

# Rapport de stage

## Groupes des automorphismes de systèmes dynamiques

Maya Kayali

juin - juillet 2022

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du stage</b>	<b>2</b>
1.1	Déroulé du stage . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Dynamique symbolique</b>	<b>4</b>
2.1	Motivations . . . . .	4
2.2	Premières définitions . . . . .	4
2.3	Sous-shifts . . . . .	5
2.4	Complexité et entropie . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Résultats classiques</b>	<b>7</b>
3.1	Un petit résultat . . . . .	7
3.2	Théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Groupes d'automorphisme moyennables</b>	<b>9</b>
4.1	Définition et lien avec l'entropie . . . . .	9
4.2	Les résultats connus . . . . .	11
<b>5</b>	<b>L'article de Van Cyr et Bryna Kra</b>	<b>11</b>
5.1	Théorème étudié . . . . .	11
5.2	Résultats préliminaires . . . . .	12
5.3	Démonstration du théorème . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Odomètres et sous-shifts de Toeplitz</b>	<b>19</b>
6.1	Odomètres . . . . .	19
6.2	Sous-shifts de Toeplitz . . . . .	20
6.3	Sous-shifts minimaux de Toeplitz et extensions d'odomètres . . . . .	22

# 1 Présentation du stage

## 1.1 Déroulé du stage

Après avoir choisi de suivre des cours au second semestre à l'ENS, j'ai souhaité compléter mon année par une expérience de stage. Celui-ci s'est déroulé au LAMFA à Amiens du 20 juin au 29 juillet sous la direction de Fabien Durand. Il m'a permis de découvrir un domaine des mathématiques que je ne connaissais pas et de me faire une idée un peu plus précise de ce qu'est le métier d'enseignant-chercheur.

Je partageais le bureau de Fabien Durand. L'ambiance au sein du laboratoire était très agréable, j'ai eu l'occasion de discuter avec des chercheurs et d'échanger avec des doctorants et doctorantes. J'ai également pu assister à plusieurs petits exposés ainsi qu'à une soutenance de thèse. Au cours du stage, j'ai aussi été invitée à participer à une séance sportive de crossfit, dont je garde un bon souvenir malgré le côté éprouvant de l'exercice.

Même si ce stage s'est globalement révélé être une très bonne expérience, j'aurais sans doute aimé découvrir le LAMFA à une période de l'année plus animée. La plupart des séminaires ont en effet pris fin à mon arrivée, et le laboratoire s'est petit à petit vidé à partir de la mi-juillet. Pour des raisons de fermeture estivale, j'ai effectué ma dernière semaine de stage à distance. Cela m'a permis de prendre le temps pour commencer la rédaction du rapport.

Concernant les activités mathématiques, la première partie du stage m'a principalement permis de découvrir le sujet et de me familiariser avec les définitions. Je me suis ensuite penchée plus en détails sur un article de Van Cyr et Bryna Kra ([2]) et sur la preuve du théorème présenté. Enfin, durant la dernière semaine de stage en présentiel, j'ai commencé à travailler sur les sous-shifts de Toeplitz et les odomètres. J'ai commencé la lecture de l'article [4] pour finalement me concentrer sur la compréhension d'un résultat connu explicitant le lien entre les odomètres et les sous-shifts de Toeplitz.

Je remercie chaleureusement Fabien Durand de m'avoir permis de réaliser ce stage et d'avoir pu se rendre disponible pour répondre à mes questions malgré son emploi du temps chargé entre son travail de chercheur et de directeur de la SMF. En dehors du contenu théorique du stage, j'ai beaucoup aimé discuter avec lui et pouvoir en apprendre plus sur les activités de vulgarisation et de diffusion des connaissances mathématiques de la SMF et du LAMFA.

# Notations

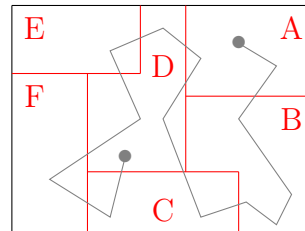
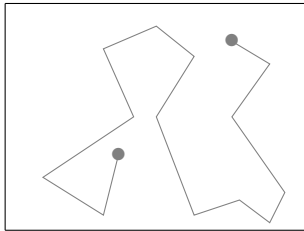
Voici quelques notations utilisées dans la suite du rapport :

- $\#(A)$  désigne le cardinal d'un ensemble  $A$ .
- Pour deux ensembles  $A$  et  $B$ ,  $A\Delta B$  désigne leur différence symétrique.
- $\llbracket a, b \rrbracket$  désigne l'ensemble des entiers compris entre  $a$  et  $b$ .
- $a \wedge b$  désigne le pgcd de  $a$  et  $b$ .
- $a \vee b$  désigne le ppcm de  $a$  et  $b$ .
- $a \equiv b [n]$  exprime la congruence de  $a$  à  $b$  modulo  $n$ .
- $(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)$  désigne la liste des  $a_k$  dans laquelle on a retiré l'élément  $a_i$ .
- $f(n) = \Theta(g(n))$  signifie que  $f(n) = O(g(n))$  et  $g(n) = O(f(n))$ .

## 2 Dynamique symbolique

### 2.1 Motivations

Lorsque l'on étudie un système dynamique, on considère un espace, muni d'un loi d'évolution, et l'on s'intéresse aux trajectoires des points constituant le système sous l'action de la loi d'évolution. L'idée de la dynamique symbolique est de découper cet espace en plusieurs régions, et de regarder lesquelles sont traversées au cours de l'évolution du système. À chaque région est associée une lettre, *un symbole*, et l'étude du système se ramène alors à l'étude de suites infinies.



AABBBBCDADEDFCD

On étudie donc un problème de mathématiques discrètes, dont les objets sont des ensembles de suites, appelés *sous-shifts*, munis d'une opération de *shift*.

### 2.2 Premières définitions

On commence par donner quelques définitions classiques des systèmes dynamiques.

**Definition 2.2.1** (Système dynamique topologique). On appelle *système dynamique topologique* un couple  $(X, T)$  où  $X$  est un espace métrique compact et  $T : X \rightarrow X$  est une homéomorphisme.

**Definition 2.2.2** (Système minimal). On peut définir l'orbite d'un point  $x \in X$  sous l'action de  $T$  par  $\mathcal{O}(x) := \{T^n(x) ; n \in \mathbb{Z}\}$ . Le système  $(X, T)$  est alors dit *minimal* si l'orbite de tout point est dense dans  $X$ .

Dans ce qui va suivre, on s'intéressera plus particulièrement aux automorphismes des systèmes dynamiques topologiques :

**Definition 2.2.3** (Groupe d'automorphisme). Un automorphisme d'un système  $(X, T)$  est un homéomorphisme  $\phi : X \rightarrow X$  qui commute avec  $T$ . L'ensemble des automorphismes, noté  $\text{Aut}(X, T)$ , muni de la relation de composition forme un groupe.

## 2.3 Sous-shifts

Parmi l'ensemble des systèmes dynamiques topologiques, on étudie ici des systèmes d'un certain type, appelés sous-shifts.

Soit  $\mathcal{A}$  un alphabet fini, dont les éléments sont appelés des *lettres*. On note  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  l'ensemble des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $x_n \in \mathcal{A}$ . Une suite finie d'éléments de  $\mathcal{A}$ ,  $w = w_1 \dots w_l$ , est appelée un *mot*, et sa longueur est notée  $|w|$ .

**Definition 2.3.1** (Shift). L'application shift  $\sigma$  est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

**Definition 2.3.2** (Sous-shift). Un sous-shift est un système dynamique topologique  $(X, \sigma)$  où  $X$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$   $\sigma$ -invariant, *i.e*  $\forall x \in X, \sigma(x) \in X$ .

**Exemple 2.3.1.** En prenant  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ , on peut considérer le sous-shift  $X$  composé des suites de contenant qu'une seule occurrence de 1. On voit que  $X$  est invariant sous l'action de  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} x &= \dots 0001000\dots \\ \sigma(x) &= \dots 0010000\dots \end{aligned}$$

Soit  $(X, \sigma)$  un sous-shift. On note  $\mathcal{L}_n(X)$  l'ensemble des mots de longueur  $n$  qui apparaissent dans les suites  $x \in X$ . On définit aussi le *langage* de  $(X, \sigma)$  comme l'ensemble  $\mathcal{L}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n(X)$ .

Détaillons à présent la topologie utilisée pour l'étude des sous-shifts. L'alphabet  $\mathcal{A}$  est muni de la topologie discrète, et  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  de la topologie produit. Les ouverts de  $X$  donc sont de la forme suivante :

$$O_{U_n, \dots, U_m}^{(n, m)} := \{x \mid x_i \in U_i \forall i \in \llbracket n; m \rrbracket\} \text{ où } n \text{ et } m \in \mathbb{Z} \text{ et } U_n, \dots, U_m \text{ sont des ouverts de } \mathcal{A}$$

Ils sont en particulier engendrés par les cylindres :

**Definition 2.3.3** (Cylindre). Soit  $w \in \mathcal{L}_n(X)$ . On note  $[w]_0$  l'ensemble des suites  $x$  telles que  $x_0 x_1 \dots x_{n-1} = w$ .

