

Solutions folles aux équations de transport et non-unicité des solutions de Leray forcées

Lucas Lemoine

Mars-Juin 2022

Table des matières

1	Introduction	2
2	État des lieux sur les solutions folles des équations de transport	2
3	Non-unicité des solutions de Leray forcées	5
3.1	Champ instable pour les équations d'Euler en deux dimensions	5
3.2	Passage en trois dimensions	9
3.3	Passage aux équations de Navier-Stokes linéarisées	14
3.4	Ajout de la non-linéarité	16

Annexes

A	Quelques propriétés d'analyse spectrale	21
B	Démonstration du lemme 3.19	22
C	Démonstration du théorème 3.21	24
D	Démonstration de la proposition 3.33	26

1 Introduction

Après plusieurs semaines de réflexion, j'ai choisi de travailler sur le sujet des EDP (applicables à la physique si possible). À l'aide d'Emmanuel Dormy, mon tuteur et mon professeur d'EDP à l'ENS, l'option d'effectuer mon stage à Cambridge mais surtout de travailler avec Clément Mouhot s'est présentée.

Après quelques interrogations concernant la situation sanitaire liée à la pandémie, je suis finalement parti le 1^{er} mars 2022. Trouver un logement n'a pas été chose aisée, mais j'ai finalement réussi (grâce à un étudiant de l'ENS lui aussi en stage à Cambridge) à louer une petite chambre dans une collocation. La maison se trouvant assez éloignée de mon lieu de travail, j'avais une heure de marche pour m'y rendre, très propice à la réflexion mathématique découlant de mes recherches.

Concernant ces dernières, elles se déroulaient au DPMMS (Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics) où mon installation a été quelque peu laborieuse au départ. En effet, pendant près de trois semaines, je n'ai pas eu de bureau ; j'ai donc été contraint de travailler à la bibliothèque sans ordinateur fixe, n'ayant pas d'autre solution.

Je ne pourrais pas parler de mon stage sans évoquer mon accompagnement durant ses quatre mois. Je dois avouer avoir été déçu concernant la communication avec Clément Mouhot. Dès la prise de contact avant mon départ, ce dernier était très difficile à joindre. J'ai bien sûr fait part de mes difficultés à Emmanuel Dormy, qui a été extrêmement présent et aidant, et qui a fini par le contacter pour éclaircir la situation.

Une fois le stage débuté, Clément Mouhot étant souvent en déplacement, nous n'avons pu discuter presque uniquement que par visioconférences (une fois par mois), seulement après plusieurs relances de ma part. Afin d'enrichir mon expérience, ce dernier m'a donné le mail de ses étudiants en thèse que j'ai eu l'occasion de rencontrer à deux reprises durant de brefs échanges.

D'une façon plus positive, j'ai eu la chance que l'Isaac Newton Institute (se trouvant à quelques pas de mon lieu de travail) hébergeait pendant cette période de l'année trois semestres complémentaires sur la mécanique des fluides, notamment un portant sur les équations de transport (*Frontiers in kinetic theory : connecting microscopic to macroscopic scales*). Ces semestres consistaient en séminaires hebdomadaires ainsi que des *workshops* durant une semaine avec l'exposition des travaux en cours par de nombreux chercheurs.

J'ai donc pu pendant la première partie de mon stage assister à de nombreux exposés, ce qui correspondait à mon travail à cette période là puisque je devais lire des articles pour me renseigner sur les techniques de construction de solutions « folles » (*wild solutions*) à certaines équations de transport, c'est la section 2 de ce rapport.

En effet, dans la seconde partie de mon stage, j'ai assisté à moins de conférences, et j'ai en particulier travaillé sur un article récent, qui semblait instructif et novateur au sujet du fameux problème du millénaire concernant les équations de Navier-Stokes. Suivant les recommandations de Clément Mouhot, l'objectif était de réécrire la preuve de façon auto-contenue et en allant directement à l'essentiel. Ce travail constitue la partie 3 de ce rapport, complété par les annexes A, B, C et D.

Je tiens à remercier particulièrement Emmanuel Dormy pour son aide précieuse face aux difficultés de communication avec mon maître de stage.

2 État des lieux sur les solutions folles des équations de transport

Conjecture d'Onsager. La plupart des travaux récents sur la non-unicité des équations d'Euler et de Navier-Stokes sont dirigés par la conjecture d'Onsager qu'il a énoncée en 1949 dans [20], au sujet des équations d'Euler en trois dimensions :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (1)$$

L'énergie associée à ces équations pour une fonction u lisse s'écrit

$$E(t) = \frac{1}{2} \int |u(x, t)|^2 dx. \quad (2)$$

On peut alors énoncer la conjecture d’Onsager comme suit.

Conjecture 2.1. *On note pour $\alpha \in]0, 1[$ l’espace $C^\alpha(\mathbb{T}^3)$ des fonctions $v : \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^3$ qui vérifient pour tout $x, x' \in \mathbb{T}^3$ et tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$|v(x, t) - v(x', t)| \lesssim |x - x'|^\alpha. \quad (3)$$

1. *Si $\alpha > \frac{1}{3}$, alors pour toute solution $u \in C^\alpha(\mathbb{T}^3)$ des équations d’Euler (1), l’énergie est conservée.*
2. *Si $\alpha < \frac{1}{3}$, alors il existe des solutions dans $C^\alpha(\mathbb{T}^3)$ des équations d’Euler (1) pour lesquelles l’énergie est dissipée.*

On peut l’extraire du raisonnement heuristique suivant.

Supposons que l’on ait une solution u lisse pour laquelle l’énergie est finie en tout temps. On peut la dériver par rapport au temps, et en réutilisant l’équation d’Euler (1), on obtient

$$\partial_t E(t) = \int u \cdot \partial_t u = - \int u \cdot \operatorname{div}(u \otimes u). \quad (4)$$

Sous l’intégrale, il y a une dérivée spatiale (div), et un produit de trois fonctions u . On imagine pouvoir répartir la dérivée spatiale parmi les trois u par des intégrations par parties. Alors, on obtiendrait ainsi pour chaque u une dérivée $\frac{1}{3}$, qui correspondrait donc à la régularité suffisante pour conserver l’énergie, ce qui correspond à la conjecture.

La première partie de cette conjecture a été démontrée en 1994 par Constantin, E et Titi dans [8]. Ils utilisent une suite régularisante permettant de faire les intégrations par parties puis montrent que les termes restants convergent vers 0.

La preuve de la seconde partie est plus récente, elle date de 2018, par Isett dans [12].

La preuve d’Isett utilise la technique de l’intégration convexe. Cette méthode a été historiquement introduite par Nash [19] et Kuiper [15] pour démontrer un plongement isométrique C^1 de la sphère dans la boule. Dans le cadre qui nous intéresse plus particulièrement, c’est Scheffer [21] qui l’utilisa le premier afin de démontrer l’existence de solutions faibles à support compact dans \mathbb{R}^2 des équations d’Euler. Shnirelman [23] améliora cette preuve en la rendant plus simple, mais dans le tore \mathbb{T}^2 .

De Lellis et Székelyhidi renforcèrent cette preuve dans [9] en montrant qu’il est possible d’obtenir une solution ayant un profil d’énergie donné. Cette preuve est décrite par Villani dans [24]. Elle consiste à prendre une solution connue des équations d’Euler (par exemple 0) et d’y ajouter peu à peu des morceaux. Ceux-ci proviennent de vecteurs propres très oscillants du rotationnel. On itère alors ce procédé, et puisque l’équation d’Euler n’est pas linéaire, il faut montrer que les termes ajoutés en trop convergent vers 0 dans le sens approprié pour avoir la régularité voulue.

Régularités critiques. La conjecture d’Onsager permet de considérer une régularité critique supplémentaire dans l’étude des équations aux dérivées partielles. Combinée à deux autres régularités plus usuelles, il y en a trois qui vont nous intéresser dans la suite.

La première est celle nécessaire dans la définition des solutions faibles, qui est donc respectée par toutes les solutions de l’équation.

La dernière est celle qui permet de satisfaire les conditions de la bien-positude.

Entre les deux, la conjecture d’Onsager introduit donc une nouvelle régularité critique, celle à partir de laquelle l’énergie n’est plus conservée. On peut aussi considérer d’autres lois de conservation, que ce soit pour l’équation d’Euler ou d’autres. On verra dans la suite que cette condition est très souvent liée à la non-unicité et inversement.

Plus précisément, la conjecture d’Onsager est formulée dans les espaces de Hölder $C^{k, \alpha}$ avec $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$. On regardera parfois dans la suite ce problème dans les espaces Sobolev.

Équations d'Euler. La première régularité donnée par la définition des solutions faibles est $L_t^2 L_x^2$.

Avec la démonstration de la conjecture d'Onsager avec [8] et [12], on sait que la régularité critique pour la conservation de l'énergie est $L_t^\infty C_x^{1/3}$. On peut améliorer ce résultat comme dans [6], où il est montré qu'il existe des solutions dans $C^\alpha([0, T] \times \mathbb{T}^3)$ pour $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, qui ont un profil d'énergie strictement positif imposé, donc il n'y a pas automatiquement conservation de l'énergie.

En restant dans les espaces de Hölder, on a la bien-positude dans $C^{k,\alpha}$ pour $k \geq 1$ et $0 < \alpha < 1$, comme montré par Wolibner dans [27] et Lichtenstein dans [17]. En revanche si $\alpha = 0$ ou 1 , c'est-à-dire dans C^k ou $C^{k,1}$ pour $k \geq 1$, on n'a plus la bien-positude comme le montrent Bourgain et Li dans [5].

Équations de scalaires actifs d'ordre 0. On considère l'équation d'inconnue $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \nabla(T[\theta]\theta) = 0, \\ \nabla \cdot T[\theta] = 0, \end{cases} \quad (5)$$

où la transformée Fourier de T vérifie $\widehat{T}[\theta](\xi) = m(\xi)\widehat{\theta}(\xi)$, avec m homogène de degré 0.

Dans [13], Isett et Vicol montrent que si m n'est pas impaire, alors il existe des solutions non triviales compactes en temps de l'équation (5) dans $C^\alpha(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)$, avec $\alpha < \frac{1}{9}$. Pour cette régularité, il y a donc non-unicité (car θ est nulle en dehors d'un intervalle et n'est pas nulle tout le temps) et l'énergie n'est pas conservée.

Ce résultat peut-être généralisé en dimension d , mais il faut remplacer la condition d'imparité sur m par : l'espace vectoriel \mathbb{R}^d est engendré par la partie paire de m . La condition $\alpha < \frac{1}{9}$ est aussi remplacée par

$$\alpha < \frac{1}{1 + 4d}. \quad (6)$$

Équations de scalaires actifs d'ordre 1. On va se concentrer sur l'équation de Vlasov-Poisson et celle d'Euler en formulation vorticité.

Pour l'équation de Vlasov-Poisson, l'existence d'un solution faible nécessite $f \in L_v^1 L_x^\infty$ et $v^2 f \in L^1$. Diperna et Lions ont montré dans [10] d'autres conditions d'existence : $f \log^+ f \in L^1$, $v^2 f \in L^1$ et $\nabla_x \varphi \in L^2$. Lions et Perthame ont montré dans [18] l'existence et l'unicité des solutions dans $C(\mathbb{R}_+; L^1(1 + v^k) \cap L^\infty)$ pour $k > 6$, si $\rho \in L_{T,x}^\infty$ et $f_{in} \in L^\infty(1 + v^p)$ avec $p > 3$.

Pour l'équation d'Euler en formulation vorticité en dimension 2, on rappelle que le théorème de Yudovich donne l'existence et l'unicité dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^\infty)$. Dans ce paragraphe on ne va pas s'intéresser à la bien-positude, mais plutôt au critère de *blow-up*. Beale, Kato et Majda ont montré dans [3] que si u est une solution dans $C_T H^s \cap C_T^1 H^{s-1}$ pour $s \geq 3$, et si la vorticité associée à u vérifie

$$\int_0^T \|\omega(t)\|_{L^\infty} dt < \infty, \quad (7)$$

alors la solution peut être étendue au-delà de T avec la même régularité.

Il semble qu'il n'y ait pas de résultat d'unicité à la Yudovich dans $L^1 \cap L^p$ avec $p < \infty$. En revanche Vishik dans [25] et [26] a montré la non-unicité des équations d'Euler en formulation vorticité forcée dans $L^1 \cap L^p$, pour $p > 2$, et $u \in L^2$. Son travail a été repris au sein du groupe de lecture [2], dont on suivra une partie dans la section 3.1.

Équations de Navier-Stokes. Dans [16], Leray a démontré l'existence de solutions globales dans $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\mathbb{R}^3 \times]0, T[)$ aux équations de Navier-Stokes en trois dimensions :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (8)$$

On a même plus de restrictions sur ces solutions, que l'on regroupe dans la définition suivante.

