

Les motifs purs

秦珺辉

18 septembre 2022

Table des matières

1 Les motifs purs	1
1.1 Le groupe de Chow	1
1.2 Les propriétés générales	3
1.3 La théorie complète pour les courbes	5
1.4 Le cas des variétés abéliennes	6
1.5 Les variétés jacobiniennes, variétés de Picard et variétés d'Albanese	12

1 Les motifs purs

Sauf indication spécifique, on toujours suppose la variété est projective lisse. Les référence principaux sont [1], [2].

1.1 Le groupe de Chow

Soit X une variété algébrique.

Definition 1.1. *Un k -cycle algébrique sur X est une somme formelle $\sum n_i Z_i$, où Z_i sont sous-variétés irréductibles de X , avec codimension k . On note $Z^k(X)$ comme le groupe engendré par les k -cycles algébriques.*

Definition 1.2. *On définit $\text{CH}^i(X)$ comme $Z^i(X) \otimes \mathbb{Q}$ quotient l'équivalence rationnelle, c'est-à-dire que Z et Z' sont équivalent rationnelle s'il y a un*

$V \subset X \times \mathbb{P}^1$ tel que

$$[V \cap X \times \{0\}] - [V \cap X \times \{\infty\}] = [Z] - [Z'].$$

Il y a une théorie d'intersection sur $\text{CH}(X)$, que l'on la note comme la forme $Z \cdot W$.

Soit $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme, on l'associe

$$f_*: \text{CH}^i(X) \longrightarrow \text{CH}^{i+\dim Y - \dim X}(Y)$$

$$\alpha \longmapsto \begin{cases} [k(\alpha) : k(f(\alpha))]f(\alpha), & \dim f(\alpha) = \dim \alpha, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

et on l'utiliser pour définir la pullback comme

$$f^*: \text{CH}^i(Y) \longrightarrow \text{CH}^i(X)$$

$$\alpha \longmapsto p_{X*}(p_Y^{-1}(\alpha) \cdot \Gamma_f)$$

Definition 1.3. On définit l'ensemble de correspondance

$$\text{Corr}^r(X, Y) = \text{CH}^{\dim X + r}(X \times Y).$$

On y a une multiplication comme

$$\begin{array}{ccc} \text{Corr}^r(X, Y) & \times & \text{Corr}^s(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Corr}^{r+s}(X, Z) \\ \alpha & \times & \beta & \longmapsto & p_{Y*}(p_Z^*(\alpha) \cdot p_X^*(\beta)). \end{array}$$

En fin, la forme correcte de théorie de classe caractéristique est sur le groupe de Chow.

Definition 1.4. On dit $K_0(X)$, le groupe engendré formellement par les fibres vectoriels quotient la relation $[\mathcal{F}] - [\mathcal{F}'] - [\mathcal{F}']$ s'il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0.$$

On peut définir un caractère de Chern

$$\text{ch}: K_0(X) \longrightarrow \text{CH}(X)$$

et une classe de Todd

$$\text{td}: K_0(X) \longrightarrow \text{CH}(X).$$

Theorem 1.1 (Grothendieck–Riemann–Roch). Soit $f: X \rightarrow Y$ projectif lisse, donc on a

$$\text{ch}(f_*(x)) = f_*(\text{ch}(x) \cdot \text{td}(T_f)).$$

1.2 Les propriétés générales

Definition 1.5. La catégorie de motifs purs \mathcal{M}_k se compose des données suivantes :

- Un objet est un triplet (X, p, m) où X est une variété algébrique, p est un élément idempotent dans $\text{Corr}^0(X, X)$ et m est un entier.
- Un morphisme de (X, p, m) à (Y, q, n) est un élément de

$$q \text{Corr}^{n-m}(X, Y)p.$$

Definition 1.6. Il y a quelques constructions sur la catégorie de motifs purs :

1. Un foncteur

$$h: \text{Var}_k^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{M}_k$$

par $X \mapsto (X, \mathbf{id}, 0)$.

2. La somme directe en partie par

$$(X, p, m) \oplus (Y, q, m) = (X \sqcup Y, p \oplus q, m).$$

3. Le produit tensoriel par

$$(X, p, m) \otimes (Y, q, n) = (X \times Y, p \otimes q, m + n).$$

4. Les motifs spéciaux : le motif identité $\mathbf{id} = (\text{Spec } k, \mathbf{id}, 0)$ et le motif de Lefschetz $\mathbb{L} = (\text{Spec } k, \mathbf{id}, -1)$ (ou son dual $\mathbb{T} = (\text{Spec } k, \mathbf{id}, 1)$, s'appelle le motif de Tate).