On définit une distance  $d$  sur  $(X, \sigma)$ , compatible avec la topologie. Pour  $x$  et  $y$  deux suites de  $X$ ,

$$d(x, y) = \frac{1}{2^n}$$

où  $n$  est le plus grand entier tel que  $x_i = y_i \forall |i| \leq n$ .

**Exemple 2.3.2.**

$$\begin{aligned} x &= \dots x_{-5} x_{-4} \mathbf{x_{-3} x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2} x_3 x_4 x_5 \dots \\ y &= \dots y_{-5} y_{-4} \mathbf{x_{-3} x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2} y_3 y_4 y_5 \dots \end{aligned}$$

$$d(x, y) = \frac{1}{2^2}$$

## 2.4 Complexité et entropie

On s'intéresse au nombre de mots de  $n$  lettres que l'on retrouve dans un sous-shift  $(X, \sigma)$ . Ces informations sont contenues dans la fonction de complexité :

**Definition 2.4.1** (Fonction de complexité). Soit  $(X, \sigma)$  un sous-shift. La fonction de complexité est l'application

$$\begin{aligned} p_X &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \#(\mathcal{L}_n(X)) \end{aligned}$$

On dit que la complexité d'un sous-shift est :

- linéaire si  $p_X(n) = \Theta(n)$
- quadratique si  $p_X(n) = \Theta(n^2)$
- polynomiale s'il existe  $d \geq 1$  tel que  $p_X(n) = \Theta(n^d)$
- au plus de croissance polynomiale s'il existe  $d \geq 1$  tel que  $p_X(n) = O(n^d)$
- superlinéaire si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_X(n)}{n} = +\infty$
- sous-quadratique si  $p_X(n) = o(n^2)$
- sous-exponentielle si  $p_X(n) = o(\alpha^n) \forall \alpha > 1$

Pour classifier les différents types de sous-shifts, on définit également leur entropie :

**Definition 2.4.2** (Entropie d'un sous-shift). On définit l'entropie d'un sous-shift par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(p_X(n))}{n}$$

**Proposition 2.4.1.** *L'entropie d'un sous-shift est toujours bien définie. De plus, elle est toujours comprise entre 0 et  $\log(\#\mathcal{A})$ .*

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\frac{\log(p_X(n+1))}{n+1} - \frac{\log(p_X(n))}{n} = \frac{\log\left(\frac{p_X(n+1)}{p_X(n)}\right)}{n+1} - \frac{\log(p_X(n))}{n(n+1)}$$

On a toujours  $p_X(n+1) \leq \#\mathcal{A}p_X(n)$ . En effet, pour former un mot de  $n+1$  lettres, on peut partir d'un mot de  $n$  lettres et y ajouter un élément de  $\mathcal{A}$  à la fin, ce qui nous donne au maximum  $\#\mathcal{A}p_X(n)$  nouveaux mots.

On en déduit

$$\frac{\log\left(\frac{p_X(n+1)}{p_X(n)}\right)}{n+1} \leq \frac{\log(\#\mathcal{A})}{n+1}$$

qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

De la même façon, comme  $p_X(n) \leq (\#\mathcal{A})^n$ ,

$$\frac{\log(p_X(n))}{n(n+1)} \leq \frac{\log(\#\mathcal{A})}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite  $\left(\frac{\log(p_X(n))}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bien convergente.

De plus, comme  $1 \leq p_X(n) \leq (\#\mathcal{A})^n$ , on vérifie que la limite est comprise entre 0 et  $\log(\#\mathcal{A})$ .  $\square$

### 3 Résultats classiques

#### 3.1 Un petit résultat

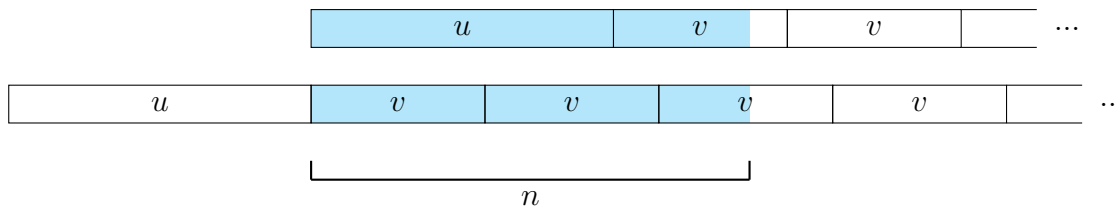
Pour  $x$  une suite bi-infinie, on note  $p_x(n)$  la complexité du sous-shift engendré par  $x$ , i.e  $\{\sigma^n(x) ; n \in \mathbb{Z}\}$ . Si la suite  $x$  est seulement infinie à droite,  $p_x(n)$  peut être défini comme la complexité du sous-shift engendré par  $\tilde{x}$ , la suite issue de  $x$ , complétée à l'infini à gauche par un symbole "\*" n'appartenant pas à  $\mathcal{A}$ , qui ne modifie pas le nombre de mots de  $x$ . Par abus de notation, on dira simplement qu'on shifte  $x$  pour signifier qu'on shifte la suite bi-infinie  $\tilde{x}$ .

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\exists$  des mots  $u$  et  $v$  tels que  $x = uvvv\dots =: uv^\infty$
- (ii)  $\exists C \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n, p_x(n) \leq C$
- (iii)  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $p_x(n_0) \leq n_0$

*Démonstration.* On élimine le cas où  $\#\mathcal{A} = 1$ , car il n'y aurait alors qu'une seule suite possible et le résultat serait immédiat.

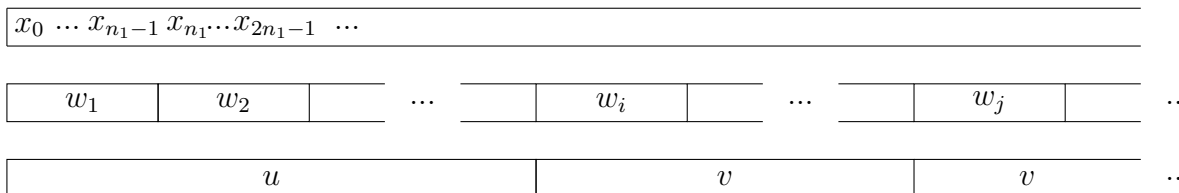
(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour dénombrer les mots de longueur  $n$ , on commence par regarder les termes  $x_0\dots x_{n-1}$  puis on shifte successivement.



On remarque que  $(\sigma^{|u|}(x))_{n \geq 0}$  est une suite périodique qui compte au maximum  $|v|$  mots différents (il suffit de regarder la première lettre du mot). On en déduit que  $p_x(n) \leq |u| + |v|$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Il suffit de prendre  $n_0 = C$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) :  $\#\mathcal{A} \geq 2$  donc  $p_x(1) \geq 2$ . Comme il existe  $n_0$  tel que  $p_x(n_0) \leq n_0$  et que  $p_x$  est une fonction croissante, on a nécessairement l'existence d'un entier  $n_1$  tel que  $p_x(n_1) = p_x(n_1 + 1)$ . Autrement dit, dès que l'on a un mot de longueur  $n_1$ , il se prolonge de façon unique à droite en un mot de longueur  $n_1 + 1$ . Ainsi en notant  $w_1 = x_0\dots x_{n_1-1}$ , le bloc  $w_2 = x_{n_1}\dots x_{2n_1-1}$  est uniquement déterminé par  $w_1$ . Le nombre de mots de longueur  $n_1$  n'étant pas infini, il existe  $i, j$  ( $j > i$ ) tels que  $w_i = w_j$ . On pose alors  $u = w_1\dots w_{i-1}$  et  $v = w_i\dots w_{j-1}$ . Comme  $w_{j+1}$  est uniquement déterminé par  $w_j = w_i$ , on a  $w_{j+1} = w_{i+1}$ . De la même façon  $\forall k \in \llbracket 0; j - i - 1 \rrbracket$ ,  $w_{i+k} = w_{j+k}$ . On obtient alors  $x = uv^\infty$ .



□

*Remarque 3.1.1.* Ce résultat est faux si on considère les suites bi-infinies. Dans l'exemple où  $\mathcal{A} = \{0; 1\}$ , en prenant  $x = \dots 0001000\dots$ , on a  $p_x(n) = n + 1$  qui n'est pas borné.

## 3.2 Théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

**Definition 3.2.1** (Rang). Pour  $X$  un ensemble de suites infinies, on dit qu'un morphisme  $\phi : X \rightarrow X$  est de rang  $R$  si  $\forall x \in X, \forall i \in \mathbb{Z}, (\phi(x))_i$  ne dépend que du bloc  $x_{i-R}\dots x_{i+R}$ .

**Théorème 3.2.1** (Curtis, Hedlund, Lyndon, 1969). Soit  $(X, \sigma)$  un sous-shift et  $\phi : X \rightarrow X$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\phi$  est continu et commute avec  $\sigma$ .
- (ii)  $\phi$  est de rang fini.

