Q^*(x)| \ll |x_1|^3 X^2 \leq X^{6+2\beta}$ donc $S^{(1)}(X) \ll \mathfrak{S} \frac{X^4}{\log(X)}$.

$$S \ll \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ K \ll x_1 x_2 x_3 J^2}} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K} \right) J^3 \left(K^{1/2} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + J^{1/2} X^{1/2} \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)}$$

$$S_a \ll \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ B^\alpha \leq K \ll x_1 x_2 x_3 J^2}} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K} \right) J^{-1/3} \\ \times J^3 \left(K^{1/6} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + K^{-1/3} J^{1/2} X^{1/2} \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)}.$$

Premièrement on somme K sur les intervalles dyadiques, et $K \ll x_1 x_2 x_3 J^2 \ll \|Q\|^3 J^2$ donc quand $\gamma > 0$

$$\sum_{B^\alpha \leq K \ll x_1 x_2 x_3 J^2} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K} \right) K^\gamma \ll (x_1 x_2 x_3 J^2)^\alpha$$

car le plus grand terme est dominant.

Et pour $\gamma = 0$ la somme est $\ll \log^2(B)$, car $\log(\|Q\|) \ll \log(B)$.

Et pour $\gamma < 0$ la somme est $\ll \log(B) B^{\gamma\alpha}$ car le premier terme est dominant.

Second on somme J sur les intervalles dyadiques,

$$S \ll \sum_{J \ll B^{1/3}} J^3 \left(J^1 |x_1 x_2 x_3|^{-1/2+1/2} + \log^2(B) J^{1/4} X^{1/2} \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)} \ll B^{4/3} \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)}$$

pour X assez petit.

Pour la seconde somme, on somme sur K pour obtenir,

$$S_a \ll \sum_{J \ll B^{1/3}} J^{8/3} \left(J^{1/3} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2+1/6} + \log(B) J^{1/4} B^{-\alpha/3} B^{\beta/2} \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)}$$

puis on somme sur J

$$\ll \left(B |x_1 x_2 x_3|^{-1/3} + \log(B) B^{35/36-\alpha/3+\beta/2} \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)}.$$

Maintenant pour borner S_b , on applique le lemme 5,

$$S_1 \ll \sum_{\substack{J \ll B^{1/3} \\ K \ll B^\alpha}} S^1(X) \frac{1}{J^{1/3} K^{1/3}} \log \left(2 + \frac{J^2 \|Q\|^3}{K} \right) J^3 \left(B^{\alpha/2} X^{-1} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + 1 \right)$$

On somme sur K et on utilise le théorème 3.2,

$$\ll \sum_{J \ll B^{1/3}} \frac{1}{J^{1/3}} \log(B) J^3 \left(B^{\alpha/2} X^3 |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + X^4 \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)}$$

On somme sur J ,

$$\ll \log(B) \left(B^{8/9+\alpha/2+3\beta} |x_1 x_2 x_3|^{-1/2} + B^{8/9+4\beta} \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(X)}.$$

Maintenant on a besoin de trouver $\epsilon > 0$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ qui vérifie $4\beta < 1/9 - \epsilon$, $\alpha/2 + 3\beta < 1/9 - \epsilon$ et finalement, $\beta/2 - \alpha/3 < 1/36 - \epsilon$. Ces constantes existent et donc on obtient

$$N_Q(B) \ll B + S + BS_a + BS_b \ll \left(B^{2-\epsilon} + B^2 |x_1 x_2 x_3|^{-1/3} \right) \frac{\mathfrak{S}}{\log(B)}.$$

L'article donne la borne

$$\frac{\mathfrak{S}}{\log(B)} \ll \varpi(\Delta_Q) \Pi_B,$$

où $\varpi(m) = \prod_{p|m} (1 + p^{-1})$. et $\Pi_B = \prod_{p \leq B} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p} \right)$, avec χ indique le caractère de Dirichlet induit par le symbole de Legendre $\left(\frac{\Delta_Q}{\cdot} \right)$.

On a $\varpi(\Delta_Q) \ll \log(\Delta_Q)$ et $\Pi_B \ll \log(T)$. Pour conclure on vient de prouver le théorème 3.1

$$N_Q(B) \ll \left(B^{2-\epsilon} + B^2 |x_1 x_2 x_3|^{-1/3} \right) \log(B) \log(\Delta_Q).$$

3.4 Retour à notre problème

Pour retourner à notre problème de base, on prend

$$B = \sqrt{\frac{T}{|x_1 x_2 x_3 x_4|}}$$

$|x_1| > |x_2| > |x_3| > |x_4|$ donc on a $|y_i| < B$ et $|x_1| < B^2$,

On somme sur tous les x_i tels que $|x_1 x_2 x_3 x_4| < T^{4/5}$ (parce que $|x_1^2 x_2 x_3 x_4| < T$). La somme du terme en B^2 donne

$$\sum_{|x_1 x_2 x_3 x_4| < T^{4/5}} T |x_1 x_2 x_3|^{-1/3-1} |x_4|^{-1} \log(T) \log(\Delta_Q) \ll T \log(T)$$

car $|x_4| < |x_3|$ et la puissance est plus petite que -1 .

