Rapport de stage

Etienne Rossignol

Janvier 2022 - Juin 2022

1 Expérience de stage

1.1 Lieu du stage

J'avais choisi de faire mon stage avec Laurent Lafforgue. Son sujet de recherche est très large. Il s'agit de la théorie des topos de Grothendieck. Depuis peu, il est employé dans l'entreprise d'informatique et de télécommunication chinoise Huaweï. C'est donc dans le cadre de cette entreprise que j'ai choisi de faire mon stage.

Je suis resté à Paris pour mon stage de M1 car c'est où travaille mon responsable de stage. Je n'ai donc pas eu les difficultés de mes camarades qui sont partis à l'étranger.

L'entreprise Huaweï a des bureaux à Boulogne-Billancourt. C'est là que travaille mon responsable de stage et j'allais y travailler très régulièrement. Il s'agit d'un étage dans une tour louée. Les locaux sont très agréables, en bon état avec une vue sur la Seine. Il y a des salles de réunions, quelques bureaux personnels et des open-spaces. Je n'ai pas été complètement convaincu par l'intérêt des open-spaces pour la recherche en mathématiques. Ce sont des lieux assez bruyant et où on est facilement distraits. Néanmoins, à Boulogne, vu que la majorité des personnes avaient l'air d'être ingénieurs, la question de l'utilité des open-space doit se poser différemment que dans la recherche.

En plus de cela, Huaweï a créé récemment le centre Lagrange à Paris rue de Grenelle. Il s'agit d'un centre uniquement dédié à la recherche dont le but est de créér un pont entre l'entreprise Huaweï et le monde académique. Le centre est très beau et très adapté pour des réunions. Il y a des chercheurs qui travaillent avec des partenariats entre le monde académique et Huaweï dans ce centre.

C'est ici qu'ont lieu la plupart des rencontres avec d'autres mathématiciens que se soient des chercheurs de Huaweï ou du monde académique. Ainsi, j'ai pu écouté des exposés sur les sujets variés de la preuve de programme, de la théorie des motifs, de l'apprentissage artificiel, de l'information sémantique.

En particulier, j'ai pu suivre le début d'un groupe de travail tous les jeudis après-midi sur le thème des topos de Grothendieck et de leur lien avec la logique. Le but de ce groupe de travail était de faire dialoguer des mathématiciens, en particulier Laurent Lafforgue et Olivia Caramello avec des informaticiens théoriciens. Ainsi, en apprenant des mathématiques, les informaticiens découvrent d'autres approches possibles dans leurs problèmes et réciproquement les mathématiciens reçoivent de nouvelles questions qu'ils peuvent se poser. Dans ce cadre, j'ai fait un exposé d'une heure sur une réinterprétation en terme de topos des monoïdes.

Mon stage s'est déroulé en deux temps. Pendant les 3 premiers mois, j'ai lu divers articles sur le sujet des topos et pour découvrir différentes directions que pourrait prendre mon stage.

1.2 Lectures

J'ai commencé par lire un manuscrit pour comprendre des notions générales autour des topos et des liens intimes avec la logique géométrique : on peut associer de façon bijective à toute théorie un topos dit classifiant au sens que la catégorie des morphismes d'un topos E vers celui-ci est équivalente à celle des modèles de la théorie dans le topos E.

J'ai ensuite lu un article de Jean-Claude Belfiore et Daniel Bennequin travaillant pour Huaweï[BB21]. Le but de cet article est de comprendre le fonctionnement de réseaux de neurones de manière fine. Pour cela, on introduit une structure géométrique de topos sur le réseau de neurones et un champ. La difficulté est ensuite de comprendre dans ce cadre comment l'information est propagée dans le réseau. Pour cela, on introduit une notion d'information dite sémantique (en dualité avec l'information syntactique).

Cette notion d'information sémantique n'est pas encore complètement développée. J'ai pu lire un autre article (pas encore paru) qui explicite cette notion dans des cas assez simples pour lesquels on associe un espace topologique à de l'information. J'ai eu la chance de pouvoir rencontrer ces deux chercheurs et de pouvoir les écouter plusieurs fois réfléchir à cette théorie en cours d'élaboration.