5. L'image réciproque $f^*: h(Y) \rightarrow h(X)$ et l'image directe $f_*: h(X) \rightarrow h(Y) \otimes \mathbb{L}^{\dim X - \dim Y}$ pour le morphisme $f: X \rightarrow Y$. En fait on peut regarder f comme une correspondance $\Gamma_f \in \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y) = \text{Corr}^0(Y, X) = \text{Corr}^{\dim Y - \dim X}(X, Y)$.

6. Soit X irréductible avec k' comme le corps des constants, alors il y a un morphisme $\alpha: X \rightarrow \text{Spec } k'$. Donc après fixant un k' -point x de X , $\alpha^*: h(\text{Spec } k') \rightarrow h(X)$ admet une décomposition

$$h(X) = \alpha^*(h(\text{Spec } k')) \oplus M,$$

où on note le premier $h^0(X)$, représentant la partie avec degré 0. D'autre part, le morphisme $\alpha_*: h(X) \rightarrow h(\text{Spec } k') \otimes \mathbb{L}^{\dim X}$ avec

un k' -point x de X donne une décomposition

$$h(X) = h(\text{Spec } k') \otimes \mathbb{L}^{\dim X} \oplus N,$$

où on note le premier $h^{2d}(X)$, représentant la partie avec degré $2d$.
Donc on a une décomposition

$$h(X) = h^0(X) \oplus h_{<2n}^{>0}(X) \oplus h^{2n}(X),$$

un problème central est la construction de chaque $h^i(X)$.

7. La somme directe dans le cas général. Soit $m < n$, on définit

$$(X, p, m) \oplus (Y, q, n) = (X, p, m) \otimes \mathbb{L}^{n-m} \oplus (Y, q, n).$$

On peut montrer que cette catégorie est pseudo-abélienne, c'est à dire que chaque endomorphisme idempotent a un noyau. Soit $M = (X, p, m)$ un motif et pfp un endomorphisme idempotent de M , il est facile de voir que l'on a la décomposition

$$M = (X, pfp, m) \oplus (X, p - pfp, m),$$

qui force le dernier à être un noyau. Mais en général, cette catégorie n'est pas abélienne. En fait si non, on construit un sous-objet propre de \mathbf{id} . D'abord, on peut trouver une courbe elliptique E avec un k -point P d'ordre infini. Donc $\xi = (2P) - (0) \in \text{CH}^1(E \times \text{Spec } k)$ n'est pas 0. Il donne $\xi_* : \mathbb{L} \rightarrow E$ et $\xi^* : E \otimes \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$, avec $\xi_* \circ \xi^* = 0$ parce que

$$\xi_* \circ \xi^* = \xi \cdot \xi = (2P, 2P) - (2P, 0) - (0, 2P) + (0, 0) \in \text{Corr}^1(E, E),$$

qui est 0 par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \xi \cdot \xi &= ((2P, 2P) + (0, 0) - 2(P, P)) + (2(P, P) - (2P, 0) - (0, 2P)) \\ &= \Delta_*([2P] - 2[P] + [0]) + (\mathbf{id}, 2P - \mathbf{id})_*([2P] - [0] - [2P]) \\ &= \Delta_*(0) + (\mathbf{id}, 2P - \mathbf{id})_*(0) \\ &= 0 \in \text{CH}^2(E \times_k E). \end{aligned}$$

Mais ça force \mathbb{L} en ayant un sous-objet propre $\text{im } \xi^*$ (il est propre car $\xi \neq 0$), donc \mathbf{id} , lui aussi. Ce n'est pas possible, car $\text{End}(\mathbf{id}) = \mathbb{Q}$ une algèbre à division, et l'objet \mathbf{id} est décomposable dans une catégorie abélienne rigide.

Enfin, on définit la notation du groupe de Chow pour tous les motifs. Il fait le même que les variétés.