Définition 2.2. Une solution faible des équations de Navier-Stokes $u \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\mathbb{R}^3 \times]0, T[)$ est appelée solution de Leray-Hopf si elle est faiblement à divergence nulle et vérifie pour $t \leq T$ l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2} \int |u(x, t)|^2 dx + \int_0^t \int |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \leq \frac{1}{2} \int |u_0(x)|^2 dx. \quad (9)$$

On peut ajouter une force $f \in L_t^1 L_x^2$ aux équations de Navier-Stokes et modifier les solutions de Leray-Hopf en ajoutant un terme à droite de l'inégalité d'énergie :

$$\int_0^t \int f \cdot u ds dx. \quad (10)$$

Leur unicité est toujours un problème ouvert, donc on va à nouveau considérer la régularité pour un *blow-up* plutôt que celle pour la bien-positude. Seregin a montré dans [22] que pour une condition initiale lisse à support compact, si T est un temps de *blow-up*, alors

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u\|_{L^3} = \infty. \quad (11)$$

Quant à la régularité nécessaire à la conservation de l'énergie, on a seulement des premiers résultats. Buckmaster et Vicol ont démontré dans [7] qu'il existe un $\beta > 0$, pour lequel on peut trouver des solutions dans $C^0([0, T]; H^\beta(\mathbb{T}^3))$ qui ont un profil d'énergie imposé. Ceci permet de montrer à la fois qu'il n'y a pas unicité et que l'énergie n'est pas conservée. Ils ont utilisé la technique de l'intégration convexe pour la preuve, à la manière de De Lellis et Székelyhidi.

De la même façon que pour l'équation d'Euler et le résultat de Vishik, on a la non-unicité des solutions de Leray aux équations de Navier-Stokes forcés, comme montré par Albritton, Brué et Colombo dans [1], ce qui implique que l'énergie peut être conservée sans toutefois avoir l'unicité. C'est ce résultat qui va nous occuper dans la suite afin d'en donner une preuve complète.

Non-unicité des solutions de Leray. Toute la suite va donc permettre de démontrer le théorème un peu précisé suivant.

Théorème 2.3. *Il existe $T > 0$ et $f \in L_t^1 L_x^2(\mathbb{R}_+^3 \times]0, T[)$ tels qu'il existe deux solutions de Leray-Hopf aux équations de Navier-Stokes forcées sur $\mathbb{R}^3 \times]0, T[$, avec comme force f et comme condition initiale $u_0 = 0$.*

Pour cela, on va étudier les équations de Navier-Stokes avec les variables auto-similaires, et en formulation vorticité.

Ensuite, on linéarisera autour d'un champ instable. Pour trouver ce champ instable, on aura besoin de plusieurs étapes, d'abord trouver un champ instable pour les équations d'Euler 2D en formulation vorticité ce sera le contenu de la section 3.1, puis on passera cette solution en trois dimensions, toujours pour l'équation d'Euler, c'est la section 3.2, ensuite on étendra aux équations de Navier-Stokes en ajoutant le terme de dissipation dans la section 3.3, et pour finir on rajoutera la non-linéarité, c'est la section 3.4.

3 Non-unicité des solutions de Leray forcées

3.1 Champ instable pour les équations d'Euler en deux dimensions

On commence par un résultat qui nous sera utile dans la suite et utilisé par Vishik dans [25] et [26] afin de démontrer la non-unicité à l'équation d'Euler 2D forcée. On suivra à cette fin le chapitre 4 des notes du groupe de lecture [2].

Le but de cette section est de construire un champ de vorticité $\bar{\omega}$ qui permet d'obtenir un champ instable solution des équations d'Euler linéarisée autour de $\bar{\omega}$.

On commence par définir les opérateurs nécessaires à énoncer le premier théorème.

On définit l'opérateur de Biot-Savart à deux dimensions $\nabla^\perp \Delta$ par la convolution avec

$$K_2(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^\perp}{|x|^2}. \quad (12)$$

Pour un $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\text{rot}(K_2 * \omega) = \omega$, et on note $\text{BS}_{2d}(\omega) = K_2 * \omega$.

On définit pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$U_k := \left\{ \gamma(\rho) e^{ik\varphi}, \gamma \in L^2(\rho d\rho) \right\}. \quad (13)$$

Pour un $\bar{\omega} \in C^\infty$, on définit l'opérateur $\mathcal{A}_k : D(\mathcal{A}_k) \rightarrow U_k$, avec

$$D(\mathcal{A}_k) := \{ \omega \in U_k \mid \text{BS}_{2d}(\bar{\omega}) \cdot \nabla \omega \in U_k \}, \quad (14)$$

$$-\mathcal{A}_k \omega := \text{BS}_{2d}(\bar{\omega}) \cdot \nabla \omega + \text{BS}_{2d}(\omega) \cdot \nabla \bar{\omega}. \quad (15)$$

Si $\bar{\omega}$ décroît suffisamment à l'infini, alors \mathcal{A}_k est fermé et densément défini.

Le théorème suivant garantit l'existence d'un champ de vorticité $\bar{\omega}$ tel que l'équation linéarisée d'Euler $\partial_t \omega = \mathcal{A}_k \omega$ ait une solution instable. C'est une version du théorème 1.0.3 de [2].

Théorème 3.1. *Il existe un $m \geq 2$ et un $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\rho)$ lisse et invariant par rotation, vérifiant*

$$|\bar{\omega}| + \frac{1}{\rho} |\partial_\rho \bar{\omega}| \lesssim \frac{1}{1 + \rho^2} \quad (16)$$

tels que \mathcal{A}_m a une valeur propre instable $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_m)$.

On va donner un schéma de preuve de ce théorème.

On commence par se placer dans des espaces différents afin de donner plus tard une formulation équivalente de ce théorème, voir 3.4.

On va chercher $\bar{\omega}(x) = g(|x|) \in C^\infty$, qui vérifie pour un $\bar{\alpha} \in]0, 1[$

$$\forall r \geq 2, \quad g(r) = \frac{1}{r^{\bar{\alpha}}}, \quad (17)$$

$$\text{Sur un voisinage de } 0, \quad g(r) = g(0) + \frac{g''(0)}{2} r^2, \quad (18)$$

ce qui permet à $\bar{\omega}$ de vérifier les conditions du théorème 3.1.

Puisque pour $\omega \in U_k$, il existe $\gamma \in L^2(rdr)$ tel que $\omega(x) = e^{ik\theta} \gamma(r)$ et réciproquement, on a un isomorphisme entre U_k et l'espace

$$\mathcal{H} := \{ \gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}, \gamma \in L^2(rdr) \}. \quad (19)$$

Ainsi l'opérateur $i\mathcal{A}_m$ peut s'identifier à un opérateur $\mathcal{L}_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, qui s'écrit comme la somme d'un opérateur auto-adjoint \mathcal{S}_m et d'un opérateur compact \mathcal{K}_m .

On peut les écrire de la manière suivante

$$\mathcal{S}_m(\gamma) = m\zeta\gamma, \quad (20)$$

$$\mathcal{K}_m(\gamma) = -\frac{m}{r} \psi g', \quad (21)$$

où

$$\zeta(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho g(\rho) d\rho \quad (22)$$

et ψ vérifie

$$\Delta(\psi(r) e^{im\theta}) = \gamma(r) e^{im\theta}. \quad (23)$$

Avec cette formulation, on peut étendre les définitions de \mathcal{L}_m , \mathcal{S}_m et \mathcal{K}_m aux réels $m > 1$, et ils gardent de bonnes propriétes.

Proposition 3.2. *Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$, \mathcal{L}_m , \mathcal{S}_m , $\mathcal{K}_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sont bornés, et localement uniformément bornés.*

De plus, $\forall m > 1$, \mathcal{K}_m est compact.

L'objectif est de montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(\mathcal{L}_m) \cap \{\text{Im } z > 0\} \neq \emptyset$.

Cela signifie qu'on cherche m , z et γ tels que

$$m\zeta\gamma - \frac{m}{r}g'\psi = z\gamma, \quad (24)$$

avec ζ et ψ définis précédemment.

Puisque $\Delta(\psi e^{im\theta}) = \gamma e^{im\theta}$, on peut réécrire (24) comme

$$-\psi'' - \frac{1}{r}\psi' + \frac{m^2}{r^2}\psi + \frac{g'}{r(\zeta - \frac{z}{m})}\psi = 0. \quad (25)$$

On peut montrer que si ψ est solution de (25) avec $\text{Im } z \neq 0$, et

$$\gamma = \frac{mg'}{r(m\zeta - z)}\psi, \quad (26)$$

alors,

$$\psi \in L^2\left(\frac{dr}{r}\right) \cap W_{loc}^{2,2} \Leftrightarrow \gamma \in L^2(rdr). \quad (27)$$

On fait maintenant un changement de variables : $t = \ln r$.

On note $\varphi(t) := \psi(e^t)$, alors puisqu'on veut $\psi \in L^2\left(\frac{dr}{r}\right) \cap W_{loc}^{2,2}$, on a $\varphi \in W_{loc}^{2,2} \cap L^2$.

De plus, on note

$$A(t) := \frac{d}{dt}g(e^t), \quad (28)$$

$$\Xi(t) := \int_{-\infty}^t e^{-2(t-\tau)} g(e^\tau) d\tau. \quad (29)$$

Alors, on a $A = \Xi'' + 2\Xi'$, et φ est solution de l'équation

$$-\varphi''(t) + m^2\varphi(t) + \frac{A(t)}{\Xi(t) - z}\varphi(t) = 0. \quad (30)$$

Puisque g doit vérifier certaines conditions, on définit un ensemble de fonctions à laquelle Ξ doit appartenir.

Définition 3.3. On définit l'ensemble \mathcal{C} qui contient les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

(a) $\Xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} l < \infty$, et il existe $c_0 > 0$ et M_0 tels que $\forall t \leq M_0$,

$$\Xi(t) = l - c_0 e^{2t}. \quad (31)$$

(b) Il existe c_1 tel que $\forall t \geq \ln 2$,

$$\Xi(t) = c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2 - \bar{\alpha}} e^{-\bar{\alpha}t}. \quad (32)$$

(c) $A = \Xi'' + 2\Xi'$ a exactement deux zéros $a < b$, et $A'(a) > 0$, $A'(b) < 0$.

(d) Pour tout t , $\Xi'(t) < 0$.

Maintenant on peut reformuler le théorème 3.1, après une définition supplémentaire.

Pour un Ξ et un m fixé, on note \mathcal{U}_m l'ensemble des z de partie imaginaire strictement positive telle qu'il existe une solution $\varphi \in L^2 \cap W_{loc}^{2,2}$ de (30).

Théorème 3.4. *Il existe $\Xi \in \mathcal{C}$, et $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq 2$, tels que \mathcal{U}_{m_0} est non-vide.*

On définit l'ensemble $\mathcal{P} = \{(m, z) \mid z \in \mathcal{U}_m, m > 1\}$, et pour $x = a$ ou b , les opérateurs

$$\mathcal{L}_x := -\frac{d^2}{dt^2} + \frac{A(t)}{\Xi(t) - \Xi(x)}, \quad (33)$$

qui sont bien définis car a et b sont les zéros de A .

On note $-\lambda_a < -\lambda_b$ leur plus petite valeur propre.

On a le premier lemme suivant pour le choix de Ξ .

Lemme 3.5. *On prend $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$.*

Pour tout $m_0 \in \mathbb{N}^$, il existe $\Xi \in \mathcal{C}$ tels que $\lambda_a > m_0^2$.*

Pour démontrer ce lemme, on construit plutôt $A = \Xi'' + 2\Xi'$, en reportant à A les conditions de l'ensemble \mathcal{C} portant sur Ξ . Ensuite, on rajoute une condition permettant d'utiliser l'inégalité du quotient de Rayleigh de \mathcal{L}_a , qui donne $-\lambda_a < -m_0^2$ (puisque $-\lambda_a$ est la plus petite valeur propre).

On note alors $m_a := \sqrt{\lambda_a} > 1$ et $m_b := \sqrt{\max(1, \lambda_b)}$.

Proposition 3.6. *Il existe $\Xi \in \mathcal{C}$ tel que $]m_b, m_a[$ contient un entier strictement supérieur à 1.*

La démonstration de cette proposition repose sur la convexité de \mathcal{C} et le lemme précédent.

On continue par un lemme sur les ODE qui est utile à la démonstration des propositions qui vont suivre.

Lemme 3.7. *Si $(m, z) \in \mathcal{P}$, ou $z = \Xi(a)$ ou $\Xi(b)$, alors l'ensemble des solutions de (25) dans $L^2 \cap W_{loc}^{2,2}$ est de dimension 1.*

Soit φ une telle solution. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi(t)| \lesssim e^{-m|t|}. \quad (34)$$

De plus, les limites en $\pm\infty$ de $e^{m|t|}\varphi(t)$ existent et sont finies, et si l'une est nulle, alors l'autre aussi et $\varphi = 0$.