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Soit  $a \in \mathcal{A}$ .  $\phi$  étant continue,  $\phi^{-1}([a]_0)$  est un ouvert de  $X$ . En particulier c'est une union finie de cylindres. En utilisant le fait que  $\mathcal{A}$  est fini et que  $\{\phi^{-1}([a]_0) ; a \in \mathcal{A}\}$  est une partition de  $X$ , on en déduit que la valeur de  $(\phi_0(x))_0$  ne dépend que d'un nombre fini de termes de  $x$ . Il existe donc  $R < \infty$  tel que  $(\phi_0(x))_0$  ne dépende que de  $x_{-R}, \dots, x_R$ . Comme  $\phi$  commute avec  $\sigma$ , ce résultat s'étend à tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Notons  $R$  le rang de  $\phi$ . On définit

$$\mu : \mathcal{A}^{2R+1} \rightarrow \mathcal{A}$$

l'application engendrée par  $\phi$ , qui donne la valeur de  $(\phi(x))_i$  en fonction du bloc  $x_{i-R}\dots x_{i+R}$ .

Soit maintenant  $C$  un cylindre.  $\phi^{-1}(C)$  dépend de  $|C| + 2R$  termes, il s'écrit comme union finie de cylindres, c'est un ouvert de  $X$ .  $\phi$  est donc continu.

Pour montrer ensuite que  $\phi$  commute avec  $\sigma$ , on écrit

$$\begin{aligned} (\phi(\sigma(x)))_i &= \mu((\sigma(x))_{i-R}\dots(\sigma(x))_{i+R}) \\ &= \mu(x_{i-R-1}\dots x_{i+R-1}) \\ &= (\phi(x))_{i-1} \\ &= (\sigma(\phi(x)))_i \end{aligned}$$

□

Ce théorème permet d'obtenir une première information sur le groupe d'automorphisme  $\text{Aut}(X, \sigma)$  :

**Corollaire 3.2.2.**  $\text{Aut}(X, \sigma)$  est dénombrable.

## 4 Groupes d'automorphisme moyennables

### 4.1 Définition et lien avec l'entropie

L'objectif de la prochaine partie de ce rapport sera d'étudier la preuve du théorème de Van Cyr et Bryna Kra présenté dans [2]. Leur résultat montre que le groupe d'automorphisme est moyennable pour un certain type de complexité.

Commençons par donner la définition d'un groupe moyennable.

*Remarque 4.1.1.* On donne ici la définition pour le cas des groupes dénombrables.  $\text{Aut}(X, \sigma)$  étant dénombrable d'après le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon, la définition sera celle utilisée par la suite.

**Definition 4.1.1** (Groupe moyennable). Un groupe  $G$  dénombrable est moyennable s'il existe une suite  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de sous-ensembles finis de  $G$  telle que :

- $\forall g \in G, g \in F_k$  pour une infinité de  $k$ .
- $\forall g \in G,$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\#(F_k \Delta (gF_k))}{\#(F_k)} = 0$$

La suite  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est appelée suite de Følner.

*Remarque 4.1.2.* Cette définition généralise la notion de moyenne que l'on connaît pour  $\mathbb{Z}$ .

**Exemple 4.1.1.** Pour retrouver que  $\mathbb{Z}$  est moyennable en utilisant la définition du dessus, on peut par exemple poser  $F_k = \llbracket -k; k \rrbracket$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on voit que  $n \in F_k \forall k \geq |n|$  et on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\#(\llbracket -k; k \rrbracket \Delta \llbracket n - k; n + k \rrbracket)}{\#(\llbracket -k; k \rrbracket)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2n}{k} = 0$$

Les groupes d'automorphismes ne sont cependant pas tous moyennables. La proposition suivante énonce par exemple que le critère de moyennabilité ne s'applique pas au full-shift, *i.e* du sous-shift composé de toutes les suites qu'il est possible de former avec les lettres de l'alphabet  $\mathcal{A}$ . L'idée de la preuve est de montrer  $\text{Aut}(X, \sigma)$  contient le groupe libre à 2 générateurs, et que celui-ci n'est pas moyennable.

**Lemme 4.1.1.** *Le groupe libre à 2 générateurs  $\mathcal{F}_2$  n'est pas moyennable.*

*Démonstration.* Procédons par l'absurde et supposons que  $\mathcal{F}_2$  est moyennable. Il admet une suite de Følner  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $F^{(\epsilon)} \in (F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $\forall g \in \mathcal{F}_2,$

$$\frac{\#(F^{(\epsilon)} \Delta (gF^{(\epsilon)}))}{\#(F^{(\epsilon)})} \leq \epsilon$$

On définit alors une mesure finie additive  $\mu^{(\epsilon)}$  sur  $\mathcal{P}(\mathcal{F}_2)$

$$\mu^{(\epsilon)}(B) := \frac{\#(B \cap F^{(\epsilon)})}{\#(F^{(\epsilon)})}$$

On a  $\forall B \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_2)$  et  $\forall g \in \mathcal{F}_2$

$$\mu^{(\epsilon)}(\mathcal{F}_2) = \frac{\#(\mathcal{F}_2 \cap F^{(\epsilon)})}{\#(F^{(\epsilon)})} = 1$$

$$|\mu^{(\epsilon)}(B) - \mu^{(\epsilon)}(gB)| \leq \frac{\#(F^{(\epsilon)} \Delta (gF^{(\epsilon)}))}{\#(F^{(\epsilon)})} \leq \epsilon$$

L'ensemble des mesures vérifiant ces deux conditions est fermé dans le compact  $[0; 1]^{\mathcal{P}(\mathcal{F}_2)}$ . On peut donc passer à la limite en  $\epsilon \rightarrow 0$  et obtenir une mesure  $\mu$  telle que  $\forall B \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_2)$  et  $\forall g \in \mathcal{F}_2$

$$\mu(\mathcal{F}_2) = 1$$

$$\mu(B) = \mu(gB)$$

On s'intéresse maintenant à la structure de  $\mathcal{F}_2$ . On note  $a$  et  $b$  ses deux générateurs et pour  $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$  on note  $W(x)$  l'ensemble des éléments réduits de  $\mathcal{F}_2$  qui commencent par  $x$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= \{1\} \sqcup W(a) \sqcup W(a^{-1}) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1}) \\ &= W(a) \sqcup aW(a^{-1}) \\ &= W(b) \sqcup bW(b^{-1}) \end{aligned}$$

On pose  $A := W(a) \sqcup W(a^{-1})$  et  $B := W(b) \sqcup W(b^{-1})$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(W(a)) + \mu(W(a^{-1})) \\ &= \mu(W(a)) + \mu(aW(a^{-1})) \\ &= \mu(\mathcal{F}_2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et de la même façon  $\mu(B) = 1$ . On aurait donc  $\mu(A) + \mu(B) > \mu(\mathcal{F}_2)$ , ce qui est absurde car  $A \cup B \subset \mathcal{F}_2$ . □

**Proposition 4.1.1.** *Pour le full-shift,  $\text{Aut}(X, \sigma)$  n'est pas moyennable.*

*Démonstration.* On montre que  $\text{Aut}(X, \sigma)$  contient le groupe libre à 2 générateurs.

On fixe  $a \in \mathcal{A}$  et pour  $b \in \mathcal{A}$ , on note  $\phi_b$  l'involution qui échange les blocs  $sa$  et  $sb$ , pour tout  $s \in \mathcal{A} \setminus \{a, b\}$ .

$s$  fonctionne comme un marqueur pour repérer quelles lettres ont été changées. Sa présence permet de définir  $\phi_b^{-1} = \phi_b$  sans ambiguïté. On a donc  $\phi_b \in \text{Aut}(X, \sigma)$ .

On définit alors un morphisme entre  $\mathcal{F}_2$ , le groupe engendré par  $\{i, j\} \in \mathcal{A}$ , et  $\text{Aut}(X, \sigma)$

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{F}_2 &\rightarrow \text{Aut}(X, \sigma) \\ g_n \cdots g_1 &\mapsto \phi_{g_n} \cdots \phi_{g_1} \end{aligned}$$

Soit  $x \in X$  la suite composée uniquement de  $a$  à l'exception de  $x_0 = b \neq i, j$ . On remarque que  $(\phi_{g_n} \dots \phi_{g_1}(x))_n = j_n$ , de même que  $(\phi_{g_{n-1}} \dots \phi_{g_1}(x))_n = j_{n-1}$  et ainsi de suite. On en déduit que  $\phi_{g_n} \dots \phi_{g_1}$  détermine de façon unique  $g_n \dots g_1$  et donc que  $\theta$  est injective.  $\square$

*Remarque 4.1.3.* Ce résultat ne concerne pas uniquement le full-shift : on peut montrer que tous les sous-shifts d'entropie positive sont non moyennables. L'idée de la preuve reste la même, mais la rédaction est un peu plus technique, car il n'est plus garanti que toutes les combinaisons de deux lettres se retrouvent dans  $X$ . Il faut introduire un concept de *marqueurs* de plus grande longueur pour pouvoir définir les involutions  $\phi$  (pour une preuve complète voir [1]).

