

Le modèle de polymère dirigé en dimension 2 dans les régimes critiques et sous-critiques

Rapport de Stage de M1

Gaspard Gomez

16/08/2022

J'ai effectué mon stage de M1 à l'université de Milan-Bicocca du 14 février à la mi-juillet 2022. Je dois avant tout remercier Francesco Caravenna pour l'accueil chaleureux qu'il me réserva et le précieux temps qu'il m'a accordé. Ma gratitude va ensuite à Giambattista Giacomin qui me mit très rapidement en contact avec Francesco Caravenna et me permit de faire mon stage auprès de ce dernier.

En arrivant, M.Caravenna m'installa dans l'un des bureaux du département ce qui me permit de faire très rapidement la connaissance des doctorants et post-doctorants qui composent ce département. Malgré une maîtrise encore très approximative de l'italien, mon intégration fut rapide et sans encombre. Ce département présente l'originalité d'accueillir des étudiants de presque toutes les branches des mathématiques et en fait, très peu travaillent ensemble ou sur des sujets voisins. Afin d'en savoir un petit plus sur ce que faisaient leurs voisins, quelques étudiants eurent l'idée il y a quelques années de créer un séminaire où chacun présenterait tour à tour son domaine de recherche et ses travaux les plus récents, séminaire qui parfois accueillerait des chercheurs d'ailleurs. Bien sûr, ils m'y invitèrent et je pris part à ces réunions hebdomadaires nommées "Insalata di matematica" qui me permirent de découvrir une foule de sujets de recherche allant des chemins rugueux et des structures régularisantes (Lucas Broux de Paris) aux groupes d'automorphisme des arbres réguliers (Ilaria Castellano de Milan-Bicocca).

Je rencontrais Francesco Caravenna toutes les semaines pendant une ou deux heures. Ces entrevues se tinrent dans un premier temps en français car M.Caravenna parle un français parfait ayant lui-même fait une partie de sa thèse à Paris puis, au fur et à mesure, en italien. Je lui présentais les difficultés que j'avais rencontrées ou les questions qui m'étaient venues. Ensuite il m'expliquait au tableau ce sur quoi je devais travailler la semaine suivante. Il m'abreuvait régulièrement de références plus éloignées pour éclairer les articles sur lesquels je travaillais et me permettre d'approfondir certains outils ou notions qui ne faisaient que passer. Je pense ici notamment à un certain nombre de textes sur les principes de Lindeberg, [**kingman**] pour les processus de Poisson, [**asmussen**] pour les processus de Lévy ou encore à un article d'Ivan Corwin sur l'équation KPZ et sa classe d'universalité.

À partir du mois de mai, Francesco Caravenna commença à se rendre fréquemment à diverses conférences organisées en Italie et ailleurs. J'eus l'immense privilège de l'y suivre dans deux d'entre elles. La première, "A Spring Day in Probability and Statistical mechanics" qui se tint le 6 mai à l'université de Florence, où nous écoutâmes le matin Nina Gantert (Munich) et l'après-midi Senya Sholsman (Marseille). Le format de cette conférence fut très agréable pour moi car chaque prise de parole se décomposait en deux interventions de 45 minutes chacune : la première était une introduction très accessible aux processus d'exclusion pour Nina Gantert et au modèle d'Ising pour Sonya Sholsman et la seconde partie, plus difficile pour moi, à propos de leurs plus récents résultats. La seconde conférence fut le "Third Italian Meeting in Probability" qui s'est tenue du 13 au 16 juin à Bologne. Cette conférence au programme plétorique et qui rassemblait des centaines de chercheurs de toute l'Italie s'organisait autour de séances plénières où la parole était donnée à des mathématiciens de premier rang (Sandra Cerrai, Wolfgang Runggaldier...). L'une des plus marquantes fut celle de Federico Camia qui, en restant très accessible, nous raconta l'émergence de la théorie conforme des champs dans l'étude du modèle d'Ising et du modèle de percolation. Ensuite, la conférence se scindait en sessions qui portaient chacune sur un thème et dans lesquelles se succédaient entre trois et quatre mathématiciens. J'y retrouvais les chercheurs en probabilité de mon département (Tal Orenshtein, Maurizia Rossi, Nicola Turchi) qui y présentaient des travaux passés et j'en découvrais d'autres. Pour ne citer que cet exemple étonnant, Gianmarco Bet (qui avait participé à l'organisation de la conférence à Florence) présenta un travail sur les graphes aléatoires que lui et d'autres avaient mené en collaboration avec une entreprise afin de détecter les comptes robots sur des réseaux sociaux comme Twitter.

Quand M.Caravenna ne m'emmenait pas, il me transmettait les liens qui pourraient me permettre de suivre les conférences. J'eus par exemple l'occasion de suivre une conférence qu'il donna à propos de ces résultats sur le "Critical 2d Stochastic Heat Flow" à un moment où je commençais tout juste la lecture de son article le définissant. Il y eut encore la semaine de conférence organisée à l'université de Padoue pour honorer les 800 ans (!) d'existence de l'université et qui accueillait certains des plus grands mathématiciens de nos jours (Hairer, Scholze, Figalli...).

Pour dire quelques mots de Milan, c'est une ville en somme très internationale et moderne. Elle attire des italiens de toute part car elle est le poumon de l'économie italienne et compte un grand nombre d'universités qui figurent parmi les plus internationales et réputées du pays. Située au centre de la plaine du Pô, elle est idéalement placée entre la région des lacs, la Ligurie (Gênes), la Vénétie et à à peine deux heures de train des grandes villes du centre-nord de l'Italie comme Bologne et Florence.

Ma première semaine de travail fut consacrée à la découverte du modèle de polymère dirigé en environnement aléatoire par la lecture des premiers chapitres de la monographie de Francis Comets [**Com17**]. La semaine

suivante, je me familiarisais avec la décomposition en chaos polynomial et les calculs de variance. Ensuite, j'attaquais le régime sous-critique qui est ici présenté dans la deuxième section. J'eus la chance d'arriver juste après la pré-publication de l'article [CC21] de Francesco Caravenna et Francesca Cottini — son étudiante en thèse — qui présentait de nouveaux résultats et surtout une nouvelle manière de traiter le régime sous-critique, plus souple et plus simple. Celle-ci reposait sur un principe de Lindeberg — idée tout à fait nouvelle pour moi — et sur l'hypercontractivité du chaos polynomial. Une fois les idées de cet article bien acquises, nous passâmes au régime critique. Dans ce cas, comme nous le verrons plus tard, la structure de variance est beaucoup moins simple à élucider que dans le régime sous-critique et il me fallut commencer la lecture de [CSZ18]. Cet article est la première étape vers la démonstration dans [CSZ21] de l'existence du CSHF (Critical 2d Stochastic Heat Flow). Ces deux articles occupèrent mes journées jusqu'en juin.

Pour finir, afin que mon stage s'achève avec un résultat, Francesco Caravenna me conseilla de me consacrer à la rédaction d'un petit travail sur les moments d'ordre supérieurs du polymère dirigé. Leur estimation est une étape décisive de [CSZ21] et le calcul de leur limite donne d'une part les moments d'ordre supérieur du CSHF et d'autre part est utile dans le dernier article que M.Caravenna et ses collaborateurs ont écrit [CSZ22] qui prouve que le CSHF n'est pas gaussien. J'ai restitué une partie de ce travail dans la troisième section de ce rapport.

Pour ce rapport, je n'ai pas souhaité réécrire de preuves longues et techniques que j'avais lues.

Pour le régime sous-critique, le résultat principal que nous présentons avait été démontré d'une autre manière en s'appuyant notamment sur un théorème du moment quatrième (Fourth Moment Theorem), la démonstration que nous présentons ici est une conséquence directe des résultats de [CC21]. Bien que ce soit un résultat central du régime sous-critique, les auteurs ont préféré se concentrer sur la preuve de résultats inédits, repoussant ainsi la publication de cette preuve à la thèse de Francesca Cottini.

Pour le régime critique, nous présentons tout d'abord les grandes lignes du calcul de la variance. Il m'a paru difficile d'inclure dans ce rapport le modèle de coarse-graining qui est le coeur de la démonstration de l'existence du CSHF et qui — comme le principe de Lindeberg — est une idée générale, souple et redoutablement efficace. Malheureusement, rien que sa description est très longue et n'aurait eu que très peu d'intérêt ici. J'ai donc préféré accorder plus de place aux moments d'ordre supérieurs.

Table des matières

1	Le modèle de polymère dirigé en environnement aléatoire	4
1.1	Domaine L^2 et transition de phase	4
1.2	Résultats sur les marches aléatoires	6
1.3	Champ discret et chaos polynomial	8
2	Le régime sous-critique	10
2.1	Structure de renouvellement et limite gaussienne	10
2.2	Preuve du théorème 2.2	12
3	Le régime critique	16
3.1	Variance critique	16
3.2	Les moments d'ordre supérieur	18
3.2.1	Expansion et preuve du théorème 3.3	20
3.2.2	Estimations et preuve du théorème 3.4	22
3.2.3	Limite continue des moments et preuve du théorème 3.5	25
A	Inégalités fonctionnelles	27
A.1	Les lemmes techniques	30

1 Le modèle de polymère dirigé en environnement aléatoire

Nous commençons par brièvement introduire le modèle de polymère dirigé en environnement aléatoire abrégé DRP pour "Directed random polymer". La référence sur le sujet est la monographie de Francis Comets [Com17].

Soit $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple symétrique sur \mathbb{Z}^d . L'espace des trajectoires est Ω_{traj} . Les quantités liées à la loi de marche aléatoire S seront toujours notées sans double-barre, par exemple $P(A), E[f(S)], Var[f(S)]$.

L'environnement aléatoire est $\omega = (\omega(n, x))_{(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d}$, c'est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Soulignons qu'ici nous avons bien à faire à deux aléatoires différents, le premier provient de la marche aléatoire S , le second de l'environnement ω . Les quantités liées à la loi de l'environnement seront notées avec une double-barre par exemple $\mathbb{P}, \mathbb{E}, Var$.

Par commodité nous supposons que les variables $\omega(n, x)$ sont centrées, réduites et que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\exp(\beta\omega(n, x))] < +\infty$. Notons pour $\beta \geq 0$, $\lambda(\beta) = \log \mathbb{E}[e^{\beta\omega(n, x)}]$.

L'idée du modèle est d'observer le comportement de la chaîne formée par les points (n, S_n) dans un environnement si irrégulier (formé de petites poussières ou impuretés) qu'il est préférable de le voir comme un objet aléatoire indépendant de la chaîne. Étant donné un environnement $\omega = (\omega(n, x))_{(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d}$, un paramètre $\beta \geq 0$ et un temps $N \geq 0$, nous définissons la probabilité $P_{N,\beta}^\omega$ sur l'espace des trajectoires Ω_{traj} comme la

probabilité absolument continue par rapport à \mathbb{P} de densité $x \in \Omega_{traj} \mapsto \frac{1}{Z_{N,\beta}^\omega} e^{\sum_{n=1}^N (\beta\omega(n, x) - \lambda(\beta))}$.

Autrement dit, étant donné une trajectoire possible de la marche aléatoire $S \in (\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$,

$$P_{N,\beta}^\omega(dS) = \frac{1}{Z_{N,\beta}^\omega} e^{\sum_{n=1}^N (\beta\omega(n, S_n) - \lambda(\beta))} P(dS)$$

où la constante $Z_{N,\beta}^\omega$ est la constante de renormalisation aussi appelée fonction de partition :

$$Z_{N,\beta}^\omega = \mathbb{E}\left[e^{\sum_{n=1}^N (\beta\omega(n, S_n) - \lambda(\beta))}\right] \quad (1.1)$$

On voit que la probabilité $P_{N,\beta}^\omega$ a tendance à favoriser les trajectoires qui passent par les endroits où le champ ω est positif.

Il s'agit ensuite de se poser des questions comme : "est-ce que \mathbb{P} presque sûrement (ou en loi, ou etc) sur l'environnement ω , on a telle propriété asymptotique (quand $N \rightarrow +\infty$) sur la marche aléatoire S sous la probabilité $P_{N,\beta}^\omega$?".

L'exemple emblématique étant : est-ce que \mathbb{P} presque sûrement (ou en loi, ou etc), $Z_{N,\beta}^\omega$ converge quand $N \rightarrow +\infty$?

Le paramètre β correspond en physique statistique à l'inverse d'une température. Ici, on voit qu'il gouverne l'intensité de l'interaction entre les deux aléatoires. Quand $\beta = 0$ (température infinie), $Z_{N,0}^\omega = 1$ et $P_{N,0}^\omega = P$ donc la chaîne ne sent pas l'environnement. À l'inverse, quand $\beta \rightarrow +\infty$, la chaîne oublie sa structure de marche aléatoire et on tombe en fait dans des problèmes de percolation. Beaucoup plus de détails et d'explications sont fournis dans le livre de Comets.

Le paramètre $\lambda(\beta)$ a été introduit pour avoir $\mathbb{E}[Z_{N,\beta}^\omega] = 1$.

Il y aurait beaucoup de choses à dire et à étudier sur ce modèle. Dans le prochain paragraphe, nous nous contenterons de faire un calcul qui exhibe une transition de phase, montre l'importance de la variance et souligne la particularité de la dimension $d = 2$.

1.1 Domaine L^2 et transition de phase

Voici le résultat que nous allons démontrer dans cette section.

Theoreme 1.1. *Définissons $\beta_{L^2}(d) = \inf\{\beta \geq 0 / \sup_{N \geq 1} (\mathbb{E}[Z_{N,\beta}^2]) < +\infty\}$.*

- Pour $d = 1$ ou 2 , $\beta_{L^2}(d) = 0$.
- Pour $d \geq 3$, $\beta_{L^2}(d) > 0$.

- Remarque 1.1.** — Comme $Z_{N,0} = 1$, la quantité $\beta_{L^2}(d)$ a bien du sens. Vu la dépendance de $Z_{N,\beta}$ en β , il est assez clair que plus β est grand, moins il aide $Z_{N,\beta}$ à avoir un moment d'ordre 2 borné.
- Le domaine $\beta \in [0, \beta_{L^2}[$ est appelé le domaine L^2 . Dans ce domaine, $(Z_{N,\beta})_{N \in \mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans L^2 donc converge dans L^2 .
 - On peut pousser plus loin l'étude de cette discontinuité forte dans le comportement de $Z_{N,\beta}$ (convergence dans L^2 ou non) et montrer par exemple que dans le domaine L^2 , on a un théorème central-limite et un théorème de la limite-locale pour S_n . À l'inverse, en dehors de ce domaine, les propriétés asymptotiques de la marche aléatoire (S_n) sont complètement modifiées et apparaissent des phénomènes de localisation. Pour plus de détails, nous renvoyons à [Com17].
 - Dans la terminologie introduite dans l'article [CSZ15], comme en dimension 1 et 2, aussi petite que soit l'interaction entre le modèle pur (la marche aléatoire simple symétrique) et le désordre (l'environnement ω), le comportement asymptotique de la marche aléatoire est fortement modifié, on peut parler de modèle "disorder relevant". À l'inverse en dimension supérieure, le modèle est "disorder irrelevant".

Démontrons ce résultat.

Definition 1.1. On définit pour $d \geq 1$ $\pi_d = P(\exists n \geq 1, S_n = 0)$. Pour $d \leq 2$, $\pi_d = 1$ et pour $d \geq 3$, $\pi_d < 1$.