Puisque $-\lambda_a$ est la plus petite valeur propre de \mathcal{L}_a , on sait qu'il y a une solution à (30) dans L^2 avec $m = m_a$. On peut améliorer ce résultat à d'autres valeurs de m suffisamment proches de m_a , par la proposition suivante.

Proposition 3.8. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\forall h \in]0, \delta[$,*

$$\mathcal{U}_{m_a-h} \cap B_\varepsilon(\Xi(a)) \neq \emptyset. \quad (35)$$

Pour démontrer cette proposition, on va reformuler le problème. On note ψ_a la solution correspondant à $(m_a, \Xi(a))$, et on veut résoudre :

$$\begin{cases} -\psi'' + m_a^2\psi + \frac{A}{\Xi - \Xi(a)}\psi + \langle \psi, \psi_a \rangle \psi_a = \psi_a \\ \langle \psi, \psi_a \rangle = 1. \end{cases} \quad (36)$$

La résolution se fait en deux étapes. Dans la première, on montre que pour $\mu > 0$, il existe une unique solution à la première ligne du système pour (m, z) suffisamment proche de $(m_a, \Xi(a))$, avec la condition supplémentaire

$$\operatorname{Im} z \geq \mu |\operatorname{Re}(z - \Xi(a))|. \quad (37)$$

La deuxième étape permet de montrer qu'il existe une solution pour laquelle la deuxième ligne est vérifiée. Pour cela, dans le domaine approprié, on définit la fonction

$$H(h, z) := \langle \psi(m_a + h, z), \psi_0 \rangle, \quad (38)$$

où $\psi(m_a + h, z)$ est la solution trouvée à l'étape précédente.

L'objectif est alors de trouver pour un h fixé, un z vérifiant $H(h, z) = 1$. Pour cela, il faut montrer que H est holomorphe, puis après un développement de Taylor, on peut utiliser le théorème de Rouché.

Il reste alors à prouver que $\text{Im } z > 0$, et cela se fait notamment en prenant μ suffisamment grand dans (37).

Maintenant il faut étendre à nouveau les solutions obtenues dans la proposition 3.8, et c'est le cas de la proposition suivante, qui combinée à la proposition 3.6 permet de conclure à la démonstration du théorème 3.4, et finalement au théorème 3.1.

Proposition 3.9. $\forall m \in]m_b, m_a[, \mathcal{U}_m \neq \emptyset$.

Pour démontrer cette proposition, on définit

$$G := \{m > 1, m \neq m_a, m_b, \mathcal{U}_m \neq \emptyset\}, \quad (39)$$

et on a besoin du lemme suivant qui permet de caractériser les solutions avec $z \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.10. *Soit $(m, z) \in \overline{\mathcal{P}}$ avec $\text{Im } z = 0$.*

Alors, $z = \Xi(a)$, et $m = \sqrt{\lambda_a}$.

Alors, ce lemme ainsi que le lemme 3.7 permettent de montrer que G est un ouvert et un fermé relatif de $]1, \infty[\setminus \{m_a, m_b\}$.

D'après la proposition 3.8, $]m_b, m_a[\cap G \neq \emptyset$, donc on a finalement $]m_b, m_a[\subset G$, ce qui démontre la proposition 3.9.

3.2 Passage en trois dimensions

Maintenant qu'on a trouvé un champ instable solution d'Euler 2D, on va le transformer en une solution d'Euler 3D. Pour cela, après quelques modifications consistant à compacter et translater, on le placera dans des coordonnées cylindriques à trois dimensions.

On fixe les m , λ et $\bar{\omega}$ du théorème 3.1, et on note $\mathcal{A} := \mathcal{A}_m$, $\lambda_\infty := \lambda$.

On commence par tronquer les champs et les opérateurs.

Soit $\phi \in C_0^\infty(B_1)$, qui vérifie $\phi > 0$, et $\phi = 1$ sur $B_{1/2}$. On note $\phi_R(x) = \phi\left(\frac{x}{R}\right)$.

On définit

$$\bar{u}_R := \phi_R \text{BS}_{2d}(\bar{\omega}), \quad \bar{\omega}_R := \nabla^\perp \cdot \bar{u}_R \quad (40)$$

$$-\mathcal{A}_R \omega := \bar{u}_R \cdot \nabla \omega + \text{BS}_{2d}(\omega) \cdot \nabla \bar{\omega}_R. \quad (41)$$

Alors, on a toujours des valeurs propres instables pour ces profils tronqués.

Proposition 3.11. *Pour tout $\varepsilon \in]0, \text{Re}(\lambda_\infty)[$, il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $R > R_0$, \mathcal{A}_R a une valeur propre instable λ_R vérifiant $|\lambda_R - \lambda_\infty| < \varepsilon$.*

Avant de démontrer cette proposition, on commence par démontrer un lemme que l'on réutilisera à plusieurs reprises.

Lemme 3.12. *Soit X un espace de Banach, et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$, $D(\mathcal{A}) \subset X$ un opérateur fermé densément défini. On suppose qu'il existe une suite d'opérateurs $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers \mathcal{A} , et qui vérifie l'hypothèse :*

$$\forall K \Subset \rho(\mathcal{A}), \forall \lambda \in K, R(\lambda, \mathcal{A}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} R(\lambda, \mathcal{A}) \quad (42)$$

uniformément sur K .

Soit $\mu_\infty \notin \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ une valeur propre de \mathcal{A} . Alors pour tout ε suffisamment petit, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, \mathcal{A}_n a une valeur propre μ vérifiant $|\mu - \mu_\infty| < \varepsilon$.

La démonstration de ce lemme général sur les opérateurs se trouve dans l'annexe A.

A l'aide ce lemme, on peut maintenant démontrer la proposition 3.11.

Démonstration de la proposition 3.11. On rappelle que pour $k \in \mathbb{Z}$

$$U_k := \left\{ g(\rho) e^{ik\varphi}, g \in L^2(\rho d\rho) \right\}.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on regarde les restrictions de \mathcal{A} et \mathcal{A}_R à U_{km} , que l'on note $\mathcal{A}^{(k)}$ et $\mathcal{A}_R^{(k)}$. Les espaces U_{km} sont invariants sous $\mathcal{A}^{(k)}$ et $\mathcal{A}_R^{(k)}$.

Alors, si $\omega(x) = g(\rho) e^{ikm\varphi}$, et $\text{BS}_{2d}(\bar{\omega}) = \zeta(|x|)x^\perp$:

$$\mathcal{A}^{(k)}\omega = \left(-\zeta imkg + \frac{1}{\rho} imkf\bar{\omega}' \right) e^{ikm\varphi}, \quad (43)$$

$$\mathcal{A}^{(k)}\omega = \left(-\phi_R \zeta imkg + \frac{1}{\rho} imkf\bar{\omega}'_R \right) e^{ikm\varphi}, \quad (44)$$

où f est définie par $\Delta(f(\rho) e^{ikm\varphi}) = g(\rho) e^{ikm\varphi}$.

On peut écrire

$$f(\rho) = -\frac{1}{2km} \rho^{km} \int_\rho^\infty g(r) r^{1-km} dr - \frac{1}{2km} \rho^{-km} \int_0^\rho g(r) r^{1+km} dr,$$

ce qui donne

$$\|f\|_{L^\infty(\rho d\rho)} \lesssim \|g\|_{L^2(\rho d\rho)} \lesssim \|\omega\|_{L^2}. \quad (45)$$

Maintenant, montrons que dans la norme des opérateurs, $\mathcal{A}_R^{(k)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{A}^{(k)}$.

On a

$$\left(\mathcal{A}_R^{(k)} - \mathcal{A}^{(k)} \right) \omega = \left(-(\phi_R - 1) \zeta imkg + \frac{1}{\rho} imkf(\bar{\omega}'_R - \bar{\omega}') \right) e^{ikm\varphi}. \quad (46)$$

Or en notant $\text{BS}_{2d}(\bar{\omega}) =: \bar{u}^\varphi e_\varphi$,

$$\|\bar{u}^\varphi(\phi_R - 1)\|_{L^\infty(\rho d\rho)} + \left\| \frac{1}{\rho} (\bar{\omega}'_R - \bar{\omega}') \right\|_{L^2(\rho d\rho)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad (47)$$

parce que ϕ_R est lisse à support compact, et parce que $\bar{\omega}$ décroît suffisamment vite.

Donc en prenant la norme L^2 de (46), on peut utiliser (45) pour les deux termes, et (47) permet de conclure quant à la convergence de $\mathcal{A}_R^{(k)}$.

On va montrer maintenant la convergence des résolvants.

Soit K un compact de $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\text{Re}(\lambda) > 0\}$. Soit $\lambda \in K$.

$$\lambda - \mathcal{A}_R^{(k)} = \left(\lambda - \mathcal{A}^{(k)} \right) \left(\text{I} + R(\lambda, \mathcal{A}^{(k)}) (\mathcal{A}^{(k)} - \mathcal{A}_R^{(k)}) \right). \quad (48)$$

Or puisque $\mathcal{A}_R^{(k)}$ converge vers $\mathcal{A}^{(k)}$, on dispose de R_0 tel que $\forall R \geq R_0$, $\lambda - \mathcal{A}_R^{(k)}$ est inversible, d'inverse qui converge vers $R(\lambda, \mathcal{A}^{(k)})$ uniformément sur K .

En prenant la suite $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on conclut par le lemme 3.12. □

Maintenant, on ne se restreint plus aux fonctions symétriques par rotation.

On choisit $\varepsilon = \frac{\text{Re} \lambda_\infty}{2}$, et on fixe un $\bar{R} \geq R_0$, pour le R_0 de la propriété.

On note les profils tronqués

$$\tilde{u} := \bar{u}_{\bar{R}}, \quad \tilde{\omega} := \nabla^\perp \cdot \tilde{u}, \quad (49)$$

et on prend une fonction de poids $\gamma \geq 0$ lisse vérifiant $\gamma = 1$ sur $B_{\bar{R}}$, et sur \mathbb{R}^2 , $(r^2 + z^2 + 1)^{50} \lesssim \gamma \lesssim (r^2 + z^2 + 1)^{50}$.

On note l'espace L^2 à poids γ : $L^2_\gamma := L^2(\mathbb{R}^2; \gamma dr dz)$.

On considère l'opérateur

$$\mathcal{L}_\infty : D(\mathcal{L}_\infty) \rightarrow L^2_\gamma, \quad D(\mathcal{L}_\infty) := \{\omega \in L^2_\gamma \mid \tilde{u} \cdot \nabla \omega \in L^2(B_{\bar{R}})\} \quad (50)$$

$$-\mathcal{L}_\infty \omega := \tilde{u} \cdot \nabla \omega + \text{BS}_{2d}(\omega) \cdot \nabla \tilde{\omega}. \quad (51)$$

Alors les valeurs propres de $\mathcal{A}_{\bar{R}}$ restent des valeurs propres de \mathcal{L}_∞ .

Proposition 3.13. \mathcal{L}_∞ a une valeur propre instable que l'on note λ_∞ .

Démonstration. Soit η un vecteur propre instable de $\mathcal{A}_{\bar{R}}$ associée à une valeur propre λ .

Alors on a $\text{supp}(\mathcal{A}_{\bar{R}}\eta) \subset B_{\bar{R}}$, et par définition $\lambda\eta + \mathcal{A}_{\bar{R}}\eta = 0$. Donc $\text{supp}(\eta) \subset B_{\bar{R}}$ d'où $\eta \in \mathcal{L}_\infty$ et $\lambda\eta + \mathcal{L}_\infty\eta = 0$. \square

A présent, on change de coordonnées et on translate de $l \geq 2\bar{R}$. On définit :

$$\forall (r, z) \in \mathbb{R}_{>-l} \times \mathbb{R}, \quad \tilde{u}(r, z) = \tilde{u}^x(r, z)e_r + \tilde{u}^y(r, z)e_z, \quad (52)$$

où $\tilde{u} = \tilde{u}^x e_x + \tilde{u}^y e_y$.

Il faut alors ajouter une correction pour que la divergence soit nulle.

Lemme 3.14. Pour $l \geq 2\bar{R}$, il existe $v_l \in C_0^\infty(B_{\bar{R}}, \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\text{div}_l(\tilde{u} + v_l) := \frac{1}{r+l}(\partial_r, \partial_z) \cdot ((r+l)(\tilde{u} + v_l)), \quad (53)$$

et $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_l \rightarrow 0$ dans $C^k(B_{\bar{R}})$.

Démonstration. On veut résoudre $(\partial_r, \partial_z) \cdot (r+l)v_l = -\tilde{u}^r$.