## 4.2 Les résultats connus

Voici une liste non exhaustive des résultats démontrés concernant les propriétés de  $\text{Aut}(X, \sigma)$  en fonction des caractéristiques de  $X$  et sa complexité :

- Si  $X$  minimal et  $\liminf \frac{p_X(n)}{n} < \infty$ , alors  $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$  est fini.
- Si  $X$  est transitif et si  $\limsup \frac{p_X(n)}{n} < \infty$ , alors  $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$  est fini.
- Si  $\lim \frac{p_X(n)}{n^2(\log(n))^{-2}} = 0$ , alors  $\text{Aut}(X, \sigma)$  est moyennable.
- Si  $X$  est transitif et  $\liminf \frac{p_X(n)}{n^2} = 0$ , alors  $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$  est périodique.
- Si  $X$  est minimal et  $\lim \frac{p_X(n)}{n^3} = 0$ , alors tout sous-groupe fini sans torsion de  $\text{Aut}(X, \sigma)$  contient un sous-groupe abélien.
- Si  $X$  est minimal et s'il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $\lim \frac{p_X(n)}{n^d} = 0$ , alors  $\text{Aut}(X, \sigma)$  est moyennable et tout sous-groupe fini sans torsion de  $\text{Aut}(X, \sigma)$  contient un sous-groupe nilpotent.
- Si  $X$  est minimal et s'il existe  $\beta < 1/2$  tel que  $\lim \frac{\log(p_X(n))}{n^\beta} = 0$ , alors  $\text{Aut}(X, \sigma)$  est moyennable.

Pour retrouver les références des démonstrations de ces résultats, voir [7].

## 5 L'article de Van Cyr et Bryna Kra

On présente maintenant en détail la preuve du dernier point.

### 5.1 Théorème étudié

**Théorème 5.1.1** (V.Cyr, B.Kra, 2016, [2]). *Si  $(X, \sigma)$  est un sous-shift minimal et qu'il existe  $\beta < 1/2$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(p_X(n))}{n^\beta} = 0$$

*alors  $\text{Aut}(X, \sigma)$  est moyennable.*

*Remarque 5.1.1.* Le résultat semble aussi être vrai pour  $\beta \geq 1/2$ , mais aucune preuve n'a encore été publiée.

## 5.2 Résultats préliminaires

Pour démontrer le théorème, nous avons d'abord besoin d'établir plusieurs lemmes.

L'énoncé du premier lemme est assez intuitif : il nous assure que dans les cas où la complexité n'est pas trop grande, il doit exister un grand nombre de mots qui se prolongent de façon unique à droite et à gauche.

**Lemme 5.2.1.** *Soit  $k_n := \min\{k \in \mathbb{N} ; \text{aucun mot } w \in \mathcal{L}_n(X) \text{ ne s'étend de façon unique } k \text{ fois à gauche et à droite}\}$ , et  $0 < \beta \leq 1$ .*

*Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(p_X(n))}{n^\beta} = 0$$

*alors  $\forall C > 0$ , il existe une infinité d'entiers  $n$  tels que  $k_n > Cn^{1-\beta}$ .*

*Démonstration.* On s'intéresse aux indices pour lesquels  $p_X$  double, *i.e* à la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $d_n := \min\{m \in \mathbb{N} ; p_X(n+m) \geq 2p_X(n)\}$ .

Soit  $w \in \mathcal{L}_n(X)$ . En ajoutant  $k_n$  lettres à gauche et à droite de  $w$ , on forme au moins 2 mots différents de  $\mathcal{L}_{n+2k_n}(X)$ . On a donc  $d_n \leq 2k_n$ .

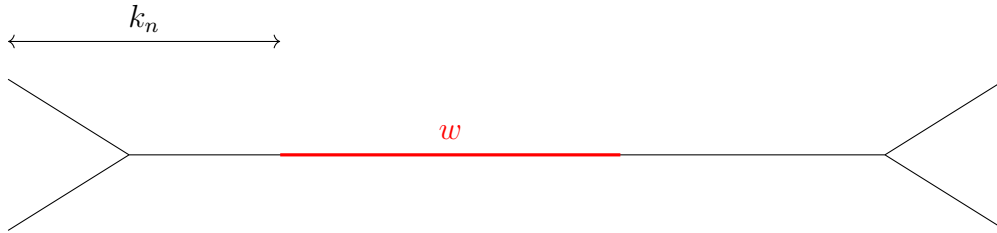


FIGURE 1 – Représentation de  $k_n$ . Un trait unique signifie qu'il n'y a qu'une seule façon d'étendre le mot  $w$ . La dissociation du trait signifie qu'on peut ajouter au moins 2 lettres différentes tout en conservant un mot du langage.

On procède maintenant par l'absurde. Supposons que qu'il existe  $C$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq N, k_n \leq Cn^{1-\beta}$ . On a alors

$$d_n \leq 2Cn^{1-\beta}$$

Intuitivement,  $p_X$  doit d'un côté doubler en un temps assez court pour respecter cette majoration, mais l'hypothèse sur la complexité l'empêche de croître trop vite. On va utiliser cette observation pour en tirer une contradiction.

Soit  $\lambda > 1$ . On introduit

$$\begin{aligned} D_n(\lambda) &:= \min\{m \in \mathbb{N} ; \lambda^{(n+m)^\beta} \geq 2\lambda^{n^\beta}\} \\ &= \left\lceil n \left( 1 + \frac{\log(2)}{n^\beta \log(\lambda)} \right)^{\frac{1}{\beta}} - n \right\rceil \\ &= \frac{\log(2)}{\beta \log(\lambda)} n^{1-\beta} + o(n^{1-\beta}) \end{aligned}$$

$\lambda$  peut être choisi de façon à avoir  $\frac{\log(2)}{\beta \log(\lambda)} > 2C$ , il suffit pour cela de prendre  $1 < \lambda < 2^{\frac{1}{2\beta C}}$ .  
Il existe alors  $M \geq N$  tel que  $d_n \leq D_n(\lambda) \forall n \geq M$ .

On pose  $a_0 = M$  et on définit  $a_{i+1} = a_i + d_{a_i}$ .

On a

$$\frac{p_X(a_{i+1})}{p_X(a_i)} \geq 2$$

et

$$\frac{\lambda^{a_i^\beta}}{\lambda^{a_{i+1}^\beta}} = \frac{\lambda^{a_i^\beta}}{\lambda^{(a_i+d_{a_i})^\beta}} > \frac{1}{2}$$

d'où

$$\frac{p_X(a_{i+1})}{\lambda^{a_{i+1}^\beta}} \frac{\lambda^{a_i^\beta}}{p_X(a_i)} > 1$$

et la suite  $\frac{p_X(a_i)}{\lambda^{a_i^\beta}}$  est croissante. On a donc  $p_X(a_i) \geq \lambda^{a_i^\beta - a_0^\beta} p_X(a_0)$  pour tout  $i$ .

Mais alors

$$\log(p_X(a_i)) \geq (a_i^\beta - a_0^\beta) \log(\lambda) + \log(p_X(a_0))$$

et

$$\frac{\log(p_X(a_i))}{a_i^\beta} \geq \left(1 - \frac{a_0^\beta}{a_i^\beta}\right) \log(\lambda) + \frac{\log(p_X(a_0))}{a_i^\beta}$$

En faisant tendre  $i \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\log(p_X(a_i))}{a_i^\beta} \geq \log \lambda > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse sur la complexité. □

Pour le lemme suivant, on a besoin d'introduire une nouvelle définition.

**Definition 5.2.1** (Action d'un automorphisme sur un mot). Soit  $w \in \mathcal{L}_n(X)$  et  $\phi \in \text{Aut}_R(X)$ , avec  $R$  tel que  $n > 2R + 1$ . On définit le mot  $\phi(w)$  comme l'unique mot de  $\mathcal{L}_{n-2R}(X)$  tel que pour tout  $x \in [w]_0$ ,  $\phi(x) \in \sigma^{-R}[\phi(w)]_0$ .

$$\begin{array}{c}
\text{w} \\
\hline
x = \dots x_{-2}x_{-1}, \text{w}_0, \dots, \text{w}_R, \dots, \text{w}_{n-R-1}, \dots, \text{w}_{n-1}, x_n, x_{n+1} \dots \\
\phi(x) = \dots y_{-2}y_{-1}, \text{y}_0, \dots, \text{y}_R, \dots, \text{y}_{n-R-1}, \dots, \text{y}_{n-1}, x_n, x_{n+1} \dots \\
\hline
\phi(w)
\end{array}$$

FIGURE 2 – Action de  $\phi$  sur  $w$ .

**Lemme 5.2.2.** Soit  $(X, \sigma)$  un sous-shift minimal,  $w \in \mathcal{L}(X)$  et  $x \in [w]_0$ .

- (i)  $\exists \{u\}_{i \in \mathbb{Z}}$  tel que  $x = \dots wu_{-1}wu_0wu_1w\dots$
- (ii)  $(|u_i|)_{i \in \mathbb{Z}}$  est borné. On note  $K_x$  son maximum.
- (iii)  $\max\{K_x ; x \in [w]_0\}$  est borné.

*Démonstration.* (i) : On considère la suite  $y = \sigma^{|w|}(x)$ . L'orbite de  $y$  est dense par minimalité de  $X$ . Pour  $z \in [w]_0$ , il doit donc exister  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $d(\sigma^k(y), z) \leq \frac{1}{2^{|w|}}$ , c'est-à-dire tel que  $\sigma^k(y) \in [w]_0$ . On en déduit que  $x$  contient à nouveau le mot  $w$  à partir de l'indice  $|w| + k$ . Pour les indices négatifs, on raisonne de la même façon en considérant  $\sigma^{-1}$ .