C'est le caractère transient ou récursif selon la dimension de la marche aléatoire simple symétrique qui apparaît là.

Notations 1.1. On note pour $N \geq 1$ $L_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{S_{2n}=0}$ le nombre de retour en 0 de la marche aléatoire simple symétrique entre le temps 0 et le temps $2N$.

Par la relation de Chapman-Kolmogorov, L_N a la même loi que le nombre de collisions entre deux marche aléatoires simples indépendantes.

En effet, si (S_n) et (\tilde{S}_n) sont deux marches aléatoires simples indépendantes,

$$P(S_n - \tilde{S}_n = x) = \sum_y P(S_n = y)P(\tilde{S}_n = x - y) = \sum_y q_n(y)q_n(x - y) = q_{2n}(x) = P(S_{2n} = x)$$

donc en loi,

$$L_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{S_n - \tilde{S}_n = 0} = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{S_n = \tilde{S}_n}$$

Proposition 1.1. Avec les notations ci-dessus,

$$\mathbb{E}[Z_{N,\beta}^2] = E[e^{\lambda_2(\beta)L_N}] \tag{1.2}$$

où $\lambda_2(\beta) = \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)$.

Démonstration. Prenons à nouveau deux copies indépendantes (S_n) et (\tilde{S}_n) de la marche aléatoire simple symétrique, on a alors

$$\begin{aligned} Z_{N,\beta}^2 &= E\left[e^{\sum_{n=1}^N \beta\omega(n,S_n) - \lambda(\beta)} \right] \times E\left[e^{\sum_{n=1}^N \beta\omega(n,\tilde{S}_n) - \lambda(\beta)} \right] \\ &= E^{\otimes 2}\left[e^{\sum_{n=1}^N \beta\omega(n,S_n) + \beta\omega(n,\tilde{S}_n) - 2\lambda(\beta)} \right] \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}[Z_{N,\beta}^2] = E^{\otimes 2}\left[\prod_{n=1}^N \mathbb{E}[e^{\beta\omega(n,S_n) + \beta\omega(n,\tilde{S}_n) - 2\lambda(\beta)}] \right]$$

Et comme $e^{\beta\omega(n,S_n) + \beta\omega(n,\tilde{S}_n) - 2\lambda(\beta)} = e^{2\beta\omega(n,S_n) - 2\lambda(\beta)} \mathbf{1}_{S_n = \tilde{S}_n} + e^{\beta\omega(n,S_n) + \beta\omega(n,\tilde{S}_n) - 2\lambda(\beta)} \mathbf{1}_{S_n \neq \tilde{S}_n}$

il vient $\mathbb{E}[e^{\beta\omega(n,S_n) + \beta\omega(n,\tilde{S}_n) - 2\lambda(\beta)}] = e^{\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)} \mathbf{1}_{S_n = \tilde{S}_n} + \mathbf{1}_{S_n \neq \tilde{S}_n} = e^{\lambda_2(\beta)} \mathbf{1}_{S_n = \tilde{S}_n}$ ce qui achève le calcul. \square

Donc, comme quand $N \rightarrow +\infty$, $L_N \nearrow L_\infty$, par le théorème de convergence monotone, $\mathbb{E}[Z_{N,\beta}^2] \nearrow E^{\otimes 2}[e^{\lambda_2(\beta)L_\infty}]$.

On a alors deux cas :

- en dimension $d \leq 2$, $L_\infty = +\infty$ presque sûrement donc pour $\beta > 0$, $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} (\mathbb{E}[Z_{N,\beta}^2]) = +\infty$
- en dimension $d \geq 3$, L_∞ a une distribution de Poisson de paramètre π_d . Ainsi $E^{\otimes 2}[e^{\lambda_2(\beta)L_\infty}] = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{\otimes 2}(L_\infty = n)e^{\lambda_2(\beta)n} = (1 - \pi_d) \sum_{n=0}^{+\infty} (\pi_d e^{\lambda_2(\beta)})^n$ et donc

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} (\mathbb{E}[Z_{N,\beta}^2]) < +\infty \iff \lambda_2(\beta) < \log\left(\frac{1}{\pi_d}\right)$$

Une brève étude de fonction montre que la fonction $\beta \mapsto \lambda_2(\beta)$ est croissante ce qui achève la démonstration.

1.2 Résultats sur les marches aléatoires

Notations 1.2. — $Z_{\text{even}}^d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1 + \dots + x_d \in 2\mathbb{Z}\}$

- $q_n(u, v) = P(S_n = v | S_0 = u)$
- $q_n(u) = q_n(0, u)$
- $g_t(x) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$
- $g_t(x, y) = g_t(y - x)$

Remarque 1.2. Le noyau de la chaleur possède la propriété d'invariance suivante :

$$g_t(x) = \frac{1}{T} g_{\frac{t}{T}}\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right)$$

Theoreme 1.2. Quand $n \rightarrow +\infty$, uniformément en $u \in \mathbb{Z}^2$,

$$q_n(u) = \left(g_{\frac{n}{2}}(u) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) 2\mathbf{1}_{(n,u) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} \quad (1.3)$$

Remarque 1.3. Ce résultat est un théorème de la limite locale. Le facteur 2 et l'indicatrice sont liés à la périodicité de la marche aléatoire simple symétrique. Soulignons enfin qu'il n'est pas banal d'obtenir un $O(\frac{1}{n^2})$. Sous cette forme, ce théorème est démontré dans [LL10].

Notations 1.3. Les notations qui suivent pourront sembler fort inconfortables, il apparaîtra plus tard pourquoi elles nous facilitent en réalité grandement la tâche.

- Pour $x \in \mathbb{R}^2$, $\llbracket x \rrbracket$ est l'élément de $\mathbb{Z}_{\text{even}}^2$ le plus proche de x avec la plus petite ordonnée (convention arbitraire en cas d'ambiguïté). Par exemples $\llbracket (2, 1) \rrbracket = (2, 0)$ et $\llbracket (2.2, 1.7) \rrbracket = (2, 2)$.
- Pour $u \in \mathbb{Z}^2$, $B_u = \{x \in \mathbb{R}^2 : \llbracket x \rrbracket = u\}$.
- Si φ est une fonction localement intégrable sur \mathbb{R}^2 et si $N \geq 1$; on définit pour $u \in \mathbb{Z}^2$, $\varphi_N(u) = \frac{1}{|B_u|} \int_{B_u} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{B_u} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right) dx$. Notons que $\frac{1}{N} \sum_{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dx$.

Notations 1.4. Pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, $n, N \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{Z}^2$,

$$q_n^{(N)}(\varphi, v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(u) q_n(u, v)$$

$$q_n^{(N)}(\varphi, \psi) = \frac{1}{N} \sum_{u, v \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(u) q_n(u, v) \psi_N(v)$$

et les notations correspondantes pour le noyau de la chaleur sont : pour $y \in \mathbb{R}^2$ et $t \geq 0$

$$g_t(\varphi, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) g_t(x, y) dx$$

$$g_t(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \varphi(x) g_t(x, y) \psi(y) dx dy$$

Proposition 1.2. Pour ψ une fonction bornée et $\epsilon > 0$, uniformément en $\epsilon N \leq n \leq N$ et $v \in \mathbb{Z}^2$,

$$q_n^{(N)}(\psi, v) = \left(g_{\frac{n}{2N}}(\psi, \frac{v}{\sqrt{N}}) + o(1) \right) 2\mathbf{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} \quad (1.4)$$

quand $N \rightarrow +\infty$.

Puis, pour φ une fonction intégrable et $\epsilon > 0$, uniformément en $\epsilon N \leq n \leq N$,

$$q_n^{(N)}(\varphi, \psi) = 2g_{\frac{n}{2N}}(\varphi, \psi) + o(1) \quad (1.5)$$

quand $N \rightarrow +\infty$

Démonstration. Nous écrivons tous les détails de cette preuve car nous utiliserons à maintes reprises dans la suite ce genre de raisonnement.

Fixons dans un premier temps $\rho > 0$ et décomposons :

$$q_n^{(N)}(\psi, v) = \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| \leq \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) q_n(u, v) + \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| > \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) q_n(u, v)$$

D'une part, par l'inégalité de Markov, on dispose d'une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| > \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) q_n(u, v) &\leq \|\psi\|_\infty P(|S_n| > \rho\sqrt{N}) \\ &\leq C \|\psi\|_\infty \frac{n}{\rho^2 N} \\ &\leq \frac{C}{\rho^2} \|\psi\|_\infty \end{aligned}$$

d'autre part, par le théorème de la limite locale 1.2,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| \leq \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) q_n(u, v) &= \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| \leq \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) \left(g_{\frac{n}{2}}(u, v) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) 2\mathbf{1}_{(n, v-u) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| \leq \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) g_{\frac{n}{2N}}\left(\frac{u}{\sqrt{N}}, \frac{v}{\sqrt{N}}\right) \right) 2\mathbf{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} + O\left(\frac{\|\psi\|_\infty \rho^2 N}{n^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{N} \int_{|y-v| \leq \rho\sqrt{N}} \psi\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right) g_{\frac{n}{2N}}\left(\frac{\lfloor y \rfloor}{\sqrt{N}}, \frac{v}{\sqrt{N}}\right) dy \right) 2\mathbf{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} + O\left(\frac{\rho^2}{\epsilon} \frac{1}{N}\right) \\ &= \left(\int_{|x - \frac{v}{\sqrt{N}}| \leq \rho} \psi(x) g_{\frac{n}{2N}}\left(\frac{\lfloor \sqrt{N}x \rfloor}{\sqrt{N}}, \frac{v}{\sqrt{N}}\right) dx \right) 2\mathbf{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} + o(1) \\ &= \left(\int_{|x - \frac{v}{\sqrt{N}}| \leq \rho} \psi(x) g_{\frac{n}{2N}}\left(x, \frac{v}{\sqrt{N}}\right) dx \right) 2\mathbf{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |q_n^{(N)}(\psi, v) - g_{\frac{n}{2N}}(\psi, \frac{v}{\sqrt{N}}) 2\mathbf{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3}| &\leq \left| \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| > \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) q_n(u, v) \right| + \left| \int_{|x - \frac{v}{\sqrt{N}}| > \rho} \psi(x) g_{\frac{n}{2N}}\left(x, \frac{v}{\sqrt{N}}\right) dx \right| + \\ &\quad \left| \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| \leq \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) q_n(u, v) - \left(\int_{|x - \frac{v}{\sqrt{N}}| \leq \rho} \psi(x) g_{\frac{n}{2N}}\left(x, \frac{v}{\sqrt{N}}\right) dx \right) 2\mathbf{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3} \right| \end{aligned}$$

En prenant $N \rightarrow +\infty$, il vient,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} |q_n^{(N)}(\psi, v) - g_{\frac{n}{2N}}(\psi, \frac{v}{\sqrt{N}}) 2\mathbb{1}_{(n,v) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3}| \leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \left| \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2 \\ |u-v| > \rho\sqrt{N}}} \psi_N(u) q_n(u, v) \right| + \limsup_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{|x - \frac{v}{\sqrt{N}}| > \rho} \psi(x) g_{\frac{n}{2N}}(x, \frac{v}{\sqrt{N}}) \right|$$

et le terme de droite tend vers 0 quand $\rho \rightarrow +\infty$ ce qui conclut.

Enfin, pour la seconde asymptotique, comme

$$q_n^{(N)}(\varphi, \psi) = \frac{1}{N} \sum_{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(u) q_n^{(N)}(u, \psi)$$

le résultat suit en appliquant immédiatement la première asymptotique. \square

1.3 Champ discret et chaos polynomial

En suivant les principes de [CSZ15], le but est à présent d'étudier la fonction de partition $Z_{N,\beta}$ dans le cas critique $d = 2$ faisant tendre vers 0 l'interaction entre l'environnement et la marche aléatoire, c'est-à-dire en prenant $\beta_N \rightarrow 0$. Néanmoins, il ne faudra pas choisir n'importe comment ce β_N et ça n'est plus exactement la fonction de partition $Z_{N,\beta}$ que nous étudierons mais le champ discret qui lui est associé.

Dans cette partie, nous définissons donc les objets qui seront au coeur de la suite de ce rapport et exhibons la structure de chaos polynomial de la fonction de partition.

Le formalisme que nous présentons ici suit les conventions de [CSZ21].

Pour l'instant, tous les calculs que nous présenterons seront exacts donc nous travaillerons à β fixé.

Definition 1.2 (Fonction de partition point-à-point). *Pour $u, v \in \mathbb{Z}^2$,*

$$Z_{N,\beta}(u) = E[e^{\sum_{n=1}^{N-1} (\beta\omega(n, S_n) - \lambda(\beta))} | S_0 = u] \quad (1.6)$$

$$Z_{N,\beta}(u, v) = E[e^{\sum_{n=1}^{N-1} (\beta\omega(n, S_n) - \lambda(\beta))} \mathbb{1}_{S_N=v} | S_0 = u] \quad (1.7)$$

Remarque 1.4. — $Z_{N,\beta}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^2} Z_{N,\beta}(u, v)$

— *Les variables aléatoires $Z_{N,\beta}(u, v)$ et $Z_{N,\beta}(0, v - u)$ sont identiquement distribuées.*

Definition 1.3 (Opérateurs). *Pour φ et ψ deux fonctions localement intégrables sur \mathbb{R}^2 ,*

$$Z_{N,\beta}(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(u) Z_{N,\beta}(u) \quad (1.8)$$

$$Z_{N,\beta}(\varphi, \psi) = \frac{1}{N} \sum_{u, v \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(u) Z_{N,\beta}(u, v) \psi_N(v) \quad (1.9)$$

Remarque 1.5. *En notant $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1,*

$$Z_{N,\beta}(\varphi, \mathbb{1}) = \frac{1}{2} Z_{N,\beta}(\varphi)$$

La fonction de partition "point-to-point" englobe donc le cas de la fonction de partition "point-to-plane" tant que les résultats prouvés se font avec la seule hypothèse " ψ est bornée".

Il est plus simple de travailler avec la fonction de partition "point-to-plane" que la fonction de partition "point-to-point". Comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, on peut traiter entièrement le régime sous-critique sans avoir besoin de la fonction de partition "point-to-point" et c'est donc ce que nous ferons. Néanmoins, pour le régime critique et notamment le modèle de coarse-graining, il sera absolument nécessaire de passer par la fonction de partition "point-to-point".

Enfin, mentionnons que nous pourrions de façon plus générale étudier $Z_{N_t,\beta}(\varphi, \psi)$.

Proposition 1.3 (Moyenne de la fonction de partition). *Pour φ une fonction intégrable sur \mathbb{R}^2 et ψ une fonction bornée sur \mathbb{R}^2 ,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[Z_{N,\beta}(\varphi, \psi)] = \frac{1}{2} g_{\frac{1}{2}}(\varphi, \psi) \quad (1.10)$$

Démonstration. Comme $\mathbb{E}[Z_{N,\beta}(u, v)] = q_N(u, v)$,

$$\mathbb{E}[Z_{N,\beta}(\varphi, \psi)] = q_N^N(\varphi, \psi)$$

et le résultat suit par la proposition 1.2. □

Notations 1.5. *Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^2$ et $\beta \geq 0$,*

- $\xi_\beta(n, x) = e^{\beta\omega(n, x) - \lambda(\beta)} - 1$
- $\sigma(\beta)^2 = \text{Var}[\xi_\beta(n, x)] = e^{\lambda_2(\beta)} - 1$
- $\eta_\beta(n, x) = \frac{1}{\sigma(\beta)} \xi_\beta(n, x)$

L'analyse de la fonction $\beta \mapsto \lambda(\beta)$ montre que $\sigma(\beta) \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \beta^2$.

