Mémoire de stage

Quentin Moulard

Printemps 2022

Table des matières

Introduction

J'ai effectué un stage à l'Université technique de Vienne sous la supervision de Fabio Toninelli. Je tiens à le remercier très chaleureusement pour le temps qu'il m'a accordé, son aide précieuse et le partage de ses connaissances. Je passais la plupart de mon temps à l'université, où un bureau m'a été mis à disposition au sein du département de probabilité. J'ai pu également avoir des rencontres enrichissantes avec des doctorants, post-doctorants et chercheurs. De plus, j'ai beaucoup apprécié visiter Vienne et ses monuments historiques, très riches culturellement.

Mon stage a commencé par un travail bibliographique qui a duré environ deux mois : j'ai lu 4 articles de Milton Jara ([5], [4], [3], [2]) autour de l'utilisation de la méthode entropique pour étudier des systèmes de particules en interaction. L'idée est d'utiliser l'inégalité de Yau ainsi que des estimations entropiques pour contrôler l'entropie relative de la mesure spatiale du processus par rapport à une mesure simple qui heuristiquement en est une bonne approximation. Le contrôle de cette entropie relative peut alors permettre d'obtenir des théorèmes limites hors équilibres (loi des grands nombres et théorème centrale limite). La première partie de ce mémoire est une réécriture allégée de l'article [5].

Fabio m'a ensuite guidé pour essayer d'appliquer la méthode entropique à l'étude d'une EDPS non-linéaire, qui heuristiquement est analogue au système de particules de [5]. J'ai consacré les deux derniers mois de mon stage à cette question, et malgré de nombreux obstacles, j'ai réussi à montrer des résultats satisfaisants (mais très probablement pas optimaux). La seconde partie de ce mémoire est consacrée à mes travaux personnels sur le sujet.

Première partie

Approche entropique pour le processus d'exclusion faiblement asymétrique (WASEP)

1 Le modèle et les résultats

Tout d'abord, introduisons le modèle. Soit $d \geq 1$ (que l'on fixe), puis $n \geq 1$ (qui sera amené à tendre vers l'infini) : on considère le tore T_n^d, que l'on voit comme le quotient de $\frac{1}{n}\mathbb{Z}^d$ par l'action de translation de $\mathbb{Z}^d$ (ceci permet de le voir comme un sous-ensemble du tore T^d). Nous notons $x \sim y$ si x et y sont voisins (ie $|y-x| = 1/n$). On note $\mathcal{B}_n = \{e_1/n, ..., e_d/n\}$ où $(e_1, ..., e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. L'espace des configurations possibles du processus que nous allons définir est $\{0,1\}^{T_n^d}$ (une telle configuration sera notée généralement η, de sorte que η_x vaut 1 si une particule est présente sur le site x et 0 sinon). Si $x \neq y$ sont dans T_n^d et η une configuration, on note $\eta^{x,y}$ la configuration pour laquelle on a échangé le site x et y. Plus précisément :

$$\eta_z^{x,y} := \begin{cases} \eta_y & \text{si } z = x \\ \eta_x & \text{si } z = y \\ \eta_z & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère alors le processus de Markov sur $\{0,1\}^{T_n^d}$ engendré par le générateur suivant :

$$L_n f(\eta) := \sum_{x \sim y} r_n(x,y)\ \eta_x(1-\eta_y)\ \ (f(\eta^{x,y}) - f(\eta))$$

avec une fonction de saut r_n que nous allons précisons dans quelques lignes. Cela signifie informellement que si une particule est présente en x et qu'un site voisin y est libre, alors celle-ci peut sauter de x à y pendant une durée dt avec probabilité $r_n(x,y)dt$.

En ce qui concerne r_n, on pourrait prendre par exemple $r_n = n^2$: il s'agit du processus d'exclusion simple symétrique (aucune transition n'est privilégiée par rapport à une autre). Le facteur n^2 est là pour normaliser le processus en temps : en effet, une marche aléatoire symétrique avec des pas en $1/n$ parcourt une distance caractéristique $\sqrt{t}/n$ en un temps t (théorème centrale limite), d'où l'idée de rééchelonner le temps par n^2.

Cependant, nous allons considérer un processus asymétrique. Plus précisément, on se donne une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $F : [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$, représentant en quelque sorte une force : les sauts des particules sont favorisés lorsqu'ils se font dans la direction du champ de force F. Ainsi, on pose :

$$r_n(x, x \pm b) := n^2 \pm nF\left(x \pm b/2\right) \cdot b$$

Le facteur n devant la force vient du fait qu'une marche aléatoire biaisée avec un biais F/n parcourt une distance caractéristique Ft/n en un temps t.

En ce qui concerne la condition initiale du processus, nous nous donnons une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $u^0 : [0,1]^d \to]0,1[$, et nous partons de la mesure initiale $\bigotimes_{x \in T_n^d} \mathcal{B}(u_x^0)$ [1]. On note $\mathbb{P}_n$ la probabilité relative au processus de Markov partant de cette mesure initiale.

Maintenant que nous avons introduit le modèle, discutons des résultats obtenus par Jara et Menezes. L'idée est tout d'abord de considérer u la solution de l'EDP parabolique suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - 2\nabla \cdot [u(1-u)F] \\ u_{|t=0} = u^0 \end{cases},$$

puis de comparer la loi de $\eta_t^{(n)}$, que l'on note $\mathbb{P}_t^{(n)}$, à celle de $\nu_t^{(n)} := \bigotimes_{x \in T_n^d} \mathcal{B}(u_x^t)$.

Pour quantifier la proximité de ces deux mesures, nous introduisons l'entropie relative d'une mesure $\mu = f\mathrm{d}\nu$ par rapport à ν :

$$H(\mu, \nu) = H(f, \nu) := \int f \ln(f) \, \mathrm{d}\nu.$$

Posons $H_n(t) = H(\mathbb{P}_t^{(n)}, \nu_t^{(n)})$. Le résultat central de Jara et Menezes dont tous les théorèmes limites découlent est le suivant :

Théorème 1.1. *(Estimation de l'entropie relative)*

On dispose d'une constante $C = C(d, F, u_0)$ telle que pour tout $t \geq 0$:

$$H_n'(t) \leq C\left(H_n(t) + n^{d-2} g_d(n)\right),$$

1. On pourrait aussi commencer le processus d'une mesure "proche" de $\bigotimes_{x \in T_n^d} \mathcal{B}(u_x^0)$: la proximité doit alors être contrôlée par l'entropie relative entre les deux mesures, celle-ci devant être en $o(n^d)$ pour obtenir la loi des grands nombres et en $o(n^{d/2})$ pour obtenir le théorème centrale limite.

$$\text{où } g_d(n) := \begin{cases} n & si\ d = 1 \\ \ln(n) & si\ d = 2 \\ 1 & si\ d \geq 3 \end{cases}$$

Ainsi, par Gronwall, on a :

$$H_n(t) \leq te^{tC}\ n^{d-2} g_d(n).$$

Remarques : Pour deux mesures génériques μ et ν sur le tore T_n^d (qui n'ont rien à voir entre elles), $H(\mu, \nu)$ est de l'ordre de $O(n^d)$. Ainsi, l'estimation précédente semble n'être qu'une faible amélioration de cette borne générale, mais c'est pourtant suffisant pour obtenir un théorème type "loi des grands nombres" (qui nécessite seulement une estimation $H_n = o(n^d)$) et type "central limite" (qui nécessite $H_n = o(n^{d/2})$: on ne pourra donc l'obtenir qu'en dimension $d < 4$).

De l'estimation entropique suit les deux corollaires suivant :

Proposition 1.2. *(Loi des grands nombres)*

Pour toute fonction $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ bornée et $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}_n \left(\left| \frac{1}{n^d} \sum_{x \in T_n^d} f_x(\eta_x^t - u_x^t) \right| > \lambda \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Pour énoncer le théorème centrale limite, on introduit la densité de fluctuations $X_t^{(n)}$ qui est la version centrée et normalisée de $\eta_t^{(n)}$. Plus précisément, on pose :

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{x \in T_n^d} (\eta_t^{(n)}(x) - u_x^t)\ \delta_x,$$

où δ_x est un Dirac en x (on voit $X_t^{(n)}$ comme une distribution). Le fait que :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(1 + |m|)^{2k}} < +\infty$$

pour $k > d/2$ montre que les δ_x, et donc aussi $X_t^{(n)}$, sont dans $H^{-k}(T^d)$ pour $k > d/2$. En fait, nous allons montrer la convergence des lois finidimensionnelles pour la topologie de $H^{-k}(T^d)$ avec $k > d/2 + 1$ (pour une raison de tension que l'on discutera plus tard).

Proposition 1.3. *(Théorème centrale limite)*

On suppose $d < 4$, et soit $s > d/2 + 1$. Alors le processus $X^{(n)}$ converge, au sens de la convergence en loi pour la topologie de $H_{-s}(T^d)$ des lois fini-dimensionnelles, vers le processus X solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} \partial_t X_t = \Delta X_t + 2\ \nabla \cdot [(1-2u_t)X_t F] + \sqrt{2u_t(1-u_t)}\ \nabla \cdot \xi_t \\ X_0 = \sqrt{u(1-u)}\ \xi \end{cases}$$

où ξ est un bruit blanc de T^d et $(\xi_t)_{t\geq 0}$ un bruit blanc vectoriel spatio-temporel de T^d, indépendants l'un de l'autre.

Remarque : L'équation différentielle stochastique vérifiée par la densité de fluctuations est la linéarisation de l'équation différentielle vérifiée par u, à laquelle on a ajouté un bruit blanc conservatif (l'aspect conservatif signifie qu'il s'agit de la divergence d'un bruit blanc, et vient du fait que le nombre de particules du système reste constant au cours du temps).

Notations supplémentaires : Dans toute la suite, on travaille dans une fenêtre de temps fini $[0, T]$. On se donne aussi $\kappa, \varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$, u^t soit κ-lipschitzienne et à valeurs dans $[\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]$ (ils existent car l'EDP parabolique est gentille). On pose aussi pour $x \in T_n^d$:

$$\omega_t^n(x) := \frac{\eta_t^n(x) - u_t(x)}{u_t(x)(1-u_t(x))},$$

quand le contexte le sous-entend, on omettra souvent de noter le n et t.

2 L'estimation entropique

Le but de cette section est d'esquisser la preuve du théorème 1. Celle-ci repose sur deux ingrédients principaux : d'une part l'inégalité de Yau et d'autre part le "main lemma".

Pour mieux rendre compte de la structure de la preuve et de l'enchaînement des prochaines sous-sections, nous commençons par démontrer le théorème en faisant référence aux résultats qui seront vus dans la suite.

Démonstration. D'après l'inégalité de Yau 2.1 (appliqué au processus $\eta_t^{(n)}$ avec pour mesures de référence les $\nu_t^{(n)} = \bigotimes_{x\in T_n^d} \mathcal{B}(u_x^t)$), nous avons :

$$H_n'(t) \leq -\int \Gamma\sqrt{f_t^{(n)}}\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)} + \int \left(L_t^{(n)*}1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\Psi_t^{(n)})\right) f_t^{(n)}\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)},$$

et d'après la section 2.2, nous avons :

$$L_t^{(n)*}1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\Psi_t^{(n)}) = \frac{1}{n^2}\sum_{x\in T_n^d} R_x^{n,t}\omega_x + \sum_{\substack{x\in T_n^d\\ b\in\mathcal{B}_n}} G_{x,b}^{n,t}\ \omega_x\omega_{x+b}.$$

D'une part, d'après le lemme 2.4 :

$$\int \frac{1}{n^2}\sum_{x\in T_n^d} R_x^{n,t}\omega_x\ f_t^{(n)}\mathrm{d}\nu_t^{(n)} \leq C(H_n(t)+n^{d-4}).$$

D'autre part, d'après le "main lemma" 2.5 avec $\delta = 1/2$:

$$\int \sum_{\substack{x\in T_n^d\\ b\in\mathcal{B}_n}} G_{x,b}^{n,t}\ \omega_x\omega_{x+b}\ f_t\mathrm{d}\nu_t \leq \frac{1}{2}n^2\mathcal{D}(\sqrt{f_t^{(n)}},\nu_t^{(n)}) + C\left(H_n(t)+n^{d-2}g_d(n)\right)$$

De plus, pour $n \geq 2||F||_\infty$, on a $r_n(x,y) \geq n^2/2$, donc :

$$\frac{1}{2}n^2\mathcal{D}\left(\sqrt{f_t^{(n)}},\nu_t^{(n)}\right) \leq \int \Gamma\sqrt{f_t^{(n)}}\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)}$$

Comme $n^{d-4} \ll n^{d-2}g_d(n)$, on a bien : $H_n'(t) \leq C(H_n(t)+n^{d-2}g_d(n))$. $\square$

2.1 Inégalité de Yau

Présentons tout d'abord l'inégalité de Yau. Le cadre est le suivant : soit X un processus de Markov à espace d'état fini Ω, de générateur L, et l'on veut estimer l'entropie relative de la loi du processus à l'instant t, que l'on note x_t, à une mesure ν_t qui est a priori choisie pour approcher x_t.

Dans ce qui suit, par "mesure" nous entendrons toujours "mesure de probabilité" et par "mesure de référence" sur Ω nous entendons une mesure qui charge chaque élément de Ω. Soit $(\nu_t)_{t\geq 0}$ une famille de mesures de référence sur Ω, qui soit $\mathcal{C}^1$ en temps.

Soit ν une mesure de référence (qui n'a vraiment aucune importance, elle n'est là que pour fixer des notations), puis Ψ_t la densité de ν_t par rapport à ν et f_t la densité de x_t par rapport à ν_t. On pose :

$$H(t) := H(x_t,\nu_t) = \int_\Omega f_t\ln(f_t)\ \Psi_t\mathrm{d}\nu.$$

Posons L_t^* l'adjoint du générateur L par rapport à ν_t, c'est-à-dire que pour tout $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$:

$$\int_\Omega L_t^* f\ g\ \mathrm{d}\nu_t = \int f\ Lg\ \mathrm{d}\nu_t.$$

Posons également Γ le "carré du champ" associé à L. Formellement il s'agit pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\Gamma f = L(f^2) - 2fLf.$$

Remarquer que si L est sous la forme $Lf(x) = \sum_{y \sim x} r(x,y)(f(y) - f(x))$, alors $\Gamma f(x) = \sum_{y \sim x} r(x,y) \, (f(y) - f(x))^2$ (en particulier on a toujours $\Gamma f \geq 0$).

Proposition 2.1. *(Inégalité de Yau)*

Pour tout $t \geq 0$:

$$H'(t) \leq -\int \Gamma \sqrt{f_t} \, \mathrm{d}\nu_t + \int \left(L_t^* 1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\Psi_t) \right) f_t \, \mathrm{d}\nu_t.$$

Remarque : Le terme $L_t^* 1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\Psi_t)$ est ce qui apparaît dans l'équation rétrograde de Fokker-Planck : ainsi, si on prend ν_t comme la loi du processus X à l'instant t (mais parti éventuellement d'une autre mesure initiale que x_0) alors ce terme vaut 0 (dans ce cas, l'inégalité de Yau nous dit d'ailleurs que H décroît). Ainsi, ce terme mesure la proximité des ν_t avec la loi du processus X.