Or on a $\tilde{u}^r \in C_0^\infty(B_{\bar{R}})$ et $\int \tilde{u} = 0$, donc on peut utiliser l'opérateur de Bogovskii qui permet d'inverser la divergence dans ce cas, voir [4].

On définit $\mathcal{B} : C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B}f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} l(x, y)f(y)dy, \quad (54)$$

où on prend $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $\rho \geq 0$ et $\int \rho = 1$ qui donne :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad l(x, y) = (x-y) \int_1^\infty \rho(x+r(x-y))rdr. \quad (55)$$

Dans nos conditions, $\text{div} \mathcal{B}f = f$, donc on obtient $(r+l)v_l \in C_0^\infty$ et v_l convient car elle vérifie les conditions de convergence car $r > -l$. \square

Notons

$$\tilde{u}_l := \tilde{u} + v_l, \quad \tilde{\omega}_l := \text{rot}_l \tilde{u} := -\partial_z \tilde{u}^r + \partial_r \tilde{u}^z. \quad (56)$$

On continue les transformations de coordonnées, avec les opérateurs.

On considère le nouvel espace à poids $L^2_{\gamma, l} = L^2(\mathbb{R}^2_{r>-l}; \gamma dr dz)$, et l'opérateur $\mathcal{L}_l : D(\mathcal{L}_l) \rightarrow L^2_{\gamma, l}$,

$$-\mathcal{L}_l \omega := \tilde{u}_l \cdot \nabla \omega + \text{BS}_l(\omega) \cdot \nabla \tilde{\omega}_l - \frac{\tilde{u}^r}{r+l} \omega - \frac{\text{BS}_l(\omega)^r}{r+l} \tilde{\omega}_l, \quad (57)$$

où $\nabla = (\partial_r, \partial_z)$, et $\text{BS}_l(\omega) = -\partial_z \psi e_r + (\partial_r + \frac{1}{r+l})\psi e_z$, avec ψ qui vérifie

$$\partial_{rr}\psi + \frac{1}{r+l}\partial_r\psi - \frac{1}{(r+l)^2}\psi + \partial_{zz}\psi = \omega, \quad (58)$$

$$\partial_n\psi|_{r=-l} = 0. \quad (59)$$

Nous allons montrer qu'il y a toujours des valeurs propres instables pour cet opérateur \mathcal{L}_l .
On commence par décomposer \mathcal{L}_l en trois opérateurs : $\mathcal{L}_l = \mathcal{M}_l + \mathcal{K}_l + \mathcal{S}_l$, avec

$$-\mathcal{M}_l\omega := \tilde{u}_l \cdot \nabla\omega + \frac{1}{2}(\operatorname{div}_{2d} v_l)\omega, \quad (60)$$

$$-\mathcal{K}_l\omega := \operatorname{BS}_l(\omega) \cdot \nabla\tilde{\omega}_l, \quad (61)$$

$$-\mathcal{S}_l\omega := -\frac{1}{r+l}\operatorname{BS}_l(\omega)^r \tilde{\omega}_l - \frac{\tilde{u}_l^r}{r+l}\omega - \frac{1}{2}(\operatorname{div}_{2d} v_l)\omega, \quad (62)$$

où $\mathcal{M}_l : D(\mathcal{L}_l) \rightarrow L^2_{\gamma,l}$, et $\mathcal{K}_l, \mathcal{S}_l : L^2_{\gamma,l} \rightarrow L^2_{\gamma,l}$.

\mathcal{M}_l est anti-hermitien car sur les supports de \tilde{u}_l et $\tilde{\omega}_l$, on a $\gamma = 1$. On peut caractériser les opérateurs \mathcal{K}_l et \mathcal{S}_l par le lemme suivant.

Lemme 3.15. \mathcal{K}_l et \mathcal{S}_l sont bornés, \mathcal{K}_l est compact et $\|\mathcal{S}_l\| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$.

Pour prouver ce lemme, on aura besoin d'une inégalité qui provient de l'inégalité de convolution de Young :

$$\|\operatorname{BS}_l(\omega)\|_{L^6((r+l)\operatorname{drdz})} \lesssim \|\omega\|_{L^2((r+l)\operatorname{drdz})} \lesssim \sqrt{l}\|\omega\|_{L^2(\gamma\operatorname{drdz})}. \quad (63)$$

Démonstration. On commence par prouver la convergence.

On prend ω tel que son support est dans $\{r > -l\}$.

On regarde le terme avec une divergence :

$$\operatorname{div}_{2d} v_l = -\frac{v_l^r}{r+l} - \frac{\tilde{u}_l^r}{r+l} \xrightarrow{L^\infty} 0, \quad (64)$$

car $v_l^r \rightarrow 0$ et $\operatorname{supp}(\tilde{u}) \subset B_{\bar{R}}$.

Ceci donne donc

$$\left\| \frac{\tilde{u}_l^r}{r+l}\omega + \frac{1}{2}(\operatorname{div}_{2d} v_l)\omega \right\|_{L^2_{\gamma,l}} = \left\| \frac{\tilde{u}_l^r}{r+l}\omega + \frac{1}{2}(\operatorname{div}_{2d} v_l)\omega \right\|_{L^2_{B_{\bar{R}}}} \quad (65)$$

$$\leq \left(\frac{1}{l-\bar{R}}\|\tilde{u}_l^r\|_{L^\infty} + \|\operatorname{div}_{2d} v_l\|_{L^\infty} \right) \|\omega\|_{L^2(\gamma,l)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \quad (66)$$

Pour l'autre terme, on utilise l'inégalité (63).

Alors on obtient en utilisant que $\tilde{\omega}$ est à support dans $B_{\bar{R}}$, puis l'inégalité de Hölder et l'inégalité précédente :

$$\left\| \frac{\operatorname{BS}_l(\omega)^r \tilde{\omega}_l}{r+l} \right\|_{L^2_{\gamma,l}} \lesssim \frac{1}{l^{2/3}} \|\omega\|_{L^2_{\gamma,l}} \|\tilde{\omega}_l\|_{L^3(B_{\bar{R}})}. \quad (67)$$

Puisque toutes les dérivées de v_l ont pour limite 0, on a $\tilde{\omega}_l$ borné indépendamment de l .

Donc $\mathcal{S}_l \rightarrow 0$.

Pour la compacité de \mathcal{K}_l , on utilise que $\|\operatorname{BS}_l(\omega)\|_{L^6(B_{\bar{R}})}$ est borné. \square

Maintenant que les opérateurs translatés sont bien définis, on va montrer qu'il y a une valeur propre une fois qu'ils sont translatés suffisamment.

Proposition 3.16. *Soit λ_∞ la valeur propre de \mathcal{L}_∞ de la proposition 3.13.*

Pour tout $\varepsilon \in]0, \text{Re } \lambda_\infty[$, il existe $l_0 \geq 2\bar{R}$ dépendant de \tilde{u} , ε et λ_∞ tel que pour tout $l \geq l_0$, \mathcal{L}_l a une valeur propre instable λ_l qui vérifie $|\lambda_l - \lambda_\infty| < \varepsilon$.

On va faire la preuve avec plusieurs lemmes que l'on démontrera successivement.

On définit l'opérateur de restriction

$$\mathcal{P}_l : L_\gamma^2 \rightarrow L_{\gamma,l}^2, \quad \omega \mapsto \omega|_{r>-l}. \quad (68)$$

Cet opérateur ne change pas le spectre de \mathcal{L}_l , comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.17. *Pour tout $l \geq 2\bar{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_l) \text{ ssi } \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_l \mathcal{P}_l). \quad (69)$$

Démonstration. On a

$$L_\gamma^2 = L^2(\mathbb{R}_{<-l} \times \mathbb{R}, \gamma \text{d}r \text{d}z) \oplus L_{\gamma,l}^2 \quad (70)$$

$$\omega \mapsto ((\mathbf{I} - \mathcal{P}_l)\omega, \mathcal{P}_l\omega) = (f(\omega), g(\omega)). \quad (71)$$

Donc $(\lambda + \mathcal{L}_l \mathcal{P}_l)(f, g) = (\lambda f, \lambda g + \mathcal{L}_l g)$, et $\lambda + \mathcal{L}_l \mathcal{P}_l$ est inversible si et seulement si $\lambda + \mathcal{L}_l$ est inversible. \square

Il suffira donc de prouver que $\sigma(\mathcal{L}_l \mathcal{P}_l) \cap \{\text{Re } \lambda > 0\} \neq \emptyset$.

On note

$$-\mathcal{K}_\infty \omega := \text{BS}_{2d}(\omega) \cdot \nabla \tilde{\omega}, \quad (72)$$

$$-\mathcal{M}_\infty \omega := \tilde{u} \cdot \nabla \omega, \quad (73)$$

avec les mêmes domaines de définition que pour \mathcal{K}_l et \mathcal{M}_l .

On a donc le deuxième lemme qui commence à établir la convergence des résolvants pour pouvoir appliquer plus tard le lemme 3.12.

Lemme 3.18. $\forall K \Subset \rho(\mathcal{M}_\infty + \mathcal{K}_\infty) \cap \{\text{Re } \lambda > 0\}$, $\exists l_0 \geq 2\bar{R}$ tel que $\forall l \geq l_0$, $\forall \lambda \in K$

$$\lambda - \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_\infty \text{ est inversible}, \quad (74)$$

et $\forall f \in L_\gamma^2$

$$R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l + \mathcal{K}_\infty) f \xrightarrow{l \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{M}_\infty + \mathcal{K}_\infty) \quad (75)$$

dans L_γ^2 , uniformément en K .

Démonstration. On prend les flots X^l et X associés respectivement à \tilde{u}_l et \tilde{u} .

On a pour $x \notin B_{\bar{R}}$, $X_t^l(x) = X_t(x) = x$.

Pour $f \in L_\gamma^2$,

$$(R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l) - R(\lambda, \mathcal{M}_\infty)) f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(f(X_t^l(x)) - f(X_t(x)) \right) dt. \quad (76)$$

Donc on peut prendre la norme

$$\|(R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l) - R(\lambda, \mathcal{M}_\infty)) f\|_{L_\gamma^2} \leq \int_0^\infty e^{-\text{Re } \lambda t} \left\| f(X_t^l(x)) - f(X_t(x)) \right\|_{L_{\frac{2}{R}}^2} dt. \quad (77)$$

Or d'après le lemme 3.14 on a $X_t^l \rightarrow X_t$ dans C^1 , d'où

$$R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l) f \xrightarrow{l \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{M}_\infty) f \quad (78)$$

localement uniformément dans $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ par le théorème de convergence dominée.

Ensuite puisque \mathcal{K}_∞ est compact, on dispose d'une suite (F_k) d'opérateurs de rang fini sur L^2_γ qui converge vers \mathcal{K}_∞ .

Par la convergence qu'on vient de montrer, puisque F_k est de rang fini, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l) F_k \rightarrow R(\lambda, \mathcal{M}_\infty) F_k$ localement uniformément sur $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Donc finalement, $R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l) \mathcal{K}_\infty \rightarrow R(\lambda, \mathcal{M}_\infty) \mathcal{K}_\infty$.

Pour finir, on écrit

$$\lambda - \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_\infty = (\lambda - \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l)(\mathbf{I} - R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l) \mathcal{K}_\infty). \quad (79)$$

Donc soit K un compact comme dans les conditions de l'énoncé. Si $\lambda \in K$, alors par définition de K , $\mathbf{I} - R(\lambda, \mathcal{M}_\infty) \mathcal{K}_\infty$ est inversible, et par continuité de son inverse en λ , on a pour l assez grand $\mathbf{I} - R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l) \mathcal{K}_\infty$ inversible, et son inverse a pour limite $(\mathbf{I} - R(\lambda, \mathcal{M}_\infty) \mathcal{K}_\infty)^{-1}$. \square

Soit $\lambda \in \rho(\mathcal{M}_\infty + \mathcal{K}_\infty) \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$. On prend le l_0 du lemme 3.18. Alors pour $l \geq l_0$, on a

$$\lambda - \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{S}_l \mathcal{P}_l = \lambda - \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_\infty - \mathcal{K}_\infty (\mathcal{P}_l - \mathbf{I}) - (\mathcal{K}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_\infty) \mathcal{P}_l - \mathcal{S}_l \mathcal{P}_l \quad (80)$$

$$= (\lambda - \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_\infty)(\mathbf{I} - R(\lambda, \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l + \mathcal{K}_\infty))(\mathcal{A}_l + \mathcal{B}_l + \mathcal{S}_l \mathcal{P}_l) \quad (81)$$

où $\mathcal{A}_l := \mathcal{K}_\infty (\mathcal{P}_l - \mathbf{I})$ et $\mathcal{B}_l := (\mathcal{K}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_\infty) \mathcal{P}_l$.