La famille de variables aléatoires $(\eta_\beta(n, x))_{n, x \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2}$ forme une famille de variables aléatoires indépendantes, centrées, réduites et identiquement distribuées.

Proposition 1.4 (Développement en chaos polynomial). *Pour $u, v \in \mathbb{Z}^2$, et pour φ une fonction intégrable sur \mathbb{R}^2 et ψ une fonction bornée sur \mathbb{R}^2 ,*

$$Z_{N,\beta}(u) = 1 + \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ u_1, \dots, u_k}} q_{n_1}(u, u_1) \xi_\beta(n_1, u_1) \left(\prod_{j=2}^k q_{n_{j-1}, n_j}(u_{j-1}, u_j) \xi_\beta(n_j, x_j) \right) \quad (1.11)$$

$$Z_{N,\beta}(u, v) = q_N(u, v) + \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ u_1, \dots, u_k}} q_{n_1}(u, u_1) \xi_\beta(n_1, u_1) \left(\prod_{j=2}^k q_{n_{j-1}, n_j}(u_{j-1}, u_j) \xi_\beta(n_j, x_j) \right) q_{n_k, N}(u_k, v) \quad (1.12)$$

$$Z_{N,\beta}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi + \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ u_1, \dots, u_k}} q_{n_1}^N(\varphi, u_1) \xi_\beta(n_1, u_1) \left(\prod_{j=2}^k q_{n_{j-1}, n_j}(u_{j-1}, u_j) \xi_\beta(n_j, x_j) \right) \quad (1.13)$$

$$Z_{N,\beta}(\varphi, \psi) = q_N^N(\varphi, \psi) + \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ u_1, \dots, u_k}} q_{n_1}^N(\varphi, u_1) \xi_\beta(n_1, u_1) \left(\prod_{j=2}^k q_{n_{j-1}, n_j}(u_{j-1}, u_j) \xi_\beta(n_j, x_j) \right) q_{n_k, N}^N(u_k, \psi) \quad (1.14)$$

Démonstration. C'est un développement direct :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \beta\omega(n, S_n) - \lambda(\beta) &= \prod_{n=1}^{N-1} e^{\beta\omega(n, S_n) - \lambda(\beta)} \\ &= \prod_{n=1}^{N-1} (1 + \xi_\beta(n, S_n)) \\ &= \sum_{A \subset \llbracket 1, N-1 \rrbracket} \prod_{n \in A} \xi_\beta(n, S_n) \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \sum_{0 < n_1 < \dots < n_k < N} \prod_{j=1}^k \xi_\beta(n_j, S_{n_j}) \end{aligned}$$

Ce qui, en passant à l'espérance et en appliquant la propriété de Markov donne le résultat annoncé. □

2 Le régime sous-critique

À $\beta > 0$ fixé, la variance de $Z_{N,\beta}$ diverge et le comportement du polymère dirigé diffère drastiquement de celui du polymère dirigé en l'absence d'interaction ($\beta = 0$). Il s'agit à présent de trouver un rescaling $\beta_N \rightarrow 0$ pour lequel la fonction de partition converge vers quelque chose de non-trivial (dans un sens à préciser). Voici le résultat que nous démontrerons dans cette section.

Nous citerons au fur et à mesure les sources qui nous ont servi pour cette section, la principale étant [CC21].

2.1 Structure de renouvellement et limite gaussienne

Notations 2.1. — $u_n = q_{2n}(0) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} q_n(x)^2$

$$— R_N = \sum_{n=1}^N u_n$$

Par le théorème de la limite locale, quand $n \rightarrow +\infty$, $u_n = \frac{1}{\pi n}(1 + o(1))$ et quand $N \rightarrow +\infty$, $R_N = \frac{\log N}{\pi}(1 + o(1))$

Definition 2.1. Pour chaque $N \geq 1$, soit $(T_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires iid à valeurs dans \mathbb{N} dont la loi est donnée par :

$$P(T^{(N)} = n) = \frac{u_n}{R_N} \mathbf{1}_{n \in [1, N]} \quad (2.1)$$

Le processus de renouvellement $(\tau_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ est alors défini par $\tau_0^{(N)} = 0$ et pour $k \geq 1$, $\tau_k^{(N)} = \sum_{i=1}^k T_i^{(N)}$.

Proposition 2.1. Pour $u, v \in \mathbb{Z}^2$ et φ une fonction intégrable,

$$V_{N,\beta} = \text{Var}[Z_{N,\beta}] = \sum_{k \geq 1} (\sigma(\beta)^2 R_N)^k P(\tau_k^{(N)} < N) \quad (2.2)$$

$$\text{Cov}[Z_{N,\beta}(u), Z_{N,\beta}(v)] = \sigma(\beta)^2 \sum_{0 < n < N} q_{2n}(v-u)(1 + V_{N-n,\beta}) \quad (2.3)$$

$$\text{Var}[Z_{N,\beta}(\varphi)] = \sum_{u, v \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(u)\varphi_N(v) \text{Cov}[Z_{N,\beta}(u), Z_{N,\beta}(v)] \quad (2.4)$$

Démonstration. En effet, à partir de l'expression de la proposition 1.11,

$$\begin{aligned} V_{N,\beta} &= \sum_{k \geq 1} \sigma(\beta)^{2k} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ u_1, \dots, u_k}} q_{n_1}(0, u_1)^2 \prod_{j=2}^k q_{n_{j-1}, n_j}(u_{j-1}, u_j)^2 \\ &= \sum_{k \geq 1} \sigma(\beta)^{2k} \sum_{0 < n_1 < \dots < n_k < N} u(n_1) \prod_{j=2}^k u(n_j - n_{j-1}) \end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient en sommant d'abord sur u_k et en utilisant la propriété de Chapman-Kolmogorov, puis sur u_{k-1} etc jusqu'à u_1 .

Et par la propriété de Markov du processus de renouvellement $(\tau_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\sum_{0 < n_1 < \dots < n_k < N} u(n_1) \prod_{j=2}^k u(n_j - n_{j-1}) = R_N^k P(\tau_k^{(N)} < N)$$

Ensuite, toujours à partir des développements 1.11,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[Z_{N,\beta}(u), Z_{N,\beta}(v)] &= \sum_{k \geq 1} \sigma(\beta)^{2k} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k \\ u_1, \dots, u_k}} q_{n_1}(u, u_1) q_{n_1}(v, u_1) \prod_{j=2}^k q_{n_{j-1}, n_j}(u_{j-1}, u_j)^2 \\
&= \sum_{k \geq 1} \sigma(\beta)^{2k} \sum_{0 < n_1 < \dots < n_k < N} q_{2n_1}(v - u) \prod_{j=2}^k u(n_j - n_{j-1})
\end{aligned}$$

En sommant d'abord sur $n = n_1$, on obtient l'égalité 2.3.

La dernière affirmation est automatique. □

Theoreme 2.1. Pour $\beta_N = \frac{\hat{\beta}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\log N}}$ avec $0 < \hat{\beta} < 1$,

$$\text{Var}(Z_{N,\beta_N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2} = V(\hat{\beta}) \quad (2.5)$$

Remarque 2.1. Ce résultat montre qu'on a un degré de liberté avec le paramètre $\hat{\beta}$. Néanmoins, $V(\hat{\beta}) \rightarrow +\infty$ quand $\hat{\beta} \rightarrow 1$.

Ceci suggère que le point $\hat{\beta} = 1$ est critique et ce sera l'objet de la troisième partie de ce rapport.

Démonstration. Par l'inégalité de Markov,

$$P(\tau_k^{(N)} \geq N) \leq \frac{E(\tau_k^{(N)})}{N} = \frac{k}{N} E(T^{(N)})$$

et par 2.1, $E[T^{(N)}] = \frac{1}{R_N} \sum_{n=1}^N u(n)n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n)n = \frac{1}{\pi}$,

$$\frac{k}{N} E[T^{(N)}] \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{\pi R_N} \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

donc $P(\tau_k^{(N)} > N) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

En prenant donc (et sans avoir le choix) $\beta_N = \frac{\hat{\beta}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\log N}}$ avec $0 < \hat{\beta} < 1$, on a donc

$$(\sigma(\beta_N)^2 R_N)^k P(\tau_k^{(N)} \leq N) \rightarrow \hat{\beta}^k$$

et finalement par convergence dominée et la représentation 2.1 de la variance,

$$\text{Var}[Z_{N,\beta_N}] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2}$$

□

Remarque 2.2. Remarquons qu'en élargissant le domaine de sommation $0 < n_1 < \dots < n_k \leq N$ à $0 < m_1 = n_1 \leq N, 0 < m_2 = n_2 - n_1 \leq N, \dots, 0 < m_k = n_k - n_{k-1} \leq N$, on a la majoration $\sum_{0 < n_1 < \dots < n_k \leq N} \prod_{j=1}^k u(n_j -$

$n_{j-1}) \leq \sum_{0 < m_1 < \dots < m_k \leq N} \prod_{j=1}^k u(m_j) = \prod_{j=1}^k \sum_{m_j=1}^N u(m_j) = R_N^k$ et donc $\text{Var}[Z_N^\omega] \leq \sum_{k=1}^N (\sigma_N^2 R_N)^k$.

Cette dernière inégalité est évidente à partir de la formule exacte trouvée dans la preuve avec le processus de renouvellement, néanmoins l'obtenir ainsi montre que l'inégalité obtenue en élargissant le domaine de sommation est, certe grossière, mais suffisante pour obtenir la bonne asymptotique. Cette idée nous resservira plus tard.

À présent, énonçons le résultat principal pour le régime sous critique.

Definition 2.2. On définit pour φ , $N \geq 1$ et $0 < \hat{\beta} < 1$,

$$\mathcal{Z}_N(\varphi) = \sqrt{\log N} \left(Z_{N, \beta_N}(\varphi) - \mathbb{E}[Z_{N, \beta_N}(\varphi)] \right) \quad (2.6)$$

$$\text{où } \beta_N = \frac{\hat{\beta} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\log N}}.$$

Definition 2.3. Pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact et $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, définissons

$$K(x) = \pi V(\hat{\beta}) \int_0^1 g_t(x) dt \quad (2.7)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dx dy \varphi(x) K(y-x) \varphi(y) \quad (2.8)$$

Theoreme 2.2. Pour toute fonction φ continue à support compact,

$$\mathcal{Z}_N(\varphi) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{(\mathcal{L})} \mathcal{N}(0, \mathcal{V}(\varphi)) \quad (2.9)$$

2.2 Preuve du théorème 2.2

L'idée principale de la preuve est tout simplement d'appliquer le théorème de la limite centrale. Dans l'article [CC21], les auteurs s'appuient sur un théorème qui fournit un cadre très général dans lequel un chaos polynomial a une limite gaussienne.

Dans ce paragraphe, nous présentons ce théorème ainsi que l'embryon de sa démonstration et montrons comment l'appliquer au polymère dirigé dans le régime sous-critique. Nous nous appuyerons sur un argument d'hypercontractivité et un principe de Lindeberg pour le chaos polynomial dans le régime sous-critique dont nous ne donnons pas la démonstration ici en dépit du fait que c'est une notion qui traversa l'intégralité de mon stage.

La référence pour l'hypercontractivité avec laquelle j'ai travaillé est [Jan97] et pour le principe de Lindeberg l'article [CSZ13].

Definition 2.4. Soit \mathbb{T} un ensemble au plus dénombrable, on note $\mathcal{P}_f(\mathbb{T})$ l'ensemble de ses parties finies. Une application $\phi : \mathcal{P}_f(\mathbb{T}) \mapsto \mathbb{R}$ induit une série formelle multilinéaire (c'est-à-dire dont les degrés en chaque variable sont au plus 1) $\Phi \in \mathbb{R}_1[[X_i]_{i \in \mathbb{T}}]$ donné par $\Phi(X) = \sum_{I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{T})} \phi(I) X^I$ où $X^I = \prod_{i \in I} X_i$.

À présent considérons une famille $\zeta = (\zeta_i)_{i \in \mathbb{T}}$ de variables aléatoires indépendantes centrées réduites de même variance σ^2 . On dit qu'une variable aléatoire X admet un développement en chaos polynomial de coefficients ϕ respectivement à ζ si $X = \Phi(\zeta)$.

Une condition simple pour que X soit bien défini et dans \mathbb{L}^2 est que $\sum_{I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{T})} \sigma^{2|I|} \phi(I)^2 < \infty$ (car les $(\zeta^I)_{I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{T})}$ forment une famille orthogonale de \mathbb{L}^2).

Theoreme 2.3 (TLC pour le chaos polynomial). Soit \mathbb{T} un ensemble au plus dénombrable. Soit pour chaque $N \in \mathbb{N}$, $\zeta^N = (\zeta_i^N)_{i \in \mathbb{T}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites. On suppose en outre que la famille $(\zeta_i^N)_{i \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{N}}$ est de carré uniformément intégrable.

Soit X_N un chaos polynomial (dans \mathbb{L}^2) de coefficients $\phi_N(\cdot)$ respectivement à ζ^N .

Pour $\mathbb{B} \subset \mathbb{T}$, on note $\sigma_N^2(\mathbb{B}) = \sum_{A \subset \mathbb{B}} \phi_N(A)^2$ et $\sigma_N^2(\mathbb{T}) = \sigma_N^2$. Supposons en outre que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

i) Convergence de la variance : $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^2 = \sigma^2 \in]0, \infty[$

ii) Sous-criticalité : $\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{A \subset \mathbb{T} \\ |A| > K}} \phi_N(A)^2 = 0$

iii) Localisation spectrale : Pour tous $M, N \in \mathbb{N}$, il existe des boîtes disjointes $\mathbb{B}_1^{M,N}, \dots, \mathbb{B}_M^{M,N} \subset \mathbb{T}$ telles que :

- $\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sigma_N^2(\mathbb{B}_i^{M,N}) = \sigma^2$
- $\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq M} (\sigma_N^2(\mathbb{B}_i^{M,N})) = 0$

Alors,

$$X_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{(\mathcal{L})} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (2.10)$$

Remarque 2.3. Ce théorème a l'extraordinaire avantage de ne reposer que sur des hypothèses qui concernent des variances ou des carrés de variables aléatoires. Ceci est rendu possible par l'argument d'hypercontractivité du chaos polynomial, décisif pour notre démonstration.

Voyons comment démontrer ce résultat.

Démonstration. L'uniforme intégrabilité des carrés de la famille $(\zeta_i^N)_{i,N}$ permet en fait de supposer que pour chaque $i \in \mathbb{T}$ et $N \in \mathbb{N}$, $\zeta_i^N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. C'est une étape qui peut paraître anodine mais qui est en fait absolument non-trivial et repose sur un principe de Lindeberg. En quelque sorte, ce dernier montre l'universalité en la loi des $(\zeta_i^N)_{i,N}$ du résultat que nous démontrons.