Démonstration. La preuve de l'inégalité de Yau est très élémentaire : on calcule $H'(t)$ et on ne fait en réalité qu'une seule majoration (qui relève de la concavité de ln). Remarquons d'abord que l'équation rétrograde de Fokker-Planck s'écrit (on a posé L^* l'adjoint de L par rapport à ν) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_t \Psi_t) = L^*(f_t \Psi_t),$$

d'où : $\dfrac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}t} \Psi_t = L^*(f_t \Psi_t) - f_t \dfrac{\mathrm{d}\Psi_t}{\mathrm{d}t}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int (1 + \ln f_t) \frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}t} \Psi_t \, \mathrm{d}\nu + \int f_t \ln(f_t) \frac{\mathrm{d}\Psi_t}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}\nu \\ &= \int (1 + \ln f_t) L^*(f_t \Psi_t) \, \mathrm{d}\nu - \int \frac{\mathrm{d}\Psi_t}{\mathrm{d}t} \, f_t \, \mathrm{d}\nu \\ &= \int L(\ln f_t) f_t \Psi_t \, \mathrm{d}\nu - \int \frac{\mathrm{d}\ln(\Psi_t)}{\mathrm{d}t} \, f_t \, \mathrm{d}\nu_t. \end{aligned}$$

En remarquant que $a(\ln(b) - \ln(a)) \leq 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$ pour tout $a, b > 0$, on a que $f_t L(\ln f_t) \leq 2\sqrt{f_t} L \sqrt{f_t} = L f_t - \Gamma \sqrt{f_t}$. Donc :

$$H'(t) \leq -\int \Gamma \sqrt{f_t} \, \mathrm{d}\nu_t + \int L f_t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\Psi_t) f_t \, \mathrm{d}\nu_t,$$

ce qui est exactement la formule voulue en utilisant la définition de L_t^*. $\square$

2.2 Calcul de $L_t^*1 - \partial_t \ln \Psi_t$

Maintenant que nous avons vu l'inégalité de Yau, on voudrait l'appliquer à notre processus de Markov $x_t = \mathbb{P}_t^{(n)}$, avec comme mesure de référence $\nu_t = \bigotimes_{x \in T_n^d} \mathcal{B}(u_x^t)$.

Pour cela, il faut connaître $J_t := L_t^*1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \Psi_t$. Rappelons que l'on a noté :

$$\omega_x = \frac{\eta_x - u_x}{u_x(1-u_x)}$$

En fait, des calculs élémentaires (mais assez longs) montrent que :

$$J_t := L_t^*1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \Psi_t = \sum_{x \in T_n^d} \omega_x \; (\mathcal{L}_n - \partial_t) u_x + \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} G_{x,b}^{n,t} \; \omega_x \omega_{x+b},$$

où :

$$G_{x,b} := n(u_{x+b} - u_x) F_{x+b/2}(u_x + u_{x+b} - 2u_x u_{x+b}) - n^2 (u_{x+b} - u_x)^2$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_n u)_x := &\sum_{b \in \mathcal{B}_n} n^2 (u_{x+b} + u_{x-b} - 2u_x) \\ &- \sum_{b \in \mathcal{B}_n} n \Big(F_{x+b/2}(u_x + u_{x+b} - 2u_x u_{x+b}) - F_{x-b/2}(u_x + u_{x-b} - 2u_x u_{x-b}) \Big)\end{aligned}$$

En fait, $\mathcal{L}_n$ est une approximation discrète d'ordre 2 de l'opérateur différentiel $\mathcal{L}u := \Delta u - 2\nabla \cdot [u(1-u)F]$ (c'est-à-dire que $n^2 R_x^n := (\mathcal{L}_n u)_x - (\mathcal{L}u)_x$ vérifie une majoration du type $||R^n||_\infty \leq C \; ||u||_{C^4}$). Comme u a été choisi pour vérifier $\partial_t u = \mathcal{L}u$, on a donc :

$$J_t := L_t^*1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \Psi_t = \frac{1}{n^2} \sum_{x \in T_n^d} \omega_x R_x^n + \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} G_{x,b}^{n,t} \omega_x \omega_{x+b}.$$

Et l'on dispose de $C = C(u_0, F)$ tel que $||R||_\infty, ||G||_\infty \leq C$.

2.3 Formule variationnelle de l'entropie

Pour obtenir une équation différentielle sur H à partir de l'inégalité de Yau, nous voulons contrôler $\int J_t f_t \; \mathrm{d}\nu_t$ grâce à $H(t)$, et éventuellement aussi grâce à $\int \Gamma \sqrt{f_t} \; \mathrm{d}\nu_t$. Ceci peut se faire grâce à la formule variationnelle de l'entropie.

Lemme 2.2. *(Formule variationnelle de l'entropie)*

Soit Ω fini, μ une mesure de probabilité sur Ω et f une densité par rapport à μ. Alors :

$$H(f,\mu) := \int f \ln(f) \, \mathrm{d}\mu = \sup_{g:\Omega\to\mathbb{R}} \int fg \, \mathrm{d}\mu - \ln \int e^g \, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Le point clé est de noter que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est la transformée de Legendre de la fonction $x \mapsto e^{x-1}$. Autrement dit, une simple étude variationnelle montre que :

$$x \log x = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \; x\theta - e^{\theta-1}.$$

Il est alors clair que :

$$H(f,\mu) = \sup_{g:\Omega\mapsto\mathbb{R}} \int fg \, \mathrm{d}\mu - \int e^{g-1} \, \mathrm{d}\mu.$$

Ce n'est pas tout à fait la formule voulue : pour l'obtenir, on remarque qu'une simple étude variationnelle montre que si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est fixé, alors :

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \int f \; (g+\lambda) \, \mathrm{d}\mu - \int e^{g+\lambda-1} \, \mathrm{d}\mu = \int fg \, \mathrm{d}\mu - \ln \int e^g \, \mathrm{d}\mu,$$

ce qui conclut. □

Le corollaire de cette formule utile en pratique est le suivant :

Corollaire 2.3. *Avec les notations précédentes, pour tout $g : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, on a :*

$$\int gf \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\gamma} \left(H(f,\mu) + \ln \int e^{\gamma g} \, \mathrm{d}\mu \right).$$

En particulier, pour tout $A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}_{f\mathrm{d}\mu}(A) \leq \frac{H(f,\mu) + \ln(2)}{\ln(1/\mathbb{P}_\mu(A))}.$$

Cela signifie que si l'on dispose d'inégalités de concentration exponentielles pour g, alors on peut contrôler efficacement $\int fg \, \mathrm{d}\mu$ grâce à $H(f,\mu)$. Pour établir des inégalités de concentration exponentielles, un outil très efficace est de manipuler des variables sous-gaussiennes [2] et d'utiliser des propriétés d'indépendances.

2. Une variable aléatoire réelle X est dite σ^2-sous-gaussienne si $\mathbb{E}[e^{\gamma X}] \leq \exp(\sigma^2\gamma^2/2)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$. Rappelons deux propriétés essentielles : d'une part si X est centrée et à valeurs dans un intervalle $[a,b]$ alors X est $(b-a)^2/4$-sous-gaussienne (inégalité de Hoeffding) ; d'autre part, si les X_k sont des variables aléatoires indépendantes et σ_k^2-sous-gaussiennes, alors $\sum_k X_k$ est $\sum_k \sigma_k^2$-sous-gaussienne.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour contrôler le terme $\frac{1}{n^2}\sum_{x\in T_n^d} R_x^n\omega_x$ qui apparaît dans l'expression de J_t. En effet, nous avons :

Lemme 2.4. *(Contrôle entropique simple)*

On dispose d'une constante $C(u_0) > 0$ telle que pour toutes $A : T_n^d \to \mathbb{R}$ et densité f par rapport à $\nu_t^{(n)}$:

$$\int \sum_{x\in T_n^d} A_x\omega_x\ f\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)} \le C\left(H(f,\nu_t^{(n)}) + ||A||_2^2\right) \le C\left(H(f,\nu_t^{(n)}) + ||A||_\infty^2 n^d\right).$$

Démonstration. D'après le corollaire précédent, on a pour tout $\gamma > 0$:

$$\int \sum_{x\in T_n^d} A_x\omega_x\ f\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)} \le \frac{1}{\gamma}\left(H(f,\nu_t^{(n)}) + \ln \int \exp\left(\gamma \sum_{x\in T_n^d} A_x\omega_x\right)\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)}\right),$$

puis en utilisant l'indépendance des ω_x sous $\nu_t^{(n)}$ (rappelons que c'est une mesure produit) :

$$\int \sum_{x\in T_n^d} A_x\omega_x\ f\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)} \le \frac{1}{\gamma}H(t) + \frac{1}{\gamma}\sum_{x\in T_n^d} \ln \int \exp\left(\gamma A_x\omega_x\right)\ \mathrm{d}\nu_t.$$

Or, les ω_x sont centrés sous $\nu_t^{(n)}$ et bornés par $2\varepsilon_0^{-1}$, donc sont $C(u_0)$-sous gaussiens par l'inégalité de Hoeffding. Ainsi, on a :

$$\int \frac{1}{n^2}\sum_{x\in T_n^d} R_x^n\omega_x\ f_t\ \mathrm{d}\nu_t \le \left(\frac{H(t)}{\gamma} + \frac{C^2}{2}\ \gamma\ ||A||_2^2\right),$$

il suffit de prendre $\gamma = 1$ pour conclure. □

On déduit immédiatement de ce lemme que :

$$\int \frac{1}{n^2}\sum_{x\in T_n^d} R_x^{n,t}\omega_x\ f_t^{(n)}\ \mathrm{d}\nu_t^{(n)} \le C(H_n(t) + n^{d-4}).$$

C'est exactement ce type de contrôle qu'il nous faut (s'il n'y avait que ce terme dans J_t, on aurait un contrôle de $H_n(t)$ en $O(n^{d-4})$). Mais si on majore de la même manière le terme $\sum G_x^{n,t}\omega_x\omega_{x+b}$, on obtient une bien plus mauvaise majoration :

$$\int \sum_{\substack{x\in T_n^d\\ b\in\mathcal{B}_n}} G_{x,b}\omega_x\omega_{x+b}\ f_t\ \mathrm{d}\nu_t \le C(H(t) + n^d),$$

d'où un contrôle de $H(t)$ en $O(n^d)$ (ce qui n'apporte vraiment rien). Pour contrôler ce terme, il va falloir raffiner les inégalités entropiques, en remplaçant ω_x par des moyennes de ω sur des volumes mésoscopiques : c'est le but du "main lemma".

2.4 Main lemma

On se donne $G : T_n^d \times \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}$ (dont on contrôle la norme $||G||_\infty$), et $u : T_n^d \to [\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]$ κ-lipschitzien. Rappelons que dans l'expression $L_t^* 1 - \partial_t \log \Psi_t$ se trouve un terme de la forme :

$$V(G) := \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} G_{x,b}\ \omega_x \omega_{x+b}.$$

Le but du "main lemma" est justement de contrôler efficacement les quantités de la forme :

$$\int V(G)\ f \mathrm{d}\mu,$$

où $\mu := \bigotimes_{x \in T_n^d} \mathcal{B}(u_x)$ et f une densité par rapport à μ. Pour contrôler cette intégrale, nous allons nous servir évidemment de $H(f,\mu)$ mais aussi de $\displaystyle\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\mu$.

Plutôt que de contrôler directement avec $\displaystyle\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\mu$, nous contrôlons avec la forme de Dirichlet suivante :

$$\mathcal{D}\left(\sqrt{f}, \mu\right) = \int \sum_{x \sim y} \left(\sqrt{f}(\eta^{x,y}) - \sqrt{f}(\eta)\right)^2\ \mathrm{d}\mu.$$

Remarquer que dans le cas de notre processus de Markov, on a pour n suffisamment grand ($n \geq 2||F||_\infty$ de sorte que $r_n \geq n^2/2$) :

$$n^2 \mathcal{D}\left(\sqrt{f}, \mu\right) \leq 2 \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\mu.$$

Proposition 2.5. *(Main lemma)*

On dispose d'une constante $C = C(\varepsilon_0, \kappa, ||G||_\infty) = C(\varepsilon_0, \kappa)\left(||G||_\infty + ||G||_\infty^2\right)$ *telle pour tout* $\delta > 0$*, on ait :*

$$\int V(G) f \mathrm{d}\mu \leq \delta n^2 \mathcal{D}(\sqrt{f}, \mu) + \frac{C}{\delta}\left(H(f,\mu) + n^{d-2} g_d(n)\right).$$

Remarque : Le "main lemma" est un résultat complètement indépendant de notre processus de Markov (il n'y a pas d'évolution temporelle).

Démonstration. La preuve complète du "main lemma" est assez longue et fastidieuse, nous nous contentons d'en esquisser la preuve. L'idée principale est de remplacer les ω_x dans l'expression ci-dessus par des versions moyennées sur des échelles mésoscopiques de ω, et d'estimer l'erreur faite par ce remplacement grâce à la forme de Dirichlet.

Soit $1 \leq \ell \leq n$ un entier représentant la taille de la boîte sur laquelle nous allons moyenner ω : ℓ sera amené à dépendre de n (a priori : $1 \ll \ell \ll n$). Notons $\Lambda_\ell = \{0, 1/n, ..., (\ell-1)/n\}^d \subset T_n^d$ la boîte élémentaire de longueur ℓ/n, puis $p_\ell(z) = \frac{1}{\ell^d} \mathbf{1}_{z \in \Lambda_\ell}$ la mesure uniforme sur Λ_ℓ, et $q_\ell = p_\ell * p_\ell$ la convolution de p_ℓ avec elle-même.

Posons alors pour tout $x \in T_n^d$ et $b \in \mathcal{B}_n$ les versions moyennées de ω_x et $V(G)$ suivantes :

$$\omega_x^\ell := \sum_{z \in T_n^d} q_\ell(z)\, \omega_{x+z}, \quad \overset{\rightarrow\ell}{\omega}_x := \sum_{z \in T_n^d} p_\ell(z)\, \omega_{x+z}, \quad \overset{\leftarrow\ell}{\omega}_{x,b} := \sum_{z \in T_n^d} p_\ell(z)\, G_{x-z,b}\, \omega_{x-z},$$

$$\text{puis : } V^\ell(G) := \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} G_{x,b}\ \omega_x \omega_{x+b}^\ell = \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} \overset{\leftarrow\ell}{\omega}_{x,b}\ \overset{\rightarrow\ell}{\omega}_{x+b}.$$

On écrit alors :

$$\int V(G)\ f \mathrm{d}\mu = \int V^\ell(G)\ f \mathrm{d}\mu + \int V(G) - V^\ell(G)\ f \mathrm{d}\mu,$$

et on contrôle la première intégrale par la formule variationnelle de l'entropie et des inégalités sous-gaussiennes, tandis que l'on contrôle la seconde intégrale par la forme de Dirichlet.

Intéressons-nous d'abord au premier terme. L'avantage de considérer des moyennes de ω est le suivant : si les $(\xi_z)_{z \in \Lambda_\ell}$ sont des variables aléatoires iid σ^2-sous-gaussiennes, alors $\xi^\ell = \frac{1}{\ell^d} \sum_{z \in \Lambda_\ell} \xi_z$ est σ^2/ℓ^d-sous-gaussienne : remplacer ω_x par des $\overset{\leftrightarrow\ell}{\omega}_x$ permet donc d'obtenir de bien meilleures inégalités de concentration. Mais les $\overset{\leftrightarrow\ell}{\omega}_x$ n'étant plus indépendants entre eux, on contrôle mal la transformée de Laplace de leur somme, ce qui est inadapté pour utiliser directement 2.3. Il faut en fait utiliser judicieusement le fait que les $\overset{\leftrightarrow\ell}{\omega}_x$ sont indépendants lorsque l'on ne les regarde que pour des x éloignés à plus de 2ℓ chacun.