Lemme 3.19. \mathcal{A}_l et \mathcal{B}_l définis précédemment convergent vers 0 quand $l \rightarrow \infty$.

La (longue) preuve de ce lemme se trouve dans l'annexe B.

Ainsi, pour $K \subset \rho(\mathcal{M}_\infty + \mathcal{K}_\infty) \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$, il existe $l_1 \geq l_0$ tel que pour tout $l \geq l_1$, $\lambda - \mathcal{M}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{K}_l \mathcal{P}_l - \mathcal{S}_l \mathcal{P}_l$ est inversible sur L^2_γ , et son inverse converge vers $R(\lambda, \mathcal{M}_\infty + \mathcal{K}_\infty)$, uniformément sur K .

Donc le lemme 3.12 permet de terminer la preuve de la proposition 3.16.

3.3 Passage aux équations de Navier-Stokes linéarisées

Maintenant qu'on a un champ instable solution des équations d'Euler à trois dimensions, on va l'utiliser pour trouver un champ instable solution des équations de Navier-Stokes.

On se place dans \mathbb{R}^3 et on commence par recentrer les champs. On fixe un l assez grand comme vu dans la section précédente.

Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on note $x = (x', z)$, et $r = |x'|$. On définit

$$\bar{U}(x) := \tilde{u}_l^r(r+l, z)e_r + \tilde{u}_l^z(r+l, z)e_z, \quad (82)$$

$$\bar{\Omega} := \operatorname{rot} \bar{U}. \quad (83)$$

On va maintenant ajouter le terme de dissipation pour revenir à l'équation de Navier-Stokes. Pour cela on va utiliser la formulation vorticité et durant toute la suite, les variables auto-similaires suivantes :

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \tau = \log t \quad (84)$$

On définit l'ensemble $L^2_{aps} = \{\Omega \in L^2 \mid \Omega = \Omega^\theta(r, z)e_\theta\}$, et l'opérateur $\mathcal{L}_{\operatorname{vor}}^{(\beta)} : D(\mathcal{L}_{\operatorname{vor}}^{(\beta)}) \rightarrow L^2_{aps}$

$$D(\mathcal{L}_{\operatorname{vor}}^{(\beta)}) := \{\Omega \in L^2_{aps} \mid \Omega \in H^2(\mathbb{R}^3), \xi \cdot \nabla_\xi \Omega \in L^2(\mathbb{R}^3)\}, \quad (85)$$

$$-\mathcal{L}_{\operatorname{vor}}^{(\beta)} \Omega := \left(-1 - \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi\right) \Omega - \Delta \Omega + \beta[\bar{U}, \Omega] + \beta[\operatorname{BS}_{3d}(\Omega), \bar{\Omega}]. \quad (86)$$

Comme précédemment, on décompose $\mathcal{L}_{\operatorname{vor}}^{(\beta)}$ en introduisant

$$-\mathcal{D}\Omega := -\frac{3}{4}\Omega - \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_{\xi}\Omega - \Delta\Omega \quad (87)$$

$$-\mathcal{M}\Omega := \bar{U} \cdot \nabla\Omega \quad (88)$$

$$-\mathcal{K}\Omega := \text{BS}_{3d}(\Omega) \cdot \nabla\bar{\Omega} \quad (89)$$

$$-\mathcal{S}\Omega := -\bar{\Omega} \cdot \nabla\text{BS}_{3d}(\Omega) - \Omega \cdot \nabla\bar{U}. \quad (90)$$

On a le lemme suivant, qui donne des premières propriétés sur ces opérateurs.

Lemme 3.20. *On note $a := \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{M} + \mathcal{K} + \mathcal{S})} \text{Re } \lambda$ et $\mu := \|\mathcal{S}\|_{L^2_{\text{aps}} \rightarrow L^2}$, qui dépendent de l .*

Alors \mathcal{S} converge vers 0 quand $l \rightarrow \infty$ et on peut choisir l assez grand pour que $a > \mu$.

De plus, \mathcal{K} est compact.

Démonstration. D'une part, d'après la proposition 3.16, on dispose de l_0 tel que pour $l \geq l_0$, a est supérieur à une constante.

D'autre part,

$$(\mathcal{S}\Omega)^\theta = \frac{1}{r}\bar{\Omega}^\theta U^r + \frac{1}{r}\Omega^\theta \bar{U}^r. \quad (91)$$

Or $\text{supp}\bar{U} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |r - l|^2 + |z|^2 \leq \bar{R}^2\}$.

Donc par l'inégalité de Hölder puis par une précision de l'inégalité 63,

$$\|\mathcal{S}\Omega\|_{L^2} \leq \left\| \frac{1}{r}\bar{\Omega}^\theta U^r \right\|_{L^2(\text{rdrdz})} + \left\| \frac{1}{r}\Omega^\theta \bar{U}^r \right\|_{L^2(\text{rdrdz})} \quad (92)$$

$$\lesssim \frac{1}{l} \|U^r\|_{L^6(\text{rdrdz})} \|\bar{\Omega}^\theta\|_{L^3(\text{rdrdz})} + \frac{1}{l} \|\bar{U}^r\|_{L^\infty} \|\Omega^\theta\|_{L^2(\text{rdrdz})} \quad (93)$$

$$\lesssim \frac{1}{l^{2/3}} \|\Omega^\theta\|_{L^2(\text{rdrdz})}. \quad (94)$$

Donc \mathcal{S} converge vers 0 quand $l \rightarrow \infty$ et on peut choisir le l assez grand du lemme. \square

On fixe définitivement le l de ce lemme.

De plus on note

$$\mathcal{T}_\beta := \frac{1}{\beta}\mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{K} = \frac{1}{\beta} \left(\mathcal{L}_{\text{vor}}^{(\beta)} - \frac{1}{4} \right), \quad (95)$$

$$\mathcal{T}_\infty := \mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{K}. \quad (96)$$

Le principal théorème de cette section montre que \mathcal{T}_β a des valeurs propres instables.

Théorème 3.21. *Soit λ_∞ valeur propre instable de \mathcal{T}_∞ avec $\text{Re } \lambda_\infty > \mu$.*

$\forall \varepsilon \in]0, \text{Re } \lambda_\infty - \mu[$, $\exists \beta_0 > 0$ tel que $\forall \beta \geq \beta_0$ \mathcal{T}_β a une valeur propre instable λ_β qui vérifie $|\lambda_\beta - \lambda_\infty| < \varepsilon$.

$\mathcal{L}_{\text{vor}}^{(\beta)}$ a donc aussi une valeur propre instable $\tilde{\lambda}_\beta := \beta\lambda_\beta + \frac{1}{4}$.

À nouveau, on va énoncer plusieurs lemmes pour démontrer le théorème 3.21, dont on fera les démonstrations dans l'annexe C.

Lemme 3.22. *Soient $\beta > 0$, $\lambda \in \{\text{Re } \lambda > \mu\}$.*

Alors

$$\left\| R\left(\lambda, \frac{1}{\beta}\mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S}\right) \right\| \leq \frac{1}{\text{Re } \lambda - \mu}, \quad (97)$$

et pour $\Omega \in L^2_{\text{aps}}$,

$$R\left(\lambda, \frac{1}{\beta}\mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S}\right)\Omega \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S})\Omega \quad (98)$$

dans L^2 , localement uniformément dans $\{\text{Re } \lambda > \mu\}$.

Le prochain lemme améliore le précédent en ajoutant l'opérateur compact K .

Lemme 3.23. *Soit K un compact de $\{\operatorname{Re} \lambda > \mu\} \setminus \sigma(\mathcal{T}_\infty)$. Il existe β_0 tel que pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $\beta \geq \beta_0$, \mathcal{T}_β est inversible, et si $\Omega \in L^2_{aps}$,*

$$R(\lambda, \mathcal{T}_\beta)\Omega \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{T}_\infty)\Omega \quad (99)$$

dans L^2 uniformément sur K .

On conclut la preuve du théorème 3.21 par le lemme 3.12.

On a le même résultat en formulation vitesse.

On définit $-\mathcal{L}_{\text{vel}} U : D(\mathcal{L}_{\text{vel}}) \rightarrow L^2_\sigma$.

$$D(\mathcal{L}_{\text{vel}}) := \{U \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \mid U \in H^2(\mathbb{R}^3), \xi \cdot \nabla_\xi U \in L^2(\mathbb{R}^3)\} \quad (100)$$

$$-\mathcal{L}_{\text{vel}} U := \left(-\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi\right) U - \Delta U + \mathbb{P}(\bar{U} \cdot \nabla U + U \cdot \nabla \bar{U}). \quad (101)$$

Corollaire 3.24. *Pour tout $\beta \geq \beta_0$, la valeur propre $\tilde{\lambda}_\beta$ du théorème 3.21 est une valeur propre instable de \mathcal{L}_{vel} .*

La démonstration de ce corollaire se trouve aussi dans l'annexe C.

3.4 Ajout de la non-linéarité

On finit la démonstration dans cette section, où on ajoute la non-linéarité et on montre la bonne régularité de tous les champs.

On prend λ une valeur propre de \mathcal{L}_{vel} de partie réelle maximale, η un vecteur propre associé. On définit pour $\tau \in \mathbb{R}$ un autre vecteur propre réel

$$U^{\text{lin}}(\cdot, \tau) := \operatorname{Re}(e^{\lambda\tau} \eta), \quad (102)$$

qui vérifie $\partial_\tau U^{\text{lin}} = \mathcal{L}_{\text{vel}} U^{\text{lin}}$.

On note $s(\mathcal{L}_{\text{vel}}) := \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\text{vel}})} \operatorname{Re} \lambda$ la valeur propre maximale de \mathcal{L}_{vel} .

Alors, on a $\forall \tau \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}, \|U^{\text{lin}}\|_{H^k} = C(k, \eta) e^{s(\mathcal{L}_{\text{vel}})\tau}$.

On veut maintenant résoudre la partie non-linéaire de l'équation.

Proposition 3.25. *Soit $N \in \mathbb{N}, N > \frac{5}{2}$.*

Il existe $T \in \mathbb{R}, \varepsilon_0 > 0, U^{\text{per}} \in C([-\infty, T], H^N)$ tel que

$$\begin{aligned} \partial_\tau U^{\text{per}} - \mathcal{L}_{\text{vel}} U^{\text{per}} &= -\mathbb{P}((U^{\text{per}} \cdot \nabla)U^{\text{per}}) \\ &\quad - \mathbb{P}\left((U^{\text{lin}} \cdot \nabla)U^{\text{per}} + (U^{\text{per}} \cdot \nabla)U^{\text{lin}}\right) - \mathbb{P}\left((U^{\text{lin}} \cdot \nabla)U^{\text{lin}}\right), \end{aligned} \quad (103)$$

et $\forall \tau \leq T$,

$$\|U^{\text{per}}(\cdot, \tau)\|_{H^N} \leq e^{(s(\mathcal{L}_{\text{vel}}) + \varepsilon_0)\tau}. \quad (104)$$

Pour démontrer cette proposition, on fixe N , on choisit $\varepsilon_0 = \frac{s(\mathcal{L}_{\text{vel}})}{2}$, et on fixera T plus tard.

Définition 3.26. On définit l'espace

$$X := \{U \in C([-\infty, T], H^N) \mid \|U\|_X < \infty\}, \quad (105)$$

où

$$\|U\|_X := \sup_{\tau < T} e^{-(s(\mathcal{L}_{\text{vel}}) + \varepsilon_0)\tau} \|U(\cdot, \tau)\|_{H^N}. \quad (106)$$

Pour démontrer l'existence de U^{per} , on va utiliser un théorème de point fixe, mais on a d'abord besoin de définir le semi-groupe associé à \mathcal{L}_{vel} .

Cela est fait dans [14], lemme 2.3, dont s'inspire le lemme suivant que l'on ne redémontrera pas.

Lemme 3.27. *Pour tout $U_0 \in L^2_\sigma$, il existe un unique $U \in L^\infty(]0, T[, L^2_\sigma)$ tel que $\partial_\tau U = \mathcal{L}_{vel} U$, et*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \|U(\cdot, \tau) - U_0\|_{L^2} = 0. \quad (107)$$

De plus, pour $T > 0$,

$$\sup_{\tau < T} \left(\|U(\cdot, \tau)\|_{L^2} + t \|\Delta U(\cdot, \tau)\|_{L^2} + t \left\| \partial_\tau U - \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi U \right\|_{L^2} \right) \lesssim \|U_0\|_{L^2}. \quad (108)$$

On définit maintenant l'opérateur qu'on va utiliser pour appliquer le théorème point fixe.