Definition 1.7. *On dit que pour le motif M , le groupe de Chow associé est*

$$\mathrm{CH}^d(M) = \mathrm{Hom}(\mathbb{L}^d, M).$$

Notez que chaque motif est un facteur direct de $h(Y) \otimes \mathbb{L}^n$, donc par le lemme de Yoneda, nous concluons le résultat au dessous :

Proposition 1.2 (Le principe de Manin). *Le morphisme $f: M \rightarrow N$ est un isomorphisme si pour chaque Y , le morphisme $\omega_f(Y): \mathrm{CH}^*(M \otimes h(Y)) \rightarrow \mathrm{CH}^*(N \otimes h(Y))$ est un isomorphisme.*

En tant qu'une application, nous comptons le motif d'une fibre projectif.

Example 1.3. *Soient \mathcal{E} un faisceau cohérent sur S et $\mathbf{Proj}_S[\mathcal{E}]$ un schéma sur S tel que $\pi: X = \mathbf{Proj}_S[\mathcal{E}] \rightarrow S$ donne $\pi^{-1}(U) = \mathrm{Proj} \bigoplus_{d>0} \mathrm{Sym}^d(\mathcal{E})(U)$, alors $\mathrm{CH}^*(X) = \mathrm{CH}^*(S)[\xi]$, où ξ est la classe première de Chern de $\mathcal{O}_X(1)$, qui satisfait*

$$\xi^{r+1} = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \pi^* c_{r-j+1}(\mathcal{E}) \xi^j.$$

Donc pour tout Y ,

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^*(h(X) \otimes h(Y)) &= \mathrm{CH}^*(X \times Y) \\ &= \bigoplus_{i=0}^r \mathrm{CH}^{*-i}(S \times Y) \\ &= \mathrm{CH}^* \left(\bigoplus_{i=0}^r h(S) \otimes \mathbb{L}^i \otimes h(Y) \right), \end{aligned}$$

c'est à dire qu'il y a un isomorphisme par le principe de Manin :

$$\sum_{i=0}^r \xi^i \circ \pi^*: \bigoplus_{i=0}^r h(S) \otimes \mathbb{L}^i \longrightarrow h(X).$$

1.3 La théorie complète pour les courbes

Soit X est une k -courbe projective lisse connexe avec un k -point x , on peut écrire une décomposition

$$h(X) = h^0(X) \oplus h^1(X) \oplus h^2(X).$$

Le but de cette section est la construction de $h^1(X)$.

Proposition 1.4. *Notez J et J' comme les variétés Jacobiennes de X et X' , alors*

$$\mathrm{Hom}(h^1(X), h^1(X')) = \mathrm{Hom}(J, J') \otimes \mathbb{Q}.$$

Donc la sous-catégorie pleine de \mathcal{M}_k avec la forme facteur direct de $h^1(X)$ est équivalent avec $\mathrm{AbVar}_k/\mathrm{Isogeny}$.

Proof. On trouve

$$\mathrm{Hom}(h^1(X), h^1(X')) = p_1 A^1(X \times X') p_1 = A^1(X \times X') / (A^1(X) \times X' + X \times A^1(X')).$$

Mais par les propriétés de la variété jacobienne, on a

$$\mathrm{Hom}(J, J') = \mathrm{Hom}^0(X, J') = \{D \in A_{\mathbb{Z}}(X \times X') \mid D(x) = D(x') = 0\},$$

où Hom^0 s'explique comme le morphisme fixant le point de base. Donc

$$\mathrm{Hom}(h^1(X), h^1(X')) = \mathrm{Hom}(J, J') \otimes \mathbb{Q}.$$

la seconde conclusion est directement dérivée par la première, car chaque variété abélienne est isogène avec une sous-variété de quelque variété Jacobienne. \square

Remark 1.5. *Nous avons une décomposition du groupe de Chow :*

	$h^0(X)$	$h^1(X)$	$h^2(X)$
CH^0	$\mathrm{CH}^0(X)$	0	0
CH^1	0	$\mathrm{Pic}_X^0 \otimes \mathbb{Q}$	\mathbb{Q}

1.4 Le cas des variétés abéliennes

Soit X une variété abélienne. Dans cette section on fait la décomposition et le théorème de Lefschetz vache pour X .