(ii) :  $\mathcal{A}$  est compact (car fini), donc par le théorème de Tychonov  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  est compact. On suppose par l'absurde que la suite des longueurs  $(|u_i|)_{i \in \mathbb{Z}}$  n'est pas bornée. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver  $u_n$  tel que  $|u_n| \geq n$ . On considère alors la suite  $u_n^\infty$ . Il ne s'agit pas nécessairement d'éléments de  $X$ , mais ce sont bien des éléments de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . On peut donc extraire une sous-suite convergente  $(u_{\phi(n)}^\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  à l'aide d'une fonction croissante  $\phi$ . Sa limite est de la forme  $v^\infty$  où  $v$  est un des  $u_{\phi(n)}$ . Cela signifie qu'à partir d'un certain rang,  $u_{\phi(n)} = v$ , ce qui contredit l'hypothèse  $|u_n| \geq n$ . On conclut ainsi que  $(|u_i|)_{i \in \mathbb{Z}}$  est bornée.

(iii) : On suppose par l'absurde que  $K_x$  est non borné et on choisit des  $x$  de façon à obtenir une suite  $K_n \geq n$ . Alors pour chacun d'entre eux, on prend le mot  $u$  qui réalise  $|u| = K_n$ . De la même façon que précédemment, cela nous donne une suite  $u_n^\infty$  dont on peut extraire une sous-suite convergente, ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

Voici maintenant un lemme calculatoire :

**Lemme 5.2.3.** Soit  $\beta < \frac{1}{2}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, si  $f : \llbracket 1; N \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction croissante telle que  $f(N) \leq \exp(N^{\frac{\beta}{1-\beta}})$ , alors il existe un entier  $M \in \llbracket \frac{N}{3}; N - k \rrbracket$  tel que

$$f(M + k) \leq f(M) \exp(M^{\frac{2\beta-1}{2-2\beta}})$$

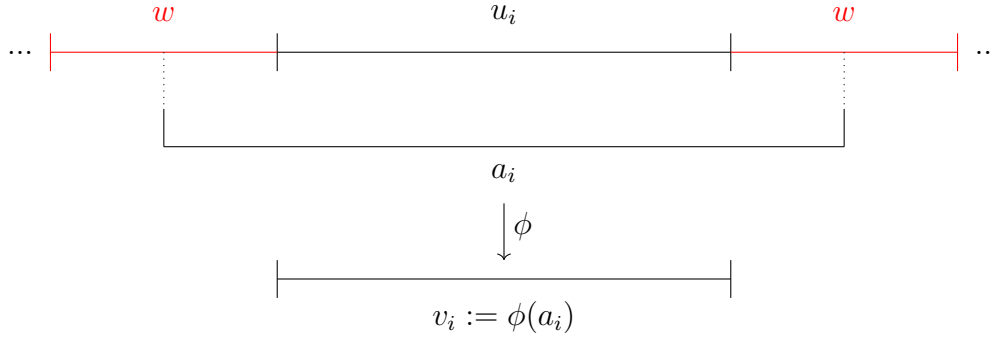
*Démonstration.* On renvoie à l'article de Van Cyr et Bryna Kra [2] (lemme 3.2) pour la preuve.  $\square$

**Lemme 5.2.4.** Soit  $(X, \sigma)$  un sous-shift minimal et  $w \in \mathcal{L}(X)$ . On définit

$$S_w := \{\phi \in \text{Aut}_{\lfloor \frac{|w|}{2} \rfloor}(X) ; \phi[w]_0 \subseteq [w]_0\}$$

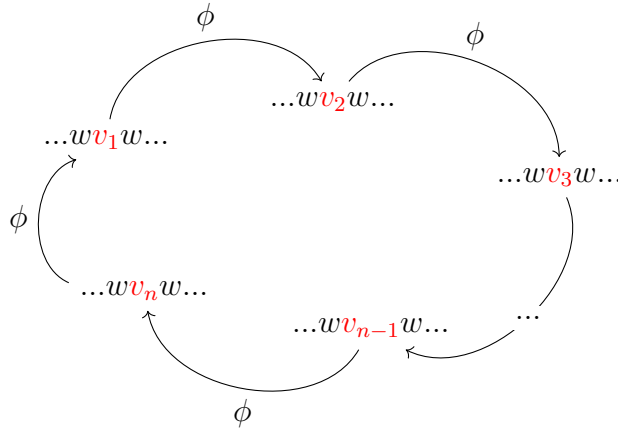
Alors  $G_w := \langle S_w \rangle$  est fini.

*Démonstration.* Soit  $\phi \in S_w$ , et  $x \in [w]_0$ . D'après le lemme précédent,  $x$  s'écrit sous la forme  $x = \dots wu_{-1}wu_0wu_1w\dots$  avec  $|u_i| \leq K$  pour tout  $i$ . Comme  $\phi[w]_0 \subseteq [w]_0$ ,  $\phi(x)$  contient le mot  $w$  aux mêmes emplacements que  $x$ . Donc  $\phi(x)$  se met sous la forme  $\varphi(x) = \dots wv_{-1}wv_0wv_1w\dots$  avec  $|v_i| = |u_i|$  pour tout  $i$ . Ici  $v_i$  ne dépend que de  $u_i$ , car  $\varphi$  est de rang  $\lfloor \frac{|w|}{2} \rfloor$ .



Pour déterminer  $\phi$ , il suffit donc de déterminer  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Or il n'y a qu'un nombre fini de  $u_i$  possible, car ils sont de longueur bornée à valeur dans un alphabet fini. De la même façon, le nombre de  $v_i$  qu'il est possible de former est lui aussi fini, et donc les correspondances  $u_i \rightarrow v_i$  n'existent qu'en nombre fini. On en déduit que  $S_w$  est fini.

Reste à caractériser les inverses des éléments de  $S_w$ . On sait que les  $u_i$  sont constitués de l'ensemble des mots de  $\bigcup_{k=1}^K \mathcal{L}_k(X)$  et que  $\phi$  effectue des permutations entre les mots de même taille.



En notant  $a_i$  le mot de  $x$  de façon à avoir  $\varphi(a_i) = v_i$ , on a alors  $\varphi^{p_X(|u_1|)}(a_1) = u_1$ . Donc en composant  $p_X(K)!$  fois, on a

$$\varphi^{p_X(K)!}(x) = x$$

D'où

$$\varphi^{-1}(x) = \varphi^{p_X(K)!-1}(x) \in [w]_0$$

Ainsi  $S_w$  est stable par inverse (on vérifie bien que le rang de  $\varphi^{-1}$  est  $\lfloor \frac{|w|}{2} \rfloor$ ).

Soit maintenant  $\phi \in G_w$ .  $\phi$  s'écrit comme composition d'un nombre fini d'éléments de  $S_w$ .  $\phi$  envoie donc lui aussi  $u_i$  sur  $v_i$ . Pour déterminer  $\phi$ , il suffit donc de déterminer l'image de chacun des  $u_i$ . Ces  $u_i$  sont en nombre fini et ne peuvent admettre qu'un nombre fini d'images. On en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini de choix pour  $\phi$ , et donc que  $G_w$  est fini. □

On donne enfin une condition nécessaire et suffisante pour que deux automorphismes soient dans la même classe suivant  $G_w$  :

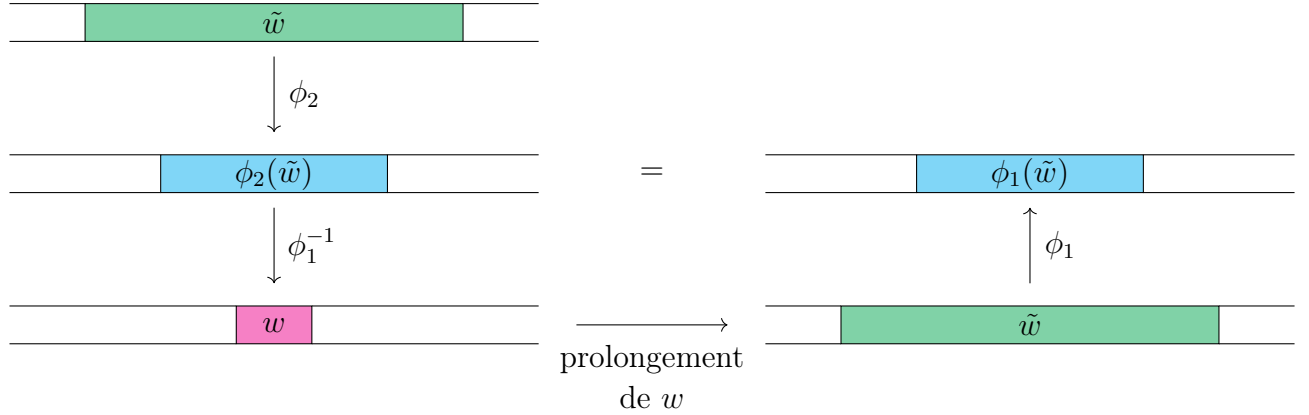
**Lemme 5.2.5.** *Soient  $(X, \sigma)$  un sous-shift minimal et  $\phi_1$  et  $\phi_2 \in \text{Aut}_R(X)$ . Soit  $w \in \mathcal{L}_n(X)$  un mot qui s'étend de façon unique  $2R$  fois à gauche et à droite. On note  $\tilde{w} \in \mathcal{L}_{n+4R}$  son extension. On a alors :*

$\phi_1$  et  $\phi_2$  sont dans la même classe de  $\text{Aut}_R(X)$  suivant  $G_{\tilde{w}}$  si et seulement si  $\phi_1(\tilde{w}) = \phi_2(\tilde{w})$

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) : On a  $\phi_1^{-1} \circ \phi_2[\tilde{w}]_0 \subseteq [\tilde{w}]_0$ . Donc

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2(\tilde{w}) = w$$

Or  $w$  s'étend de façon unique en  $\tilde{w}$ . On connaît donc les  $2R$  termes à gauche et les  $2R$  termes à droite de  $w$ . En appliquant alors  $\phi_1$  à  $w$ , on revient à  $\phi_2(w)$ . On obtient donc  $\phi_1(w) = \phi_2(w)$ .