La somme des termes en $B^{2-\epsilon}$ donne

$$\sum_{|x_1 x_2 x_3 x_4| < T^{4/5}} T^{1-\epsilon} |x_1 x_2 x_3 x_4|^{-1+\epsilon} \log(T)^2 \ll \log^4(T) T^{1-\epsilon+4/5\epsilon} \ll T.$$

Car

$$\sum_{|x_1 x_2 x_3 x_4| < T^{4/5}} |x_1 x_2 x_3 x_4|^{-1+\epsilon} \ll \sum_{|x_1 x_2 x_3| < T^{4/5}} |x_1 x_2 x_3|^{-1+\epsilon} \left(\frac{T^{4/5}}{|x_1 x_2 x_3|} \right)^\epsilon \ll \log^2(T) T^{4/5 \times \epsilon}.$$

Finalement on vient de montrer que $T \log(T) \ll N(T) \ll T \log(T)$ et donc le théorème 0.1 vient d'être prouvé.

4 Remarque

Premièrement on a pas totalement répondu à la question posé par mon tuteur, il faudrait avoir comme condition supplémentaire que les y_i soit premier deux à deux. Ainsi on a obtenu dans ce cas une borne supérieure mais la borne inférieure est vraiment plus dure à trouver.

Par exemple $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_4^2$ admet par des arguments de parité 0 solutions avec cette nouvelle condition mais si on prend seulement $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1$, on a T solutions.

Pour prouver cela on peut voir l'équation de la forme $y_1^2 + y_2^2 = z_1 z_2$ et le théorème de deux carrés donne le nombre de représentations (r_2) de $z_1 z_2$ comme somme de deux carrés. Soit d_1 (resp. d_3) le nombre de diviseurs (pas nécessairement premiers) de n congrus à 1 (resp. 3) modulo 4, on a

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)).$$

On veut calculer cette somme $\sum_{y_3^2 < T, y_4^2 < T} r_2(z_1 z_2)$, or r_2 est une fonction multiplicative et on peut sommer sur $|z_1| < \sqrt{T}, |z_2| < \sqrt{T}$, cela va donner le même ordre de grandeur.

De plus $\sum_{n \leq N} r_2(N)$ est de d'ordre de grandeur N (la minoration nous suffit et on voit avec la formule que c'est $\geq N - N/3$). On obtient finalement

$$\left(\sum_{|z_1| < T} r_2(z_1) \right)^2 \leq (\sqrt{T})^2 = T.$$

Si on revient à notre problème et que l'on se demande que se passe t'il si on enlève les solutions triviales données par $y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 + y_4^2$. Déjà on remarque que Δ_Q étant sans facteur carré est forcément un non carré donc $\Pi_B = \prod_{p \leq B} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p}\right)$ peut être majoré par une constante et donc il n'y a plus que T solutions à notre problème. Et l'étude du précédent cas montre que l'on peut trouver ces T solutions hors de ceux triviaux.

5 Une autre methode pour compter des points rationnels sur une variété : la méthode linéaire

Cette méthode est tiré de [NX20], le but est de fixer des y_i tels que $|y_1 y_2 y_3 y_4| < T^\delta$, on obtient une forme linéaire en les x_i et on se ramène ensuite à compter des points sur un réseau comme fait au lemme 3.1 de [NX20]. J'ai donc commencé par essayer de trouver un lemme similaire pour mon cas et donc j'ai introduit ce lemme

Lemme 9. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$ un réseau. Alors pour tous les nombres réelles R_1 et R_2 , le nombre de points d'entiers primitives $x \in \Lambda$ satisfaisant $|x_i| \leq R_i$, $i = 1, 2, 3$ est au plus*

$$O\left(\frac{R_1 R_2 R_3}{\det \Lambda} + R\right)$$

où R est le reste.

Malheureusement je pensais que le reste était $= 1$, mais il faut rajouter un terme dans la majoration. Je n'ai pas pris le temps de completer ma preuve car à la fin on obtient une majoration pas assez bonne par rapport à ce qui a été fait plus tôt car la majorité des points est du côté quadratique. Je vais quand même présenter ma recherche et dans la suite je vais noter à chaque fois R , pour le reste mais celui ci n'est pas constant dans la suite.