Plus précisément, on introduit la notion de L-indépendance : une famille $(\xi_x)_{x \in T_n^d}$ est dite L-indépendante si pour tout partie $A \subset T_n^d$ L-parcimonieuse (ie. $\forall x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow |y - x| \geq L/n$ sur le tore), les variables aléatoires $(\xi_x)_{x \in A}$ sont indépendantes. Ainsi, dans notre situation, les variables aléatoires $\overset{\leftarrow\ell}{\omega}_{x,b} \overset{\rightarrow\ell}{\omega}_x$ sont 2ℓ-indépendantes. On a la version suivante du lemme 2.3, qui permet de faire comme si les variables aléatoires L-indépendantes étaient indépendantes, au prix d'une constante $(d+1)L^d$:

Lemme 2.6. *Soit* $(\xi_x)_{x\in T_n^d}$ *des variables aléatoires* L*-indépendantes pour la mesure* ν*. Alors pour tout* $\gamma > 0$ *:*

$$\int \sum_{x\in T_n^d} \xi_x \; f \; \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\gamma}\left(2^d L^d H(f,\mu) + \sum_{x\in T_n^d} \ln \int e^{\gamma \xi_x} \; \mathrm{d}\mu\right).$$

Démonstration. Bien que le résultat puisse sembler fort, la preuve est très simpliste. En fait, on peut construire une partition de T_n^d en $2^d L^d$ parties L-parcimonieuses, qui se fait grossièrement en rassemblant dans une même partie les points du tore avec le même reste dans la division euclidienne de leurs coordonnées par L, d'où le L^d (mais il reste une subtilité à gérer : deux points avec le même reste peuvent quand même être à distance $< L$ sur le tore si ils sont proches de deux faces opposés du cube $[0,1]^d$: d'où le facteur 2^d supplémentaire). Notons $(A_k)_{k\in I}$ la partition précédente, alors on écrit :

$$\sum_{x\in T_n^d} \xi_x = \sum_{k\in I} \sum_{x\in A_k} \xi_x.$$

Chacune des sommes $\sum_{x\in A_k} \xi_x$ se traite très facilement à partir du lemme 2.3 en utilisant la propriété de L-indépendance; puis en sommant sur $k \in I$, le résultat voulu suit. $\square$

Ainsi, on obtient :

$$\int \sum_{\substack{x\in T_n^d \\ b\in\mathcal{B}_n}} \overset{\leftarrow \ell}{\omega}_{x,b} \; \overset{\rightarrow \ell}{\omega}_{x+b} \; f \; \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\gamma}\left(d 4^d \ell^d H(f,\mu) + \sum_{\substack{x\in T_n^d \\ b\in\mathcal{B}_n}} \ln \int e^{\gamma \; \overset{\leftarrow \ell}{\omega}_{x,b} \; \overset{\rightarrow \ell}{\omega}_{x+b}} \; \mathrm{d}\mu\right).$$

Enfin, nous aurons besoin du petit lemme suivant :

Lemme 2.7. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires respectivement* σ_1^2 *et* σ_2^2 *sous-gaussiennes. Alors pour* $0 \leq \gamma \leq (4\sigma_1\sigma_2)^{-1}$*, on a :*

$$\mathbb{E}[e^{\gamma XY}] \leq 3.$$

Comme les $\overset{\rightarrow \ell}{\omega}_{x+b}$ sont $C(\varepsilon_0)/\ell^d$-sous-gaussiens, tandis que les $\overset{\leftarrow \ell}{\omega}_{x,b}$ sont $||G||_\infty^2 C(\varepsilon_0)/\ell^d$-sous-gaussiens, on en déduit que pour $\gamma = C^{-1}||G||_\infty^{-1}\ell^d$:

$$\int V^\ell(G) \; f \; \mathrm{d}\mu \leq C(d,\varepsilon_0) \; ||G||_\infty \left(H(f,\mu) + \frac{n^d}{\ell^d}\right)$$

Ainsi, plus ℓ est grand, plus cette estimation est bonne. Évidemment, ce sera l'inverse pour la seconde intégrale, et il faudra choisir ℓ de sorte à équilibrer les deux majorations.

Pour estimer la seconde intégrale, on écrit d'abord $V(G) - V^\ell(G)$ sous la forme suivante :

$$V(G) - V^\ell(G) = \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} G_{x,b}\ \omega_x(\omega_{x+b} - \omega_{x+b}^\ell),$$

mais on cherche à faire apparaître des facteurs $\omega_{y+z+b'} - \omega_{y+z}$ plutôt que $\omega_y - \omega_y^\ell$, car cela nous permettra d'exploiter la forme de Dirichlet. Pour cela, on construit ce que Jara et Menezes appellent un flot entre q_ℓ et δ_0 : il s'agit d'une fonction $\phi^\ell : T_n^d \times \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $z \in T_n^d$:

$$\delta_0(z) - q_\ell(z) = \sum_{b \in \mathcal{B}_n} \phi^\ell(z,b) - \phi^\ell(z-b,b),$$

de sorte que l'on ait pour tout fonction $g : T_n^d \to \mathbb{R}$:

$$g(0) - \sum_{z \in T_n^d} g(z) q_\ell(z) = \sum_{\substack{z \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} \phi^\ell(z,b)\ (g(z+b) - g(z)),$$

d'où en particulier : $\omega_y - \omega_y^\ell = \sum_{\substack{z \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} \phi^\ell(z,b)\ (\omega_{y+z+b} - \omega_{y+z})$.

En construisant correctement ϕ^ℓ, on peut faire en sorte que ϕ^ℓ soit à support dans $\Lambda_{2\ell}$, ainsi que :

$$\sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} |\phi^\ell(x,b)| \leq C(d)\ \ell, \qquad \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} \phi^\ell(x,b)^2 \leq C(d)\ g_d(\ell).$$

Remarque : C'est ici qu'apparaît le facteur $g_d(\ell)$, et c'est exactement lui qui donnera à la fin le facteur $g_d(n)$.

En utilisant le flot et après changement de variables, on obtient :

$$V(G) - V^\ell(G) = \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b' \in \mathcal{B}_n}} \overleftarrow{h}^{\ell}_{x,b'}(G)\, (\omega_{x+b'} - \omega_x)\,,$$

où on a posé : $\overleftarrow{h}^{\ell}_{x,b'}(G) = \sum_{\substack{z \in \Lambda_\ell \\ b \in \mathcal{B}_n}} \phi^\ell(z,b') G_{x-b-z,b}\ \omega_{x-b-z}$.

Pour tenir compte du facteur $(\omega_{x+b'} - \omega_x)$ devant la fonction h, on opère une sorte d'intégration par parties :

Lemme 2.8. *(Intégration par parties)*

Soit x, y fixés dans T_n^d, puis $h : \{0,1\}^{T_n^d} \to \mathbb{R}$ telle que $h(\eta^{x,y}) = h(\eta)$ pour tout $\eta \in \{0,1\}^{T_n^d}$ (typiquement telle que h ne dépende ni de η_x ni de η_y). Alors pour tout $\delta > 0$:

$$\int h(\omega_y - \omega_x) f \mathrm{d}\mu \leq \delta n^2 \int \left(\sqrt{f}(\eta^{x,y}) - \sqrt{f}(\eta)\right)^2 \, \mathrm{d}\mu + \frac{C(\varepsilon_0)}{\delta n^2} \int h^2 \, f \mathrm{d}\mu$$
$$- (u_y - u_x) \int h \omega_x \omega_y \, f \mathrm{d}\mu.$$

En appliquant le lemme avec $\overleftarrow{h}^{\ell}_{x,b'}(G)$, x et $y = x + b'$ puis en sommant sur x et b', on obtient alors :

$$\int \left(V(G) - V^{\ell}(G)\right) f \mathrm{d}\mu \leq \frac{\delta n^2}{2} \mathcal{D}(\sqrt{f}, \mu) + \int \left[\frac{C(\varepsilon_0)}{\delta n^2} W^{\ell}(G) + \frac{1}{n} Z^{\ell}(G)\right] f \mathrm{d}\mu,$$

où :

$$W^{\ell}(G) = \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b' \in \mathcal{B}_n}} \overleftarrow{h}^{\ell}_{x,b'}(G)^2, \quad Z^{\ell}(G) = \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b' \in \mathcal{B}_n}} n(u_{x+b'} - u_x) \overleftarrow{h}^{\ell}_{x,b'}(G) \, \omega_x \omega_{x+b'},$$

L'avantage d'avoir réalisé cette intégration par parties est qu'en se permettant de contrôler avec $n^2 \mathcal{D}(\sqrt{f}, \mu)$, on a pu gagné un facteur $1/n^2$ sur W^{ℓ}.

En utilisant à nouveau les lemmes 2.6 et 2.7 (les $\overleftarrow{h}^{\ell}_{x,b'}(G)$ sont $C(\varepsilon_0)||G||_{\infty}^2 g_d(\ell)$ sous-gaussiens et $(2\ell+1)$-indépendantes), on obtient qu'avec $\gamma = (C(\varepsilon_0)||G||_{\infty}^2 g_d(\ell))^{-1}$:

$$\frac{1}{n^2} \int W^{\ell}(G) \, f \mathrm{d}\mu \leq \frac{C(\varepsilon_0)||G||_{\infty}^2 \ell^d g_d(\ell)}{n^2} \left(H(f, \mu) + \frac{n^d}{\ell^d}\right).$$

Pour rappel, nous avions obtenu :

$$\int V^{\ell}(G) \, f \mathrm{d}\mu \leq C(\varepsilon_0)||G||_{\infty} \left(H(f, \mu) + \frac{n^d}{\ell^d}\right).$$

Pour équilibrer les deux termes, il faut prendre ℓ de sorte que $\ell^d g_d(\ell) \sim c n^2$; on prend donc :

$$\ell_n \underset{n \to \infty}{\sim} \begin{cases} n/8 & \text{si } d = 1 \\ n/\ln(n)^{1/2} & \text{si } d = 2 \\ n^{2/d} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

Le facteur $1/8$ en dimension 1 est là pour assurer que les boîtes sur lesquelles on moyenne ne se chevauchent pas. On obtient alors :

$$\int V^{\ell}(G) \, f \mathrm{d}\mu, \int \frac{1}{n^2} W^{\ell}(G) \, f \mathrm{d}\mu \leq C(\varepsilon_0)(||G||_{\infty} + ||G||_{\infty}^2) \left(H(f, \mu) + n^{d-2} g_d(n)\right).$$

Sans le terme $Z^\ell(G)$, la preuve serait finie ici. Cependant, celui-ci est plus délicat à majorer que les précédents (une majoration telle que précédemment mènerait à une majoration en $H + O(n^d)$, ce qui est très mauvais). En fait, on remarque que $Z^\ell(G)$ a la même structure que $V(G)$, mais auquel on a remplacé $G_x\omega_x$ par $n(u_{x+b'} - u_x)\overleftarrow{h}^{\ell}_{x,b'}(G)$. Il s'agit alors de répéter le schéma de la preuve : on introduit une version moyenné de $Z^\ell(G)$, que l'on note $\tilde{V}^{\ell'}(G)$, puis on fait une autre intégration par parties pour obtenir un autre terme $\tilde{W}^{\ell'}(G)$ et $\tilde{Z}^{\ell'}(G)$ (avec ℓ' a priori une autre longueur mésoscopique, mais en fait on peut prendre $\ell' = \ell$). Du fait que dans la première intégration par parties, on ait gagné un facteur $1/n$ sur $Z^\ell(G)$, les termes liés aux $\tilde{V}^\ell(G)$, $\tilde{W}^\ell(G)$ et $\tilde{Z}^\ell(G)$ vont être d'ordre inférieurs à ceux relatifs à $V^\ell(G)$, $W^\ell(G)$, $Z^\ell(G)$. Finalement, on obtient bien :

$$\int V(G)\, f\mathrm{d}\mu \leq \delta n^2 \mathcal{D}(\sqrt{d}, \mu) + \frac{C(\varepsilon_0, \kappa)}{\delta}(||G||_\infty + ||G||^2_\infty)\left(H(f,\mu) + n^{d-2}g_d(n)\right).$$

□

En fait, la preuve ci-dessus montre un résultat légèrement plus subtil que le "main lemma", qui sera très utile pour montrer le principe de Gibbs-Boltzmann. C'est le suivant :

Proposition 2.9. *(Main lemma, V2)*

On dispose une constante $C = C(\varepsilon_0, \kappa, ||G||_\infty)$ (la même que dans le "main lemma") et une fonction $U(G) : \{0,1\}^{T^d_n} \to \mathbb{R}$, qui ne dépend que de G et u (pas de la densité f), telles que pour tout $\delta > 0$, on ait :

$$\int \sum_{\substack{x \in T^d_n \\ b \in \mathcal{B}_n}} G_{x,b}\omega_x\omega_{x+b}\; f\mathrm{d}\mu \leq \delta n^2 \mathcal{D}(\sqrt{f}, \mu) + \frac{1}{\delta}\int U(G) f\mathrm{d}\mu,$$

ainsi que : $\int U(G) f\mathrm{d}\mu \leq C\left(H(f,\mu) + n^{d-2}g_d(n)\right)$.

Démonstration. Il s'agit tout simplement de prendre $U(G)$ qui est la somme des termes liés à $V^\ell(G)$, $W^\ell(G)$, $\tilde{V}^\ell(G)$, $\tilde{W}^\ell(G)$ et $\tilde{Z}^\ell(G)$. □

3 Les théorèmes limites

3.1 La loi des grands nombres

Une fois obtenu l'estimation 1.1 de l'entropie relative de $\mathbb{P}^{(n)}_t$ par rapport à $\nu_t := \bigotimes_{x\in T^d_n} \mathcal{B}(u_x)$, il est très facile d'obtenir une loi des grands nombres 1.2.

Démonstration. Soit $f : T_n^d \to \mathbb{R}$ bornée et $\lambda > 0$, et on veut estimer :

$$\mathbb{P}_n \left(\left| \frac{1}{n^d} \sum_{x \in T_n^d} f_x(\eta_x^t - u_x^t) \right| > \lambda \right).$$

L'idée est de se ramener à estimer la probabilité de cet évènement sous la mesure $\nu_t^{(n)}$ (plutôt que sous $\mathbb{P}_t^{(n)}$). Ceci peut se faire avec le corollaire 2.3 ; en effet, on a :

$$\mathbb{P}_n \left(\left| \frac{1}{n^d} \sum_{x \in T_n^d} f_x(\eta_x^t - u_x^t) \right| > \lambda \right) \leq \frac{H_n(t) + \ln(2)}{- \ln \mathbb{P}_{\nu_t^n} \left(\left| \frac{1}{n^d} \sum_{x \in T_n^d} f_x(\eta_x^t - u_x^t) \right| > \lambda \right)}.$$

Or, par l'inégalité de Markov exponentielle et des inégalités sous-gaussiennes, on a :

$$\mathbb{P}_{\nu_t^n} \left(\left| \frac{1}{n^d} \sum_{x \in T_n^d} f_x(\eta_x^t - u_x^t) \right| > \lambda \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{2 \ n^d \lambda^2}{||f||_\infty^2} \right).$$

Finalement :

$$\mathbb{P}_n \left(\left| \frac{1}{n^d} \sum_{x \in T_n^d} f_x(\eta_x^t - u_x^t) \right| > \lambda \right) \leq \frac{H_n(t) + \ln(2)}{C(||f||_\infty, \lambda) n^d},$$

et comme d'après 1.1, $H_n(t) = O\left(n^{d-2} g_d(n)\right) \ll n^d$, on en déduit que cette probabilité tend vers 0 quand $n \to \infty$. □

3.2 Le principe de Boltzmann-Gibbs

Soit $K : [0, T] \times T_n^d \to \mathbb{R}$ une fonction dont on contrôle $||K||_\infty$, on s'intéresse à estimer sous $\mathbb{P}_n$ pour $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{x \in T_n^d} K_x \omega_x \omega_{x+b} \, \mathrm{d}t.$$

Une quantité de cette forme apparaîtra lors de la preuve du théorème centrale limite, et correspond en quelque sorte à l'influence de la non-linéarité de l'équation hydrodynamique sur les fluctuations.