( $\Leftarrow$ ) : Soit  $x \in [\tilde{w}]_0$ . On a  $\phi_1^{-1}(\phi_2(\tilde{w})) = w$ , qui s'étend de façon unique en  $\tilde{w}$ . On en déduit  $\phi_1^{-1} \circ \phi_2[\tilde{w}]_0 \subseteq [\tilde{w}]_0$ . De plus,  $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$  est de rang  $2R < 4R + n$ , donc  $\phi_1^{-1} \circ \phi_2 \in G_{\tilde{w}}$ .  $\square$

### 5.3 Démonstration du théorème

On donne la preuve du théorème 5.1.1. Celle-ci est directement inspirée de l'article [2].

*Démonstration.* On se fixe :

- $R$  entier suffisamment grand pour pouvoir appliquer le lemme 5.2.3.
- $n$  entier suffisamment grand, de façon à avoir  $n^{1-\beta} > R$ ,  $n > 2R$  et tel qu'il existe un mot  $w$  de longueur  $n$  qui se prolonge de façon unique  $n^{1-\beta}$  fois à gauche et à droite (lemme 5.2.1).
- $\alpha := \left\lfloor \frac{n^{1-\beta}}{R} \right\rfloor + 1$

On note  $\tilde{w}$  le mot obtenu après avoir prolongé  $w$ .

$$|\tilde{w}| = n + 2\lceil n^{1-\beta} \rceil$$

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \{1, 2, \dots, \alpha R\} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ m & \mapsto & \#\{\phi(\tilde{w}) \in \mathcal{L}_{|\tilde{w}| - 2\alpha R}(X) ; \phi \in \text{Aut}_m(X) \leftrightarrow \text{Aut}_{\alpha R}(X)\} \end{array}$$

$f$  est bien définie. En particulier, on a toujours  $|\tilde{w}| - 2\alpha R > 0$ . En effet,

$$\begin{aligned} |\tilde{w}| - 2\alpha R &= n + 2\lceil n^{1-\beta} \rceil - 2R \left\lfloor \frac{n^{1-\beta}}{R} \right\rfloor - 2R \\ &\geq n + 2n^{1-\beta} - 2R \frac{n^{1-\beta}}{R} - 2R \\ &= n - 2R \\ &> 0 \text{ (car } n > 2R) \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que

$$f(\alpha R) \leq \exp((\alpha R)^{\frac{\beta}{1-\beta}})$$

pour pouvoir appliquer le lemme 5.2.3.

On a

$$\begin{aligned} f(\alpha R) &\leq p_X(|\tilde{w}| - 2\alpha R) \\ &\leq \exp((|\tilde{w}| - 2\alpha R)^\beta) \end{aligned}$$

En effet,  $|\tilde{w}| - 2\alpha R \geq n - 2R$  peut être choisi aussi grand que l'on veut, quitte à prendre un  $n$  plus grand. Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(p_X(n))}{n^\beta} = 0$ , on a  $\frac{\log(p_X(n))}{n^\beta} \leq 1$  à partir d'un certain rang. De plus, on peut vérifier que

$$|\tilde{w}| - 2\alpha R \leq (\alpha R)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Pour cela on écrit

$$\begin{aligned} |\tilde{w}| - 2\alpha R - (\alpha R)^{\frac{1}{1-\beta}} &= n + 2\lceil n^{1-\beta} \rceil - 2R \left( \left\lfloor \frac{n^{1-\beta}}{R} \right\rfloor + 1 \right) - R^{\frac{1}{1-\beta}} \left( \left\lfloor \frac{n^{1-\beta}}{R} \right\rfloor + 1 \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \\ &\leq n + 2\lceil n^{1-\beta} \rceil - 2R \left( \left\lfloor \frac{n^{1-\beta}}{R} \right\rfloor + 1 \right) - n \\ &= 2\lceil n^{1-\beta} \rceil - 2R \left( \left\lfloor \frac{n^{1-\beta}}{R} \right\rfloor + 1 \right) \end{aligned}$$

Or on a que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall a \in \mathbb{N}$ ,

$$\lceil x \rceil - a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \leq a$$

En effet,  $\forall i \in \mathbb{N}$ , pour  $x \in [ia, (i+1)a[$ ,

$$a \lfloor \frac{x}{a} \rfloor = ia \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil \leq (i+1)a$$

On a donc finalement,

$$\begin{aligned} f(\alpha R) &\leq p_X(|\tilde{w}| - 2\alpha R) \\ &\leq \exp((|\tilde{w}| - 2\alpha R)^\beta) \\ &\leq \exp((\alpha R)^{\frac{\beta}{1-\beta}}) \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le lemme 5.2.3 à  $f$ . Il existe alors un entier  $M_k \in \llbracket \lceil \frac{\alpha R}{3} \rceil ; \alpha R - k \rrbracket$  tel que

$$f(M_k + k) \leq f(M_k) \exp(M_k^{\frac{2\beta-1}{2-2\beta}})$$

De plus  $M_k$  peut être pris supérieur ou égal à  $k$ , quitte à choisir un  $n$  plus grand.

On découpe  $\text{Aut}_{M_k}(X)$  en classes suivant  $G_{\tilde{w}}$ . D'après la définition de  $f$ , il y en a au plus  $f(M_k)$ . On choisit alors des représentants  $\phi_i$  de ces classes et on construit

$$F_k = \bigcup_{i=1}^{f(M_k)} \phi_i \cdot G_{\tilde{w}}$$

On a par définition  $\text{Aut}_{M_k}(X) \subseteq F_k$ , d'où

$$\text{Aut}_k(X) \subseteq F_k$$

Soit  $\phi \in \text{Aut}_k(X)$ . On a  $\phi \circ \phi_i \in \text{Aut}_{M_k+k}(X) \forall i$  et  $\phi F_k = \bigcup_{i=1}^{f(M_k)} \phi \circ \phi_i \cdot G_{\tilde{w}}$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \#(F_k \Delta(\phi F_k)) &\leq f(M_k + k) - f(M_k) \\ &\leq f(M_k) \left( \exp(M_k^{\frac{2\beta-1}{2-2\beta}}) - 1 \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\#(F_k \Delta(\phi F_k))}{\#(F_k)} &\leq \exp(M_k^{\frac{2\beta-1}{2-2\beta}}) - 1 \\ &\leq \exp(k^{\frac{2\beta-1}{2-2\beta}}) - 1 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

La suite  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  que l'on vient de construire correspond donc à une suite de Følner et  $\text{Aut}(X)$  est moyennable. □

## 6 Odomètres et sous-shifts de Toeplitz

Dans cette dernière partie, on étudie deux systèmes dynamiques topologiques particuliers : les odomètres et les sous-shifts de Toeplitz. L'objectif est de démontrer un résultat connu qui affirme qu'un sous-shift minimal est de Toeplitz si et seulement si il est extension presque 1-1 d'un odomètre (théorème 6.3.1).

### 6.1 Odomètres

**Definition 6.1.1** (odomètre). Soit  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite d'entiers naturels tels que  $p_n$  divise  $p_{n+1}$ . L'odomètre d'échelle  $(p_n)_{n \geq 1}$  est donné par

$$\mathbb{Z}_{(p_n)} = \{(x_n)_{n \geq 1} \in \prod_{n=1}^{+\infty} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} ; x_{n+1} \equiv x_n [p_n] \forall n \geq 1\}$$

Le couple  $(\mathbb{Z}_{(p_n)}, +1)$  est le système dynamique associé, où  $+1$  est la transformation définie par  $x \mapsto x + 1$ .

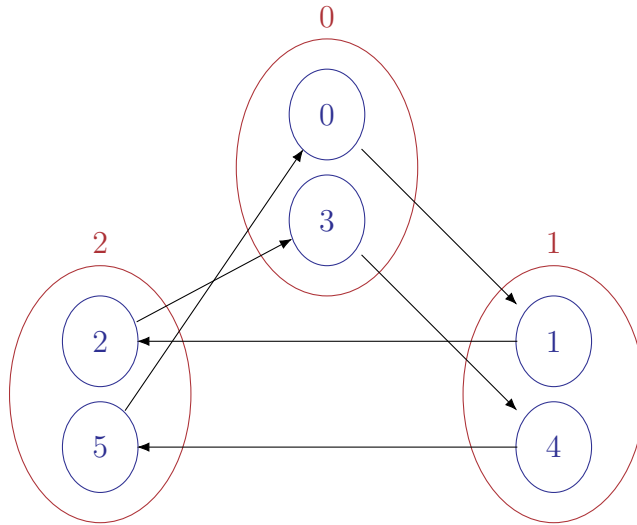


FIGURE 3 – Schéma d'un odomètre fini  $(\mathbb{Z}_{(3,6)}, +1)$ . Les grandes ellipses représentent la valeur du premier terme  $x_1$  et les petites ellipses à l'intérieur celle du deuxième chiffre  $x_2$ . Les flèches indiquent l'effet de la transformation  $+1$ .