Définition 3.28. On définit $\mathcal{T} : X \rightarrow X$

$$\mathcal{T}(U)(\cdot, \tau) := \int_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-s)\mathcal{L}_{vel}} \mathbb{P} \left(U \cdot \nabla U + U^{lin} \cdot \nabla U + U \cdot \nabla U^{lin} + U^{lin} \cdot \nabla U^{lin} \right), \quad (109)$$

et on écrit

$$\mathcal{T}(U) = B(U, U) + L(U) + G. \quad (110)$$

On commence par un lemme général pour montrer qu'un opérateur est une contraction, qu'on utilisera plus tard.

Lemme 3.29. *Soit Y espace de Banach, $\mathcal{S}(U) = C(U, U) + MU + F$, où $F \in X$, M borné linéaire et C borné bilinéaire.*

Si

$$\|M\| + 2\|C\| + \|F\|_X \leq 1, \quad (111)$$

alors \mathcal{S} est une contraction.

Démonstration. On prend U tel que $\|U\|_X < 1$.

Alors $\|\mathcal{S}(U)\|_X < 1$.

Soient $U, V \in X$ tels que $\|U\|_X < 1$ et $\|V\|_X < 1$.

On a

$$\|\mathcal{S}(U) - \mathcal{S}(V)\|_X \leq (2\|B\| + \|L\|)\|U - V\|_X, \quad (112)$$

donc \mathcal{S} est une contraction. □

Ce lemme permettra après quelques estimations de montrer la proposition suivante.

Proposition 3.30. *Il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{T} : B_X(1) \rightarrow B_X(1)$ est une contraction.*

Pour la démontrer, il y a plusieurs étapes. On commence par des estimations de $e^{\tau \mathcal{L}_{vel}}$.

On rappelle que $s(\mathcal{L}_{vel}) = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{vel})} \operatorname{Re} \lambda$ est la valeur propre maximale de \mathcal{L}_{vel} , et on note

$$\omega_0(\mathcal{L}_{vel}) := \inf \{ \omega \in \mathbb{R} \mid \|e^{\tau \mathcal{L}_{vel}}\| \leq M e^{\tau \omega}, M \in \mathbb{R} \}. \quad (113)$$

On a un premier lemme général tiré de [11], théorème 1.10, voir l'annexe A pour l'énoncé complet.

Lemme 3.31. $s(\mathcal{L}_{vel}) \leq \omega_0(\mathcal{L}_{vel})$.

On peut préciser ce résultat et caractériser ω_0 , toujours à partir de [11], corollaire 2.11, voir à nouveau l'annexe A.

Lemme 3.32.

$$\omega_0(\mathcal{L}_{\text{vel}}) = \max(\omega_{\text{ess}}(\mathcal{L}_{\text{vel}}), s(\mathcal{L}_{\text{vel}})) \quad (114)$$

où

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{L}_{\text{vel}}) := \inf_{\tau > 0} \frac{1}{\tau} \log \left(\inf_{K \text{ compact}} \|e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} - K\| \right). \quad (115)$$

De plus, $\forall w > \omega_{\text{ess}}(\mathcal{L}_{\text{vel}})$, $\sigma(\mathcal{L}_{\text{vel}}) \cap \{\text{Re } \lambda > w\}$ est fini.

On a alors la proposition suivante, tiré de [14], lemme 2.7.

Proposition 3.33. $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{L}_{\text{vel}}) \leq -\frac{1}{4}$.

La démonstration fait appel à plusieurs lemmes et propositions de [14], dont un résumé se trouve dans l'annexe D.

Puisque $s(\mathcal{L}_{\text{vel}}) > 0$ et $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{L}_{\text{vel}}) < 0$, on déduit d'après le lemme 3.32 que $s(\mathcal{L}_{\text{vel}}) = \omega_0(\mathcal{L}_{\text{vel}})$, d'où la proposition suivante.

Proposition 3.34. $\forall \delta > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall U_0 \in L_\sigma^2$,

$$\|e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0\|_{L^2} \leq M e^{\tau(s(\mathcal{L}_{\text{vel}}) + \delta)} \|U_0\|_{L^2}. \quad (116)$$

On veut améliorer ce résultat en estimant en plus les dérivées de $e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0$.

Proposition 3.35. Soient $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq 0, \delta > 0$.

Alors $\exists M \in \mathbb{R}, \forall U_0 \in L_\sigma^2 \cap H^{\sigma_1}$,

$$\|e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0\|_{H^{\sigma_2}} \leq \frac{1}{\tau^{(\sigma_2 - \sigma_1)/2}} e^{\tau(s(\mathcal{L}_{\text{vel}}) + \delta)} \|U_0\|_{H^{\sigma_1}}. \quad (117)$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la proposition pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{N}$ puis on peut généraliser par interpolation.

Dans un premier temps, considérons le cas $0 < \tau < 2$, et montrons que pour $k \geq m \geq 0, U_0 \in L_0^2 \cap H^m$,

$$\|e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0\|_{H^m} \leq M \tau^{-(k-m)/2} \|U_0\|_{H^m}. \quad (118)$$

On note $U(\cdot, \tau) := e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0$.

On fait un changement d'échelle

$$u(x, t) := \frac{1}{\sqrt{t+1}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}, \ln(1+t)\right), \quad \bar{u}(x, t) := \frac{1}{\sqrt{t+1}} \bar{U}\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right). \quad (119)$$

Alors, u est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -\mathbb{P}(\tilde{u} \cdot \nabla u + u \cdot \nabla \bar{u}) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times]0, e^2 - 1[\\ u(x, 0) = U_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (120)$$

En multipliant par u puis par ∇u pour des estimations d'énergie, puisque $\bar{u} \in C_0^\infty$, on obtient pour $t \in]0, 10[$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} + \sqrt{t} \|\nabla u\|_{L^2} \lesssim \|U_0\|_{L^2}. \quad (121)$$

Ceci donne pour $\tau \in]0, 2[$

$$\|U(\cdot, \tau)\|_{L^2} + \sqrt{\tau} \|\nabla U\|_{L^2} \lesssim \|U_0\|_{L^2}. \quad (122)$$

On obtient donc le résultat pour $k = 1$, et $m = 0, 1$.

On peut continuer par récurrence en appliquant ∇^k au système.

Ensuite pour $\tau \geq 2$, on va montrer que pour $\delta > 0$,

$$\|e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0\|_{H^k} \leq M e^{\tau(a+\delta)} \|U_0\|_{L^2}. \quad (123)$$

En effet on peut utiliser la première étape puis la proposition précédente,

$$\|e^{\tau \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0\|_{H^k} = \left\| e^s \mathcal{L}_{\text{vel}} e^{(\tau-s) \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0 \right\|_H^k \quad (124)$$

$$\leq M(k) s^{-k/2} \left\| e^{(\tau-s) \mathcal{L}_{\text{vel}}} U_0 \right\|_{L^2} \quad (125)$$

$$\leq M(k) s^{-k/2} e^{(\tau-s)(a+\delta)} \|U_0\|_{L^2}. \quad (126)$$

Il suffit de prendre $s = 1$, et on obtient ce qu'on veut.

On conclut finalement en combinant les inégalités obtenues pour les temps courts et les temps longs. \square

Maintenant on peut estimer B , L et G afin de pouvoir appliquer le lemme 3.29.

Proposition 3.36. *On note $a := s(\mathcal{L}_{\text{vel}})$ et on prend $\delta = \frac{a}{4}$.*

Alors il existe C tel que pour $U \in X$, $\forall \tau < T$

$$\|B(U, U)\|_{H^{N+1/2}} \leq C e^{2(a+\varepsilon_0)\tau} \|U\|_X^2, \quad (127)$$

$$\|LU\|_{H^{N+1/2}} \leq C e^{(2a+\varepsilon_0)\tau} \|U\|_X, \quad (128)$$

$$\|G\|_{H^{N+1/2}} \leq C e^{2a\tau}. \quad (129)$$

Démonstration. On commence par une remarque : pour $N \geq 3$ entier, H^{N-1} est une algèbre, donc pour $f, g \in H^N$,

$$\|f \nabla g\|_{H^{N-1}} \lesssim \|f\|_{H^{N-1}} \|\nabla g\|_{H^{N-1}} \lesssim \|f\|_{H^N} \|g\|_{H^N}. \quad (130)$$

Pour l'estimation de B , par la proposition 3.35, puis en utilisant la remarque, on a pour $\tau < T$

$$\|B(U, U)\|_{H^{N+1/2}} \lesssim \int_{-\infty}^{\tau} \frac{e^{(\tau-s)(a+\delta)}}{(\tau-s)^{3/4}} \|U \cdot \nabla U\|_{H^{N-1}} ds \quad (131)$$

$$\lesssim \|U\|_X^2 \int_{-\infty}^{\tau} \frac{e^{(\tau-s)(a+\delta)} e^{2(a+\varepsilon_0)s}}{(\tau-s)^{3/4}} ds \quad (132)$$

$$\lesssim e^{2(a+\varepsilon_0)\tau} \|U\|_X^2, \quad (133)$$

ce qui convient.

Pour l'estimation de G , on utilise de même la proposition 3.35 et la remarque,

$$\|G\|_{H^N} \lesssim \int_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-s)(a+\delta)} \left\| U^{lin} \cdot \nabla U^{lin} \right\|_{H^N} ds \quad (134)$$

$$\lesssim \int_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-s)(a+\delta)} e^{2as} ds \quad (135)$$

$$\lesssim e^{2\tau a}, \quad (136)$$

ce qui convient.

On finit par L de la même façon,

$$\|LU\|_{H^{N+1/2}} \lesssim \int_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-s)(a+\delta)} \left(\left\| U^{lin} \cdot \nabla U \right\|_{H^{N+1}} + \left\| U \cdot \nabla U^{lin} \right\|_{H^{N-1}} \right) ds \quad (137)$$

$$\lesssim \int_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-s)(a+\delta)} e^{(2a+\varepsilon_0)s} \|U\|_X ds \quad (138)$$

$$\lesssim e^{(2a+\varepsilon_0)\tau} \|U\|_X, \quad (139)$$

ce qui conclut. \square

Finalement, on obtient $2\|B(U, U)\|_X + \|LU\|_X + \|G\|_X \leq C e^{(a-\varepsilon_0)T}$. Donc en prenant T suffisamment petit, on peut appliquer le lemme 3.29, ce qui démontre la proposition 3.30.

Pour finir, il reste à avoir des bornes sur toutes les dérivées de U^{per} .

Puisque $\mathcal{T}(U^{per}) = U^{per}$, on peut utiliser la proposition 3.36, qui implique que pour $N > \frac{5}{2}$, si

$$\sup_{\tau \leq T} e^{-(a+\varepsilon_0)\tau} \|U^{per}\|_{H^N} < \infty, \quad (140)$$

alors

$$\sup_{\tau \leq T} e^{-2a\tau} \|U^{per}\|_{H^{N+1/2}} < \infty. \quad (141)$$

On conclut finalement par itérations que pour $N \in \mathbb{N}$ et pour $\tau < T$,

$$\|U^{per}(\cdot, \tau)\|_{H^N} \lesssim e^{2\tau a}. \quad (142)$$

Finalement, on peut résumer tous les résultats précédents dans le théorème suivant dans les variables auto-similaires.

On rappelle la définition de \bar{U} dans (82), de U^{lin} dans (102) et de U^{per} dans la proposition 3.25. De plus, on définit

$$\bar{F} := -\frac{1}{2}(1 + \xi \cdot \nabla_\xi) \bar{U} - \Delta \bar{U} + \bar{U} \cdot \nabla \bar{U}. \quad (143)$$

Théorème 3.37. *L'opérateur \mathcal{L}_{vel} a une valeur propre instable avec un vecteur propre η associé dans H^k pour tout $k \geq 0$.*

De plus, $U^{lin}(\cdot, \tau) = \text{Re}(e^{\tau\lambda} \eta)$ vérifie $\partial_t U^{lin} = \mathcal{L}_{vel} U^{lin}$, et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\|U^{lin}\|_{H^k} = C(k, \eta) e^{a\tau}. \quad (144)$$

On dispose de plus de $U^{per} : \mathbb{R}^3 \times]-\infty, T]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\tau > T$,

$$\|U^{per}\|_{H^k} \lesssim e^{2\tau a}. \quad (145)$$

qui permet de démontrer le théorème 2.3.

Démonstration du théorème 2.3. On a choisit \bar{U} de façon à ce qu'il vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_\tau U - \frac{1}{2}(1 + \xi \cdot \nabla_\xi) U - \Delta U + U \cdot \nabla U + \nabla P = F, \\ \text{div } U = 0, \end{cases} \quad (146)$$

pour $F = \bar{F}$ et $P = 0$ qui sont lisses.

Cette équation (146) correspond aux équations de Navier-Stokes avec les variables auto-similaires.

La proposition 3.25 montre que $U := \bar{U} + U^{lin} + U^{per}$ est aussi solution de l'équation (146), avec les mêmes P et F . D'après les estimations du théorème 3.37, U et \bar{U} ne sont pas les mêmes autour de $-\infty$.