Bien qu'à un temps fixé t, $\sum_{x \in T_n^d} K_x \omega_x \omega_{x+b}$ soit d'ordre $n^{d/2}$ sous ν_t (et sans doute aussi sous $\mathbb{P}_n$), l'intégrale sur $[t_1, t_2]$ est en fait d'ordre $o(n^{d/2})$: c'est d'ailleurs essentiel pour montrer notre théorème central limite, sans quoi il faudrait a priori rajouter un terme non linéaire à l'équation différentielle stochastique vérifiée par les fluctuations (du type $F \cdot \nabla(X^2)$), ce qui rendrait l'étude beaucoup plus difficile !

Théorème 3.1. *(Principe de Boltzmann-Gibbs)*

On suppose $d < 4$. Soit $K^n : [0,T] \times T_n^d \to \mathbb{R}$ uniformément bornée en n. Alors pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ et $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}_n \left(\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{x \in T_n^d} K_x^n \omega_x \omega_{x+b} \right| > \lambda \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

et ce uniformément sur l'ensemble $\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} ||K^n||_\infty \leq C \right\}$ pour tout $C > 0$.

Remarque : En fait, la preuve que l'on donne montre le résultat suivant : pour toute dimension d, sous les hypothèses du théorème précédent, on dispose de $C = C(||K||_\infty, u^0, F, T)$ telle que pour tout $\lambda > 0$:

$$\limsup_{n\to+\infty} \ \mathbb{P}_n \left(\left| \int_{t_1}^{t_2} \sum_{x \in T_n^d} K_x^n \omega_x \omega_{x+b} \right| > \lambda n^{d-2} g_d(n) \right) \leq C/\lambda,$$

donc informellement, le terme $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sum_{x \in T_n^d} K_x^n \omega_x \omega_{x+b}$ est au plus d'ordre $n^{d-2} g_d(n)$. L'hypothèse $d < 4$ est exactement celle où $n^{d-2} g_d(n) \ll n^{d/2}$.

Pour contrôler efficacement ce terme, Jara et Menezes se servent de l'estimation suivante :

Lemme 3.2. *(Estimée variationnelle des moments exponentiels d'une observable d'un processus de Markov)*

On reprend les notations de l'inégalité de Yau 2.1, et on se donne $V : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On commence la chaîne de Markov à ν_0 (ie. $x_0 = \nu_0$), alors :

$$\begin{aligned} &\ln\ \mathbb{E}^{\nu_0} \left[\exp \left(\int_0^T V_t(X_t)\ \mathrm{d}t \right) \right] \\ &\leq \int_0^T \mathrm{d}t\ \sup_f \left[-\frac{1}{2} \int \Gamma \sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu_t + \int V_t\ f \mathrm{d}\nu_t + \frac{1}{2} \int \left(L_t^* 1 - \partial_t \log \Psi_t \right)\ f \mathrm{d}\nu_t \right], \end{aligned}$$

où le supremum porte sur toutes les densités f par rapport à ν_t.

Démonstration. Donnons l'idée de la preuve. Il d'agit d'utiliser la formule de Feymann-Kac suivante : pour $t \in [0,T]$ et $x \in \Omega$, on pose

$$g_t(x) = \mathbb{E}^x \left[\exp \left(\int_t^T V_s(X_{s-t})\ \mathrm{d}s \right) \right],$$

alors g satisfait l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \partial_t g_t = -Lg_t - V_t \cdot g_t \\ g_T = 1 \end{cases}$$

On veut contrôler $\int g_0 \mathrm{d}\nu_0$: on fait alors une estimation d'énergie $\mathbb{L}^2$ pour contrôler $\int g_t^2 \mathrm{d}\nu_t$, ce qui permet d'obtenir la majoration souhaitée. $\square$

Démontrons maintenant le principe de Boltzmann-Gibbs :

Démonstration. Notons $V(K) := \sum_{x \in T_n^d} K_x \omega_x \omega_{x+b}$. Tout d'abord, il est clair, quitte à faire le même raisonnement avec $-K$, qu'il suffit de montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\int_{t_1}^{t_2} V(K)\ \mathrm{d}t > \lambda n^{d/2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

L'idée astucieuse est de ne pas appliquer le lemme 3.2 directement avec $V(K)$, mais à $V(K) - S(K)$ avec $S(K) : [0,T] \times \{0,1\}^{T_n^d} \to \mathbb{R}$ une fonction auxiliaire que nous allons préciser dans quelques lignes. Ainsi, d'après l'inégalité de Markov exponentielle suivie du lemme 3.2 :

$$\begin{aligned}
&\ln \mathbb{P}_n\left(\int_{t_1}^{t_2} V(K) - S(K)\ \mathrm{d}t > \lambda n^{d/2}\right) \\
&\le -2\lambda n^{d/2} \ + \ln \mathbb{E}_n\left[\exp\left(2\int_{t_1}^{t_2} V(K) - S(K)\ \mathrm{d}t\right)\right] \\
&\le -2\lambda n^{d/2} + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \sup_f \Big\{ -\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu_t + \int 2(V(K) - S(K))\ f\mathrm{d}\nu_t \\
&\qquad\qquad + \int (L_t^* 1 - \partial_t \ln \Psi_t)\ f\mathrm{d}\nu_t \Big\}.
\end{aligned}$$

. Or, d'après la section 2.2 :

$$L_t^* 1 - \partial_t \ln \Psi_t = \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{x\in T_n^d} R_x^n \omega_x}_{=:\mathcal{R}_n} + \underbrace{\sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} G_{x,b}\omega_x\omega_{x+b}}_{=:V(G)}.$$

D'après la seconde version du "main lemma" 2.9 (et en utilisant le fait que pour n suffisamment grand, on ait $n^2\mathcal{D}(\cdot) \le 2\ \Gamma(\cdot)$), on dispose de fonctions $U(G), U(K) : [0,T] \times \{0,1\}^{T_n^d} \to \mathbb{R}$ dépendants uniquement de K et u^0 et de

$C = C(||K||_\infty, u^0)$ telles que pour toute densité f par rapport à ν_t et $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
&\int V(G)\ f \mathrm{d}\nu_t \leq \delta \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu_t + \frac{1}{\delta}\ \int U(G)\ f \mathrm{d}\nu_t \\
&\text{et } \int U(G)\ f \mathrm{d}\nu_t \leq C\left(H(f,\nu_t) + n^{d-2} g_d(n)\right) \\
&\int 2V(K)\ f \mathrm{d}\nu_t \leq \delta \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu_t + \frac{1}{\delta}\ \int U(K)\ f \mathrm{d}\nu_t \\
&\text{et } \int U(K)\ f \mathrm{d}\nu_t \leq C\left(H(f,\nu_t) + n^{d-2} g_d(n)\right)
\end{aligned}$$

En prenant $\delta = 1/2$, on a donc :

$$\begin{aligned}
&\ln \mathbb{P}_n\left(\int_{t_1}^{t_2} V(K) - S(K)\ \mathrm{d}t > \lambda n^{d/2}\right) \\
&\leq -2\lambda n^{d/2} + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \sup_f \left\{\int (\mathcal{R}_n + 2U(G) + 2U(K) - 2S(K))\ f\mathrm{d}\nu_t\right\}.
\end{aligned}$$

On prend alors $S(K) := \dfrac{1}{2}\mathcal{R}_n + U(G) + U(K)$, de sorte que :

$$\mathbb{P}_n\left(\int_{t_1}^{t_2} V(K) - S(K)\ \mathrm{d}t > \lambda n^{d/2}\right) \leq \exp(-\gamma\lambda n^{d/2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Montrons maintenant que :

$$\mathbb{P}_n\left(\int_{t_1}^{t_2} S(K)\ \mathrm{d}t > \lambda n^{d/2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Or :

$$\mathbb{P}_n\left(\int_{t_1}^{t_2} S(K)\ \mathrm{d}t > \lambda n^{d/2}\right) \leq \frac{1}{\lambda n^{d/2}} \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}_n[S(K)]\ \mathrm{d}t,$$

mais :

$$E_{\eta_t^{(n)}}[S(K)] = \int \left(\frac{1}{2}\mathcal{R}_n + U(G) + U(K)\right)\ f_t \mathrm{d}\nu_t$$

Le premier terme a déjà été estimé dans le lemme 2.4, et les deux autres termes sont estimés par la définition de $U(G)$ et $U(K)$ et le fait que d'après le théorème 1.1, $H(\mathbb{P}_t^{(n)}, \nu_t) \leq C n^{d-2} g_d(n)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}_n\left(\int_{t_1}^{t_2} S(K)\ \mathrm{d}t > \lambda n^{d/2}\right) \leq C|t_2 - t_1| \frac{n^{d-2} g_d(n)}{n^{d/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{ car } d < 4.$$

□

3.3 Le théorème central limite

Rappelons que l'on a défini $X_t^{(n)}$ par :

$$X_t^{(n)} = \sum_{x \in T_n^d} \left(\eta_t^{(n)}(x) - u_t(x) \right) \delta_x,$$

que l'on voit comme un élément de $H^{-k}(T^d)$ pour $k > d/2$.

Soit $\tau \in [0, T]$ et $\phi \in H_k(T^d)$, puis $\varphi : [0, \tau] \to H^k(T^d)$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi_\tau = \phi$: le choix de φ en fonction de ϕ sera expliquée après. D'après la formule de Dynkin appliquée au processus de Markov sur $\{0,1\}^{T_n^d} \times [0, \tau]$ engendré par le générateur $L_n + \partial_t$, on obtient que :

$$M_t^n(\varphi) := X_t^{(n)}(\varphi_t) - X_0^{(n)}(\varphi_0) - \int_0^t (L_n + \partial_s) X_s^{(n)}(\varphi_s) \, \mathrm{d}s$$

est une martingale. Sa variation quadratique est par ailleurs donnée par :

$$\int_0^t \Gamma X_s^{(n)}(\varphi_s) \, \mathrm{d}s$$

Un calcul simple mais un peu long montre que :

$$\int_0^t (L_n + \partial_s) X_s^{(n)}(\varphi_s) \, \mathrm{d}s = \mathcal{R}_{t,n}^{(0)}(\varphi) + \mathcal{R}_{t,n}^{(1)}(\varphi) + \mathcal{R}_{t,n}^{(2)}(\varphi),$$

où :

$$\mathcal{R}_{t,n}^{(0)}(\varphi) = \int_0^t \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{x \in T_n^d} \varphi_x \left(\mathcal{L}_n - \partial_s \right) u_x^s \, \mathrm{d}s,$$

$$\mathcal{R}_{t,n}^{(1)}(\varphi) = \int_0^t X_s^n \Big(\left(\partial_s + \Lambda_s^n \right) \varphi \Big) \, \mathrm{d}s,$$

$$\mathcal{R}_{t,n}^{(2)}(\varphi) = \int_0^t \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{\substack{x \in T_n^d \\ b \in \mathcal{B}_n}} K_{s,b}^n(\varphi_s)_x \, \omega_x \omega_{x+b} \, \mathrm{d}s,$$

et où $\mathcal{L}^n$, Λ_s^n et $K_{x,b}^n$ sont des approximations discrètes (d'ordre 2) des opérateurs suivants :

$$\mathcal{L}u := \Delta u - 2\nabla \cdot \left(F u (1-u) \right),$$

$$\Lambda_s \varphi := \Delta \varphi + 2(1-2u) F \cdot \nabla \varphi,$$

$$K_{s,b}\varphi := 2u^2(1-u)^2 F_b \partial_b \varphi.$$

L'idée est alors d'écrire :

$$X_\tau^{(n)}(\phi) = X_0^{(n)}(\varphi_0) + M_\tau^{(n)}(\varphi) + \mathcal{R}_{\tau,n}^{(0)}(\varphi) + \mathcal{R}_{\tau,n}^{(1)}(\varphi) + \mathcal{R}_{\tau,n}^{(2)}(\varphi),$$

et de montrer d'une part la convergence de la martingale $M_t^n(\varphi)$ vers la martingale :

$$M_t(\varphi) := \int_0^t \langle \nabla \varphi_s, \xi_s \rangle \, \mathrm{d}s,$$

avec $(\xi_t)_{t\in[0,\tau]}$ un bruit blanc spatio-temporel de T^d, puis de choisir φ en fonction de ϕ de sorte que les trois termes $\mathcal{R}$ soient négligeables.

Le terme $\mathcal{R}_{\tau,n}^{(0)}(\varphi)$ est négligeable car $\partial_t u = \mathcal{L}u$ et que $\mathcal{L}_n$ est une approximation d'ordre 2 de $\mathcal{L}$ (on a donc que $\mathcal{R}_{\tau,n}^{(0)}$ est en $O(n^{d/2-2})$ ce qui tend bien vers 0 car $d < 4$).

Le terme $\mathcal{R}_{\tau,n}^{(2)}(\varphi)$ converge en probabilité vers 0 en probabilité d'après le principe de Boltzmann-Gibbs : il est ainsi négligeable pour $d < 4$.

Enfin, pour que le terme $\mathcal{R}^{(1)}$ soit négligeable, il faut choisir φ comme la solution de l'équation de Fokker-Planck rétrograde :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_t + \Lambda_t(\varphi_t) = 0 \\ \varphi_\tau = \phi \end{cases},$$

on note cette solution $P_{\bullet,\tau}\phi$. Comme Λ^n est une approximation de Λ à l'ordre 2, on obtient de même que pour la majoration de $\mathcal{R}^0$ que $\mathcal{R}_{\tau,n}^{(1)}(P_{\bullet,\tau}\phi)$ converge en probabilité vers 0.