Étape 1 : Approximation par une somme de variables aléatoires indépendantes

Définissons pour $N, M, K \geq 0$ et $1 \leq i \leq M$ la variable aléatoire $Y_{N,i}^{M,K} = \sum_{\substack{A \subset \mathbb{B}_i^{M,N} \\ |A| \leq K}} \phi_N(A) \zeta^N(A)$ et posons

$$X_N^{M,K} = \sum_{i=1}^M Y_{N,i}^{M,K}$$

$X_N^{M,K}$ est une somme de variables aléatoires indépendantes. De plus,

$$\begin{aligned} \left\| X_N - X_N^{M,K} \right\|_2^2 &\leq \left\| X_N - \sum_{i=1}^M \sum_{A \subset \mathbb{B}_i^{M,N}} \phi_N(A) \zeta^N(A) \right\|_2^2 + \left\| \sum_{i=1}^M \sum_{A \subset \mathbb{B}_i^{M,N}} \phi_N(A) \zeta^N(A) - X_N^{M,K} \right\|_2^2 \\ &\leq \left(\sigma_N^2 - \sum_{i=1}^M \sigma^2(\mathbb{B}_i^{M,N}) \right) + \sum_{|A| > K} \phi_N(A)^2 \end{aligned}$$

Ensuite par l'hypercontractivité du chaos polynomial, on dispose pour chaque $p \geq 2$ d'une constante $C_p < +\infty$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_{N,i}^{M,K}|^p] &\leq \left(\sum_{\substack{A \subset \mathbb{B}_i^{M,N} \\ |A| \leq K}} C_p^{2|A|} \phi_N(A)^2 \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq C_p^{Kp} \sigma^2(\mathbb{B}_i^{M,N})^{\frac{p}{2}} \\ &\leq C_p^{Kp} \sigma^2(\mathbb{B}_i^{M,N}) \left(\max_{1 \leq j \leq M} \sigma^2(\mathbb{B}_j^{M,N}) \right)^{\frac{p-2}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^M \mathbb{E}[|Y_{N,i}^{M,K}|^p] \leq C_p^{Kp} \left(\max_{1 \leq j \leq M} \sigma^2(\mathbb{B}_j^{M,N}) \right)^{\frac{p-2}{2}} \sigma_N^2 \quad (2.11)$$

Étape 2 : Application du TLC

À partir de l'hypothèse iii), on dispose de suites $M_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $K_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty$ telles que :

- $\sum_{i=1}^{M_N} \sigma_N^2(\mathbb{B}_i^{M_N, N}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \sigma^2$
- $\max_{1 \leq i \leq M_N} (\sigma^2(\mathbb{B}_i^{M_N, N})) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$
- $C^{3K_N} \left(\max_{1 \leq i \leq M_N} (\sigma^2(\mathbb{B}_i^{M_N, N})) \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$

Par monotonie on a alors $\sum_{\substack{|A| > K_N \\ A \subset \mathbb{T}}} \phi_N(A)^2 \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Dorénavant on note $\tilde{Y}_{N,i} = Y_{N,i}^{M_N, K_N}$ et $\tilde{X}_N = X_N^{M_N, K_N}$.
L'étape 1 montre que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|X_N - \tilde{X}_N\|_2 = 0$$

et que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{M_N} \mathbb{E}[|\tilde{Y}_{N,i}|^3] = 0$$

ce qui permet d'appliquer le TLC de Lindeberg (avec la condition 2+1) et montre que $\tilde{X}_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ \square

Voyons à présent comment appliquer ce théorème au cas qui nous concerne.

Fixons un $0 < \hat{\beta} < 1$, une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact et pour $N \geq 1$, $\beta_N = \frac{\hat{\beta}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\log N}}$.

On appliquera le théorème 2.3 à la fonction de partition $\mathcal{Z}_N(\varphi)$ qui d'après la proposition 1.11 admet un développement en chaos polynomial respectivement à la famille $(\eta_\beta(n, x))$ sur l'ensemble de base $\mathbb{T} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^2$.

Notations 2.2. On reprend les notations du théorème 2.3 et on définit les boîtes $\mathbb{B}_i^{M,N}$.

— $\sigma_N^2 = \text{Var}[\mathcal{Z}_N(\varphi)]$

— Pour $M, N \geq 1$ et $1 \leq i \leq M$, $\mathbb{B}_i^{M,N} =]\frac{i-1}{M}N, \frac{i}{M}N[\times \mathbb{Z}^2$.

Les coefficients du développement polynomial de $\mathcal{Z}_N(\varphi)$ sont supportés sur les ensembles $A = \{n_1, \dots, n_k\} \times \{x_1, \dots, x_k\}$ avec $0 < n_1 < \dots < n_k < N$. Donc $\sigma^2(\mathbb{B}_1^{1,N}) = \sigma_N^2$.

Lemme 2.1. Notons pour $n, N \geq 1$ et t

$$Q_{n,N}(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{u,v \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(u) q_n(v-u) \varphi_N(v) \quad G_t(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dx dy \varphi(x) g_t(y-x) \varphi(y)$$

Pour tout $\epsilon > 0$, quand $N \rightarrow +\infty$, uniformément en $\epsilon N \leq n \leq N$,

$$Q_{n,N}(\varphi) = \frac{2}{N} G_{\frac{n}{N}}(\varphi) + o\left(\frac{1}{N}\right) \quad (2.12)$$

De plus, on dispose d'une constante $C > 0$ telle que pour tous $n, N \geq 1$,

$$Q_{n,N}(\varphi) \leq \frac{C}{N} \quad (2.13)$$

Démonstration. Pour la dernière inégalité, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} Q_{n,N}(\varphi) &\leq \frac{1}{N} \|\varphi\|_\infty \sum_{u \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} |\varphi_N(u)| \sum_{v \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} q_n(v-u) \\ &\leq \frac{1}{2N} \|\varphi\|_\infty \|\varphi\|_1 \end{aligned}$$

Pour l'asymptotique, en redéveloppant

$$q_n(v-u) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} q_n(u, z) q_n(z, v)$$

il vient

$$Q_{n,N}(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} q_n^{(N)}(\varphi, z)^2$$

ce qui en utilisant la première asymptotique de la proposition 1.2 donne le résultat souhaité. \square

Proposition 2.2. *Pour $M \geq 1$ et $1 \leq i \leq M$,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma^2(\mathbb{B}_i^{M,N}) = \pi V(\hat{\beta}) \int_{\frac{i-1}{M}}^{\frac{i}{M}} dt \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dx dy \varphi(x) g_t(y-x) \varphi(y) \quad (2.14)$$

Démonstration. Un calcul analogue à celui fait pour la proposition 2.1 donne

$$\sigma^2(\mathbb{B}_i^{M,N}) = \log N \sigma(\beta_N)^2 \sum_{\frac{(i-1)}{M}N < n < \frac{i}{M}N} (1 + V_{\frac{i}{M}N-n, \beta_N}) Q_{n,N}(\varphi)$$

D'une part, quand $N \rightarrow +\infty$, $\log N \sigma(\beta_N)^2 \rightarrow \hat{\beta}^2 \pi$.

D'autre part, l'inégalité 2.13 permet de supprimer les tronçons $\frac{(i-1)}{M}N < n < (\frac{i-1}{M} + \epsilon)N$ et $(\frac{i}{M} - \epsilon)N < n < \frac{i}{M}N$.

En dehors de ces tronçons, uniformément, quand $N \rightarrow +\infty$, par 2.12 et 2.1,

$$(1 + V_{\frac{i}{M}N-n, \beta_N}) Q_{n,N}(\varphi) = \frac{1}{N} (1 + V(\hat{\beta})) G_{\frac{n}{N}}(\varphi) + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

Une approximation de Riemann permet de conclure (en remarquant que $V(\hat{\beta}) = \hat{\beta}^2(1 + V(\hat{\beta}))$). \square

Vérifions les trois hypothèses du théorème 2.3 :

i) Convergence de la variance

La proposition 2.2 donne, quand $i = M = 1$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N^2 = \mathcal{V}(\varphi)$$

où $\mathcal{V}(\varphi)$ a été défini en 2.3.

ii) Sous-criticalité

C'est une conséquence immédiate de la preuve du théorème 2.1.

iii) Localisation spectrale

Par 2.2,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^M \sigma^2(\mathbb{B}_i^{M,N}) = \sum_{i=1}^M \pi V(\hat{\beta}) \int_{\frac{i-1}{M}}^{\frac{i}{M}} dt \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dx dy \varphi(x) g_t(y-x) \varphi(y) = \mathcal{V}(\varphi)$$

ce qui conclut.

3 Le régime critique

Dans le régime sous-critique, nous avons rescalé le paramètre d'interaction β en prenant $\beta_N = \frac{\hat{\beta}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\log N}}$ avec $0 < \hat{\beta} < 1$ de sorte que $\sigma(\beta_N)^2 \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\hat{\beta}}{R_N}$ où nous rappelons que $R_N = \sum_{n=1}^N q_{2n}(0)$.

Le régime critique consiste à prendre $\hat{\beta} = 1$. Plus précisément, on fixe un paramètre $\nu \in \mathbb{R}$ et on prend β_N de sorte que, quand $N \rightarrow +\infty$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{R_N} \left(1 + \frac{\nu}{\log N} (1 + o(1))\right) \quad (3.1)$$

3.1 Variance critique

Comme pour le régime sous-critique, la première chose par laquelle nous devons passer est l'étude de la variance. L'article [CSZ18] est entièrement consacré à la démonstration des résultats que nous énonçons ci-dessous et dont nous contenterons de donner quelques explications.

Definition 3.1. Pour chaque $N \geq 1$, définissons $(\tau_k^{(N)}, S_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2$ qui commence à $(0, 0)$ et dont la loi des accroissements est donnée par

$$P(\tau_1^{(N)} = n, S_1^{(N)} = v) = \frac{q_n(v)^2}{R_N} \mathbf{1}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \quad (3.2)$$

Definition 3.2. Définissons pour $N, n \geq 1$ et $v \in \mathbb{Z}^2$,

$$U_N(n, v) = \sum_{k \geq 1} (\lambda_N)^k P(\tau_k^{(N)} = n, S_k^{(N)} = v) \quad (3.3)$$

$$U_N(n) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^2} U_N(n, v) = \sum_{k \geq 1} (\lambda_N)^k P(\tau_k^{(N)} = n) \quad (3.4)$$

où $\lambda_N = \sigma_N^2 R_N = 1 + \frac{\nu}{\log N} (1 + o(1))$ quand $N \rightarrow +\infty$

Proposition 3.1. On a alors pour tout $N \geq 1$,

$$\mathbb{E}[Z_{N, \beta_N}(u, v)^2] = \frac{1}{\sigma_N^2} U_N(N, v - u) \quad (3.5)$$

Definition 3.3. Le processus $Y = (Y_s)_{s \geq 0}$ est le processus de saut dont la mesure de Lévy est donnée par

$$\mu(dt) = \frac{1}{t} \mathbf{1}_{(0, 1)}(t) dt \quad (3.6)$$

Plus formellement, c'est le processus dont les accroissements sont indépendants et stationnaires et dont la transformée de Laplace est donnée par

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Y_s}] = e^s \int_0^1 (e^{\lambda t} - 1) \frac{dt}{t} \quad (3.7)$$

Soit W un mouvement brownien indépendant de Y . On définit V_s par $V_s = \frac{1}{2} W_{Y_s}$

Proposition 3.2. On a la convergence en loi suivante quand $N \rightarrow +\infty$:

$$\left(\frac{\tau_s^{(N)}}{N}, \frac{S_s^{(N)}}{\sqrt{N}} \right)_{s \geq 0} \rightarrow (Y_s, V_s)_{s \geq 0} \quad (3.8)$$

Démonstration. Il s'agit de démontrer la convergence des lois finies-dimensionnelles. Comme les deux processus sont à accroissements et stationnaires, on est ramené à montrer la convergence en loi ponctuelle.

Montrer ce résultat tel quel est tout de même quelque peu compliqué, pour simplifier notre propos nous nous contenterons de montrer que pour $s > 0$, $\frac{\tau_s^{(N)}}{N}$ converge en loi vers Y_s .

En notant $\tau_k^{(N)} = \sum_{l=1}^k T_l^{(N)}$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} E[e^{\frac{\lambda}{N} \tau_{s \log N}^{(N)}}] &= \left(E[e^{\frac{\lambda}{N} \tau_1^{(N)}}] \right)^{s \log N} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \frac{u_n}{R_N} e^{\frac{n}{N} \lambda} \right)^{s \log N} \end{aligned}$$

Et, quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{R_N} e^{\frac{n}{N} \lambda} &= 1 + \frac{1}{R_N} \sum_{n=1}^N u_n (e^{\frac{n}{N}} - 1) \\ &= 1 + \frac{\pi}{R_N N} \sum_{n=1}^N \frac{N}{n} (e^{\frac{n}{N}} - 1) + o\left(\frac{1}{R_N}\right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{R_N} \int_0^1 (e^{\lambda t} - 1) \frac{dt}{t} + o\left(\frac{1}{R_N}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E[e^{\frac{\lambda}{N} \tau_{s \log N}^{(N)}}] &= e^{s \log N \log 1 + \frac{\pi}{R_N} \int_0^1 (e^{\lambda t} - 1) \frac{dt}{t} + o\left(\frac{1}{R_N}\right)} \\ &= e^s \int_0^1 (e^{\lambda t} - 1) \frac{dt}{t} + o(1) \end{aligned}$$

□

Il s'avère que la densité du processus Y est connue explicitement, elle est donnée pour $0 < t \leq 1$ par

$$f_s(t) = \frac{e^{-\gamma s} s t^{s-1}}{\Gamma(s+1)} \quad (3.9)$$

et pour $t \geq 1$ par une équation intégrale où γ est une constante explicite. Posons pour $t \geq 0$,

$$G_\nu(t) = \int_0^{+\infty} e^{\nu s} f_s(t) ds \quad (3.10)$$

C'est la quantité analogue dans le continu à 3.3.

Tout l'enjeu de l'article [CSZ18] est de montrer que, plus fort que la convergence en loi, les fonctions U convergent vers leurs analogues continus. C'est un travail très délicat à plus d'un titre. Tout d'abord, il n'y a plus de sous-criticalité, c'est-à-dire que comme le laisse-entendre cette convergence en loi, les termes pertinents sont sur l'échelle $s \log N$. D'autre part, on joue avec des densités qui ne sont pas du tout explicites et qu'il faut estimer très finement.

Voici les résultats auxquels sont parvenus les auteurs de cet article :

Theoreme 3.1. *Pour $\epsilon > 0$ et $\rho > 0$, uniformément en $\epsilon N \leq n \leq N$ et $|x| \leq \rho \sqrt{N}$, quand $N \rightarrow +\infty$,*

$$U_N(n, x) = \frac{\pi}{\sigma_N^2 N^2} \left(G_\nu\left(\frac{n}{N}\right) g_{\frac{n}{4N}}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right) + o(1) \right) 2\mathbf{1}_{(n,x) \in \mathbb{Z}_{even}^3} \quad (3.11)$$

Enfin, en suivant la même démarche que pour le régime sous-critique, on obtient

Theoreme 3.2. *Pour φ une fonction continue à support compact,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Var}[Z_{N, \beta_N}] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dx dy \varphi(x) \mathcal{K}^\nu(y-x) \varphi(y) \quad (3.12)$$

où $\mathcal{K}^\nu(x) = \pi \int_{0 < s < u < 1} g_s(x) G_\nu(u-s) ds du$

3.2 Les moments d'ordre supérieur

La suite de ce rapport est dédié aux moments d'ordre supérieurs du polymère dirigé. Dans un premier temps, nous énonçons les trois théorèmes principaux que nous démontrerons ensuite.