**Definition 6.1.2** (Système équicontinu). Un système dynamique  $(X, T)$  est dit équicontinu si la famille d'automorphismes  $(T^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est équicontinue, c'est-à-dire si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } d(x, y) \leq \delta \text{ alors } \forall n \in \mathbb{Z} \ d(T^n(x), T^n(y)) \leq \epsilon$$

**Definition 6.1.3** (Point régulièrement récurrent). Un point  $x$  d'un système dynamique topologique  $(X, T)$  est régulièrement récurrent si pour tout voisinage  $U$ , l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} ; T^n(x) \in U\}$  contient une suite arithmétique.

*Remarque 6.1.1.* Tous les points d'un odomètre sont régulièrement récurrents : pour tout cylindre  $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ , il existe un entier  $N$  tel que  $(+1)^N([x_1, x_2, \dots, x_k]) \in [x_1, x_2, \dots, x_k]$ . En particulier, les odomètres sont des systèmes minimaux et équicontinus (pour l'équicontinuité, il suffit de prendre  $\delta = \epsilon$  dans la définition).

## 6.2 Sous-shifts de Toeplitz

Les suites de Toeplitz sont des suites infinies construites de façon à ce que chaque bloc de longueur finie se retrouve répété plus loin, sans pour autant être périodiques. Plus précisément, la définition est la suivante :

**Definition 6.2.1** (Suite de Toeplitz). Une suite de Toeplitz est une suite régulièrement récurrente sous l'action de  $\sigma$  mais non périodique.

**Exemple 6.2.1.** Certaines suites de Toeplitz peuvent se construire comme point fixe d'une substitution. Par exemple on peut construire la suite de Toeplitz sur l'alphabet  $\{0; 1\}$  associée à la substitution de Feigenbaum  $0 \mapsto 11 ; 1 \mapsto 10$  :

101110101011101110...

Pour étudier les suites de Toeplitz, on regarde les périodes des symboles, ainsi que leur squelette :

**Definition 6.2.2** (p-périodique). La partie p-périodique d'une suite de Toeplitz  $x$  est définie par  $Per_p(x) := \{k \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N}, x_{k+pn} = x_k\}$ .

**Exemple 6.2.2.** La p-période est l'ensemble des indices des éléments de période  $p$ . Par exemple pour la suite associée à la substitution de Feigenbaum,

$$\begin{aligned} Per_2(x) &= 2k ; k \in \mathbb{N} \\ Per_3(x) &= \emptyset \\ Per_4(x) &= \{4k + i ; k \in \mathbb{N}, i = 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

*Remarque 6.2.1.* Si  $p'$  divise  $p$ , alors  $Per_{p'}(x) \subseteq Per_p(x)$ .

**Definition 6.2.3** (Squelette). On note  $\star$  un symbole n'appartenant pas à l'alphabet  $\mathcal{A}$ . Le p-squelette  $S_p(x)$  de la suite de Toeplitz  $x$  est obtenu en remplaçant  $x_i$  par  $\star$  pour tout  $i \notin Per_p(x)$ .

$$(S_p(x))_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in Per_p(x) \\ \star & \text{si } i \notin Per_p(x) \end{cases}$$

**Exemple 6.2.3.** Pour la suite de Feigenbaum, on a

$$\begin{aligned} S_2(x) &= 1 \star 1 \star 1 \star 1 \star 1 \star 1 \star 1 \star 1 \star 1 \star 1 \star \dots \\ S_3(x) &= \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \dots \\ S_4(x) &= 101 \star 101 \star 101 \star 101 \star 10\dots \end{aligned}$$

Dans certains cas, on peut trouver deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $S_p(x) = S_q(x)$ . Par exemple avec la suite  $x = 0122022102220\dots$ , on a  $S_4(x) = S_8(x) = 0 \star \star \star 0 \star \star \star 0 \star \star \star 0 \dots$ . Pour affiner la définition de la période d'un élément, on introduit alors la notion de période essentielle :

**Definition 6.2.4** (Période essentielle). On dit que  $p$  est une période essentielle de  $x$  si pour tout  $0 < q < p$ ,  $S_p(x)$  et  $S_q(x)$  ne coïncident pas.

Dans l'exemple ci-dessus, 4 est une période essentielle, mais 8 n'en est pas une.

**Definition 6.2.5** (Structure périodique). Une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formée de périodes essentielles est une structure périodique si  $p_n$  divise  $p_{n+1}$ .

**Proposition 6.2.1.** Soit  $x$  une suite de Toeplitz. Alors il existe une structure périodique pour  $x$ .

*Démonstration.* Soit  $p_0$  la plus petite période essentielle de  $x$ . Comme la suite est non périodique,  $p_0 > 1$ . On note  $r_i(x)$  la période essentielle de la lettre d'indice  $i$ .

$$r_i(x) := \min\{p \in \mathbb{N} ; i \in Per_p(x)\}$$

Soit  $p_i$  une période essentielle. On pose  $q := \min\{r_j(x) ; j \notin Per_{p_i}(x)\}$ . Alors en prenant  $p_{i+1} = p_i \vee q$ , on obtient une structure périodique pour  $x$ .  $\square$

On construit ensuite les sous-shifts de Toeplitz à partir des suites de Toeplitz :

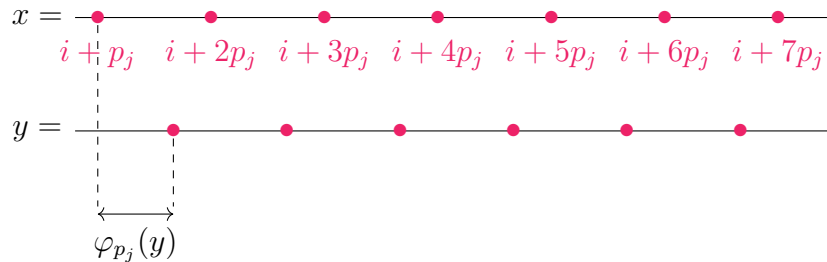
**Definition 6.2.6** (Sous-shift de Toeplitz). Un sous-shift de Toeplitz  $(X, \sigma)$  est l'adhérence de l'orbite d'une suite de Toeplitz.

*Remarque 6.2.2.* Les éléments d'un sous-shift de Toeplitz ne sont pas tous des suites de Toeplitz. Néanmoins, ils ont le même p-squelette à shift près.

On introduit à présent une notion qui nous sera utile dans la prochaine section :

**Definition 6.2.7** (Phase). Soit  $\Sigma = \overline{\mathcal{O}(x)}$  un sous-shift de Toeplitz de structure périodique  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Soit  $y \in \Sigma$  et  $p_j \in (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . On définit  $\varphi_{p_j}(y)$  la phase de  $y$  relativement à  $p_j$  comme l'entier compris entre 0 et  $p_j - 1$  tel que

$$\left(\sigma^{-\varphi_{p_j}(y)}(y)\right)_k = x_k \quad \forall k \in Per_{p_j}(x)$$



### 6.3 Sous-shifts minimaux de Toeplitz et extensions d'odomètres

**Definition 6.3.1** (Morphisme de systèmes dynamiques). Soient  $(X, T)$  et  $(Y, S)$  deux systèmes dynamiques topologiques. Une application continue  $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  est un morphisme de systèmes dynamiques (*factor map en anglais*) si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Y \\ T \downarrow & & \downarrow S \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

On dit alors que  $(Y, S)$  est un facteur de  $(X, T)$ , et que  $(X, T)$  est une extension de  $(Y, S)$ .

$$\pi : \underbrace{(X, T)}_{\text{extension}} \rightarrow \underbrace{(Y, S)}_{\text{facteur}}$$

**Definition 6.3.2** (extension presque 1-1).  $(X, T)$  est une extension presque 1-1 de  $(Y, S)$  s'il existe un morphisme  $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  telle que

$$Y_1 := \{y \in Y \text{ ayant une unique préimage par } \pi\}$$

soit dense dans  $Y$ .

*Remarque 6.3.1.* Si  $(Y, S)$  est minimal, il suffit de vérifier que  $Y_1$  est non vide.