Il ne reste plus qu'à montrer que $M_t^n(\varphi)$ converge en probabilité vers $M_t(\varphi)$. Ceci se fait grâce au calcul explicite de la variation quadratique de $M_t^n(\varphi)$. En effet, on sait que la variation quadratique de $M_t^n(\varphi)$ vaut :

$$\begin{aligned}
&[M^n(\varphi)]_t = \int_0^t \Gamma X_s^{(n)}(\varphi_s) \, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathrm{d}s \, \frac{1}{n^d} \sum_{x\sim y \in T_n^d} r_n(x,y) \, \eta_x^s(1-\eta_y^s) \, (\varphi_s(y) - \varphi_s(x))^2 \\
&= \int_0^t \mathrm{d}s \, \frac{1}{n^d} \sum_{\substack{x\in T_n^d \\ b\in\mathcal{B}_n}} \left(\eta_x^s(1-\eta_{x+b}^s) + \eta_{x+b}^s(1-\eta_x^s)\right) |\partial_b^n \varphi_s(x)|^2 + O\left(\frac{||\nabla\varphi||_\infty ||F||_\infty}{n}\right)
\end{aligned}$$

où on a posé : $\partial_b^n \varphi(x) := n\,(\varphi(x+b) - \varphi(x))$. Or,

$$\eta_x(1-\eta_{x+b}) + \eta_{x+b}(1-\eta_x) = u_x(1-u_{x+b}) + u_{x+b}(1-u_x) + \ldots\omega_x + \ldots\omega_{x+b} + \ldots\omega_x\omega_{x+b},$$

D'une part la contribution des ω_x et ω_{x+b} converge en probabilité vers 0 d'après la loi des grands nombres 1.2 et d'autre part la contribution des $\omega_x\omega_{x+b}$ converge vers 0 d'après le principe de Boltzmann-Gibbs3.1. On en déduit que :

$$[M^n(\varphi)]_t \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \int_0^t \mathrm{d}s \int_{T^d} \mathrm{d}x \; 2u_x(1-u_x)|\nabla\varphi_s(x)|^2,$$

ce qui est exactement la variation quadratique de $M_t(\varphi)$. Or, comme on a que :

$$[M^n(\varphi)]_t \leq C||\nabla\varphi||^2,$$

on peut montrer que $(M^n_\cdot)$ est tendue dans $\mathcal{D}([0,T], H^{-k}(T^d))$ pour $k > d/2+1$. Comme les discontinuités de $M^n(\varphi)$ sont en $O(n^{-d/2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on sait que toute valeur d'adhérence pour $\mathcal{D}([0,T], H^{-k}(T^d))$ est une martingale continue, et sa variation quadratique est celle ci-dessus : par un théorème de Lévy de caractérisation du Brownien, on en déduit que cette valeur d'adhérence a nécessairement même loi que $(M_t(\varphi))_{t\geq 0}$, donc que $(M^n_t(\varphi))_{t\in[0,T]}$ converge en loi pour la topologie de $\mathcal{D}([0,T], H^{-k}(T^d)$ vers $(M_t)_{t\in[0,T]}$

Enfin, $X^n_0(\varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \sqrt{u(1-u)}\langle\varphi_0,\xi\rangle := X_0(\varphi)$ avec ξ un bruit blanc de T^d, d'après le théorème centrale limite.

En notant $\{\mathcal{F}^n_t, t\in[0,\tau]\}$ la filtration engendrée par $\{\eta^n_t, t\in[0,T]\}$, le fait que X^n_0 soit $\mathcal{F}^n_0$-mesurable et que $\{M^n_t, t\in[0,T]\}$ soit une $(\mathcal{F}^n_t)_{t\in[0,T]}$-martingale assure que l'on peut définir X_0 et $(M_t)_{t\in[0,T]}$ sur le même espace de probabilité, avec une filtration $\{\mathcal{F}_t, t\in[0,T]\}$ pour laquelle X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et telle que $\{M^n_t, t\in[0,\tau]\}$ soit une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale. Le fait que $M_0=0$ et la variation quadratique de $(M_t)_{t\in[0,T]}$ assurent par le théorème de caractérisation de Lévy que $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est indépendante de $\mathcal{F}_0$ et en particulier de X_0. Finalement, on a bien montré que :

$$X^n_\tau(\phi) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_0(P_{0,\tau}\phi)+M_\tau(P_{\bullet,\tau}\phi) = \sqrt{u(1-u)}\langle P_{0,\tau}\phi,\xi\rangle+\int_0^t\langle\nabla P_{s,\tau}\phi,\xi_s\rangle := X_\tau(\phi),$$

où ξ et $(\xi_s)_{s\in[0,\tau]}$ sont indépendants. Or, il s'avère que la loi de $X_\tau(\phi)$ est exactement la loi de $Y_\tau(\phi)$ où $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est la solution de l'EDPS :

$$\begin{cases} \partial_t Y_t = \Delta Y_t + 2\ \nabla\cdot[(1-2u_t)Y_tF] + \sqrt{2u_t(1-u_t)}\ \nabla\cdot\xi_t \\ Y_0 = \sqrt{u(1-u)}\ \xi \end{cases}$$

On a donc montré la convergence des lois unidimensionnelles. Pour montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles, il faut itérer l'argument précédent, en remarquant que si $t_1 < t_2$, $M_{t_2}(P_{\cdot,t_2}\phi) - M_{t_1}(P_{\cdot,t_2}\phi)$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_1}$, donc en particulier de X_{t_1}.

Deuxième partie

Approche entropique pour une EDPS avec une faible non-linéarité quadratique

4 Le cadre de l'étude et les résultats

Plaçons-nous sur le tore de dimension d, noté T^d. L'espace de Fourier associé est $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$, on note $\mathbb{P}_N$ la projection sur les modes de Fourier k tels que $|k| \leq N$. Nous ne travaillerons dans la suite qu'avec des fonctions / distributions sur le tore dont la moyenne est nulle. Soit $u_0 : T^d \to \mathbb{R}$ lisse ($\mathcal{C}^\infty$) et v_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{D}'(T^d)$ qui soit relativement proche en un certain sens d'un bruit blanc (nous précisons cette hypothèse dans la section suivante). Pour $n \geq 1$, nous nous intéressons au comportement quand $n \to \infty$ de η_n la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \eta_n = \dfrac{1}{2}\Delta \eta_n + \mathbb{P}_n Q(\mathbb{P}_n \eta_n) + \beta_n \ \nabla \cdot \xi \\ \eta_{n\,|t=0} = u_0 + \beta_n v_0 \end{cases}$$

où $\nabla \cdot \xi$ est un bruit blanc spatio-temporel conservatif indépendant de v_0, β_n une suite de coefficients tendant vers 0, et Q un "opérateur différentiel quadratique", au sens où en Fourier, on dispose de coefficients complexes $\alpha_{p,q}$ tels que :

$$Q(\eta) = B(\eta, \eta), \text{ où :}$$

$$\widehat{B(\eta_1, \eta_2)}(k) = \sum_{p,q} \alpha_{p,q,k} \ \widehat{\eta_1}(p)\widehat{\eta_2}(q) \text{ pour tous } \eta_1, \eta_2 : T^d \to \mathbb{R} \ \mathcal{C}^\infty,$$

On fait les hypothèses suivantes sur α : pour tous $p, q, k \in \mathbb{Z}^d$,
- $\alpha_{p,q,k} = \alpha_{q,p,k}$,
- $\alpha_{p,q,k} = \overline{\alpha_{-p,-q,-k}}$,
- $\alpha_{p,-p,\bullet} = 0$,
- $\alpha_{p,q,-k} + \alpha_{q,k,-p} + \alpha_{k,p,-q} = 0$, ie $\displaystyle\int \varphi \ Q(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi : T^d \to \mathbb{R}$ lisse.

On peut toujours supposer la première condition quitte à modifier α. La seconde hypothèse vient du fait que l'opérateur est réel. La troisième et quatrième hypothèses permettent de garantir que l'opérateur Q vu comme un champ de vecteurs est respectivement à divergence nulle et orthoradial (pour le produit scalaire $\mathbb{L}^2$) : ainsi, le flot de Q laisse invariant la mesure uniforme sur toutes les sphères centrées en 0 (dans l'espace de Fourier tronqué muni de la norme $\mathbb{L}^2$), et donc laisse en particulier invariant la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0,\sigma^2 Id)$ qui correspond à un bruit blanc sur T^d. Cette dernière hypothèse est fondamentale dans la suite.

Enfin, on suppose un contrôle du type :

$$|\alpha_{p,q,k}| \leq C\ \frac{|k|}{1+|k-p-q|^s} < +\infty,$$

où $s > d+2$.

Bien que les conditions sur Q ci-dessus paraissent très restrictives, elles regroupent un grand nombre d'exemples classiques.

Exemples d'opérateurs Q possibles :

• KPZ 1D : $d = 1$ et $Q(\varphi) = \partial_x(\varphi^2)$
Dans ce cas, $\alpha_{p,q,k} = k\ \mathbf{1}_{p+q=k}$.

• KPZ 2D anisotrope : $d = 2$ et $\begin{array}{rl} Q(\varphi) = & \Delta^{1/2}|\partial_x\Delta^{-1/2}\varphi|^2 \\ & -\Delta^{1/2}|\partial_y\Delta^{-1/2}\varphi|^2 \end{array}$

Dans ce cas, $\alpha_{p,q,k} = \dfrac{p_1q_1 - p_2q_2}{|p||q|}\ |k|\ \mathbf{1}_{p+q=k}$.

• WASEP avec force à divergence nulle :
$Q(\varphi) = F\cdot\nabla(\varphi^2)$ avec $F : T^d \to \mathbb{R}^d$ lisse et $\nabla\cdot F = 0$
Dans ce cas, $\alpha_{p,q,k} = k\cdot\widehat{F}(k-p-q)$.
Remarquez d'ailleurs que KPZ 1D en est un cas particulier (avec $F = e_1$).

• Navier-Stokes stochastique :
On peut aussi considérer des η à valeurs vectorielles. Avec $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, on peut considérer l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\partial_t\eta_n = \frac{1}{2}\Delta\eta_n + \mathcal{P}\ \mathbb{P}_n\ (\mathbb{P}_n\eta_n\cdot\nabla)(\mathbb{P}_n\eta_n) + \beta_n\mathcal{P}\ \nabla\cdot\xi,$$

où $\mathcal{P}$ est le projecteur de Leray (projecteur sur les champs de vecteurs à divergence nulle, qui consiste en Fourier à projeter orthogonalement la fréquence du mode k sur $k^\perp$). On peut vérifier que notre méthode s'adapte pour traiter cette EDPS (l'idée clé derrière est "l'antisymétrie $\mathbb{L}^2$" de l'opérateur $u\mapsto(u\cdot\nabla)u$).

On démontre alors une loi des grands nombres pour $\beta_n \ll \Big(n^{d-2}g_d(n)\Big)^{-1/2}$ et un théorème centrale limite pour $\beta_n \ll \Big(n^{d-2}g_d(n)\Big)^{-1}$: l'EDPS limite des fluctuations est alors exactement la linéarisation de l'EDPS non-linéaire de départ.

Heuristiquement, le cas $Q(\eta) = F \cdot \nabla(\eta^2)$ et $\beta_n = n^{-d/2}$ est très analogue au WASEP étudié lors de la première partie. D'ailleurs, c'est bien pour $d < 4$ que $n^{-d/2} \ll \left(n^{d-2} g_d(n)\right)^{-1}$ et que l'on obtient donc le théorème central limite.

Ces résultats ne sont cependant pas a priori optimaux : par exemple, si on part de l'équilibre (ie $u_0 = 0$ et v_0 un bruit blanc), pour Q correspondant à AKPZ 2D, il est montré dans [1] que le régime où l'EDPS limite des fluctuations est la linéarisation de l'EDPS de départ est exactement $\beta_n \ll \ln(n)^{-1/2}$, alors que nous ne le montrons seulement pour $\beta_n \ll \ln(n)^{-1}$.

Précisons maintenant les hypothèses faites sur u_0 et v_0.

Tout d'abord, on suppose que u_0 est suffisamment gentille de sorte que la solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + Q(u) \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

soit suffisamment lisse : plus précisément, on suppose dans toute la suite qu'il existe $\kappa > 0$ arbitrairement grand tel que $n^{-\kappa} = O(\beta_n)$, et il suffit alors de supposer que $\sup_{t \in [0,T]} ||u_t||_{H^{d+1+\kappa+\varepsilon}(T^d)} < +\infty$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Pour ce qui est de la condition sur v_0, rappelons la définition de l'entropie relative. Si ν et ν' sont deux mesures de probabilités sur un même espace polonais et que ν' est absolument continue par rapport à ν, de densité relative f, alors on note $H(\nu', \nu)$ ou $H(f, \nu)$ l'entropie relative de ν' par rapport à ν, définie par :

$$H(\nu', \nu) := \int f \log f \, \mathrm{d}\nu$$

Si X et Y sont des variables aléatoires, on définit de même $H(X, Y)$ en prenant pour ν et ν' les mesures images $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$.

On fait alors l'hypothèse suivante sur v_0 : l'entropie relative de la loi de $\mathbb{P}_n v_0$ par rapport à la loi d'un bruit blanc tronqué, c'est-à-dire en Fourier $\otimes_{|k| \le n} \mathcal{N}(0, 1)$, est en $O\left(n^{d-2} g_d(n)\right)$. Cette hypothèse, bien que très artificielle, semble essentielle pour faire fonctionner la méthode entropique.

Comme on peut s'y attendre, nous montrerons que la limite hydrodynamique de l'EDPS est bien la solution u de l'EDP précédente. On peut alors s'intéresser aux fluctuations de η_n autour de u. Une observation fondamentale est de constater que le bruit blanc normalisé $\beta_n \xi$ est une solution stationnaire de l'EDPS (grâce aux hypothèses faites sur Q) : on peut donc s'attendre à ce que les fluctuations restent proches en un certain sens de $\beta_n \xi$. Ainsi on a heuristiquement à temps fixé t, $\eta_n(t) \overset{\mathcal{L}}{\approx} u_t + \beta_n \xi$: pour quantifier cette proximité, nous allons estimer l'entropie relative entre les deux lois de probabilité précédentes que l'on note $H_n(t)$. C'est le résultat au coeur de cet article :

Théorème 4.1. *(Estimation entropique)*
On dispose de $C > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$:

$$H_n'(t) \leq C\Big(H_n(t) + n^{d-2} g_d(n)\Big),$$

où cette inégalité est à prendre au sens des distributions.[3] *En particulier, par Grönwall on a :*

$$H_n(t) \leq Ce^{Ct}\Big(H_n(0) + tn^{d-2} g_d(n)\Big).$$

Une fois cette estimation entropique obtenue, il n'est pas très difficile de montrer une limite hydrodynamique (ie une loi des grands nombres).

Proposition 4.2. *(Limite hydrodynamique)*

Supposons $\beta_n \ll \Big(n^{d-2} g_d(n)\Big)^{-1/2}$. Alors pour tout $t > 0$ et $\lambda > 0$ (arbitrairement petit), on a :

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathbb{L}^2(T^d) \\ ||\varphi||_{\mathbb{L}^2} \leq 1}} \mathbb{P}\left(\left|\int_{T^d} (\eta_n(t) - u_t)\varphi\right| > \lambda\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Pour étudier l'évolution des fluctuations, il est plus confortable d'introduire la version normalisée de $\eta_n(t)$, notée $v_n(t)$, définie par :

$$v_n(t) := \beta_n^{-1} \left(\eta_n(t) - u_t\right).$$

Théorème 4.3. *(EDS limite pour les fluctuations)*

Supposons $\beta_n \ll \Big(n^{d-2} g_d(n)\Big)^{-1}$. Alors le processus (v_n) converge, en un sens que nous allons préciser, vers la solution de l'EDPS suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v = \frac{1}{2}\Delta v + 2B(u, v) + \nabla \cdot \xi \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

Plus précisément, si $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_p$ et $\phi_1, ..., \phi_p$ sont dans $H^{-s}(T^d)$, avec $s > d + 1$, alors :

$$(\langle v_{t_1}^{(n)}, \phi_1\rangle, ..., \langle v_{t_p}^{(n)}, \phi_p\rangle) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} (\langle v_{t_1}, \phi_1\rangle, ..., \langle v_{t_p}, \phi_p\rangle).$$

3. c'est-à-dire que pour toute fonction test positive φ définie sur $\mathbb{R}_+$, on a $H_n(0)\varphi(0) - \int H_n(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int C\big(H_n(t) + n^{d-2} g_d(n)\varphi(t).\big)$

5 Estimation entropique

5.1 Inégalité de Yau

Pour plus de clarté, nous étudions le processus $\widehat{v_t^n} := \beta_n \left(\widehat{\eta_t^n} - \widehat{u_t^n}\right)$ plutôt que $\widehat{\eta_t^n}$ directement. Remarquer qu'il est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t v_n = \frac{1}{2}\Delta v_n - R_n(u) + 2\ B_n(u, v_n) + \beta_n Q_n(v_n) + \nabla\cdot\xi \\ v_{n\,|t=0} = \xi_0 \end{cases},$$

où $B_n(\cdot,\cdot) := \mathbb{P}_n B(\mathbb{P}_n\cdot, \mathbb{P}_n\cdot)$, idem pour Q_n, et $R_n(u) := \beta_n^{-1}\left(Q(u) - Q_n(u)\right)$.