Les notations suivantes sont reprises des notations des articles [CSZ21] et [LZ21].

- Notations 3.1** (pour les partitions). — On note $I \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$ pour " I est une partition de $\llbracket 1, h \rrbracket$ ". $|I|$ is le nombre de classes d'équivalence de I et $\overset{I}{\sim}$ est la relation d'équivalence sur $\llbracket 1, h \rrbracket$ associée à I . Si $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h) \in (\mathbb{Z}^2)^h$, \mathbf{x} est compatible avec I noté $\mathbf{x} \sim I$ si $k \overset{I}{\sim} l \Rightarrow \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_l$. $(\mathbb{Z}^2)_I^h$ est l'ensemble des éléments compatibles avec I .
- Pour $I \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$, on note $\mathring{I} = \{x \in I / |x| \geq 2\}$; c'est l'ensemble des éléments de $\llbracket 1, h \rrbracket$ dont la classe d'équivalence pour I n'est pas réduite à un singleton.
 - Pour $I = (I_1, \dots, I_l)$ une partition $\llbracket 1, h \rrbracket$ et ξ variable aléatoire, on note $\mathbb{E}[\xi^I] = \prod_{1 \leq j \leq l, |I_j| \geq 2} \mathbb{E}[\xi^{|I_j|}]$.
 - $*$ est la partition triviale, celle pour laquelle toutes les classes d'équivalences sont des singletons.

Notations 3.2 (d'opérateurs). — Pour I et J deux partitions de $\llbracket 1, h \rrbracket$, pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h$, on définit

$$Q_n^{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{1}_{\mathbf{x} \sim I} \left(\prod_{r=1}^h q_n(\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{y} \sim J} \quad (3.13)$$

C'est l'opérateur d'évolution libre sous les contraintes I et J i.e. le noyau de transition de la marche aléatoire produit $(\mathcal{S}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ (voir 3.22) avec les contraintes $\mathbf{x} \sim I$ et $\mathbf{y} \sim J$.

- Pour I une partition de $\llbracket 1, h \rrbracket$, on définit

$$U_{m,l,\beta}^I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_{l-m,\beta}^I(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[\xi^I]^k \sum_{\substack{0=n_0 < n_1 < \dots < n_{k-1} < n_k = l-m \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k = \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h}} \prod_{j=1}^k Q_{n_{j-1}, n_j}^{I,I}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) \quad (3.14)$$

C'est l'opérateur de réplication sous la contrainte I .

- Enfin, pour $I \neq J \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$, $n < m$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h$, on définit

$$P_{n,m}^{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{n < k \leq m \\ \mathbf{z} \in (\mathbb{Z}^2)^h}} Q_{n,k}^{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) U_{k,m,\beta}^J(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (3.15)$$

C'est l'évolution de (n, \mathbf{x}) à (m, \mathbf{y}) avec la contrainte $\mathbf{x} \sim I$ et $\mathbf{y} \sim J$ et la possibilité d'atterrir dans $(\mathbb{Z}^2)_J^h$ au temps k (c'est le terme Q) tant qu'ensuite on reste dans $(\mathbb{Z}^2)_J^h$ (c'est le terme U).

Theoreme 3.3.

$$\mathbb{E}[Z_N^\beta(\varphi, \psi)^h] = \frac{1}{N^h} \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ I_1 \neq \dots \neq I_k \vdash \llbracket 1, h \rrbracket, I_j \neq * \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in (\mathbb{Z}^2)^h}} P_{n_1}^{*, I_1}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{x}_1) \prod_{j=2}^k P_{n_{j-1}, n_j}^{I_{j-1}, I_j}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) Q_{n_k, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, \psi_N^{\otimes h}) \prod_{j=1}^k \mathbb{E}[\xi^{I_j}] \quad (3.16)$$

Remarque 3.1. Précisons bien que ce résultat vaut pour β fixé. Nous donnerons une preuve détaillée de ce résultat. L'idée principale est de prendre h copies indépendantes de la marche aléatoire simple symétrique et de regarder dans l'espérance les produits de variables de l'environnement et observer quand elles s'apparient.

Notations 3.3. Pour $1 < p < +\infty$, on note $\ell^p((\mathbb{Z}^2)_I^h)$ abrégé ℓ_I^p l'ensemble des fonctions $f : (\mathbb{Z}^2)_I^h \mapsto \mathbb{R}$ telles que $\|f\|_{\ell_I^p} = \left(\sum_{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h} |f(\mathbf{x})|^p \right)^{1/p} < +\infty$.

Pour $f \in \ell_I^p$, $g \in \ell_I^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\langle f, g \rangle = \sum_{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \leq \|f\|_{\ell_I^p} \|g\|_{\ell_I^q}$

Pour $T : \ell_I^q \mapsto \ell_I^q$ un opérateur intégrale, pour tous $f \in \ell_I^p$, $g \in \ell_I^q$, $\langle f, Tg \rangle = \sum_{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h} f(\mathbf{x})T(\mathbf{x}, \mathbf{y})g(\mathbf{y})$

et $\|T\|_{\ell_I^q \mapsto \ell_I^q} = \sup_{g \in \ell_I^q, \|g\| \leq 1} \|Tg\|_{\ell_I^q} = \sup_{\substack{f \in \ell_I^p, \|f\| \leq 1 \\ g \in \ell_I^q, \|g\| \leq 1}} \langle f, Tg \rangle$

Theoreme 3.4. Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $h \geq 3$ un entier et soit $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui soit log-lipschitzienne.

Il existe des constantes C, C' telles que pour toutes fonctions test $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et tout entier $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[(Z_N^{\beta_N}(\varphi, \psi))^h]| &\leq \frac{C}{N^h} \left\| \frac{\varphi_N}{w_N} \right\|_{\ell^p}^h \|\psi_N\|_\infty^h \|w_N(\mathbf{1}_B)_N\|_{\ell^q}^h \\ &\leq C \left\| \frac{\varphi}{w} \right\|_{L^p}^h \|\psi\|_\infty^h \|w\mathbf{1}_B\|_{L^q}^h \end{aligned} \quad (3.17)$$

où $B \subset \mathbb{R}^2$ est une boule de rayon $\rho \in [1, +\infty]$ qui contient le support de ψ .

Remarque 3.2. L'idée essentielle de cette preuve est d'employer le formalisme d'opérateurs décrit ci-dessus et de démontrer une inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev(HLS) généralisée. Les détails concernant cette généralisation sont donnés dans l'appendice A.

Remarque 3.3. On a introduit une fonction log-lipschitzienne w afin d'avoir des estimations L^p en dépit du fait que ψ ne soit que bornée.

Remarque 3.4. Il existe une constante $D_w > 0$ telle que, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h$, $N \geq 1$,

$$\frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} \leq D_w e^{C_w \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{N}}}$$

On dispose aussi d'une constante $C > 0$ indépendante de φ, B et N telle que :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\varphi_N^{\otimes h}}{w_N^{\otimes h}} \right\|_{\ell^p} &\leq CN^{\frac{h}{p}} \left\| \frac{\varphi}{w} \right\|_{L^p}^h \\ \|(\mathbf{1}_B)_N w_N^{\otimes h}\|_{\ell^q} &\leq CN^{\frac{h}{q}} \|\mathbf{1}_B w\|_{L^q}^h \end{aligned}$$

Notations 3.4. Pour $i, j \in \llbracket 1, h \rrbracket$, on note $F_{i,j} = \{\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^2)^h / \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\}$ et on note $\mu^{\{i,j\}}$ la mesure de Lebesgue de $(\mathbb{R}^2)^h$ restreinte à $F_{i,j}$. On note formellement $\mu^{\{i,j\}}(d\mathbf{x}) = \left(\prod_{r \notin \{i,j\}} d\mathbf{x}_r \right) d\mathbf{x}_i \delta_{\mathbf{x}_i}(d\mathbf{x}_j)$

Pour $i < j$ deux entiers $\llbracket 1, h \rrbracket$ et $t > 0$ on définit :

$$\mathcal{Q}_t(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \prod_{r=1}^h g_{\frac{t}{2}}(\mathbf{x}_r - \mathbf{y}_r) \quad (3.18)$$

$$\mathcal{G}_{\nu, t}^{\{i,j\}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\prod_{r \in \llbracket 1, h \rrbracket, r \notin \{i,j\}} g_{\frac{t}{2}}(\mathbf{y}_r - \mathbf{x}_r) \right) G_\nu(t) g_{\frac{t}{4}}(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) \quad (3.19)$$

Theoreme 3.5.

$$\mathbb{E}[Z_N^{\beta_N}(\varphi, \psi)^h] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{(\mathbb{R}^2)^h \times (\mathbb{R}^2)^h} dz dz' \varphi^{\otimes h}(z) K_\nu^{(h)}(z, z') \psi^{\otimes h}(z') \quad (3.20)$$

où

$$\begin{aligned} K_\nu^{(h)}(z, z') &= 1 + \sum_{k \geq 1} (2\pi)^k \sum_{\substack{\{i_1 < j_1\}, \dots, \{i_k < j_k\} \subset \llbracket 1, h \rrbracket \\ \{i_l, j_l\} \neq \{i_{l+1}, j_{l+1}\}}} \int_{0 < a_1 < b_1 < \dots < a_k < b_k < 1} d\vec{a} d\vec{b} \int_{\vec{x}, \vec{y} \in ((\mathbb{R}^2)^h)^k} \mathcal{Q}_{a_1}^{\{i_1, j_1\}}(z, \mathbf{x}_1) \mu^{\{i_1, j_1\}}(d\mathbf{x}_1) \\ &\quad \mathcal{G}_{\nu, b_1 - a_1}^{\{i_1, j_1\}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \mu^{\{i_1, j_1\}}(d\mathbf{y}_1) \left(\prod_{l=2}^k \mathcal{Q}_{a_k - b_{k-1}}(\mathbf{y}_{l-1}, \mathbf{x}_l) \mu^{\{i_l, j_l\}}(d\mathbf{x}_l) \mathcal{G}_{\nu, b_k - a_k}^{\{i_l, j_l\}}(\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_l) \mu^{\{i_l, j_l\}}(d\mathbf{y}_l) \right) \mathcal{Q}_{b_k, 1}(\mathbf{y}_k, z') \end{aligned}$$

3.2.1 Expansion et preuve du théorème 3.3

Soit $A_k^N = \{\tau \subset \llbracket 1, N-1 \rrbracket / |\tau| = k\}$. Nous emploierons la convention suivante : si $\tau \in A_k^N$, τ_1, \dots, τ_k est l'énumération croissante de τ i.e. $0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < N$ and $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_k\}$.

Si $\tau \in A_k^N$, $\xi(\tau, S_\tau) = \prod_{t \in \tau} \xi(t, S_t)$. Si $\tau = \emptyset$, $\xi(\tau, S_\tau) = 1$.

Avec ces notations, l'expansion en chaos polynomial de 1.11 devient :

$$Z_{N,\beta}(x, y) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\tau \in A_k^N} E[\mathbb{1}_{S_N=y} \xi(\tau, S_\tau) | S_0 = x] \quad (3.21)$$

Soient $(S_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (S_n^{(h)})_{n \in \mathbb{N}}$ h copies indépendantes de la marche aléatoire simple symétrique sur \mathbb{Z}^2 , définissons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n = (S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(h)})$. $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $(\mathbb{Z}^2)^h$ mais ce n'est pas la marche aléatoire simple symétrique. Les quantités aléatoires prises par rapport à \mathcal{S}_n seront notées avec un $\otimes h$, par exemple $P^{\otimes h}, E^{\otimes h}$. Son noyau de transition est

$$P^{\otimes h}(\mathcal{S}_n = \mathbf{y} | \mathcal{S}_k = \mathbf{x}) = Q_{k,n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{r=1}^h q_{k,n}(\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r) \quad (3.22)$$

Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h$, on note $Z_N^{\otimes h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{r=1}^h Z_N^\beta(\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r)$.

Avec ces notations :

$$\begin{aligned} Z_N^{\otimes h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_h \geq 0} \sum_{\tau^{(1)} \in A_{k_1}^N, \dots, \tau^{(h)} \in A_{k_h}^N} \prod_{r=1}^h E[\mathbb{1}_{S_N^{(r)}=\mathbf{y}_r} \xi(\tau^{(r)}, S_{\tau^{(r)}}^{(r)}) | S_0^{(r)} = \mathbf{x}_r] \\ &= \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_h \geq 0} \sum_{\tau^{(1)} \in A_{k_1}^N, \dots, \tau^{(h)} \in A_{k_h}^N} E^{\otimes h} \left[\prod_{r=1}^h \xi(\tau^{(r)}, S_{\tau^{(r)}}^{(r)}) \mathbb{1}_{S_N=\mathbf{y}} | S_0 = \mathbf{x} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dans la dernière somme, on pose $T = \tau^{(1)} \cup \dots \cup \tau^{(h)} \subset \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ (c'est l'ensemble des arrêts de chaque composante) et l son cardinal de sorte que $T \in A_l^N$. Le $T = \emptyset$ existe. Le changement de variables de $k_1 \geq 0, \dots, k_h \geq 0, \tau^{(1)} \in A_{k_1}^N, \dots, \tau^{(h)} \in A_{k_h}^N$ à $l \geq 0$ et $T \in A_l^N$ n'est pas bijectif car il manque de l'information.