On rappelle que l'on veut une majoration de

$$N_y = \#\{x \in \mathbb{Z}_{\neq 0}^4, \text{pgcd}(x_i, x_j) = 1 \text{ for } i \neq j, x_i \text{ square-free} \\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + x_3 y_3^2 + x_4 y_4^2 = 0, |x_1 x_2 x_3 x_4| \max_i |x_i y_i^2| < T\}$$

Comme on veut une majoration qu'à une constante près, on peut supposer $|x_1 y_1^2| \geq |x_i y_i^2|$, puis on a l'existence parmi $i = 2, 3, 4$ d'une valeur vérifiant $|x_1 y_1^2| \leq 3|x_i y_i^2|$, on suppose $i = 3$. Maintenant pour compter le nombre de

point on découpe en intervalles dyadiques les valeurs potentiels de x_1 et de x_2 , donc de la forme

$$M_1 \leq |x_1| \leq 2M_1 \text{ et } M_2 \leq |x_2| \leq 2M_2.$$

On obtient des bornes pour les valeurs possibles des différents x_i .

$$\left| \frac{x_1 y_1^2}{3y_3^2} \right| \leq |x_3| \leq \left| \frac{x_1 y_1^2}{y_3^2} \right|$$

d'où

$$\left| \frac{M_1 y_1^2}{3y_3^2} \right| \leq |x_3| \leq \left| \frac{2M_1 y_1^2}{y_3^2} \right|.$$

Enfin pour x_4 ,

$$|x_4| \leq \frac{T}{|x_1^2 x_2 x_3 y_1^2|},$$

avec nos minoration des x_i , on obtient :

$$x_4 \leq \frac{T 3y_3^2}{|M_1^3 M_2 y_1^4|}.$$

Maintenant l'idée pour avoir une borne supérieur, c'est de voir nos points comme un sous ensemble du réseau défini par $x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + x_3 y_3^2 \equiv 0[y_4^2]$ et de déterminant égal à y_4^2 , le précédent lemme donne

$$O\left(\frac{M_1^2 M_2 y_1^2}{y_3^2 y_4^2} + R\right) \quad (4)$$

possibilités pour x_1, x_2, x_3 ce qui détermine x_4 . On peut aussi travailler dans le réseau $x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + x_4 y_4^2 \equiv 0[y_3^2]$ donne comme majoration

$$O\left(\frac{T}{M_1^2 y_1^4} + R\right). \quad (5)$$

Enfin dans le réseau $x_1 y_1^2 + x_3 y_3^2 + x_4 y_4^2 \equiv 0[y_2^2]$, on va avoir comme majoration,

$$O\left(\frac{T}{M_1 M_2 y_1^2 y_2^2} + R\right). \quad (6)$$

On introduit

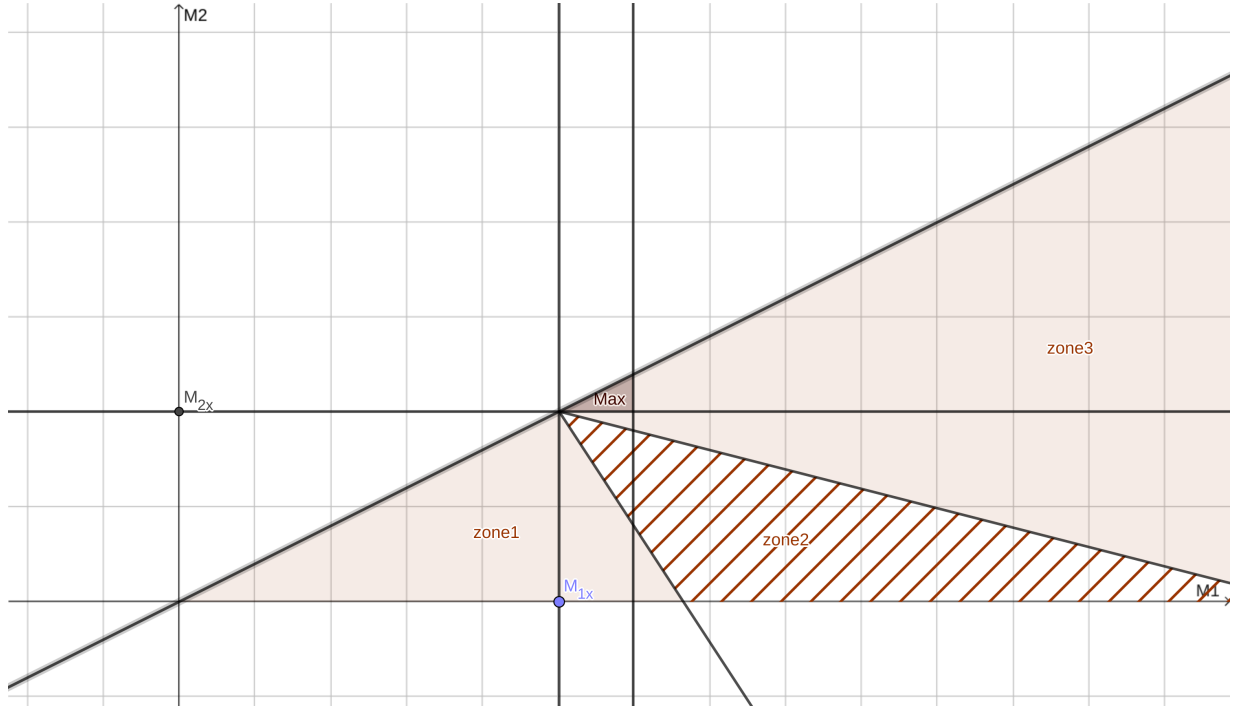
$$M_1^* = \left(\frac{T(y_2 y_3 y_4)^2}{y_1^8}\right)^{1/5} \text{ et } M_2^* = \frac{M_1^* y_1^2}{y_2^2}$$