Theorem 1.6. *On a :*

1. *Il y a une décomposition*

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2g} h^i(X)$$

canoniquement tel que $[\times n]^|_{h^i(X)} = \times n^i|_{h^i(X)}$.*

2. Le morphisme diagonal $X \rightarrow X^n$ induit un isomorphisme

$$\bigwedge h^1(X) \cong h^i(X).$$

3. Pour une fibre en droites ample symétrique ξ (c'est-à-dire $\sigma^*\xi = \xi$), on a

$$\begin{array}{ccc} h^i(X) & \longrightarrow & h(X) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \xi^{g-i} \\ h^{2g-i}(X) \otimes \mathbb{L}^{i-g} & \longrightarrow & h(X) \otimes \mathbb{L}^{i-g}. \end{array}$$

En outre, ces $p_{0,1,2g-1,2g}$ concordent avec ceux dessus.

Maintenant on donne la transformation de Fourier sur les variétés abéliennes, qui bénéficie à la preuve de la décomposition motivique.

Theorem 1.7. Soient X et Y deux variétés projectives lisses, pour $\Gamma \in K_0(X \times Y)$ on peut l'associer

$$\begin{aligned} \Gamma_K: K_0(X) &\longrightarrow K_0(Y) \\ \alpha &\longmapsto p_{Y*}(p_X^*(\alpha) \cdot \Gamma), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{CH}}: \text{CH}(X) &\longrightarrow \text{CH}(Y) \\ \alpha &\longmapsto p_{Y*}(p_X^*(\alpha) \cdot \text{ch}(\Gamma)), \end{aligned}$$

on a

$$\text{ch}(\Gamma_K(\alpha)) = \Gamma_{\text{CH}}(\text{ch}(\alpha) \cdot \text{td}(T_{X/k})).$$

Proof. Par le théorème de Grothendieck–Riemann–Roch sur p_Y et $p_X^*(\alpha) \cdot \Gamma$, on a

$$\text{ch}(\Gamma_K(\alpha)) = p_{Y*}(\text{ch}(p_X^*(\alpha) \cdot \Gamma) \cdot \text{td}(T_{X \times Y/Y})),$$

qui est exactement le résultat. \square

Traversant à les variétés abéliennes A et B , soit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \times_k B & \xrightarrow{p_A} & A \\ p_B \downarrow & & \downarrow \lambda \\ B & \xrightarrow{\mu} & \text{Spec } k \end{array},$$

on a

$$p_A^*(T_{A/k}) = p_A^*(\lambda^* \mathcal{L}_{A/k}) = p_B^* \mu^* \mathcal{L}_{A/k},$$

où $\mathcal{L}_{A/k} = (\lambda_* \Omega_{A/k})^\vee$, donc le théorème dessus donne

$$\text{ch}(\Gamma_K(\alpha)) = \Gamma_{\text{CH}}(\text{ch}(\alpha)) \cdot \mu^* \text{td}(\mathcal{L}_{A/k}).$$

Definition 1.8. *Le faisceau de Poincaré \mathcal{L} donne une correspondance*

$$F = \text{ch}(\mathcal{L}) \in \text{CH}(A \times_k \hat{A})$$

qui est dit la transformation de Fourier de A à \hat{A} . On clarifie la notation comme

$$F_K = \mathcal{L}_K, F_{\text{CH}} = \mathcal{L}_{\text{CH}}.$$

Lemma 1.8. *Soit g la dimension de A , on a*

$$F_{\text{CH}}(1_A) = (-1)^g e_{\hat{A}*}(1_k).$$

Proof. Soit $\lambda: A \rightarrow \text{Spec } k$, $\mu: \hat{A} \rightarrow \text{Spec } k$, par le théorème 1.7, on a

$$\text{ch}(F_K(\mathcal{O}_A)) = \text{td}(\mu^* \mathcal{L}_{A/k}) F_{\text{CH}}(1_A).$$

En suite

$$F_K(\mathcal{O}_A) = p_{\hat{A}*}(\mathcal{L}) = \sum_{i=0}^g (-1)^i [R^i p_{\hat{A}*} \mathcal{L}].$$