On peut donc le voir comme un processus de Markov (non homogène) dont le générateur s'écrit formellement en Fourier (par la formule d'Itô) :

$$\begin{aligned} L_t^n f(\widehat{v}) = &- \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \frac{|k|^2}{2}\widehat{v}(k) \\ &+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \widehat{R_n(u)}_k \\ &- 2 \sum_{|p|,|q|,|k|\leq n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{p,q,k}\ \widehat{u}(p)\widehat{v}(q) \\ &- \beta_n \sum_{|p|,|q|,|k|\leq n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{p,q,k}\ \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) \\ &+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{|k|^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \Re\widehat{v}(k)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \Im\widehat{v}(k)^2}\right). \end{aligned}$$

Introduisons aussi le carré du champ noté Γ (remarquer qu'il ne dépend ni de t ni de n), défini formellement par :

$$\Gamma f := L_t^n(f^2) - 2fL_t^n f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{|k|^2}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)}\right|^2 \geq 0$$

Notons $\widetilde{\nu_t^n}$ la loi du processus $\widehat{v_t^n}$ et ν la loi d'un bruit blanc en Fourier (ie un produit de $\mathcal{N}(0,1)$) : on pose alors f_t^n la densité de $\widetilde{\nu_t^n}$ par rapport à ν. Nous avons le contrôle très utile suivante :

Lemme 5.1. *(In)égalité de Yau*[4]

4. Dans un cadre plus général, il s'agit seulement d'une inégalité : mais il s'agit ici d'une égalité car le générateur est un opérateur elliptique du second ordre.

Pour tout $t \geq 0$, en posant $H_n(t) := H\left(\widetilde{\nu_t^n}, \nu\right)$ on a :

$$H_n'(t) = -2\int \Gamma\sqrt{f_t^n}\ \mathrm{d}\nu + \int L_t^n f_t^n\ \mathrm{d}\nu.$$

Démonstration. Formellement :

$$\begin{aligned}
H'(t) &= \int L_t^n(\log f_t^n)\ \mathrm{d}\widetilde{\nu}_t^n + \int \frac{\partial \log f_t}{\partial t}\ \mathrm{d}\widetilde{\nu}_t^n \\
&= \int f_t L_t^n(\log f_t^n)\ \mathrm{d}\nu_t + \frac{\partial}{\partial t}\int f_t^n\ \mathrm{d}\nu \\
&= \int f_t^n L_t^n(\log f_t^n)\ \mathrm{d}\nu_t.
\end{aligned}$$

On a formellement :

$$g\ \frac{\partial \log g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$g\ \frac{\partial^2 \log g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{g}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 4\left|\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x}\right|^2,$$

d'où on en déduit l'identité : $g\ L\log g = Lg - 2\ \Gamma\sqrt{g}$. Il s'ensuit :

$$H'(t) = -2\int \Gamma\sqrt{f_t^n}\ \mathrm{d}\nu_t + \int L_t^n f_t^n\ \mathrm{d}\nu.$$

Pour rendre pleinement rigoureux ces calculs, on suppose d'abord que f_0^n est lisse à support compact : dans ce cas f^n est lisse et décroît suffisamment vite à l'infini pour que tous les calculs précédents soient vrais. Puis on passe à la limite en approchant f_0^n par des densités lisses à support compact $\widetilde{f_0^n}$ (en utilisant le fait général suivant pour un processus de Markov : $H(f_t^n, \widetilde{f_t^n}) \leq H(f_0^n, \widetilde{f_0^n})$). Nous ne rentrons pas dans les détails. $\square$

Si on note $(L_t^n)^*$ l'adjoint de L_t^n par rapport à ν, l'inégalité de Yau se réécrit :

$$H_n'(t) = -2\int \Gamma\sqrt{f_t^n}\ \mathrm{d}\nu + \int (L_t^n)^* 1\ f_t^n \mathrm{d}\nu,$$

Le but de la section suivante est d'exprimer plus explicitement la seconde intégrale.

5.2 Calcul de $(L_t^n)^*1$

Pour plus de clarté, nous omettons la dépendance en t et n dans la notation des objets considérés.

$$\begin{aligned}\int Lf \, \mathrm{d}\nu = \int \mathrm{d}\nu(\widehat{v}) \Bigg[& - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \frac{|k|^2}{2} \widehat{v}(k) \\ & - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \widehat{R(u)}_k \\ & + 2 \sum_{|p|,|q|,|k|\le n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{p,q,k} \ \widehat{u}(p)\widehat{v}(q) \\ & + \beta_n \sum_{|p|,|q|,|k|\le n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{p,q,k} \ \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) \\ & + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{|k|^2}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \Re \widehat{v}(k)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \Im \widehat{v}(k)^2} \right) \Bigg]\end{aligned}$$

Tout d'abord, en réalisant une intégration par parties gaussienne sur le dernier terme, on voit que le dernier terme se compense exactement avec le premier terme (ce qui traduit le fait que le bruit blanc est la mesure invariante de la partie diffusive du générateur).

Ensuite, montrons que la contribution du quatrième terme est nulle (ceci traduit le fait que le bruit blanc est aussi la mesure invariante de la partie non linéaire du générateur). En effet par une intégration par parties gaussienne :

$$\begin{aligned}& \int \mathrm{d}\nu(\widehat{v}) \sum_{|p|,|q|,|n|\le n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{p,q,k} \ \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) \\ & = \int \mathrm{d}\nu(\widehat{v}) \ f \ \Re \sum_{|p|,|q|,|n|\le n} \alpha_{p,q,-k} \ \mathbf{:} \ \widehat{v}(p)\widehat{v}(q)\widehat{v}(k) \ \mathbf{:} \ ,\end{aligned}$$

où on a noté $\mathbf{:}\ z_p z_q z_k \ \mathbf{:} := z_p z_q z_k - z_p 1_{q=-k} - z_q 1_{p=-k} - z_k 1_{p=-q}$. La dernière égalité vient du fait que si $p = -q$ alors $\alpha_{p,q,-k} = 0$ par hypothèse. Or maintenant, en regroupant les termes dans la somme par triplets $\{p, q, k\}$, et en utilisant le fait que :

$$\alpha_{p,q,-k} + \alpha_{q,k,-p} + \alpha_{k,p,-q} = 0,$$

on obtient bien que cette somme est nulle.

Enfin, on peut obtenir une meilleure expression pour le troisième terme comme suit. Comme précédemment, on réalise une intégration par parties gaussienne qui donne :

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\nu(\widehat{v}) \sum_{|p|,|q|,|n|\leq n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{p,q,k}\ \widehat{u}(p)\widehat{v}(q) \\
&= \int \mathrm{d}\nu(\widehat{v})\ f\ \Re \sum_{|p|,|q|,|n|\leq n} \alpha_{p,q,-k}\widehat{u}(p) :\widehat{v}(q)\widehat{v}(k):,
\end{aligned}$$

où on a noté $:z_q z_k: := z_q z_k - 1_{q=-k}$. En regroupant les termes dans la somme selon le doublet $\{q,k\}$ et en remarquant que :

$$\alpha_{p,q,-k} + \alpha_{p,k,-q} = -\alpha_{q,k,-p},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\nu(\widehat{v}) \sum_{|p|,|q|,|n|\leq n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{p,q,k}\ \widehat{u}(p)\widehat{v}(q) \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\nu(\widehat{v})\ f\ \Re \sum_{|p|,|q|,|n|\leq n} \alpha_{q,k,-p}\widehat{u}(p) :\widehat{v}(q)\widehat{v}(k):
\end{aligned}$$

Enfin, en faisant une intégration par parties gaussienne pour traiter le deuxième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int Lf\ \mathrm{d}\nu \\
&= -\int f\mathrm{d}\nu(\widehat{v})\ \Re\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{R_n(u)}_k\widehat{v}(k) + \frac{1}{2}\sum_{|p|,|q|,|k|\leq n} \alpha_{q,k,-p}\ \widehat{u}(p) :\widehat{v}(q)\widehat{v}(k):\right].
\end{aligned}$$

Le but de la section suivante est de contrôler efficacement ces deux termes d'une part grâce au carré du champ $\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu$ et d'autre part grâce à l'entropie $H(f,\nu)$.

5.3 Contrôle de la création d'entropie

Le but de cette section est de majorer efficacement des intégrales de la forme :

$$\int \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Re\{c_k\widehat{v}(k)\}\ f\mathrm{d}\nu, \quad \int \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Re\{c_{p,q} :\widehat{v}(p)\widehat{v}(q):\}\ f\mathrm{d}\nu,$$

en terme du carré du champ $\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu$ et (éventuellement) de $H(f,\nu)$.

Les intégrandes précédentes faisant intervenir des sommes de monômes avec petit nombre de variables (1 ou 2), pour majorer efficacement ces intégrales par des bornes entropiques, nous introduisons pour $K \subset \mathbb{Z}^d$ fini l'entropie relative de la marginale K :

$$H_K(f,\nu) = H(\pi_k^*(f\nu), \pi_k^*\nu), \text{ où } \pi_k : \mathbb{C}^{Z^d} \to \mathbb{C}^K \text{ est la projection naturelle.}$$

La formule variationnelle de l'entropie amène alors immédiatement que pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{C}^K \to \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$:

$$\int g(x_K)f(x)\ \mathrm{d}\nu(x) \leq \frac{1}{\gamma}\Big(H_K(f,\nu) + \log\int \exp(\gamma g)\ \mathrm{d}\nu_K\Big) \quad (*)$$

De plus, les inégalités log-Sobolev gaussiennes permettent de majorer H_k grâce à au terme relative à k dans l'expression du carré du champ :

$$H_k(f,\nu) \leq \int \left|\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial\widehat{v}(k)}\right|^2\ \mathrm{d}\nu := I_k(f,\nu),$$

d'où en particulier :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |k|^2 H_k(f,\nu) \leq \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu.$$

L'idée est alors d'appliquer $(*)$ avec $\gamma_k = \gamma/|k|^2$ et de sommer, d'où on en déduit la majoration suivante pour tout $\gamma > 0$:

$$\int \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g_k(x_k)f(x)\ \mathrm{d}\nu(x) \leq \frac{1}{\gamma}\left(\int \Gamma\sqrt{f} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \log\int \exp(\gamma g_k/|k|^2)\ \mathrm{d}\nu_k\right).$$

On en déduit alors immédiatement en prenant $g_k(\widehat{v}_k) := \Re\{c_k\ \widehat{v}_k\}$ l'estimation du terme linéaire :

Lemme 5.2. *(Estimation du terme linéaire)*
Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\left|\int f\mathrm{d}\nu(\widehat{v})\ \Re\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\widehat{v}(k)\right| \leq \delta\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + \frac{1}{\delta}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{|c_k|^2}{|k|^4},$$

Pour traiter le terme quadratique, c'est un peu plus délicat, car le produit de deux gaussiennes indépendantes n'admet pas des moments exponentielles de tout ordre. On a le résultat suivant :

Lemme 5.3. *(Estimation du terme quadratique / "Main lemma")*

Soit $(c_{p,q})_{|p|,|q|\leq n}$ *symétrique telle que l'on ait une constante* $A > 0$ *qui vérifie pour tout* $|p| \leq n$ *:*

$$\sum_{|q|\leq n} |c_{p,q}| \leq A, \quad \sum_{|q|\leq n} \frac{|c_{p,q}|}{|q|^2} \leq \frac{A}{|p|^2}, \quad \sum_{|q|\leq n} |c_{p,q}||q|^2 \leq A|p|^2$$

Alors pour tout $\delta > 0$ *:*

$$\begin{aligned} &\int \Re \sum_{|p|\leq L,|q|\leq n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) : f \mathrm{d}\nu \\ &\leq \delta \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + CA^{1+d/4}\delta^{-d/4}(H(f,\nu)+1) + CA^2\delta^{-1}n^{d-2}g_d(n) \\ &\leq \delta \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + C(A,\delta)\ \Big(H(f,\nu) + n^{d-2}g_d(n)\Big) \end{aligned}$$

Démonstration. Il faut traiter différemment les basses et hautes fréquences.

Soit $L \geq 0$ que l'on choisira plus tard. Pour les basses fréquences, on applique simplement la formule variationnelle de l'entropie :

$$\begin{aligned} &\int \Re \sum_{|p|\leq L,|q|\leq n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) : f \mathrm{d}\nu \\ &\leq \frac{1}{\gamma}\left(H(f,\nu) + \log \int \exp\left\{\gamma\ \Re \sum_{|p|\leq L,|q|\leq n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) :\right\}\right), \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité d'Hanson-Wright, pour $\gamma \leq C^{-1}\left(\sum_{|p|\leq L,|q|\leq n} |c_{p,q}|^2\right)^{-1/2}$:

$$\log \int \exp\left\{\gamma\ \Re \sum_{|p|\leq L,|q|\leq n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) :\right\} \leq 1,$$

donc en particulier pour $\gamma = C^{-1}L^{-d/2}A^{-1}$, on a :

$$\int \Re \sum_{|p|\leq L,|q|\leq n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) : f \mathrm{d}\nu \leq CL^{d/2}A(H(f,\nu)+1).$$

Traitons maintenant les hautes fréquences. Cette fois-ci, on applique la formule variationnelle de l'entropie relative à la marginale $\{p,q\}$ pour chaque monôme :

$$\begin{aligned}&\int \Re \sum_{L\le|p|,|q|\le n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) :\\&\le \sum_{L\le|p|,|q|\le n} \frac{1}{\gamma_{p,q}}\left(H_{p,q}(f,\nu)+\log\int \exp\left(\gamma_{p,q}\ \Re c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) :\right)\,\mathrm{d}\nu\right)\\&\le \sum_{L\le|p|,|q|\le n} \frac{H_{p,q}(f,\nu)}{\gamma_{p,q}}+\gamma_{p,q}|c_{p,q}|^2,\end{aligned}$$

où on a supposé pour la dernière majoration que $\gamma_{p,q}|c_{p,q}|\le 1/2$. Soit $\delta>0$, on prend alors $L:=\delta^{-1/2}$ ainsi que :

$$\gamma_{p,q}=\frac{1}{\delta(|p|^2+|q|^2)\ |c_{p,q}|},$$

et on a donc :

$$\begin{aligned}&\int \Re \sum_{L\le|p|,|q|\le n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) :\\&\le \sum_{|p|,|q|\le n} \delta(|p|^2+|q|^2)|c_{p,q}|\ H_{p,q}(f,\nu)+\frac{|c_{p,q}|}{\delta(|p|^2+|q|^2)}\\&\le 2\delta \sum_{|p|,|q|\le n} \min(|p|^2,|q|^2)|c_{p,q}|\ I_p(f,\nu)+\frac{1}{\delta}\sum_{|p|,|q|\le n}\frac{|c_{p,q}|}{|p|^2+|q|^2}\\&\le 4\delta A\sum_{|p|\le n}|p|^2 I_p+C\delta^{-1}A\ n^{d-2}g_d(n)\\&\le 4\delta A\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu+C\delta^{-1}A\ n^{d-2}g_d(n).\end{aligned}$$