qui correspond aux valeurs où les trois bornes coïncides. Dans le rectangle formé par ses deux valeurs la borne vaut

$$O\left(\frac{T^{3/5}}{(y_1 y_2 y_3 y_4)^{4/5}} + R\right).$$

On pose pour la suite $K = \frac{T^{3/5}}{(y_1 y_2 y_3 y_4)^{4/5}}$

Il reste plus qu'à montrer que le reste des valeurs est un grand O de cette borne. On sait que $M_1 y_1^2 \geq M_2 y_2^2$, et on pave en rectangle de la forme $R_{ij} = [2^i M_1^*; 2^{i+1} M_1^*] \times [2^j M_2^*; 2^{j+1} M_2^*]$.



Graphique avec sur une échelle logarithmique et représentation des zones où chaque borne est dominant

Sur notre graphique à échelle logarithmique représentant les valeurs possibles des x_1 et de x_2 , on découpe en trois zones, la première on utilisera la borne 1, la deuxième la borne 2 et la troisième la borne 3.

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \#pts \text{ dans } R_{ij} \\ \ll \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{f(i)} 2^{2i+j} K + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=f(i)}^{g(i)} 2^{-2i} K + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=g(i)}^{\infty} 2^{-i-j} K \end{aligned}$$

On pose $f(i) = 0$ si $i \leq 0$, $-4i$ sinon et $g(i) = -0,5i$. On obtient

$$\ll \sum_{i=-\infty}^0 2^{2i} K + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-2i} K + \sum_{i=0}^{\infty} i 2^{-2i} K + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-0,5i} K \ll K.$$

Maintenant que l'on a une borne pour N_y , on peut sommer sur tous les $y \in \mathbb{Z}^4$ possibles.

$$N(T) \ll \sum_{|y_1 y_2 y_3 y_4| < T^\delta} \frac{T^{3/5}}{(y_1 y_2 y_3 y_4)^{4/5}} + R \ll T^{3/5} \sum_{n < T^\delta} \frac{d_4(n)}{n^{4/5}} + R \quad (7)$$

Avec δ une borne où l'approximation linéaire est cohérente et R l'effet de bordure de l'approximation linéaire et $d_4(n)$ le nombre de manière d'écrire n en produit de 4 entiers.

Finalement après la sommation, la borne obtenue en négligent les effets de bord est

$$N(T) \ll T^{3/5 + \delta/5} \log(T).$$

Si on prend $R = 1$ ie qu'il n'y a pas vraiment d'effet de bord alors la somme sur $|y_1 y_2 y_3 y_4| < T^\delta$, donne déjà un terme en T^δ qui va être rapidement plus grand que le terme précédemment calculé.

Références

- [BH05] T.D. BROWNING et D.R. HEATH-BROWN. *Counting Rational Points on Hypersurfaces*. 2005. URL : <https://arxiv.org/pdf/math/0404456.pdf>.
- [BH18] T.D. BROWNING et D.R. HEATH-BROWN. "Counting Rational Points on Quadric Surfaces". In : (2018). URL : <https://arxiv.org/pdf/1801.00979.pdf>.
- [NX20] Brett NASSERDEN et Stanley Yao XIAO. "The density of rational points on \mathbb{P}^1 with three sticky points". In : (2020). URL : <https://arxiv.org/pdf/2011.06586.pdf>.
- [ESZ21] Jordan S. ELLENBERG, Matthew SATRIANO et David ZUREICK-BROWN. *Heights on stacks and a generalized Batyrev–Manin–Malle conjecture*. 2021. URL : <https://arxiv.org/pdf/2106.11340.pdf>.