On repasse aux variables physiques en notant

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U(\xi, \tau), \quad \bar{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \bar{U}(\xi, \tau), \quad \bar{f}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}^3} \bar{F}(\xi, \tau). \quad (147)$$

Alors u et \bar{u} sont des solutions de Leray-Hopf (elles ont la bonne régularité par leur définition (147)), sur $]0, T[$ avec pour condition initiale $u_0 = 0$ et pour force \bar{f} .

D'après les définitions (147), on a aussi $\bar{f} \in L_t^1 L_x^2$, ce qui conclut la démonstration du théorème. \square

ANNEXES

A Quelques propriétés d'analyse spectrale

On commence par démontrer le lemme 3.12.

Démonstration du lemme 3.12. On prend c une courbe fermée, simple et lisse dans $\rho(\mathcal{A})$, qui contient uniquement μ_∞ dans son intérieur et pas d'autre valeur propre.

On prend $K = c$.

Alors, la projection spectrale sur μ_∞ s'écrit

$$\text{Pr} = \frac{1}{2i\pi} \int_c R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda \quad (148)$$

et on définit de la même manière Pr_n pour \mathcal{A}_n , $n \in \mathbb{N}$

On sait que $\text{Pr} \neq 0$, et par les hypothèses du lemme, on a $\text{Pr}_n \rightarrow \text{Pr}$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on a $\text{Pr}_n \neq 0$. Alors, \mathcal{A}_n a une valeur propre dans l'intérieur de K , ce qui permet de conclure en prenant c suffisamment petite. \square

On énonce maintenant le théorème 1.10 de [11].

Théorème A.1. *Soit $T(t)$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X , généré par $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$.*

On prend $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tels que pour $t \geq 0$,

$$\|T(t)\| \geq M e^{wt}. \quad (149)$$

Alors on a,

1. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds$ est bien défini pour $x \in X$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, et $R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda)$.*
2. *Si $\text{Re } \lambda > w$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, et le point 1 est vérifié.*
3. *Pour $\text{Re } \lambda > w$,*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{\text{Re } \lambda - w}. \quad (150)$$

C'est le point 2 qui est utilisé pour démontrer 3.31.

La proposition 2.10 de [11] est utilisée dans la démonstration de la proposition 3.33.

Proposition A.2. *Pour un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, on a pour $t_0 > 0$,*

$$-\infty \leq \omega_{ess} = \frac{1}{t_0} \log r_{ess}(T(t_0)) \leq \omega_0 < \infty. \quad (151)$$

On énonce maintenant le corollaire 2.11 de [11], qui généralise le lemme 3.32.

Corollaire A.3. *Soit $T(t)$ un semi-groupe fortement continu sur un Banach X , généré par $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$.*

Alors,

$$\omega_0 = \max(\omega_{ess}, s(\mathcal{A})). \quad (152)$$

De plus, pour $w > \omega_{ess}$, $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda > w\}$ est fini, et la projection spectrale correspondante est de rang fini.

B Démonstration du lemme 3.19

On commence par \mathcal{A}_l .

Soit $\omega \in L_\gamma^2$. On estime

$$\|\mathcal{K}_\infty(\mathcal{P}_l - \mathbf{I})\omega\|_{L_\gamma^2} = \|\mathcal{K}_\infty(\mathcal{P}_l - \mathbf{I})\omega\|_{L_{\frac{R}{2}}^2} \leq \|\text{BS}_{2d}(\omega 1_{\{r < -l\}})\|_{L_{\frac{R}{2}}^2} \|\nabla \tilde{\omega}_l\|_{L^\infty}. \quad (153)$$

Or $\tilde{\omega} \in C_c^\infty$ et les dérivées de $\text{rot } v_l$ sont bornées, donc $\|\nabla \tilde{\omega}_l\|_{L^\infty}$ est borné.

De plus, $\text{BS}_{2d} : L^q \rightarrow L^{q^*}$, avec $\frac{1}{q^*} + \frac{1}{q} = 1$, d'où

$$\|\text{BS}_{2d}(\omega 1_{\{r < -l\}})\|_{L_{\frac{R}{2}}^2} \lesssim \|\text{BS}_{2d}(\omega 1_{\{r < -l\}})\|_{L_{\frac{R}{2}}^{\frac{2}{1+\varepsilon}}} \quad (154)$$

$$\lesssim \|\omega 1_{\{r < -l\}}\|_{L_{\frac{R}{2}}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} \quad (155)$$

$$\lesssim \|\omega\|_{L_\gamma^2} \left\| (1+r^2+z^2)^{-25(1+\varepsilon)} 1_{\{r < -l\}} \right\|_{L_{\frac{R}{2}}^{\frac{2}{1-\varepsilon}}} \quad (156)$$

$$\xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \quad (157)$$

Donc $\mathcal{A}_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$.

On continue avec \mathcal{B}_l .

On choisit ω tel que $\text{supp } \omega = \{r > -l\}$. Il suffit de prouver

$$\|\text{BS}_{2d}(\omega) - \text{BS}_l(\omega)\|_{L_{\frac{R}{2}}^2} \leq C(l)\|\omega\|_{L_\gamma^2}, \quad (158)$$

où $C(l) \rightarrow 0$.

Or on a

$$\|\text{BS}_{2d}(\omega) - \text{BS}_l(\omega)\|_{L_{\frac{R}{2}}^2} \leq \left\| \frac{1}{r+l} \psi_l \right\|_{L_{\frac{R}{2}}^2} + \|\nabla(\psi_l - \psi)\|_{L_{\frac{R}{2}}^2}, \quad (159)$$

où $\Delta \psi = \omega$ et $\Delta_l \psi_l = \omega$.

Nous allons estimer les deux termes successivement.

On commence par $\left\| \frac{1}{r+l} \psi_l \right\|_{L_{\frac{R}{2}}^2}$.

Avec l'inégalité de Young, on a

$$\|\psi_l\|_{L^q((r+l)d\text{rd}z)} + \left\| \left(\partial_r + \frac{1}{r+l}, \partial_z \right) \psi_l \right\|_{L^{p^*}((r+l)d\text{rd}z)} \lesssim \|\omega\|_{L^p((r+l)d\text{rd}z)} \lesssim l^{\frac{1}{p}} \|\omega\|_{L_\gamma^2}, \quad (160)$$

où $p \in \left] 1, \frac{3}{2} \right[$, $\frac{3}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2}{3}$.

On prend $p = \frac{6}{5}$, $q = 6$, et on obtient avec l'inégalité d'Hölder

$$\left\| \frac{1}{r+l} \psi_l \right\|_{L_{\frac{R}{2}}^2} \lesssim \left\| \frac{1}{r+l} \psi_l \right\|_{L_{\frac{R}{2}}^6} \quad (161)$$

$$\lesssim \frac{1}{l} \|\psi_l\|_{L^6((r+l)d\text{rd}z)} \quad (162)$$

$$\lesssim \frac{1}{l^{1/6}} \|\omega\|_{L_\gamma^2}. \quad (163)$$

On passe maintenant au terme $\|\nabla(\psi_l - \psi)\|_{L_{\frac{R}{2}}^2}$.

Cette fois, on utilise l'inégalité de Young pour avoir

$$\|\psi\|_{\dot{C}^{2-2/p}} + \|\nabla \psi\|_{L^{p^*}(d\text{rd}z)} \lesssim \|\omega\|_{L^p(d\text{rd}z)} \lesssim \|\omega\|_{L_\gamma^2}, \quad (164)$$

pour $p \in]1, 2[$, et $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$.

Puisque ψ est définie à une constante près, on va supposer $\psi(0) = 0$.

Alors pour $R > 1$, $q \geq 1$ et $p \in]1, 2[$,

$$\|\psi\|_{L^q} \lesssim R^{2+2/q-2/p} \|\omega\|_{L^2_\gamma}. \quad (165)$$

Maintenant on prend $l \geq 8\bar{R}$, et $\chi_l \in C_c^\infty(B_{l/2})$ qui vérifie $\chi_l|_{B_{l/4}} = 1$, $|\nabla\chi_l| \lesssim \frac{1}{l}$ et $|\nabla^2\chi_l| \lesssim \frac{1}{l^2}$.

On a alors

$$\Delta((\psi_l - \psi)\chi_l) = \frac{1}{(r+l)^2} \psi_l \chi_l - \frac{1}{r+l} \partial_r \psi_l \chi_l + 2\nabla(\psi_l - \psi) \cdot \nabla\chi_l + (\psi_l - \psi)\Delta\chi_l. \quad (166)$$

Ainsi, comme $W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2) \subset L^6(\mathbb{R}^2)$,

$$\|\nabla(\psi_l - \psi)\|_{L^2_{\frac{R}{l}}} \lesssim \|\nabla((\psi_l - \psi)\chi_l)\|_{L^6} \lesssim \|\Delta((\psi_l - \psi)\chi_l)\|_{L^{3/2}}. \quad (167)$$

Or,

$$\begin{aligned} \|\Delta((\psi_l - \psi)\chi_l)\|_{L^{3/2}} &\lesssim \frac{1}{l^2} \left(\|\psi_l\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} + \|\psi\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} \right) \\ &\quad + \frac{1}{l} \left(\left\| \left(\partial_r + \frac{1}{r+l}, \partial_z \right) \psi_l \right\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} + \|\nabla\psi\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} \right). \end{aligned} \quad (168)$$

On va s'intéresser à chacun des quatre termes les uns après les autres.

1. On a par l'inégalité (160)

$$\frac{1}{l^2} \|\psi_l\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} \lesssim \frac{1}{l} \|\psi_l\|_{L^4((r+l)d\text{rd}z)} \lesssim \frac{1}{l^{1/12}} \|\omega\|_{L^2_\gamma}. \quad (169)$$

2. Par l'inégalité (165) avec $q = \frac{3}{2}$ et $p = \frac{6}{5}$,

$$\frac{1}{l^2} \|\psi\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} \lesssim \frac{1}{l^{1/2}} \|\omega\|_{L^2_\gamma}. \quad (170)$$

3. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\frac{1}{l} \left\| \left(\partial_r + \frac{1}{r+l}, \partial_z \right) \psi_l \right\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} \lesssim \frac{1}{l^{9/10}} \left\| \left(\partial_r + \frac{1}{r+l}, \partial_z \right) \psi_l \right\|_{L^{3/2+\varepsilon}(B_{l/2})} \quad (171)$$

$$\lesssim \frac{1}{l^{9/10}} \frac{1}{l^{3/2+\varepsilon}} \left\| \left(\partial_r + \frac{1}{r+l}, \partial_z \right) \psi_l \right\|_{L^{3/2}((r+l)d\text{rd}z)} \quad (172)$$

$$\lesssim \frac{1}{l^{4/3}} \left\| \left(\partial_r + \frac{1}{r+l}, \partial_z \right) \psi_l \right\|_{L^{3/2}((r+l)d\text{rd}z)}. \quad (173)$$

Maintenant on utilise l'inégalité (164) avec $p^* = \frac{3}{2} + \varepsilon$ (alors $\frac{1}{p} \leq 1$),

$$\frac{1}{l} \left\| \left(\partial_r + \frac{1}{r+l}, \partial_z \right) \psi_l \right\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} \lesssim \frac{1}{l^{4/3}} l^{1/p} \|\omega\|_{L^2_\gamma} \quad (174)$$

$$\lesssim \frac{1}{l^{1/3}} \|\omega\|_{L^2_\gamma}. \quad (175)$$

4. Cette fois, on utilise l'inégalité (164) avec $p^* = \frac{5}{2}$,

$$\frac{1}{l} \|\nabla\psi\|_{L^{3/2}(B_{l/2})} \lesssim \frac{1}{l^{7/15}} \|\nabla\psi\|_{L^{5/2}(B_{l/2})} \quad (176)$$

$$\lesssim \frac{1}{l^{7/15}} \|\omega\|_{L^2_\gamma}. \quad (177)$$

Donc finalement on a démontré (158), et \mathcal{A}_l et \mathcal{B}_l convergent vers 0.

C Démonstration du théorème 3.21

Comme dit précédemment, on démontre ce théorème par la démonstration des deux lemmes 3.22 et 3.23.

Démonstration du lemme 3.22. On regarde l'équation d'advection-diffusion et sa version non-visqueuse :

$$\partial_\tau \Omega^\beta - \frac{1}{\beta} \left(\Delta + \frac{3}{4} + \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi \right) \Omega^\beta + \bar{U} \cdot \nabla \Omega^\beta - \mathcal{S} \Omega^\beta = 0, \quad (178)$$

$$\partial_\tau \Omega + \bar{U} \cdot \nabla \Omega - \mathcal{S} \Omega = 0, \quad (179)$$

avec pour condition initiale

$$\Omega^\beta(\cdot, 0) = \Omega(\cdot, 0) = \Omega_0 \in C_0^\infty \cap L_{aps}^2. \quad (180)$$

On peut faire une estimation d'énergie en multipliant par Ω^β ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|\Omega^\beta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\beta} \int |\nabla \Omega^\beta|^2 \leq \mu \|\Omega^\beta\|_{L^2}^2, \quad (181)$$

où l'on rappelle que $\mu = \|\mathcal{S}\|$.