Finalement, en sommant les deux contributions, on a obtenu :

$$\begin{aligned}&\int \Re \sum_{|p|\le L,|q|\le n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) : f\mathrm{d}\nu\\&\le 4\delta A\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu+C\delta^{-1}An^{d-2}g_d(n)+C\delta^{-d/4}A(H+1),\end{aligned}$$

et en faisant le changement de variables $\delta'=4\delta A$, on obtient bien :

$$\begin{aligned}&\int \Re \sum_{|p|\le L,|q|\le n} c_{p,q} : \widehat{v}(p)\widehat{v}(q) : f\mathrm{d}\nu\\&\le \delta\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu+CA^2\delta^{-1}n^{d-2}g_d(n)+CA^{1+d/4}\delta^{-d/4}(H(f,\nu)+1)\end{aligned}$$

□

La preuve montre en fait un peu plus :

Lemme 5.4. *(Main lemma V2)*

On se place sous les mêmes hypothèses que le "main lemma". Alors pour tout $\delta > 0$*, il existe* $U_\delta(c) : \mathbb{C}^{[-n,n]^d} \to \mathbb{R}$ *et* $C_\delta, \gamma_0 > 0$ *(qui ne dépend pas de la densité* f*) telle que :*

$$\int \Re \sum_{p,q} c_{p,q} \widehat{v}(p)\widehat{v}(q)\ f \mathrm{d}\nu(\widehat{v}) \leq \delta \int \Gamma \sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + C_\delta\ n^{d-2} g_d(n) + \int U_\delta(c)\ f \mathrm{d}\nu,$$

$$\textit{et } \int e^{\gamma |U_\delta(c)|} \mathrm{d}\nu \leq 1 \quad \textit{pour } 0 < \gamma < \gamma_0.$$

Démonstration. Il suffit de prendre $U_\delta(c)$ comme la partie basses fréquences de la forme quadratique :

$$U_\delta(c) := \sum_{\substack{|p|,|q| \leq n \\ \min\{|p|,|q|\} \leq \delta^{1/2}}} c_{p,q} \widehat{v}(p)\widehat{v}(q).$$

La preuve précédente montre bien la première majoration, et l'inégalité de Hanson-Wright amène que pour $\gamma \leq C^{-1}\delta^{-d/4}A$, on a bien :

$$\int e^{\gamma |U_\delta(c)|} \mathrm{d}\nu \leq 1.$$

□

5.4 Conclusion

Nous avons maintenant toutes les clés de la preuve de l'estimation entropique :

Démonstration. Tout d'abord, par l'inégalité de Yau 5.1, pour tout $t \geq 0$:

$$H_n'(t) \leq -2 \int \Gamma \sqrt{f_t^n}\ \mathrm{d}\nu + \int L_t^{n*} 1\ f_t^n \mathrm{d}\nu,$$

et d'après la section 5.2, nous avons :

$$L_t^{n*}1 = \Re \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{R_n^t(u)}_k \widehat{v}(k) + \frac{1}{2} \sum_{|p|,|q|,|k| \leq n} \alpha_{q,k,-p}\ \widehat{u_t}(p) :\widehat{v}(q)\widehat{v}(k): \right].$$

D'une part, d'après les lemmes 5.2 et 7.4, pour tout $\delta > 0$:

$$\int \Re \sum_{|k|\leq n} \widehat{R_n^t(u)}_k \widehat{v}(k)\ f_t^n \mathrm{d}\nu \leq \delta \int \Gamma \sqrt{f_t^n}\ \mathrm{d}\nu + \frac{1}{\delta} \sum_{|k|\leq n} \frac{|\widehat{R_n^t(u)}_k|^2}{|k|^4}$$
$$\leq \delta \int \Gamma \sqrt{f_t^n} + \frac{C||u||_{d/2+\kappa+\varepsilon}}{\delta}.$$

D'autre part, d'après le lemme 7.5, on peut appliquer le lemme 5.3 : ainsi pour tout $\delta > 0$:

$$\int \frac{1}{2} \sum_{|p|,|q|,|k|\leq n} \alpha_{q,k,-p}\ \widehat{u_t}(p) : \widehat{v}(q)\widehat{v}(k) : f_t^n \mathrm{d}\nu \leq \delta \int \Gamma \sqrt{f_t^n}\ \mathrm{d}\nu + C_\delta (H_n(t) + n^{d-2} g_d(n)).$$

Donc finalement, avec $\delta = 1$:

$$H_n'(t) \leq C(H_n(t) + n^{d-2} g_d(n)),$$

et donc : $H_n(t) \leq e^{Ct} \Big(H_n(0) + n^{d-2} g_d(n) \Big)$. □

Remarque : Si α est "suffisamment petit" (typiquement, si on considère une non-linéarité λQ avec λ suffisamment petit), alors on remarque que dans le lemme 5.3, en prenant $\delta = 1/A$:

$$\left| \int \mathrm{d}\nu \sum_{|p|,|q|,|k|\leq n} \frac{\partial f}{\partial \widehat{v}(k)} \cdot \alpha_{q,k,-p}\ \widehat{u}(p)\widehat{v}(q) \right| \leq A \int \Gamma \sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + 4AH(f,\nu) + CAn^{d-2} g_d(n)$$
$$\leq 5A \int \Gamma \sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + CAn^{d-2} g_d(n),$$

et donc si $A \leq 1/10$, on en déduit que l'on peut majorer $H_n'(t)$ ainsi :

$$H_n'(t) \leq - \int \Gamma \sqrt{f_t^n}\ \mathrm{d}\nu + Cn^{d-2} g_d(n),$$

or par les inégalités log-Sobolev, on en déduit :

$$H_n'(t) \leq -H_n(t) + Cn^{d-2} g_d(n),$$

et donc finalement :

$$H_n(t) \leq e^{-t} H_n(0) + Cn^{d-2} g_d(n),$$

ce qui donne une majoration uniforme en temps sur tout $\mathbb{R}_+$.

De plus, si on a que $u_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ pour un H^s avec s suffisamment grand, on peut montrer que l'on peut prendre dans l'inégalité ci-dessus une constante C_t avec $C_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Ainsi, on peut alors montrer que :

$$H_n(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

ce qui est très naturel : cela signifie qu'il y a convergence vers l'équilibre.

6 Théorèmes limites

Dans tout ce qui suite, nous nous plaçons sur une fenêtre de temps finie $[0,T]$. On dispose alors de $C_0 > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0,T],\ H_n(t) \leq C_0 n^{d-2} g_d(n).$$

6.1 Loi des grands nombres

La limite hydrodynamique est facile à obtenir une fois l'estimation entropique obtenue.

Théorème 6.1. *(Loi des grands nombres)*
Supposons $\beta_n \ll (n^{d-2}g_d(n))^{-1/2}$. Pour tout $t > 0$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{L}^2(T^d)} \mathbb{P}\Big(\Big|\langle \eta(t) - \eta_n(t), \varphi\rangle\Big| > \lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. On utilise la formule variationnelle de l'entropie pour obtenir :

$$\mathbb{P}(|\langle v_n(t), \varphi\rangle| > \lambda\beta_n^{-1} \leq \frac{H_n(t) + \log 2}{\log \mathbb{P}\left(|\langle \xi, \varphi\rangle| > \lambda\beta_n^{-1}\right)^{-1}},$$

où ξ suit la loi d'un bruit blanc. Or $\langle \xi, \varphi\rangle \sim \mathcal{N}\left(0, ||\varphi||^2_{\mathbb{L}^2}\right)$ donc :

$$\mathbb{P}\left(|\langle \xi, \varphi\rangle| > \lambda\beta_n^{-1}\right) \leq \exp(-\beta_n^{-2}||\varphi||_{\mathbb{L}^2}\lambda^2/2),$$

et ainsi :

$$\mathbb{P}(|\langle v_n(t), \varphi\rangle| > \lambda\beta_n^{-1}||\varphi||_{\mathbb{L}^2}) \leq \frac{2C_0 n^{d-2} g_d(n)\beta_n^2}{\lambda^2||\varphi||_{\mathbb{L}^2(T^d)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

6.2 Théorème central limite

6.2.1 Esquisse de la preuve

Soit $\varphi : [0,T] \times T^d \to \mathbb{R}$ lisse. Écrivons l'EDPS vérifiée par $\langle v^{(n)}, \varphi\rangle$:

$$\begin{aligned}\partial_t\langle v_t^{(n)}, \varphi_t\rangle &= \langle v_t^{(n)}, \partial_t\varphi_t\rangle + \Big\langle \Delta v_t^{(n)} + R_n(u_t) + B_n(u_t, v_t^{(n)}) + \beta_n Q_n(v_t^{(n)}) + \nabla\cdot\xi_t, \varphi_t\Big\rangle \\ &= \langle v_t^{(n)}, (\partial_t + \mathbb{L}_t)\varphi_t\rangle + \langle \nabla\cdot\xi_t, \varphi_t\rangle + \mathcal{R}_t^n(\varphi_t) + \mathcal{S}_t^n(\varphi_t) + \mathcal{Q}_t^n(\varphi_t),\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\mathbb{L}_t := \Delta + B(u_t, \cdot)^*,$$
$$\mathcal{R}_t^n(\varphi_t) := \langle R_n(u_t), \varphi_t \rangle$$
$$\mathcal{S}_t^n(\varphi_t) := \langle v_t^{(n)}, [B_n(u_t, \cdot)^* - B(u_t, \cdot)^*]\, \varphi_t \rangle,$$
$$\mathcal{Q}_t^n(\varphi_t) := \beta_n \langle Q_n(v_t^{(n)}), \varphi_t \rangle.$$

Soit $\phi \in H^s(T^d)$ et $t > 0$. L'EDPS précédente nous incite à prendre φ comme la solution de l'équation de Fokker-Planck rétrograde suivante :

$$\begin{cases} \partial_s \varphi + \mathbb{L}_s \varphi = 0 \\ \varphi_t = \phi \end{cases}$$

On note $s \in [0, t] \mapsto P_{s,t}\phi$ la solution de cette équation. Comme u est lisse, on peut montrer que $B(u, \cdot)^*$ est un opérateur d'ordre 1, au sens où il est continu de $H^p(T^d)$ dans $H^{p-1}(T^d)$, et on en déduit alors qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\sup_{0 \le s \le T} ||P_{s,t}\phi||_{H^s(T^d)} \le C ||\phi||_{H^s(T^d)}$$

En prenant $\varphi_s = P_{s,t}\phi$, nous avons :

$$\partial_s \langle v_s^{(n)}, P_{s,t}\phi \rangle = \langle \nabla \cdot \xi_s, P_{s,t}\phi \rangle + \mathcal{R}_s^n(P_{s,t}\phi) + \mathcal{S}_s^n(P_{s,t}\phi) + \mathcal{Q}_s^n(P_{s,t}\phi),$$

donc en intégrant :

$$\langle v_t^{(n)}, \phi \rangle = \langle v_0, P_{0,t}\phi \rangle + \int_0^t \mathrm{d}s\, \langle \nabla \cdot \xi_s, P_{s,t}\phi \rangle + \int_0^t \mathrm{d}s\, \{\mathcal{R}_s^n(P_{s,t}\phi) + \mathcal{S}_s^n(P_{s,t}\phi) + \mathcal{Q}_s^n(P_{s,t}\phi)\}.$$

L'idée est alors que les termes intégraux liés à $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$ convergent en probabilité vers 0, d'où on en déduit immédiatement que :

$$\langle v_t^{(n)}, \phi \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \langle v_0, P_{0,t}\phi \rangle + \int_0^t \mathrm{d}s\, \langle \nabla \cdot \xi_s, P_{s,t}\phi \rangle.$$

Mais cette limite est exactement $\langle v_t, \phi \rangle$, où $(v_t)_{t \in [0,T]}$ est la solution de l'EDPS :

$$\begin{cases} \partial_t v = \frac{1}{2} \Delta v_t + 2B(u_t, v_t) + \nabla \cdot \xi_t \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

Ainsi, si $t_1, ..., t_p$ sont dans $[0, T]$ et $\phi_1, ..., \phi_p$ sont dans $H^{-s}(T^d)$, alors chaque $\langle v_{t_i}^{(n)}, \phi_i \rangle$ converge en probabilité vers $\langle v_{t_i}, \phi_i \rangle$ donc :

$$(\langle v_{t_1}^{(n)}, \phi_1 \rangle, ..., \langle v_{t_p}^{(n)}, \phi_p \rangle) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} (\langle v_{t_1}, \phi_1 \rangle, ..., \langle v_{t_p}, \phi_p \rangle),$$

ce qui conclut.

6.2.2 Contrôle de fonctionnelles de la loi spatio-temporelle

Comme pour le WASEP, l'estimation suivante est centrale pour montrer le théorème centrale limite :

Lemme 6.2. *Soit* $V : [0,T] \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable telle que* $\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}s \int e^{\delta|V_s|}\ \mathrm{d}\nu < +\infty$ *pour* $\delta > 0$ *suffisamment petit. Alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\log \mathbb{E}_\nu\Big[\exp\Big(\int_0^t V_s(\eta_s^{(n)})\ \mathrm{d}s\Big)\Big] \\
&\qquad\qquad \le \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}s\ \sup_f \Big\{-\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + 2\int V_s\ f\mathrm{d}\nu + \int (L_s^n)^* 1\ f\mathrm{d}\nu\Big\},
\end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_\nu$ *désigne l'espérance relative au processus* η^n *partant de la mesure* ν*, et où le supremum parcourt les densités* f *par rapport à* ν*.*

La force de ce lemme réside dans le fait que qu'il permet de contrôler des fonctionnelles de la loi spatio-temporelle de η^n grâce à une quantité ne faisant intervenir que les lois spatiales (elle ne requiert aucune information sur les corrélations temporelles). De plus, cette estimation est particulièrement adaptée à l'utilisation du "main lemma".

Démonstration. On note (t, v) le processus de Markov de générateur $\partial_t + L_t^n$. Alors l'observation clé est la formule de Feynman-Kac suivante : la fonction

$$g_t(x) := \mathbb{E}^{t,x}\left[\exp\left(\int_t^T V_s\left(v_{s-t}\right)\ \mathrm{d}s\right)\right],$$

où $\mathbb{E}^{t,x}$ désigne l'espérance relative au processus de Markov (t, X) partant de (t, x), vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \partial_t g_t = -V_t g_t - L_t^n g_t \\ g_T = 1 \end{cases}$$

Remarquer que la quantité qui nous intéresse n'est nulle autre que :

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\exp\Big(\int_0^t V_s(\eta_s^{(n)})\ \mathrm{d}s\Big)\Big] = \int g_0\ \mathrm{d}\nu$$

L'idée est alors de poser $\phi(t) := \displaystyle\int g_t^2\ \mathrm{d}\nu$ et de réaliser une estimation d'énergie. En effet :

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= 2\int(-V_t g_t - L_t g_t) g_t\ \mathrm{d}\nu \\
&= -\Big(\int -\Gamma g_t + \int 2V_t g_t + \int (L_t)^* 1 g_t^2\Big) \\
&\ge -\lambda_t\ \phi(t),
\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\lambda_t := \sup_f \left\{ -\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + \int 2V_t\ f\mathrm{d}\nu + \int (L_t^n)^* 1\ f\mathrm{d}\nu \right\},$$

où le supremum porte sur les densités f par rapport à ν.