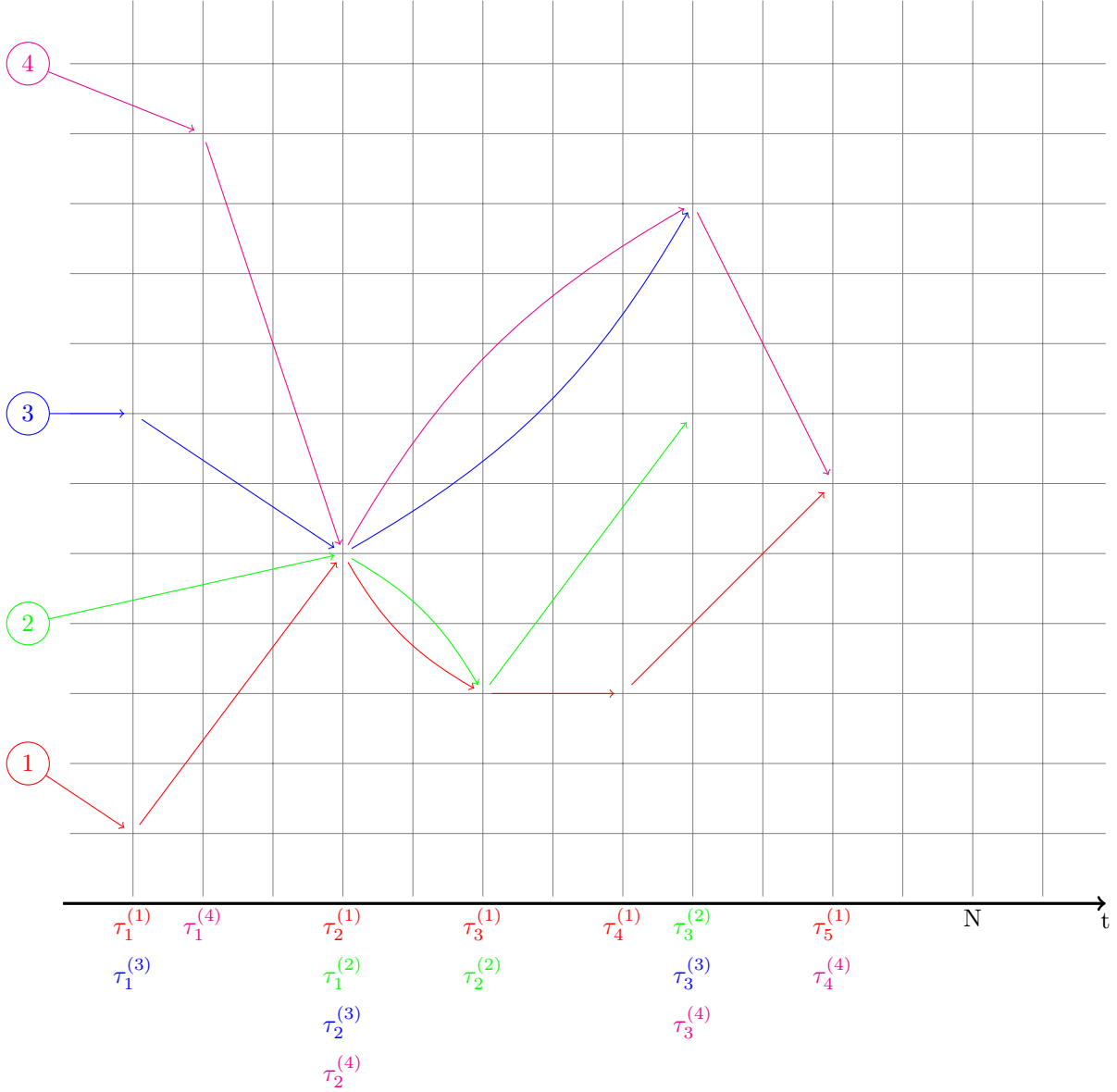
Que manque-t-il ? On doit savoir, étant donné $t \in T$, quelles sont les marches aléatoires qui se sont arrêtées au temps t . On pose donc, pour chaque $t \in T$, $E_t = \{r \in \llbracket 1, h \rrbracket / t \in \tau^{(r)}\} (\neq \emptyset)$.

Pour $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)^h$ et $E \subset \llbracket 1, h \rrbracket$, définissons $\xi(t, \mathbf{x}^{\uparrow E}) = \prod_{r \in E} \xi(t, \mathbf{x}_r)$. Avec cette notation,

$$\prod_{r=1}^h \xi(\tau^{(r)}, S_{\tau^{(r)}}^{(r)}) = \prod_{t \in T} \prod_{r \in E_t} \xi(t, S_t^{(r)}) = \prod_{t \in T} \xi(t, \mathcal{S}_t^{\uparrow E_t}) \quad (3.24)$$

Donc,

$$Z_N^{\otimes h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{T \in A_l^N \\ t \in T, E_t \subset \llbracket 1, h \rrbracket \neq \emptyset}} E^{\otimes h} \left[\prod_{t \in T} \xi(t, \mathcal{S}_t^{\uparrow E_t}) \mathbb{1}_{S_N=\mathbf{y}} | S_0 = \mathbf{x} \right] \quad (3.25)$$



$T = \{t_1 = \tau_1^{(1)} = \tau_1^{(3)}, t_2 = \tau_1^{(4)}, t_3 = \tau_2^{(1)}, t_4 = \tau_3^{(1)}, t_5 = \tau_4^{(1)}, t_6 = \tau_3^{(2)}, t_7 = \tau_5^{(1)}\}$
 et $E_{t_1} = \{1, 3\}$, $E_{t_2} = \{4\}$, $E_{t_3} = \{1, 2, 3, 4\}$, $E_{t_4} = \{1, 2\}$, $E_{t_5} = \{1\}$, $E_{t_6} = \{2, 3, 4\}$, $E_{t_7} = \{1, 4\}$.

Passons à l'espérance dans l'expression 3.25. Par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[Z_N^{\otimes h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{T \in \mathcal{A}_l^N \\ t \in T, E_t \subset \llbracket 1, h \rrbracket \neq \emptyset}} E^{\otimes h}[\mathbb{E}[\prod_{t \in T} \xi(t, \mathcal{S}_t^{\uparrow E_t})] \mathbb{1}_{S_N = \mathbf{y}} | \mathcal{S}_0 = \mathbf{x}] \quad (3.26)$$

Par indépendance,

$$\mathbb{E}[\prod_{t \in T} \xi(t, \mathcal{S}_t^{\uparrow E_t})] = \prod_{t \in T} \mathbb{E}[\xi(t, \mathcal{S}_t^{\uparrow E_t})] \quad (3.27)$$

Ces dernières espérances peuvent ne pas être nulles seulement si pour chaque $r \in E_t$, la marche aléatoire $S^{(r)}$ rencontre une autre marche aléatoire $S^{(r')}$ qui s'était elle-même arrêtée au temps t c'est-à-dire avec $r' \in E_t$. Donc, chaque terme de 3.27 est un produit de termes de la forme $\xi(t, S_t^{(r)})^k$ avec $k \geq 2$.

Plus formellement, il doit y avoir pour chaque $t \in T$, une partition I_t de $\llbracket 1, h \rrbracket$ telle que l'intérieur de I_t soit $\mathring{I} = E_t \neq \emptyset$ (ce qui implique que I_t n'est pas la partition triviale) et $\mathcal{S}_t \sim I_t$. Les éléments d'une même classe se rencontrant sur la même tranche $\{t\} \times \mathbb{Z}^2$.

Remarquons que si \mathbf{x} est compatible avec $I \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$, $\mathbb{E}[\xi(t, \mathbf{x}^{\uparrow \mathring{I}})] = \mathbb{E}[\xi^I] (= \prod_{J \in I, |J| \geq 2} \mathbb{E}[\xi^{|J|}])$.

Donc,

$$\prod_{t \in T} \mathbb{E}[\xi(t, \mathcal{S}_t^{\uparrow E_t})] = \sum_{\substack{\text{foreach } t, I_t \vdash \llbracket 1, h \rrbracket \\ I_t = E_t}} \prod_{t \in T} \mathbb{E}[\xi^{I_t}] \mathbb{1}_{\mathcal{S}_t \sim I_t} \quad (3.28)$$

En intégrant ceci dans 3.26, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_N^{\otimes h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] &= \sum_{l \geq 0} \sum_{\substack{T \in \mathcal{A}_l^N \\ t \in T, I_t \vdash \llbracket 1, h \rrbracket, |I_t| < h}} P^{\otimes h}(\forall t \in T, \mathcal{S}_t \sim I_t, \mathcal{S}_N = \mathbf{y} | \mathcal{S}_0 = \mathbf{x}) \prod_{t \in T} \mathbb{E}[\xi^{I_t}] \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ I_1, \dots, I_k \vdash \llbracket 1, h \rrbracket, |I_j| < h \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in (\mathbb{Z}^2)^h}} Q_{n_1}^{*, I_1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \prod_{j=2}^k Q_{n_{j-1}, n_j}^{I_{j-1}, I_j}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) Q_{n_k, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) \prod_{j=1}^k \mathbb{E}[\xi^{I_j}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Comme

$$\begin{aligned} Z_N^{\beta N}(\varphi, \psi)^h &= \left(\frac{1}{N} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^2} \varphi_N(x) Z_N^{\beta N}(x, y) \psi(y) \right)^h \\ &= \frac{1}{N^h} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^2)^h} \varphi_N^{\otimes h}(\mathbf{x}) Z_N^{\otimes h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N^{\otimes h}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{E}[Z_N^{\beta}(\varphi, \psi)^h] = \frac{1}{N^h} \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ I_1, \dots, I_k \vdash \llbracket 1, h \rrbracket, |I_j| < h \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in (\mathbb{Z}^2)^h}} Q_{n_1}^{*, I_1}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{x}_1) \prod_{j=2}^k Q_{n_{j-1}, n_j}^{I_{j-1}, I_j}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) Q_{n_k, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, \psi_N^{\otimes h}) \prod_{j=1}^k \mathbb{E}[\xi^{I_j}] \quad (3.31)$$

Cette dernière expression n'est pas encore 3.3. Nous devons encore contracter les répliques. En rappelant la définition de U en 3.14, on obtient ainsi 3.3.

Nous utiliserons par la suite la notation suivante :

$$T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) = \frac{1}{N^h} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in (\mathbb{Z}^2)^h}} P_{n_1}^{*, I_1}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{x}_1) \prod_{j=2}^k P_{n_{j-1}, n_j}^{I_{j-1}, I_j}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) P_{n_k, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, \psi_N^{\otimes h}) \quad (3.32)$$

$T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi)$ est la contribution des k-uple de partitions (I_1, \dots, I_k) au moment d'ordre h sans les moments des variables de l'environnement :

$$\mathbb{E}[Z_N^{\beta}(\varphi, \psi)^h] = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{I_1 \neq \dots \neq I_k \vdash \llbracket 1, h \rrbracket \\ I_l \neq *}} T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \prod_{l=1}^k \mathbb{E}[\xi^{I_l}]$$

3.2.2 Estimations et preuve du théorème 3.4

Dans cette section, nous supposons que φ et ψ sont positives (quitte à les remplacer par leur valeur absolue). Comme toujours, pour estimer ces sommes qui possèdent une structure de renouvellement, nous souhaitons élargir le domaine de sommation de $0 < n_1 < \dots < n_k < N$ à $0 < n_1, \dots, n_k < N$. Dans ce cas-ci,

il y a une petite difficulté liée au fait que nous avons à faire à la fonction de partition point-à-point et donc que nous avons un terme en $N - n_k$. Pour résoudre ce problème, nous commençons par remarquer que si B est une boule de rayon $\rho \in [1, +\infty]$ qui contient le support de ψ , $Q_{n_k, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, \psi_N^{\otimes h}) \leq \|\psi\|_\infty^h Q_{n_k, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, (\mathbf{1}_B)_N)$.

Ensuite, pour $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)^h$ et $m \in \llbracket N, 2N \rrbracket$, en conditionnant à l'événement qu'au temps $N-n$ la marche aléatoire était déjà dans la boule $\sqrt{N}B$,

$$\begin{aligned} Q_{n, m}(\mathbf{x}, (\mathbf{1}_B)_N) &= P_{\mathbf{x}}(\mathcal{S}_{m-n} \in \sqrt{N}B) \geq \sum_{\mathbf{y} \in \sqrt{N}B} P_{\mathbf{x}}(\mathcal{S}_{m-n} \in \sqrt{N}B | \mathcal{S}_{N-n} = \mathbf{y}) P_{\mathbf{x}}(\mathcal{S}_{N-n} = \mathbf{y}) \\ &= \sum_{\mathbf{y} \in \sqrt{N}B} P(\mathcal{S}_{m-N} \in \sqrt{N}B - \mathbf{y}) P_{\mathbf{x}}(\mathcal{S}_{N-n} = \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Par le théorème de la limite locale 1.2, on dispose d'une constante $c > 0$ telle que, uniformément en $\mathbf{y} \in \sqrt{N}B$, $P(\mathcal{S}_{m-N} \in \sqrt{N}B - \sqrt{N}) \geq c$, nous obtenons ainsi une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)^h$, $N \geq 1$ et $1 \leq n < N$,

$$Q_{n, N}(\mathbf{x}, (\mathbf{1}_B)_N) \leq \frac{C}{N} \sum_{m=N}^{2N} Q_{n, m}(\mathbf{x}, (\mathbf{1}_B)_N) \quad (3.34)$$

Rappelons que $T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi)$ avait été défini en 3.32.

3.34 donne ainsi l'inégalité suivante :

$$T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \leq \frac{C}{N^{h+1}} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1} \leq 2N \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in (\mathbb{Z}^2)^h}} P_{n_1}^{*, I_1}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{x}_1) \prod_{j=2}^k P_{n_{j-1}, n_j}^{I_{j-1}, I_j}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) P_{n_k, n_{k+1}}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, (\mathbf{1}_B)_N) \|\psi\|_\infty^h \quad (3.35)$$

Pour $\lambda \geq 0$, la transformée de Laplace de l'opérateur P est :

$$\mathbf{P}_{N, \lambda}^{I, J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{2N} e^{-\lambda n} P_n^{I, J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.36)$$

(mêmes notations pour les opérateurs Q et U).

En élargissant le domaine de sommation de $0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1} \leq 2N$ à $0 < m_1 < \dots < m_{k+1} \leq 2N$ et en introduisant la transformée de Laplace des opérateurs P , il vient :

$$T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \leq C \frac{e^{2\lambda N}}{N^{h+1}} \sum_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in (\mathbb{Z}^2)^h} \mathbf{P}_{N, \lambda}^{*, I_1}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{x}_1) \prod_{j=2}^k \mathbf{P}_{N, \lambda}^{I_{j-1}, I_j}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) \mathbf{P}_{N, \lambda}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, (\mathbf{1}_B)_N) \|\psi\|_\infty^h \quad (3.37)$$

Pour les raisons décrites dans la remarque 3.3, nous introduisons une fonction $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ log-lipschitzienne et :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{I, J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} \mathbf{P}_{N, \lambda}^{I, J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.38)$$

de sorte que

$$T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \leq C \frac{e^{2\lambda N}}{N^{h+1}} \sum_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in (\mathbb{Z}^2)^h} \tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{*, I_1} \left(\frac{\varphi_N^{\otimes h}}{w_N^{\otimes h}}, \mathbf{x}_1 \right) \prod_{j=2}^k \tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{I_{j-1}, I_j}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) \tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, (\mathbf{1}_B)_N w_N^{\otimes h}) \|\psi\|_\infty^h \quad (3.39)$$

Avec le formalisme d'opérateur introduit en 3.3,

$$T_{N, \beta}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \leq C \frac{e^{2\lambda N}}{N^{h+1}} \left\langle \frac{\varphi_N^{\otimes h}}{w_N^{\otimes h}}, \tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{*, I_1} \tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{I_1, I_2} \dots \tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{I_{k-1}, I_k} \tilde{\mathbf{P}}_{N, \lambda}^{I_k, \lambda} (\mathbf{1}_B)_N w_N^{\otimes h} \right\rangle \|\psi\|_\infty^h \quad (3.40)$$

on obtient finalement l'inégalité :

$$T_{N,\beta}^{I_1,\dots,I_k}(\varphi, \psi) \leq C \frac{e^{2\lambda N}}{N^{h+1}} \left\| \frac{\varphi_N^{\otimes h}}{w_N^{\otimes h}} \right\|_{\ell^p} \left\| \tilde{\mathbf{P}}_{N,\lambda}^{*,I_1} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \left\| \tilde{\mathbf{P}}_{N,\lambda}^{I_1,I_2} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \dots \left\| \tilde{\mathbf{P}}_{N,\lambda}^{I_k,*} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \left\| (\mathbf{1}_B)_N w_N^{\otimes h} \right\|_{\ell^q} \|\psi\|_\infty^h \quad (3.41)$$

Pour exploiter cette dernière inégalité, nous devons à présent étudier les opérateurs $\tilde{\mathbf{P}}_{N,\lambda}^{I,J}$. Par le lemme 3.1 ci-dessous, ceci revient à étudier les opérateurs $\tilde{\mathbf{Q}}_{N,\lambda}^{I,J}$ et $\tilde{\mathbf{U}}_{N,\lambda,\beta}$. L'analyse de ces opérateurs est tirée de [LZ21].