Donc on a

$$\|\Omega^\beta\|_{L^2} \leq e^{\tau\mu} \|\Omega_0\|_{L^2}, \quad (182)$$

ce qui combiné à

$$R \left(\lambda, \frac{1}{\beta} \mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S} \right) \Omega_0 = \int_0^\infty e^{-s\lambda} \Omega^\beta(\cdot, s) ds, \quad (183)$$

permet de démontrer la première inégalité du lemme par densité.

Ensuite, on montre que $\Omega^\beta \rightarrow \Omega$.

On considère leur différence afin de faire à nouveau une estimation d'énergie.

$$\begin{aligned} \partial_\tau (\Omega^\beta - \Omega) - \frac{1}{\beta} \left(\Delta + \frac{3}{4} + \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi \right) (\Omega^\beta - \Omega) + \bar{U} \cdot \nabla (\Omega^\beta - \Omega) - \mathcal{S} (\Omega^\beta - \Omega) \\ = \frac{1}{\beta} F := \frac{1}{\beta} \left(\Delta + \frac{3}{4} + \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi \right) \Omega. \end{aligned} \quad (184)$$

Or $\|F\|_{L_\tau^2 H_\xi^{-1}(\mathbb{R}^3 \times]0, T])}$ est borné, et donc par une estimation d'énergie on obtient

$$\|\Omega^\beta - \Omega\|_{L_\tau^\infty L_\xi^2(\mathbb{R}^3 \times]0, T])} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0, \quad (185)$$

en $\frac{1}{\beta}$.

On peut donc estimer

$$\left\| \left(R(\lambda, \frac{1}{\beta} \mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S}) - R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S}) \right) \Omega_0 \right\|_{L^2} \quad (186)$$

en utilisant cette convergence et l'équation (183) : pour $T > 0$,

$$\left\| \left(R(\lambda, \frac{1}{\beta} \mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S}) - R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S}) \right) \Omega_0 \right\|_{L^2} \leq c(\beta) + 2 e^{-T(\operatorname{Re} \lambda - \mu)}, \quad (187)$$

où $c(\beta) \rightarrow 0$.

Finalement on obtient la convergence localement uniforme voulue. \square

Démonstration du lemme 3.23. On peut écrire

$$\lambda - \mathcal{T}_\beta = \left(\lambda - \frac{1}{\beta} \mathcal{D} - \mathcal{M} - \mathcal{S} \right) \left(\mathbf{I} - R(\lambda, \frac{1}{\beta} \mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S}) \mathcal{K} \right). \quad (188)$$

Or \mathcal{K} est compact, donc il existe une suite (\mathcal{F}_k) d'opérateurs de rang fini qui convergent vers \mathcal{K} .

Par le lemme 3.22 précédent, on a

$$R(\lambda, \frac{1}{\beta} \mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S}) \mathcal{F}_k \rightarrow R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S}) \mathcal{F}_k, \quad (189)$$

uniformément sur K .

Donc,

$$R(\lambda, \frac{1}{\beta} \mathcal{D} + \mathcal{M} + \mathcal{S}) \mathcal{K} \rightarrow R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S}) \mathcal{K}, \quad (190)$$

uniformément sur K .

Or $\mathbf{I} - R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S}) \mathcal{K} = R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S}) (\lambda - (\mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{K}))$ est inversible, ce qui conclut la démonstration. \square

Voici aussi la démonstration du corollaire :

Démonstration du corollaire 3.24. Par le théorème 3.21, on dispose de β assez grand tel que $\mathcal{L}_{\text{vor}}^{(\beta)}$ a une valeur propre instable λ vérifiant $\text{Re } \lambda \geq \frac{1}{4}$.

Il suffit de démontrer que si $\Omega \in L^2$ est un vecteur propre de $\mathcal{L}_{\text{vor}}^{(\beta)}$ associé à λ , alors $\Omega \in L^1$.

En effet, on aurait par les propriétés de BS_{3d} que $U = \text{BS}_{3d}(\Omega) \in L^2$ et donc U convient comme vecteur propre de \mathcal{L}_{vel} pour λ .

Pour démontrer ce fait, on écrit l'équation vérifiée par Ω .

$$\lambda \Omega - \left(1 + \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi \right) \Omega - \Delta \Omega = F, \quad (191)$$

où $-F = \beta[\bar{U} \cdot \nabla \Omega] + \beta[U \cdot \nabla \bar{\Omega}] \in L^2$ est à support compact.

On fait un changement d'échelle :

$$h(x, t) = t^{\lambda-1} \Omega \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad g(x, t) = t^{\lambda-2} F \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad (192)$$

et on vérifie que

$$\partial_t h - \Delta h = g. \quad (193)$$

Pour la condition initiale, on a

$$\|h(\cdot, t)\|_{L^2} = t^{\text{Re } \lambda - \frac{1}{4}} \|\Omega\|_{L^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad (194)$$

donc $h(\cdot, 0) = 0$.

De plus,

$$\|g(\cdot, t)\|_{L^1} = t^{\text{Re } \lambda - \frac{1}{2}} \|F\|_{L^1}, \quad (195)$$

d'où $g \in L_t^\infty L_x^1(\mathbb{R}^3 \times]0, 1[)$, car F est à support compact.

Finalement, comme pour $s \in]0, 1[$, $\|e^{\Delta(1-s)}\|_{L^1 \rightarrow L^1} \leq 1$ et comme $g \in L^\infty L^1$, on a

$$\Omega(x) = h(x, 1) = \int_0^1 e^{\Delta(1-s)} g(\cdot, s) ds \in L^1, \quad (196)$$

d'où le corollaire. \square

D Démonstration de la proposition 3.33

Comme dit plus haut, la proposition 3.33 est tirée de [14], dont on va suivre la démonstration pour en faire un résumé.

On note \mathcal{L} l'opérateur

$$\mathcal{L}U := \Delta U + \frac{\xi}{2} \cdot \nabla U + \frac{1}{2}U. \quad (197)$$

À la manière de la démonstration du corollaire 3.24 (dans l'annexe C), on note pour λ tel que $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{1}{4}$

$$h(x, t) := t^{\lambda-1/2}U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad (198)$$

qui vérifie alors, si $\mathcal{L}U - \lambda U = f$,

$$\partial_t h - \Delta h = t^{\lambda-3/2}f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad (199)$$

avec la condition initiale $h(\cdot, 0) = 0$.

Alors à partir de la théorie générale de l'équation de la chaleur, on peut construire h puis U vérifiant $\mathcal{L}U - \lambda U = f$, donc $\{\operatorname{Re} \lambda > -\frac{1}{4}\} \subset \rho(\mathcal{L})$.

Donc on a $\omega_{ess}(\mathcal{L}) \leq -\frac{1}{4}$.

Il reste à montrer que $\omega_{ess}(\mathcal{L}_{vel}) = \omega_{ess}(\mathcal{L})$.

Pour cela on utilise un résultat général, la proposition 2.10, page 258 de [11] (voir l'annexe A), qui donne

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) = \frac{1}{t_0} \log r_{ess}(e^{At_0}), \quad (200)$$

où $r_{ess}(T) = \sup_{\lambda \in \sigma_{ess}(T)} |\lambda|$.

Puisque r_{ess} est invariant par ajout d'un compact, il suffit de montrer que $e^{\mathcal{L}_{vel}t} - e^{\mathcal{L}t}$ est compact. Pour cela on a en dérivant puis intégrant $e^{\mathcal{L}(t-s)} e^{\mathcal{L}_{vel}s} U$ que

$$e^{\mathcal{L}_{vel}t} U - e^{\mathcal{L}t} U = - \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} (\mathcal{L}_{vel} - \mathcal{L}) e^{\mathcal{L}_{vel}s} U ds. \quad (201)$$

Pour montrer la compacité du terme de droite, on prend une suite (U_n) bornée qui converge faiblement vers U .

Alors par compacité de $(\mathcal{L}_{vel} - \mathcal{L})$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée puisqu'on a l'inégalité (108), pour montrer que

$$\left\| \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} (\mathcal{L}_{vel} - \mathcal{L}) e^{\mathcal{L}_{vel}s} (U_n - U) ds \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (202)$$

Références

- [1] Dallas Albritton, Elia Brué, and Maria Colombo. Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier-Stokes equations. *Annals of Mathematics*, 196(1) :415 – 455, 2022.
- [2] Dallas Albritton, Elia Brué, Maria Colombo, Camillo De Lellis, Vikram Giri, Maximilian Janisch, and Hyunju Kwon. Instability and nonuniqueness for the 2d Euler equations in vorticity form, after M. Vishik, 2021.
- [3] J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Comm. Math. Phys.*, 94(1) :61–66, 1984.
- [4] M. E. Bogovskii. Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 248 :1037–1040, 1979.
- [5] Jean Bourgain and Dong Li. Strong ill-posedness of the 3d incompressible Euler equation in borderline spaces. *Int. Math. Res. Not.*, 2021(16) :12155–12264, 2021.
- [6] Tristan Buckmaster, Camillo De Lellis, László jun. Székelyhidi, and Vlad Vicol. Onsager’s conjecture for admissible weak solutions. *Commun. Pure Appl. Math.*, 72(2) :229–274, 2019.
- [7] Tristan Buckmaster and Vlad Vicol. Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation. *Ann. of Math. (2)*, 189(1) :101–144, 2019.
- [8] Peter Constantin, E. Weinan, and Edriss S. Titi. Onsager’s conjecture on the energy conservation for solutions of euler’s equation. *Communications in Mathematical Physics*, 165(1) :207–209, 1994.
- [9] Camillo De Lellis and László jun. Székelyhidi. On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 195(1) :225–260, 2010.
- [10] R. J. DiPerna and Pierre-Louis Lions. Global weak solutions of kinetic equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 46(3) :259–288 (1990), 1988.
- [11] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Grad. Texts Math.* Berlin : Springer, 2000.
- [12] Philip Isett. A proof of Onsager’s conjecture. *Ann. Math. (2)*, 188(3) :871–963, 2018.
- [13] Philip Isett and Vlad Vicol. Hölder continuous solutions of active scalar equations. *Ann. PDE*, 1(1) :77, 2015. Id/No 2.
- [14] Hao Jia and Vladimir Sverak. Are the incompressible 3d Navier-Stokes equations locally ill-posed in the natural energy space? *J. Funct. Anal.*, 268(12) :3734–3766, 2015.
- [15] Nicolaas H. Kuiper. On C^1 -isometric imbeddings. I, II. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 58 :545–556, 683–689, 1955.
- [16] Jean Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, 63(1) :193–248, 1934.
- [17] L. Lichtenstein. Über einige existenzprobleme der hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser flüssigkeiten und die helmholtzschen wirbelsätze. *Mathematische Zeitschrift*, 23 :89–154, 1925.
- [18] P.-L. Lions and B. Perthame. Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system. *Invent. Math.*, 105(2) :415–430, 1991.
- [19] John Nash. C^1 isometric imbeddings. *Ann. Math. (2)*, 60 :383–396, 1954.
- [20] L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento (1943-1954)*, 6(2) :279–287, 1949.
- [21] Vladimir Scheffer. An inviscid flow with compact support in space-time. *J. Geom. Anal.*, 3(4) :343–401, 1993.
- [22] G. Seregin. A certain necessary condition of potential blow up for Navier-Stokes equations. *Comm. Math. Phys.*, 312(3) :833–845, 2012.

- [23] A. Shnirelman. Weak solutions of incompressible Euler equations. In *Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. II*, pages 87–116. Amsterdam : North-Holland, 2003.
- [24] Cédric Villani. Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l’angle de l’intégration convexe [d’après C. De Lellis et L. Székelyhidi]. In *Séminaire Bourbaki : volume 2008/2009 exposés 997-1011 - Avec table par noms d’auteurs de 1848/49 à 2008/09*, number 332 in Astérisque. Société mathématique de France, 2010. talk :1001.
- [25] Misha Vishik. Instability and non-uniqueness in the cauchy problem for the euler equations of an ideal incompressible fluid. part i, 2018.
- [26] Misha Vishik. Instability and non-uniqueness in the cauchy problem for the euler equations of an ideal incompressible fluid. part ii, 2018.
- [27] W. Wolibner. Un théorème sur l’existence du mouvement plan d’un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. *Math. Z.*, 37 :698–726, 1933.