On a donc par Grönwall :

$$\phi(0) \leq \exp\left(\int_0^T \lambda_s\ \mathrm{d}s \right) \phi(T) = \exp\left(\int_0^T \lambda_s\ \mathrm{d}s \right).$$

Enfin, par Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}_\nu \left[\exp\left(\int_0^t V_s(\eta_s^{(n)})\ \mathrm{d}s \right) \right] = \int g_0\ \mathrm{d}\nu \leq \left(\int g_0^2\ \mathrm{d}\nu \right)^{1/2} \leq \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s\ \mathrm{d}s \right).$$

□

Le corollaire vraiment utile de ce lemme est le suivant :

Corollaire 6.3. *Soit $V : [0,T] \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ telle que dans le lemme précédent. On suppose qu'il existe une fonction mesurable $W : [0,T] \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ telle que pour toute densité f par rapport à ν et $s \in [0,T]$:*

$$\int (V_s - W_s) f \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{4} \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + C_1 n^{d-2} g_d(n),$$

$$\log \int e^{\gamma_0 |W_s|}\ \mathrm{d}\nu \leq C_2 n^{d-2} g_d(n) \text{ pour un } \gamma_0 > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

Alors on dispose d'une constante $C = C(C_0, C_1, C_2, \gamma_0) > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$ et $\lambda > 2C_1$:

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t V_s\left(\eta_s^{(n)}\right)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n) \right) \leq \frac{C}{\lambda - 2C_1}$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après la second version du main lemma, on dispose de $U : [0,T] \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que pour toute densité f par rapport à ν et $s \in [0,T]$:

$$\int L_s^* 1\ \mathrm{d}\nu \leq \frac{1}{2} \int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + \int U_s\ f\mathrm{d}\nu, \text{ et}$$

$$\log \int e^{\gamma_0 |U_s|}\ \mathrm{d}\nu \leq C_3 n^{d-2} g_d(n) \quad \text{(quitte à diminuer } \gamma_0\text{)}$$

On pose alors $Z = W + U/2$. Remarquez que l'on a alors les deux propriétés essentielles suivantes :

$$-\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + \int 2(V_s - Z_s)\ f\mathrm{d}\nu + \int L_s^* 1\ f\mathrm{d}\nu \leq C_1 n^{d-2} g_d(n),$$

$$\log \int e^{\gamma_0 |Z_s|/2}\ \mathrm{d}\nu \leq C_4 n^{d-2} g_d(n) \text{ où } C_4 := (C_2 + C_3)/2$$

L'idée est alors la suivante, on utilise l'union bound :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\int_0^T V_s\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n) \Big) \\
&\quad \leq \mathbb{P}\Big(\int_0^T Z_s\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n)/2 \Big) + \mathbb{P}\Big(\int_0^T (V_s - Z_s)\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n)/2 \Big),
\end{aligned}$$

et on estime ces deux termes séparément : le premier en utilisant une simple inégalité entropique, et le second en utilisant le lemme précédent.

D'une part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\int_0^T Z_s\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n)/2 \Big) &\leq \frac{2}{\lambda n^{d-2} g_d(n)} \int_0^T \mathbb{E}\left[|Z_s| \left(\eta_s^{(n)}\right) \right] \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{4}{\lambda \gamma_0 n^{d-2} g_d(n)} \int_0^T \mathrm{d}s \left(H_n(s) + \log \int e^{\gamma_0 |Z_s|/2}\ \mathrm{d}\nu \right) \\
&\leq \frac{C_5}{\lambda} \text{ où } C_5 = 4T(C_0 + C_4)/\gamma_0
\end{aligned}$$

D'autre part, pour le second terme, on commence en utilisant la formule variationnelle de l'entropie pour se ramener à estimer la probabilité relative au processus partant de la mesure ν. En remarquant que l'entropie relative du processus de Markov $\left(\eta_t^{(n)}\right)_{t \geq 0}$ parti de ν_0 par rapport à celui parti de ν vaut $H_n(0)$, on a en effet :

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T (V_s - Z_s)\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n) \Big) \leq \frac{H_n(0) + \log 2}{\log \mathbb{P}_\nu \Big(\int_0^T V_s - W_s\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n) \Big)^{-1}}.$$

On estime alors cette nouvelle probabilité par l'inégalité de Markov exponentielle et le lemme précédent :

$$\log \mathbb{P}_\nu \Big(\int_0^T (V_s - Z_s)\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n)/2 \Big) \leq (C_1 - \lambda/2) n^{d-2} g_d(n).$$

Finalement, on a obtenu pour n suffisamment grand :

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T V_s\big(\eta_s^{(n)}\big)\ \mathrm{d}s > \lambda n^{d-2} g_d(n) \Big) \leq \frac{C}{\lambda - 2C_1} \text{ où } C := C_5 + C_0 + 1$$

$\square$

6.2.3 Conclusion

Nous avons maintenant tous les outils pour montrer le théorème centrale limite. D'après la section 6.2.1, il s'agit de montrer que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\int_0^t \mathcal{R}_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)\ \mathrm{d}\tau, \quad \int_0^t \mathcal{S}_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)\ \mathrm{d}\tau, \quad \int_0^t \mathcal{Q}_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)\ \mathrm{d}\tau$$

convergent en probabilité vers 0.

Pour $\mathcal{R}$, il s'agit d'appliquer le lemme technique 7.4 :

$$|\mathcal{R}_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)| \leq C||R_n(u_\tau)||_{H^{-s}}||\phi||_{H^s} \leq C||u_\tau||^2_{H^{d+1+\varepsilon}}||\phi||_{H^s}\ n^{-\varepsilon/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour $\mathcal{S}$, on majore ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t \mathrm{d}\tau\ \mathcal{S}_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)\ \mathrm{d}\tau\right| > \lambda\right) \leq \lambda^{-1}\int_0^t \mathrm{d}\tau \mathbb{E}_n[S_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)],$$

puis en utilisant la formule variationnelle de l'entropie, pour tout $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n[S_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)] &= \int \langle v_\tau^{(n)}, B(u_\tau, \cdot)^* P_{\tau,t}\phi\rangle\ f_n^\tau \mathrm{d}\nu \\ &\leq \frac{1}{\gamma}H_n(f,\nu) + C\gamma||B(u_\tau,\cdot)^*P_{\tau,t}\phi||^2_{L^2} \\ &\leq C\left(\frac{n^{d-2}g_d(n)}{\gamma} + \gamma n^{-d-\varepsilon/2}\right), \end{aligned}$$

d'où en prenant $\gamma = n^d$, on a bien la convergence en probabilité du terme lié à $\mathcal{S}$ vers 0.

Pour $\mathcal{Q}$, d'après le "main lemma V2" 5.4 (que l'on peut appliquer grâce au lemme technique 7.5), on dispose :

$$\int \Re\sum_{p,q} \alpha_{p,q,k}\widehat{v}(p)\widehat{v}(q)\widehat{P_{\tau,t}\phi}(k)\ f\mathrm{d}\nu(\widehat{v}) \leq \delta\int \Gamma\sqrt{f}\ \mathrm{d}\nu + C_\delta\, n^{d-2}g_d(n) + \int U_\delta(c)\ f\mathrm{d}\nu,$$

$$\text{et } \int e^{\gamma|U_\delta(c)|}\mathrm{d}\nu \leq 1 \ \text{ pour } 0 < \gamma < \gamma_0.$$

donc on peut appliquer le lemme 6.3, et on obtient que pour tout $\lambda > C_1$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t \mathrm{d}\tau\ \Re\sum_{p,q}\alpha_{p,q,k}\widehat{v}(p)\widehat{v}(q)\widehat{P_{\tau,t}\phi}(k)\right| > \lambda\right) \leq \frac{C}{\lambda - C_1}.$$

Ainsi avec $\lambda = \lambda' \left(\beta_n n^{d-2} g_d(n)\right)^{-1}$, on a bien :

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t \mathrm{d}\tau \ \mathcal{Q}_\tau^n(P_{\tau,t}\phi)\right| > \lambda'\right) \leq \frac{C}{(\beta_n n^{d-2} g_d(n))^{-1} - C_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

car $\beta_n = o(n^{d-2} g_d(n))$. Ainsi le terme lié à $\mathcal{Q}$ converge bien en probabilité vers 0, ce qui achève la preuve.

7 Annexe technique

Nous collectons dans cet annexe technique des résultats utiles pour les preuves, mais qui sont fastidieux et inintéressants à montrer.

Lemme 7.1. *Si $(\alpha_{p,q,k})_{p,q,k\in\mathbb{Z}^d}$ est symétrique en p et q et vérifie un contrôle du type :*

$$|\alpha_{p,q,k}| \leq \frac{C\ |k|}{1 + |k-p-q|^\beta},$$

avec $\beta > d$, alors on a pour tout $s < \beta$:

$$K_s(\alpha) := \sup_{p,k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{q\in\mathbb{Z}^d} \frac{|\alpha_{p,q,k}||k|^{s-1}}{(1+|p|^s)(1+|q|^s)} < +\infty.$$

Lemme 7.2. *Pour tout $s > 0$ et $\varepsilon > 0$, on dispose de $C = C(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $u, v \in H^r(T^d)$:*

$$||B(u,v)||_{H^{s-d/2-1-\varepsilon}} \leq C\ K_r(\alpha)\ ||u||_{H^s}||v||_{H^s}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
|\widehat{B(u,v)}(k)| &\leq \sum_{p,q\in\mathbb{Z}^d} |\alpha_{p,q,k}||\widehat{u}(p)||\widehat{v}(q)| \\
&\leq \frac{1}{|k|^{s-1}} \sum_{p,q\in\mathbb{Z}^d} \frac{|\alpha_{p,q,k}||k|^{s-1}}{|p|^s|q|^s} |p|^s|\widehat{u}(p)||q|^s|\widehat{v}(q)| \\
&\leq \frac{1}{|k|^{s-1}} \left(\sum_{p,q\in\mathbb{Z}^d} \frac{|\alpha_{p,q,k}||k|^{s-1}}{|p|^s|q|^s}|p|^{2s}|\widehat{u}(p)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p,q\in\mathbb{Z}^d} \frac{|\alpha_{p,q,k}||k|^{s-1}}{|p|^s|q|^s}|q|^{2s}|\widehat{v}(q)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{K_s(\alpha)}{|k|^{s-1}} ||u||_{H^s}||v||_{H^s}
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement :

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^{2s-d-2-2\varepsilon}|\widehat{B(u,v)}(k)|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{|k|^{d+2\varepsilon}}\right)^{1/2} K_s(\alpha)||u||_{H^s}||v||_{H^s}.$$

□

Lemme 7.3. *Si $u \in H^s(T^d)$, alors pour tout $r < s$ et $n \geq 1$, on a :*

$$||(Id-\mathbb{P}_n)u||_{H^r} \leq \frac{||u||_{H^s}}{n^{s-r}}.$$

Démonstration. Facile. □

Corollaire 7.4. *Soit $s > -d/2-1-\varepsilon$, puis $\gamma \geq 0$, posons $r = s+\gamma+d/2+1+\varepsilon$. Rappelons que l'on a défini $R_n(u,v) := \beta_n^{-1}\Big(B(u,v)-\mathbb{P}_nB(\mathbb{P}_nu,\mathbb{P}_nv)\Big)$. Alors :*

$$||R_n(u,v)||_{H^s} \leq C||u||_{H^r}||v||_{H^r}\ \beta_n^{-1}n^{-\gamma}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\beta_n||R_n(u,v)||_{H^s} &\leq ||(Id-\mathbb{P}_n)B(u,v)||_{H^s}\\
&\quad + ||\mathbb{P}_nB((Id-\mathbb{P}_n)u,v)||_{H^s}\\
&\quad + ||\mathbb{P}_nB(\mathbb{P}_nu,(Id-\mathbb{P}_n)v)||_{H^s}\\
&\leq \frac{||B(u,v)||_{H^{s+\gamma}}}{n^\gamma}\\
&\quad + C||(Id-\mathbb{P}_n)u||_{H^{s+d/2+1+\varepsilon}}||v||_{H^{s+d/2+1+\varepsilon}}\\
&\quad + C||(Id-\mathbb{P}_n)v||_{H^{s+d/2+1+\varepsilon}}||u||_{H^{s+d/2+1+\varepsilon}}\\
&\leq \frac{C}{n^\gamma}\ ||u||_{H^{s+\gamma+d/2+1+\varepsilon}}||v||_{H^{s+\gamma+d/2+1+\varepsilon}}
\end{aligned}$$

□

Lemme 7.5. *Si $(\alpha_{p,q,k})_{p,q,k\in\mathbb{Z}^d}$ est symétrique en p et q et vérifie un contrôle du type :*

$$|\alpha_{p,q,k}| \leq \frac{C\ |k|}{1+|k-p-q|^\beta},$$

avec $\beta > d$, alors pour tout $s < \beta - d$, $\varphi \in H^{d/2+1+\varepsilon}(T^d)$ et $p \in \mathbb{Z}^d$:

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}^d}|\alpha_{p,q,k}||\widehat{\varphi}(k)|(1+|q|)^s \leq C_{s,\varepsilon}||\varphi||_{H^{d/2+1+\varepsilon}}\ (1+|p|)^s.$$

Lemme 7.6. $(\alpha_{p,q,k})_{p,q,k\in\mathbb{Z}^d}$ *est symétrique en* p *et* q *et vérifie un contrôle du type :*

$$|\alpha_{p,q,k}| \leq \frac{C\ |k|}{1+|k-p-q|^{\beta}},$$

avec $\beta > d$, $u \in H^{d+1+\varepsilon}(T^d)$ *et* $\varphi \in H^{d+1+\varepsilon}(T^d)$, *alors :*

$$||B(u,\cdot)^*\varphi - B(u,\cdot)^*\varphi||_{\mathbb{L}^2(T^d)} \leq C||u||_{H^{d+1+\varepsilon}(T^d)}||\varphi||_{H^{d+1+\varepsilon}(T^d)}\ n^{-d-\varepsilon/2}$$

Références

[1] Giuseppe Cannizzaro, Dirk Erhard et Fabio Toninelli. *Weak coupling limit of the Anisotropic KPZ equation.* 2021. doi : 10.48550/ARXIV.2108.09046. url : https://arxiv.org/abs/2108.09046.

[2] Patrícia Gonçalves et al. *Sharp Convergence to Equilibrium for the SSEP with Reservoirs.* 2021. doi : 10.48550/ARXIV.2110.06353. url : https://arxiv.org/abs/2110.06353.

[3] M. Jara, C. Landim et K. Tsunoda. *Derivation of viscous Burgers equations from weakly asymmetric exclusion processes.* 2019. doi : 10.48550/ARXIV.1902.08016. url : https://arxiv.org/abs/1902.08016.

[4] Milton Jara et Claudio Landim. *The stochastic heat equation as the limit of a stirring dynamics perturbed by a voter model.* 2020. doi : 10.48550/ARXIV.2008.03076. url : https://arxiv.org/abs/2008.03076.

[5] Milton Jara et Otávio Menezes. *Non-equilibrium Fluctuations of Interacting Particle Systems.* 2018. doi : 10.48550/ARXIV.1810.09526. url : https://arxiv.org/abs/1810.09526.