En outre, $(R^i p_{\hat{A}*} \mathcal{L})_x = 0$ pour tous les $x \neq 0 \in \hat{A}$ par lemme 1.14, donc $R^i p_{\hat{A}*} \mathcal{L} = 0$ pour $i < g$ parce que ils ne deviennent pas des faisceaux gratteciel. Donc on a

$$F_K(\mathcal{O}_A) = (-1)^g [R^g p_{\hat{A}*} \mathcal{L}].$$

C'est un faisceau supportant à $\{0\} \subset \hat{A}$, donc on peut écrire :

$$F_K(\mathcal{O}_A) = (-1)^g [R^g p_{\hat{A}*} \mathcal{L}] = (-1)^g e_{\hat{A}*} \mathcal{O}_{\text{Spec } k}.$$

Par le théorème de Grothendieck–Riemann–Roch pour $e_{\hat{A}}$, on a

$$\begin{aligned} \text{ch}(F_K(\mathcal{O}_A)) &= (-1)^g \text{ch}(e_{\hat{A}*}(\mathcal{O}_{\text{Spec } k})) \\ &= (-1)^g e_{\hat{A}*}(1_k) \text{td}(T_{\hat{A}/k})^{-1}, \end{aligned}$$

mais $T_{\hat{A}/k}$ et $\mu^* \mathcal{L}_{A/k}$ sont triviaux donc on a

$$F_{\text{CH}}(1_A) = (-1)^g e_{\hat{A}*}(1_k),$$

c'est fini. □

Proposition 1.9. *Soit σ l'involution $a \mapsto -a$ sur A , on a*

$$\hat{F} \circ F = (-1)^g[\Gamma_\sigma]$$

où Γ_σ est le graph de σ .

Proof. On note $l = c_1(\mathcal{L})$ la classe première de Chern, donc sur $A \times \hat{A} \times A$, on a

$$\hat{F} \circ F = p_{13*} \left(p_{12}^*(e^l) \cdot p_{23}^*(e^{tl}) \right) = p_{13*} \left(\exp(p_{12}^*(l) + p_{23}^*(s^*l)) \right),$$

où $s: (a, b, c) \mapsto (c, b, a)$ est l'application de swap. On le peut réécrire $p_{12} + sp_{23}$ comme

$$p_{12} + sp_{23} = \Sigma: (a, \hat{a}, a') \mapsto (a + a', \hat{a}),$$

donc par le théorème de cube on a

$$p_{12}^*(l) + p_{23}^*(s^*l) = \Sigma^*(l),$$

ça donne

$$\hat{F} \circ F = p_{13*} \Sigma^*(e^l) = m^* p_{A*}(e^l) = m^* \hat{F}_{\text{CH}}(1_{\hat{A}}),$$

parce que l'on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \times \hat{A} \times A & \xrightarrow{p_{13}} & A \times A \\ \Sigma \downarrow & & \downarrow m \\ A \times \hat{A} & \xrightarrow{p_A} & A. \end{array}$$

Par le lemme,

$$\begin{aligned} \hat{F} \circ F &= m^* \hat{F}_{\text{CH}}(1_{\hat{A}}) \\ &= (-1)^g m^* e_{A*}(1_k) \\ &= (-1)^g \tau_* \lambda^*(1_k) \\ &= (-1)^g [\Gamma_\sigma]. \end{aligned}$$

La preuve est fini. □

On remarque que ça donne

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\text{CH}} \circ F_{\text{CH}}(\xi) &= \hat{F} \circ F \circ \xi \\ &= (-1)^g [\Gamma_\sigma] \circ \xi \\ &= (-1)^g \sigma_* \xi \end{aligned}$$

pour $\xi \in \text{CH}^p(A)$.

Proposition 1.10. *Pour $\xi \in \text{CH}^p(A)$, soit $F_{\text{CH}}(\xi) = \sum_{q=0}^g \eta_q$ avec $\eta_q \in \text{CH}^q(\hat{A})$, alors on a*

$$n^*(\eta_q) = n^{g-p+q}\eta_q.$$

Ici on note $n: A \rightarrow A$, $x \mapsto nx$ la multiplication par n .