Lemme 3.1.

$$\left\| \tilde{\mathbf{P}}_{N,\lambda}^{I,J} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq \left\| \tilde{\mathbf{Q}}_{N,\lambda}^{I,J} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \left\| \tilde{\mathbf{U}}_{N,\lambda,\beta}^J \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \quad (3.42)$$

Proposition 3.3. Soient $p, q \in (1, +\infty)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $I, J \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$ avec $I \neq J$ et $I, J \neq *$, il existe une constante $C < +\infty$ qui dépend seulement de p, h et w telles que pour tous $N \geq 1$ et $\lambda \geq 0$:

$$\left\| \tilde{\mathbf{Q}}_{N,\lambda}^{I,J} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq C \quad (3.43)$$

$$\left\| \tilde{\mathbf{Q}}_{N,\lambda}^{I,*} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq CN^{\frac{1}{p}} \quad (3.44)$$

$$\left\| \tilde{\mathbf{Q}}_{N,\lambda}^{*,I} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq CN^{\frac{1}{q}} \quad (3.45)$$

Dans le régime critique $\sigma_N^2 =$, avec $\tilde{\lambda} > 1$ et $\lambda_N = \frac{\tilde{\lambda}}{N}$,

$$\left\| \tilde{\mathbf{U}}_{N,\lambda_N,\beta_N} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq \frac{C}{(\log \tilde{\lambda}) \sigma_N^2} \quad (3.46)$$

Démonstration. Voir l'appendice A. □

Corollaire 3.1. Soient $p, q \in (1, +\infty)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $I, J \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$ avec $I \neq J$ et $I, J \neq *$, et $\tilde{\lambda} > 1$, il existe une constante $C < +\infty$ qui dépend seulement de p, h, w et $\tilde{\lambda}$ telle que pour tout entier $N \geq 1$:

$$\left\| \tilde{\mathbf{P}}_{N,\beta_N,\lambda_N}^{I,J} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq \frac{C}{(\log \tilde{\lambda}) \sigma_N^2} \quad (3.47)$$

$$\left\| \tilde{\mathbf{P}}_{N,\beta_N,\lambda_N}^{*,I} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq \frac{CN^{\frac{1}{q}}}{(\log \tilde{\lambda}) \sigma_N^2} \quad (3.48)$$

Corollaire 3.2. En intégrant ces dernières inégalités à l'inégalité 3.41 avec $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{N}$, on obtient finalement une constante $C < \infty$ telle que

$$T_{N,\beta_N}^{I_1,\dots,I_k} \leq \frac{1}{N^h} \left\| \frac{\varphi_N^{\otimes h}}{w_N^{\otimes h}} \right\|_{\ell^p} \left(\frac{C}{\log \tilde{\lambda} \sigma_N^2} \right)^k \left\| (\mathbf{1}_B)_N w_N^{\otimes h} \right\|_{\ell^q} \|\psi\|_\infty^h \quad (3.49)$$

puis en prenant $\tilde{\lambda}$ suffisamment grand et en notant $B(h)$ le h -ième nombre de Bell, c'est-à-dire le nombre de partition de $\llbracket 1, h \rrbracket$, on obtient

$$\mathbb{E}[Z_{N,\beta_N}(\varphi, \psi)^h] \leq \frac{1}{N^h} \left\| \frac{\varphi_N^{\otimes h}}{w_N^{\otimes h}} \right\|_{\ell^p} \left\| (\mathbf{1}_B)_N w_N^{\otimes h} \right\|_{\ell^q} \|\psi\|_\infty^h \sum_{k \geq 1} \left(\frac{CB(h)}{\log \tilde{\lambda}} \right)^k \leq \frac{C}{N^h} \left\| \frac{\varphi_N^{\otimes h}}{w_N^{\otimes h}} \right\|_{\ell^p} \left\| (\mathbf{1}_B)_N w_N^{\otimes h} \right\|_{\ell^q} \|\psi\|_\infty^h \quad (3.50)$$

3.2.3 Limite continue des moments et preuve du théorème 3.5

Rappelons le résultat que nous avons obtenu précédemment :

$$\mathbb{E}[Z_N^{\beta_N}(\varphi, \psi)^h] = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{I_1 \neq \dots \neq I_k \vdash \llbracket 1, h \rrbracket \\ I_l \neq *}} T_{N, \beta_N}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \prod_{l=1}^k \mathbb{E}[\xi_{\beta_N}^{I_l}] \quad (3.51)$$

La stratégie de la preuve est la suivante :

- **Étape 1** : D'abord nous montrerons que nous pouvons tronquer cette somme à $k \leq K$ pour K suffisamment grand. Nous n'aurons donc plus qu'à montrer que $T_{N, \beta_N}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \prod_{l=1}^k \mathbb{E}[\xi_{\beta_N}^{I_l}]$ converge quand $N \rightarrow +\infty$. Ensuite nous montrerons que $T_{N, \beta_N}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \prod_{l=1}^k \mathbb{E}[\xi_{\beta_N}^{I_l}]$ tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$ dès qu'au moins une partition n'est pas une paire. Cette étape est une conséquence directe de 3.2.
- **Étape 2** : Il restera donc à traiter le cas de k -uplet de partitions qui sont des paires et montrer que

$$\frac{1}{N^h} \sigma_N^{2k} \sum_{\substack{0 < n_1 < \dots < n_k < N \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k}} P_{0, n_1, N}^{*, I_1}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{x}_1) \sigma_N^2 \prod_{l=2}^k P_{n_{l-1}, n_l, N}^{I_{l-1}, I_l}(\mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l) \sigma_N^2 Q_{n_k, N, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, \psi_N^{\otimes h})$$

converge quand $N \rightarrow +\infty$. Nous calculerons alors l'asymptotique de chacun des termes dans cette somme pour faire apparaître sa structure de somme de Riemann.

- **Étape 3** : La dernière étape, que nous ne détaillerons pas car c'est la plus fastidieuse et sûrement la moins intéressante, est l'élimination des singularités de cette somme.

Étape 1 :

Proposition 3.4 (Troncature).

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq K} \sum_{\substack{I_1 \neq \dots \neq I_k \\ I_l \neq *}} \prod_{l=1}^k \mathbb{E}[\xi_{\beta_N}^{I_l}] T_{N, \beta_N}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) = 0 \quad (3.52)$$

Démonstration. Par 3.2 avec $p = q = 2$ et $\tilde{\lambda}$ suffisamment grand, $\sum_{\substack{I_1 \neq \dots \neq I_k \\ I_l \neq *}} \prod_{l=1}^k \mathbb{E}[\xi_{\beta_N}^{I_l}] T_{N, \beta_N}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) \leq c < 1$ \square

Notations 3.5. Pour $k \geq 0$, notons \mathcal{N}_h l'ensemble des k -uplets de partitions non-triviales $I_1 \neq \dots \neq I_k \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$ pour lesquels au moins une n'est pas une paire.

Proposition 3.5 (Termes négligeables). Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et k -uplet $I_1, \dots, I_k \in \mathcal{N}_k$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^k \mathbb{E}[\xi^{I_j}] T_{N, \beta_N}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) = 0 \quad (3.53)$$

Démonstration. Encore une fois, par 3.2, comme il existe au moins une partition I pour laquelle $\mathbb{E}[\xi^I] = o(\sigma_N^2)$, on obtient

$$\prod_{j=1}^k \mathbb{E}[\xi^{I_j}] T_{N, \beta_N}^{I_1, \dots, I_k}(\varphi, \psi) = o(1)$$

\square

Étape 2 :

Notations 3.6.

$$(\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h = \{(m, \mathbf{x}) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{Z}^2)^h / \forall 1 \leq r \leq h, (m, \mathbf{x}_r) \in \mathbb{Z}_{\text{even}}^3\}$$

Proposition 3.6. Pour $\epsilon > 0$, uniformément en $\epsilon N \leq m - n \leq N$, quand $N \rightarrow +\infty$:

$$Q_{n,m}^{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{1}_{\mathbf{x} \sim I} \frac{1}{N^h} \left(\mathcal{Q}_{\frac{m-n}{N}} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\sqrt{N}} \right) + o(1) \right) 2^h \mathbb{1}_{(m-n, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h} \mathbb{1}_{\mathbf{y} \sim J} \quad (3.54)$$

où \mathcal{Q} a été défini en 3.18.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 1.2 □

Proposition 3.7. Pour $\epsilon > 0$, uniformément en $\epsilon N \leq m \leq N$ et $\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h$, quand $N \rightarrow +\infty$:

$$Q_{0,m}^{*,I}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{y}) = \left(\mathcal{Q}_{\frac{m}{2N}} \left(\varphi_N^{\otimes h}, \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{N}} \right) + o(1) \right) \mathbb{1}_{(m, \mathbf{y}) \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h} \mathbb{1}_{\mathbf{y} \sim I} \quad (3.55)$$

et uniformément en $\epsilon N \leq N - n \leq N$ et $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)^h$:

$$Q_{n,N}^{I,*}(\mathbf{x}, \psi_N^{\otimes h}) = \mathbb{1}_{(N-n, \mathbf{x}) \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h} \mathbb{1}_{\mathbf{x} \sim I} \left(\mathcal{Q}_{\frac{N-n}{2N}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{N}}, \psi_N^{\otimes h} \right) + o(1) \right) \quad (3.56)$$

Démonstration. Nous avons par la factorisation suivante

$$Q_{0,m}^{*,I}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{y}) = \prod_{r=1}^h q_m(\varphi_N, \mathbf{y}_r) \mathbb{1}_{\mathbf{y} \sim I}$$

ce qui conclut par 1.2. □

Proposition 3.8. Pour $\epsilon > 0$ et $\rho > 0$, uniformément en $\epsilon N \leq n - m \leq N$ et $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \rho\sqrt{N}$, quand $N \rightarrow +\infty$:

$$\sigma_N^2 U_{m,n}^I(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathbf{y} \sim I} \frac{\pi}{N^h} \left(\mathcal{G}_{\nu, \frac{m-n}{N}} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\sqrt{N}} \right) + o(1) \right) 2^h \mathbb{1}_{(n-m, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h} \mathbb{1}_{\mathbf{x} \sim I} \quad (3.57)$$

où $\mathcal{G}_{\nu,t}$ avait été défini en 3.19.

Démonstration. Rappelons que $\sigma_N^2 U_{m,n}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathbf{y} \sim I} \bar{U}_{m,n,N}^I(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k) \prod_{r \notin \{k,l\}} q_{m,n}(\mathbf{y}_r, \mathbf{x}_r) \mathbb{1}_{\mathbf{x} \sim I}$ (avec $I = \{k, l\}$).

Par les théorèmes de la limite locale 1.2 et 3.1, nous obtenons le résultat souhaité. □

Ensemble, ces trois propositions mènent à l'asymptotique :

Corollaire 3.3. Pour $\epsilon > 0$ et $\rho > 0$, uniformément en $\epsilon N \leq m_1 \leq N$, $\epsilon N \leq m_l - n_{l-1} \leq N$, $\epsilon N \leq N - n \leq N$, $\epsilon N n_l - m_l \leq N$ et $|\mathbf{x}_l - \mathbf{y}_l| \leq \rho\sqrt{N}$, quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^h} Q_{0,m_1}^{*,I_1}(\varphi_N^{\otimes h}, \mathbf{y}_1) \bar{U}_{m_1, n_1, N}^{I_1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) \prod_{l=2}^k Q_{n_{l-1}, m_l}^{I_{l-1}, I_l}(\mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{y}_l) \bar{U}_{m_l, n_l, N}^{I_l}(\mathbf{y}_l, \mathbf{x}_l) Q_{n_k, N}^{I_k, *}(\mathbf{x}_k, \psi_N^{\otimes h}) \\ &= \frac{\pi^k}{2^h} \frac{1}{N^{2kh}} \left(\mathcal{Q}_{\frac{m_1}{N}} \left(\varphi_N^{\otimes h}, \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{N}} \right) \mathbb{1}_{\mathbf{y}_1 \sim I_1} \mathcal{G}_{\nu, \frac{n_1 - m_1}{N}}^{I_1} \left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1}{\sqrt{N}} \right) \mathbb{1}_{\mathbf{x}_1 \sim I_1} \prod_{l=2}^k \mathcal{Q}_{\frac{m_l - n_{l-1}}{N}} \left(\frac{\mathbf{y}_l - \mathbf{x}_{l-1}}{\sqrt{N}} \right) \mathbb{1}_{\mathbf{y}_l \sim I_l} \mathcal{G}_{\nu, \frac{n_l - m_l}{N}}^{I_l} \left(\frac{\mathbf{x}_l - \mathbf{y}_l}{\sqrt{N}} \right) \right. \\ & \quad \left. \mathbb{1}_{\mathbf{x}_l \sim I_l} \mathcal{Q}_{\frac{N - n_k}{N}} \left(\frac{\mathbf{x}_k}{\sqrt{N}}, \psi_N^{\otimes h} \right) + o(1) \right) 2^h \mathbb{1}_{(m_1, \mathbf{y}_1) \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h} 2^h \mathbb{1}_{(n_1, \mathbf{y}_1) \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h} \dots 2^h \mathbb{1}_{(n_k, \mathbf{x}_k) \in (\mathbb{Z}_{\text{even}}^3)^h} \end{aligned}$$

Remarque 3.5. La normalisation $\frac{1}{N^{2kh}}$ est en effet la bonne car nous devons payer N^{2k} pour le temps avec $a_1 = \frac{m_1}{N}, b_1 = \frac{n_1}{N}, \dots, a_k = \frac{m_k}{N}, b_k = \frac{n_k}{N}$ et $(\sqrt{N}^{2(h-1)})^{2k}$ en espace avec $u_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{N}}, v_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{N}}, \dots, u_k = \frac{\mathbf{y}_k}{\sqrt{N}}, v_k = \frac{\mathbf{x}_k}{\sqrt{N}}$ avec chacun des \mathbf{x}_l ou \mathbf{y}_l qui ont $h-1$ degrés de liberté \mathbb{Z}^2 qui donnent un coût total de $N^{2k+2k(h-1)}$.