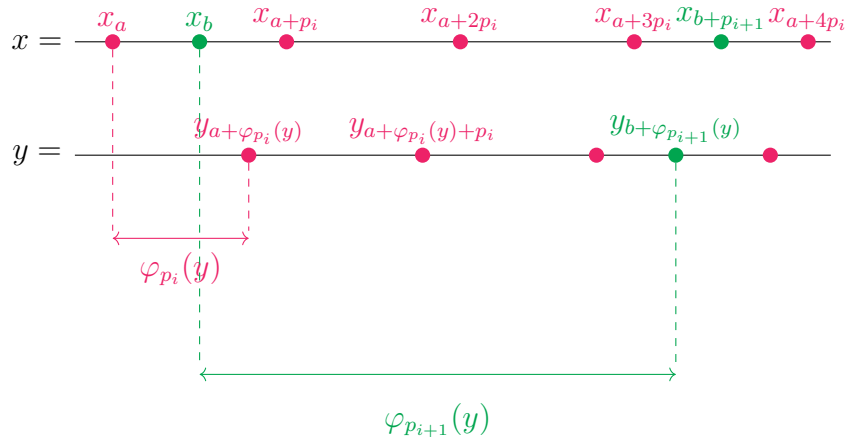
**Théoreme 6.3.1.** *Un sous-shift minimal est de Toeplitz si et seulement si il est extension presque 1-1 d'un odomètre.*

*Démonstration.*  $(\Rightarrow)$  : Soit  $(\Sigma, \sigma)$  un sous-shift minimal de Toeplitz, de structure périodique  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . On construit un odomètre à partir d'une de la suite  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour cela on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{Z}_{(p_i)} \\ y &\mapsto (\varphi_{p_1}(y), \varphi_{p_2}(y), \dots) \end{aligned}$$

Il faut alors vérifier que  $\pi$  est bien définie, qu'elle est continue, que c'est un morphisme de systèmes dynamiques, et qu'elle est presque 1-1.

- $\pi$  est bien définie :



Soit  $y \in \Sigma$ . Par définition,  $p_i$  divise  $p_{i+1}$ . Il reste à vérifier  $\varphi_{i+1}(y) \equiv \varphi_i [p_i]$  pour tout  $i$ . Pour cela on considère les notations du schéma et on écrit :

$$y_{b+\varphi_{p_{i+1}}(y)} = \left( \sigma^{\varphi_{p_{i+1}}(y)}(x) \right)_{b+\varphi_{p_{i+1}}(y)} = x_b$$

$$y_{a+\varphi_{p_{i+1}}(y)} = \left( \sigma^{\varphi_{p_{i+1}}(y)}(x) \right)_{a+\varphi_{p_{i+1}}(y)} = x_a$$

Puis en effectuant la division euclidienne de  $\varphi_{p_{i+1}}(y)$  par  $p_i$

$$\varphi_{p_{i+1}}(y) = qp_i + r$$

$$y_{a+\varphi_{p_{i+1}}(y)-qp_i} = x_a$$

avec  $0 < \varphi_{p_{i+1}}(y) - qp_i < p_i - 1$ . On retrouve la définition de  $\varphi_{p_i}(y)$ . Donc :

$$\varphi_{p_i}(y) = \varphi_{p_{i+1}}(y) - qp_i$$

D'où

$$\varphi_{p_{i+1}}(y) \equiv \varphi_{p_i}(y) [p_i]$$

- $\pi$  est continue :

On a vu que les ouverts étaient engendrés par les cylindres. Soit  $C$  un cylindre de  $\mathbb{Z}_{(p_i)}$ , spécifiant les  $k$  premières valeurs d'un élément de l'odomètre.

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_k]$$

Montrons que  $\pi^{-1}(C)$  est un ouvert de  $\Sigma$ . Soit  $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$  et  $y \in \Sigma$ . Pour avoir  $\varphi_{p_i}(y) = c_i$ , il faut que  $y_{\alpha_i+c_i} = x_{\alpha_i}$ , où  $\alpha_i$  est l'indice d'un des éléments de  $x$  de période essentielle  $c_i$ . Quitte à choisir un  $\alpha_i$  plus petit, cette condition peut se réécrire

$$y \in \bigcup_{(a_1, \dots, \widehat{a_{\alpha_i+c_i}}, \dots, a_k) \in \mathcal{A}^{k-1}} [a_1, a_2, \dots, a_{\alpha_i+c_i-1}, x_{\alpha_i}, a_{\alpha_i+c_i+1}, \dots, a_k]$$

On a donc

$$\pi^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{(a_1, \dots, \widehat{a_{\alpha_i+c_i}}, \dots, a_k) \in \mathcal{A}^{k-1}} [a_1, a_2, \dots, a_{\alpha_i+c_i-1}, x_{\alpha_i}, a_{\alpha_i+c_i+1}, \dots, a_k]$$

qui est une réunion dénombrable de cylindres.  $\pi$  est donc une application continue.

- $\pi$  est un morphisme de systèmes dynamiques :

Il faut ici vérifier que  $\pi \circ \sigma = (+1) \circ \pi$ . Pour cela, il suffit de remarquer que pour  $y \in \Sigma$ , l'opération shift revient à décaler la phase de 1 modulo  $p_i$ .

$$\varphi_{p_i}(\sigma(y)) \equiv \varphi_{p_i}(y) + 1 [p_i]$$

- $\pi$  est presque 1-1 :

Comme précédemment,  $Y_1$  désigne l'ensemble des éléments de  $(\mathbb{Z}_{(p_i)}, +1)$  qui admettent une unique préimage par  $\pi$ . Une préimage d'un élément  $z \in \mathbb{Z}_{(p_i)}$  est uniquement déterminée par son squelette  $(S_{p_i}(y))_{i \in \mathbb{N}^*}$ . Ainsi pour que la préimage soit unique, il faut et il suffit que ce soit une suite de Toeplitz. La densité des suites de Toeplitz dans  $\Sigma$  permet alors de conclure.

( $\Leftarrow$ ) : Soit  $(G, \tau)$  un odomètre et  $(X, T)$  un sous-shift minimal extension presque 1-1 de  $(G, \tau)$ .

$$\pi : (X, T) \longrightarrow (G, \tau)$$

Comme précédemment, on note  $Y_1$  les éléments de  $G$  qui ont une unique préimage.  $\pi$  forme alors un homéomorphisme entre  $\pi^{-1}(Y_1)$  et  $Y_1$ . Un point de  $\pi^{-1}(Y_1)$  est donc régulièrement récurrent si et seulement si son image l'est. Or les points de l'odomètre sont tous régulièrement récurrents. Il existe donc  $x \in \pi^{-1}(Y_1)$  régulièrement récurrent, et son orbite est dense par minimalité de  $X$ . On en déduit que  $X = \overline{\mathcal{O}(x)}$ .  $\square$

On peut aller plus loin en montrant que l'odomètre ainsi construit est le facteur équicontinu maximal du sous-shift de Toeplitz  $(\Sigma, \sigma)$  (théorème 6.3.2).

**Definition 6.3.3** (Facteur équicontinu maximal). Soit  $(X, T)$  et  $(Y, S)$  des systèmes dynamiques topologiques.  $(Y, S)$  est le facteur équicontinu maximal de  $(X, T)$  si tout autre facteur équicontinu de  $(X, T)$  est facteur de  $(Y, S)$ .

Autrement dit, en notant  $\pi : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ , pour tout facteur équicontinu  $\pi' : (X, T) \longrightarrow (Z, U)$  il existe un morphisme  $\gamma : (Y, S) \longrightarrow (Z, U)$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (X, T) & \xrightarrow{\pi} & (Y, S) \\ & \searrow \pi' & \downarrow \exists \gamma \\ & & (Z, U) \end{array}$$

**Théoreme 6.3.2.** L'odomètre construit précédemment est le facteur équicontinu maximal de  $(\Sigma, \sigma)$ .

*Démonstration.* On a déjà vu que les odomètres étaient équicontinus. On montre donc la maximalité. Soit  $(Y, S)$  un autre facteur équicontinu de  $(\Sigma, \sigma)$  et  $\pi'$  le morphisme correspondante. On cherche à construire un morphisme  $\gamma$  tel que le digramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma, \sigma) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{Z}_{(p_i)}, +1) \\ & \searrow \pi' & \downarrow \gamma \\ & & (Y, S) \end{array}$$

On note  $Z$  les éléments de l'odomètre  $\mathbb{Z}_{(p_i)}$  qui admettent une unique préimage via  $\pi$ . On peut alors définir  $\pi^{-1}|_Z$  l'application envoyant vers cette préimage. En restreignant les ensembles, on peut donc construire  $\gamma|_Z = \pi' \circ \pi^{-1}|_Z$ . Puis on utilise le fait que  $Z$  soit dense dans  $\mathbb{Z}_{(p_i)}$  pour prolonger par continuité.  $\square$

## Références

- [1] M. Boyle, D. Lind, and D. Rudolph. The automorphism group of a shift of finite type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 306, Mars 1988.
- [2] Van Cyr and Bryna Kra. The automorphism group of a minimal shift of stretched exponential growth. *Journal of Modern Dynamics*, 2016.
- [3] Sebastián Donoso, Fabien Durand, and Alejandro Maass and Samuel Petite. On automorphism groups of low complexity subshifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36 :64–95, 2016.
- [4] Sebastián Donoso, Fabien Durand, Alejandro Maass, and Samuel Petite. On automorphism groups of toeplitz subshifts. *Discrete Analysis*, 19, 2017.
- [5] Tomasz Downarowicz. Survey of odometers and toeplitz flows. *Algebraic and topological dynamics*, 2005.
- [6] Petr Kůrka. *Topological and Symbolic Dynamics*. Cours Spécialisés, Société Mathématique de France. EDP Sciences, 2003.
- [7] Ronnie Pavlov and Scott Schmieding. Local finiteness and automorphism groups of low complexity subshifts. *Transactions of the American Mathematical Society*, 306 :2, Juillet 2021.