Proof. En fait on a

$$\eta_q = p_{\hat{A}*} \left(p_A^*(\xi) \frac{l^{g-p+q}}{(g-p+q)!} \right),$$

donc

$$\begin{aligned} n^*(\eta_q) &= n^* p_{\hat{A}*} \left(p_A^*(\xi) \frac{l^{g-p+q}}{(g-p+q)!} \right) \\ &= p_{\hat{A}*} (1 \times n)^* \left(p_A^*(\xi) \frac{l^{g-p+q}}{(g-p+q)!} \right) \\ &= \left(p_A^*(\xi) \frac{(1 \times n)^* l^{g-p+q}}{(g-p+q)!} \right) \\ &= n^{g-p+q} \eta_q \end{aligned}$$

par la propriété universelle de \mathcal{L} . □

On note

$$\text{CH}_s^p(A) = \{\xi \in \text{CH}^p(A) \mid n^*(\xi) = n^{2p-s}\xi, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Lemma 1.11. *Soit $\xi \in \text{CH}^p(A)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $F_{\text{CH}}(\xi) \in \text{CH}^{g-p+s}(\hat{A})$.
2. $\xi \in \text{CH}_s^p(A)$.
3. $k^*(\xi) = k^{2p-s}\xi$.
4. $k_*(\xi) = k^{2g-2p+s}\xi$.
5. $F_{\text{CH}}(\xi) \in \text{CH}_s^{g-p+s}(\hat{A})$.

Proof. D'abord, on a

$$\hat{F}_{\text{CH}} \circ F_{\text{CH}}(\xi) = \sum \xi_q$$

avec $n^*(\xi_q) = n^{g-(g-p+s)+q}\xi_q$. D'autre part, il est $(-1)^g \sigma_*(\xi)$, donc $n^*(\xi) = n^{2p-s}\xi$, ça prouve $1 \Rightarrow 2$. Les parts restants sont routines. □

Theorem 1.12. *On a une décomposition*

$$\mathrm{CH}^p(A) = \bigoplus_{s=p-g}^p \mathrm{CH}_s^p(A).$$

Proof. On peut écrire

$$F_{\mathrm{CH}}(\xi) = \sum \eta_q,$$

où $\eta_q \in \mathrm{CH}_{p+q-g}^q(\hat{A})$. Par le lemme, on déduit que $\hat{F}_{\mathrm{CH}}(\eta_q) \in \mathrm{CH}_{p+q-g}^p(A)$, donc

$$\hat{F}_{\mathrm{CH}} \circ F_{\mathrm{CH}}(\xi) = (-1)^g \sigma_*(\xi) \pmod{\deg > p}$$

en fait donne une équation

$$\hat{F}_{\mathrm{CH}} \circ F_{\mathrm{CH}}(\xi) = (-1)^g \sigma_*(\xi).$$

Cela donne une décomposition

$$\mathrm{CH}^p(A) = \bigoplus \mathrm{CH}_s^p(A).$$

En outre, q est dans $0, \dots, g$ donc il donne $\mathrm{CH}^p(A) = \bigoplus_{s=p-g}^p \mathrm{CH}_s^p(A)$. \square

Proof of theorem 1.6 (1). En utilisant $F \in \mathrm{CH}(A \times_k \hat{A})$ et \hat{F} , on peut construire un morphisme

$$h(A) \xrightarrow{\phi_i} h(\hat{A}) \otimes \mathbb{L}^i \xrightarrow{\psi_i} h(A),$$

où $i = -g, \dots, g$. C'est exactement l'image de F (ou \hat{F}) dans la décomposition

$$\mathrm{CH}(A \times_k \hat{A}) = \bigoplus_{i=-g}^g \mathrm{Hom}(h(A), h(\hat{A}) \otimes \mathbb{L}^i).$$

Par la proposition 1.9, on a

$$(-1)^g [\Gamma_\sigma] = \sum_i \psi_i \circ \phi_i.$$

On peut modifier ψ_i par $(-1)^g [\Gamma_\sigma] \circ \psi_i$ et obtenir

$$\mathbf{id} = \sum (-1)^g [\Gamma_\sigma] \circ \psi_i \circ \phi_i.$$

On trouve que

$$(n \times \mathbf{id})^* (-1)^g [\Gamma_\sigma] \circ \psi_i \circ \phi_i = n^{g+i} (-1)^g [\Gamma_\sigma] \circ \psi_i \circ \phi_i,$$

donc il est réduit à un lemme suivant :

Lemma 1.13. *Soit*

$$\mathbf{id} = \sum \pi_i.$$

S'il y a un endomorphisme μ satisfaisant

$$\mu \circ \pi_i = \lambda_i \pi_i$$

avec λ_i différent, alors π_i sont idempotents.