A Inégalités fonctionnelles

Lemme A.1. *On dispose d'une constante $C < +\infty$ telle que pour tout $N \geq 1$, tout $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)^h$ et tout $\lambda \geq 0$*

$$Q_{N,\lambda}(\mathbf{x}) \leq \frac{C}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^{h-1}} \quad (\text{A.1})$$

En outre, pour tout $A > 0$, on dispose d'une constante $C < \infty$ telle que pour tout $|\mathbf{x}| \geq A\sqrt{N}$ et tout $\lambda \geq 0$

$$Q_{N,\lambda}(\mathbf{x}) \leq \frac{C}{N^{h-1}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{CN}} \quad (\text{A.2})$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de la limite locale. □

Lemme A.2. *Soient $p \in (1, +\infty)$, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, I, J deux partitions de $\llbracket 1, h \rrbracket$ et $c > 0$. Il existe une constance $C > 0$ indépendante de p, q et N telle que : pour toutes fonctions $f : (\mathbb{Z}^2)_I^h \mapsto \mathbb{R}$, $g : (\mathbb{Z}^2)_J^h \mapsto \mathbb{R}$*

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h}} f(\mathbf{x}) e^{-c \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{\sqrt{N}}} g(\mathbf{y}) \leq CN^{\frac{|J|}{p} + \frac{|I|}{q}} \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}$$

Démonstration. Par l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h}} f(\mathbf{x}) e^{-c \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{\sqrt{N}}} g(\mathbf{y}) \leq \left(\sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h}} |f(\mathbf{x})|^p e^{-c \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{\sqrt{N}}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h}} |g(\mathbf{y})|^q e^{-c \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{\sqrt{N}}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

et le résultat suit par une majoration somme-intégrale. □

Voici une notation que nous emploierons souvent :

Notations A.1. *Pour $A > 0$, on note $E_N^{I,J}(A) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h / |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq A\sqrt{N}\}$*

Theoreme A.1. *Soient $p \in (1, +\infty)$, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $I, J \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$ avec $|I|, |J| \leq h - 1$ et $I \neq J$, il existe une constante $C = C(p, h, w)$ indépendante de N et λ telle que :*

$$\left\| \tilde{Q}_{N,\lambda}^{I,J} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq C$$

Theoreme A.2 (Opérateurs d'entrée et de sortie). *Soient $p \in (1, +\infty)$, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $I \vdash \llbracket 1, h \rrbracket$ avec $|I| \leq h - 1$, il existe une constante $C = C(p, h, w)$ indépendante de N et λ telle que :*

$$\left\| \tilde{Q}_{N,\lambda}^{I,*} \right\|_{\ell^q \rightarrow \ell^q} \leq CN^{\frac{1}{p}}$$

Commençons par prouver le premier résultat,

Démonstration. Nous devons prouver qu'il existe une constance $C > 0$ telle que pour toutes fonctions $f : (\mathbb{Z}^2)_I^h \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : (\mathbb{Z}^2)_J^h \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h}} f(\mathbf{x}) \tilde{Q}_{N,\lambda}^{I,J} g(\mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h}} f(\mathbf{x}) Q_{N,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} \leq C \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}$$

Fixons $A > 0$ et découpons la somme en deux parties :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h}} f(\mathbf{x}) Q_{N,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} &= \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_N^{I,J}(A)} f(\mathbf{x}) Q_{N,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} + \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \notin E_N^{I,J}(A)} f(\mathbf{x}) Q_{N,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} \\ &= (a) + (b) \end{aligned}$$

Commençons par estimer (b). Par les lemmes A.1 et A.2, pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \notin E_N^{I,J}(A)$,

$$\mathbf{Q}_{N,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} \leq C(A) D_w \frac{1}{N^{h-1}} e^{C_w \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{CN}}$$

Nous choisissons $A > 0$ pour avoir des constantes C, c telles que : pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \notin E_N^{I,J}(A)$, $\mathbf{Q}_{N,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} \leq C e^{-c \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{N}}$.

Ainsi (avec $|I|, |J| \leq h-1$),

$$(b) \leq \frac{C}{N^{h-1}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h} f(\mathbf{x}) e^{-c \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{N}} g(\mathbf{y}) \leq CN^{\frac{|J|}{p} \frac{|I|}{q} - (h-1)} \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q} \leq C \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}$$

Ensuite pour le terme (a),

$$(a) \leq CD_w e^{C_w A} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_N(A)} \frac{f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})}{(1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)^{h-1}} \leq CD_w e^{C_w A} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h} \frac{f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})}{(1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)^{h-1}}$$

L'hypothèse sur I et J se traduit par le fait qu'on dispose d'entiers k, l, m et n de $\llbracket 1, h \rrbracket$ tels que $k \stackrel{I}{\sim} l$, $m \stackrel{J}{\sim} n$ et $m \neq k, l$. Prenons un $a > 0$ de sorte que $ap < 1$ et $aq < 1$.

Nous écrivons astucieusement :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h} \frac{f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} = \\ \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h} \frac{f(\mathbf{x})}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{h-1}{p}}} \frac{(1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^{2a})}{(1 + |\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_l|^{2a})} \times \frac{g(\mathbf{y})}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{\frac{h-1}{q}}} \frac{(1 + |\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_l|^{2a})}{(1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^{2a})} \end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h} \frac{f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \leq \left(\sum_{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h} |f(\mathbf{x})|^p (1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^{2a})^p \sum_{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)^{h-1} (1 + |\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_l|^{2a})^p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left(\sum_{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h} |g(\mathbf{y})|^q (1 + |\mathbf{y}_m - \mathbf{y}_n|^{2a})^q \sum_{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)^{h-1} (1 + |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|^{2a})^q} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Par symétrie, il suffit donc de montrer qu'on dispose d'une constante $C > 0$ telle que uniformément en $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I$:

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)^{h-1} (1 + |\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_l|^{2a})^p} \leq C \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^{2a})^p}$$

Comme $\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_n$, par l'inégalité triangulaire, $|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m|^2 + |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n|^2 \geq \frac{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^2 + |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n|^2}{3}$ donc $1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \geq \frac{1}{3} (1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^2 + \sum_{i \neq m} |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|^2)$.

Ainsi

$$A(\mathbf{x}) \leq C \sum_{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^2 + \sum_{i \neq m} |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|^2)^{h-1} (1 + |\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_l|^{2a})^p}$$

Quitte à étendre la somme sur \mathbf{y} , on peut remplacer J par la partition dont la seule classe d'équivalence non-triviale est $\{m, n\}$ (c'est en fait le cas limite de cette inégalité). On applique alors successivement le lemme A.3 en les variables \mathbf{y}_i pour $i \notin \{m, k, l\}$ et on obtient :

$$A(\mathbf{x}) \leq C \sum_{\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^2 + |\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k|^2 + |\mathbf{x}_l - \mathbf{y}_l|^2)^2 (1 + |\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_l|^{2a})^p}$$

Dans cette dernière somme, on note $\lambda = 1 + |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|^2 \geq 1$ et on fait le changement de variable (rappelons que $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_l$) $z = (\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k) + (\mathbf{y}_l - \mathbf{x}_l)$, $\tilde{z} = (\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{y}_l - \mathbf{x}_l) = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_l$. On a alors $|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k|^2 + |\mathbf{x}_l - \mathbf{y}_l|^2 = \frac{|z|^2 + |\tilde{z}|^2}{2}$ donc :

$$A(\mathbf{x}) \leq C \sum_{z, \tilde{z} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(\lambda + \frac{|z|^2 + |\tilde{z}|^2}{2})^2 (1 + |\tilde{z}|^{2a})^p}$$

En appliquant à nouveau le lemme A.3, il vient donc :

$$A(\mathbf{x}) \leq C \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(\lambda + |\tilde{z}|^2)^2 (1 + |\tilde{z}|^{2a})^p}$$

Le lemme A.4 permet de conclure qu'on dispose d'une constante $C > 0$ telle que

$$(a) \leq C \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}$$

ce qui achève la preuve de ce premier résultat. \square

Passons à la démonstration du second résultat,

Démonstration. Nous devons prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f : (\mathbb{Z}^2)_I^h \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : (\mathbb{Z}^2)_J^h \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h} f(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{Q}}_{N, \lambda}^{I, *} g(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \times (\mathbb{Z}^2)_J^h} f(\mathbf{x}) \mathbf{Q}_{N, \lambda}^{I, *} \frac{w_N^{\otimes h}(\mathbf{x})}{w_N^{\otimes h}(\mathbf{y})} g(\mathbf{y}) \leq CpN^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}$$

On suit exactement le cours de la preuve précédente. L'estimation sur le complémentaire de $E_N^{I, *}(A)$ (pour un A bien choisi comme ci-dessus) fournit une majoration en $N^{\frac{|*| + |I|}{p} - (h-1)} \leq N^{\frac{1}{p}}$.

Reste donc à montrer qu'étant donné $A > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_N^{I, *}(A)} \frac{f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \leq CpN^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}$$

Quitte à réindexer, on peut supposer que $1 \stackrel{I}{\sim} 2$ et en élargissant la somme que $|I| = h - 1$.

Cette fois-ci, on applique l'inégalité de Hölder en multipliant en haut et en bas par $\log(1 + \frac{NA^2}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{1}{q}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_N^{I, *}(A)} \frac{f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} &\leq \left(\sum_{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h} |f(\mathbf{x})|^p \sum_{\substack{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h \\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \sqrt{NA}}} \frac{\log(1 + \frac{A^2N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left(\sum_{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h} |g(\mathbf{y})|^q \frac{1}{\log(1 + \frac{A^2N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sqrt{NA}}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à démontrer les deux inégalités suivantes :

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sqrt{NA}}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \leq C_1 \log(1 + \frac{A^2N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2}) \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h \\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \sqrt{NA}}} \frac{\log(1 + \frac{A^2N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \leq C_2 N \quad (\text{A.4})$$

où les constantes C_1, C_2 ne dépendent ni de N ni de $\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)_J^h$ pour la première, ni de $\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h$ pour la seconde.

Pour la première A.3, comme précédemment, nous commençons par appliquer l'inégalité triangulaire en exploitant le fait que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$:

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sqrt{N}A}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \leq C \sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sqrt{N}A}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2 + \sum_{i \geq 2} |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|^2)^{h-1}}$$

en appliquant le lemme A.3 en les variables $\mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_h$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}^2)_I^h \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sqrt{N}A}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} &\leq C \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \\ |x - \mathbf{y}_2| \leq A\sqrt{N}}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2 + |\mathbf{y}_2 - x|^2)^{h-1-(h-2)}} \\ &= C \sum_{x \in \mathbb{Z}^2, |x| \leq \sqrt{N}A^2} \frac{1}{(1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2 + |x|^2)} \end{aligned}$$

La première inégalité A.3 découle alors du lemme technique A.5.

Pour la seconde, comme $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, en fait une translation dans la somme donne

$$\sum_{\substack{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h \\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \sqrt{N}A}} \frac{\log(1 + \frac{A^2 N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h \\ |\mathbf{y}| \leq \sqrt{N}A}} \frac{\log(1 + \frac{A^2 N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |\mathbf{y}|^2)^{h-1}}$$

et en appliquant à nouveau le lemme A.3 en les variables $\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_h$:

$$\sum_{\substack{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h \\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \sqrt{N}A}} \frac{\log(1 + \frac{A^2 N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \leq \sum_{\substack{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{Z}^2 \\ |\mathbf{y}_1|, |\mathbf{y}_2| \leq \sqrt{N}A}} \frac{\log(1 + \frac{A^2 N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |\mathbf{y}_1|^2 + |\mathbf{y}_2|^2)}$$

En posant $w = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ et $\tilde{w} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, on a donc comme ci-dessus

$$\sum_{\substack{\mathbf{y} \in (\mathbb{Z}^2)^h \\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \sqrt{N}A}} \frac{\log(1 + \frac{A^2 N}{1 + |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2)^{h-1}} \leq C \sum_{w, \tilde{w} \in \mathbb{Z}^2, |w|, |\tilde{w}| \leq 2\sqrt{A^2 N}} \frac{\log(1 + \frac{A^2 N}{1 + |w|^2})^{\frac{p}{q}}}{(1 + |w|^2 + |\tilde{w}|^2)}$$

En appliquant le lemme A.5 en \tilde{w} et enfin le lemme A.6 en w (en remarquant que $\frac{p}{q} + 1 = p$), nous obtenons l'inégalité souhaitée. \square

A.1 Les lemmes techniques

Remarque A.1. *Il existe une constante $c > 0$ (dépendant uniquement de la dimension) telle que si $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^+$ est une fonction positive radiale décroissante, i.e- $f(x) = g(|x|)$ et que g est décroissante, alors*

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(x) \leq f(0) + c \int_0^{+\infty} r^{d-1} g(r) dr$$

Les lemmes suivants sont des conséquences (plus ou moins pénibles) de cette inégalité.

Lemme A.3. *Pour $\lambda \geq 1$, $a < \frac{1}{p}$, $r \geq 2$,*

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(\lambda + |y|^2)^r} \leq \frac{C}{\lambda^{r-1}} \quad (\text{A.5})$$

où la constante $C > 0$ ne dépend ni de λ ni de a .

Lemme A.4. *Pour $\lambda \geq 1$, $p > 1$, $a < \frac{1}{p}$,*

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(\lambda + |y|^2)^2} \frac{1}{(1 + |y|^{2a})^p} \leq \frac{C}{\lambda} \quad (\text{A.6})$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de λ .

Lemme A.5. Pour $\lambda \geq 1$, $B \geq 1$,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^2, |x| \leq \sqrt{B}} \frac{1}{\lambda + |x|^2} \leq C \log\left(1 + \frac{B}{\lambda}\right) \quad (\text{A.7})$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de λ et B .

Lemme A.6. Pour $B \geq 1$,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^2, |x| \leq \sqrt{B}} \left(\log\left(1 + \frac{B}{1 + |y|^2}\right)\right)^p \leq CB \quad (\text{A.8})$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de B .

Références

- [Jan97] Svante JANSON. *Gaussian Hilbert Spaces*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1997. ISBN : 9780511526169.
- [LL10] LAWLER et LIMIC. *Random walk : A modern introduction*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2010. ISBN : 9780511750854.
- [CSZ13] Francesco CARAVENNA, Rongfeng SUN et Nikos ZYGOURAS. *Polynomial chaos and scaling limits of disordered systems*. 2013. DOI : [10.48550/ARXIV.1312.3357](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1312.3357). URL : <https://arxiv.org/abs/1312.3357>.
- [CSZ15] Francesco CARAVENNA, Rongfeng SUN et Nikos ZYGOURAS. *Universality in marginally relevant disordered systems*. 2015. DOI : [10.48550/ARXIV.1510.06287](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1510.06287). URL : <https://arxiv.org/abs/1510.06287>.
- [Com17] Francis COMETS. *Directed Random Polymers in Random Environments*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2017. ISBN : 9783319504865.
- [CSZ18] Francesco CARAVENNA, Rongfeng SUN et Nikos ZYGOURAS. *The Dickman subordinator, renewal theorems, and disordered systems*. 2018. DOI : [10.48550/ARXIV.1805.01465](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1805.01465). URL : <https://arxiv.org/abs/1805.01465>.
- [CC21] Francesco CARAVENNA et Francesca COTTINI. *Gaussian Limits for Subcritical Chaos*. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2112.08242](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2112.08242). URL : <https://arxiv.org/abs/2112.08242>.
- [CSZ21] Francesco CARAVENNA, Rongfeng SUN et Nikos ZYGOURAS. *The Critical 2d Stochastic Heat Flow*. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2109.03766](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2109.03766). URL : <https://arxiv.org/abs/2109.03766>.
- [LZ21] Dimitris LYGKONIS et Nikos ZYGOURAS. *Moments of the 2d directed polymer in the subcritical regime and a generalisation of the Erdős-Taylor theorem*. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2109.06115](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2109.06115). URL : <https://arxiv.org/abs/2109.06115>.
- [CSZ22] Francesco CARAVENNA, Rongfeng SUN et Nikos ZYGOURAS. *The critical 2d Stochastic Heat Flow is not a Gaussian Multiplicative Chaos*. 2022. DOI : [10.48550/ARXIV.2206.08766](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2206.08766). URL : <https://arxiv.org/abs/2206.08766>.