Proof. On écrit

$$\begin{aligned} \mu^n \circ \mathbf{id} \circ \pi_i &= \mu^n \circ \left(\sum \pi_j \right) \pi_i \\ &= \lambda_j^n \pi_j \circ \pi_i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_i^n (\pi_i^n - \pi_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j^n \pi_j \circ \pi_i = 0.$$

Parce que le déterminant de Vandermonde est non-zéro, on conclut $\pi_i \circ \pi_j = \delta_{ij} \pi_j$. \square

On peut prendre

$$h^i(A) = (A, \pi_i, 0),$$

avec $\pi_i = (-1)^g [\Gamma_\sigma] \circ \psi_i \circ \phi_i$, il satisfait $[\times n]^*|_{h^i(X)} = \times n^i|_{h^i(X)}$. \square

1.5 Les variétés jacobiniennes, variétés de Picard et variétés d'Albanese

Soit A une variété abélienne, pour un faisceau inversible \mathcal{L} on peut définir un homomorphisme

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{L}}: A &\longrightarrow \text{Pic}(A) \\ a &\longmapsto t_a^* \mathcal{L} \otimes L^{-1}, \end{aligned}$$

on dit que $\deg D = 0$ si $\lambda_{\mathcal{L}(D)} = 0$, et note $\text{Pic}^0(A)$ l'ensemble de D tel que $\deg D = 0$.

Definition 1.9. *On dit \hat{A} la variété duale de A , et \mathcal{L} le faisceau de Poincaré sur $A \times \hat{A}$, s'il satisfait $\mathcal{L}|_{A \times \{b\}} \in \text{Pic}^0(A_b)$ et $\mathcal{L}|_{0 \times \hat{A}}$ est trivial, et il est l'objet universel, c'est-à-dire si T et \mathcal{M} satisfont les conditions avant, alors il existe $T \rightarrow A$ tel que la pullback de \mathcal{L} est \mathcal{M} .*

Proposition 1.14. *Si $\mathcal{F} \neq 0 \in \text{Pic}^0(A)$, alors on a*

$$H^i(A, \mathcal{F}) = 0, \forall i.$$

Theorem 1.15. *La foncteur*

$$T \mapsto P_X(T) = \text{Pic}(X \times T)/q^* \text{Pic}(T)$$

est représentable par une variété, noté Pic_X . Sa composante connexe de 1, est noté Pic_X^0 et dit la variété de Picard de X .

Theorem 1.16. *On fixe un point x_0 sur X , alors il existe une variété Alb_X dit la variété d'Albanese, et un morphisme $\text{alb}_X: X \rightarrow \text{Alb}_X$ satisfaisant la propriété universelle : si il existe $g: X \rightarrow B$, $g(x_0) = 0$ où B est une variété abélienne, alors il existe uniquement un morphisme $g: \text{Alb}_X \rightarrow B$ tel que $f = g \circ \text{alb}_X$.*

Remark 1.17. *Après fixant x_0 sur X , on peut aussi donner une autre description de Pic_X^0 . La variété $\text{Pic}_X^0 \times X$ elle est muni avec un faisceau inversible \mathcal{L} (le faisceau de Poincaré) tel que $\mathcal{L}_{\text{Pic}_X^0 \times \{x_0\}}$ est trivial, et il est universel sur cette propriété. En fait ça donne*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(S, \text{Pic}_X^0) &= \{(S, \mathcal{M}) \mid \mathcal{M}_{\text{Pic}_X^0 \times \{x_0\}} = 0\} \\ &= \text{Pic}^0(X \times S)/q^* \text{Pic}^0(S). \end{aligned}$$

Theorem 1.18 (Abel–Jacobi). *Soit C une courbe lisse projective, alors on a un isomorphisme canonique*

$$\text{Alb}_C \cong \text{Pic}_C^0.$$

On le note J_C , et le dit la variété jacobienne de C .

Proposition 1.19. *On a*

$$\text{Hom}(\text{Alb}_X, \text{Pic}_{X'}^0) \cong \{D \in \text{CH}^1(X \times X') \mid D(x_0) = D(x'_0) = 0\},$$

où x_0 et x'_0 sont les points de base de X et X' .

Références

- [1] A. J. Scholl, “Classical motives,” vol. 55, no. Part 1, pp. 163–187, 1994.
- [2] J. Murre and C. Deninger, “Motivic decomposition of abelian schemes and the fourier transform.” 1991.