Laurent Lafforgue m'a ensuite fait découvrir deux articles d'Olivier Leroy, mathématicien élève de Grothendieck. Dans l'article[Ler13], l'auteur présente une théorie de la mesure sur les lieux (locales en anglais). Cette théorie permet de généraliser la théorie de la mesure de manière à résoudre les paradoxes du type Banach-Taski : en terme de lieux, l'explication est que les ensembles considérés dans ce paradoxe ne sont plus d'intersection vide (il existe une intersection de mesure non nulle mais sans aucun point). Cette théorie a aussi des propriétés très fortes comme l'additivité stricte $m(A) = m(A) + m(B) + m(A \cap B)$

Dans un second article, l'auteur généralise les notions de groupoïde fondamental et du théorème de Van Kampen dans le cadre d'un topos au lieu d'un espace topologique.[Ler]

1.3 Monoïdes et équivalences de Morita

A l'issue d'un exposé du groupe de travail de Samuel Mimram, la question d'un lien entre réécriture et topos s'est posée. Deux approches différentes pour réfléchir à la question de la réécriture à partir de topos m'ont été suggérée. J'ai ensuite essayé d'approfondir l'une d'entre elles qui me paraissait plus facilement abordable. Il s'agit d'étudier la catégorie des actions du monoïde. Je me suis posé la question de savoir à quel point l'on pouvait reconstruire un monoïde à partir de cette catégorie. La question a été résolu [Kna] mais je propose une démonstration très différente en utilisant la théorie des topos. Je me suis ensuite posé quelques autres questions sur le sujet, comme l'invariance de la propriété de posséder une présentation finie.

Malheureusement, sur la stricte question de la réécriture, je n'ai pas réussi à trouver de résultat significatif. En particulier, la propriété de confluence d'un système de réécriture s'interprète mal dans cette approche à cause de l'orientation des flèches.

J'ai trouvé très enrichissant de pouvoir discuter avec de nombreux chercheurs d'horizons très diverses. J'ai ainsi pu rencontrer des mathématiciens logiciens, topologues ou géomètres et des informaticiens théoriciens ou non. Les sujets de recherche étaient à la frontière entre des domaines différents et des personnes avec des objectifs différents les uns les autres.

2 Équivalence de Morita de monoïdes

2.1 Introduction aux topos

On introduit les premières définitions :

Définition 1. *Soit C une catégorie et X un élément de C. Un ensemble S de flèches $A \to X$ pour A qui varie est appelé un crible si pour triangle commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & A' \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

avec $h \in S$, on a $g \in S$.

Soit $h : A \to X$. Pour tout crible S sur X, on appelle image réciproque de S par h l'ensemble

$$h^*S = \{s : A' \to A | h \circ s \in S\}$$

Il s'agit d'un crible sur A.

Définition 2. *Soit C un catégorie et $J : C \to Ens$ une fonction telle que $J(X)$ soit un ensemble de crible sur X.*

On dit que J est une topologie de Grothendieck sur C s'il vérifie les axiomes suivants :

- *Maximalité :*
  Pour tout X, le crible maximal $\{f : A \to X\}$ appartient à $J(X)$.
- *Stabilité :*
  Pour tout $h : X \to Y$, si $S \in J(Y)$, $h * (S) \in J(X)$.
- *Transitivité : Soit S un crible sur un objet X. Soit $S' \in J(X)$. Si pour tout $h : A \to X \in S'$ on a $h\grave{u}^*(S) \in J(A)$, alors $S \in J(X)$.*

Dans ce cas, on dit que (C, J) est un site.

Définition 3. *Soit C une catégorie. On appelle préfaisceau sur C les foncteurs contravariants $C \to Ens$. On note l'ensemble de ces préfaisceau $\hat{C}$. Il s'agit d'une catégorie dont les transformations naturelles de foncteurs deviennent les morphismes.*

Soit J une topologie sur C. Soit F un préfaisceau sur C. On dit que F est un faisceau si pour tout X, $S = \{X_l \xrightarrow{f_l} X\} \in J(X)$, la propriété suivante est vérifiée :

Considérons une famille de $x_i \in X_l$ qui vérifie les règles de compatibilité suivantes :

Pour tout i, j, $f : A \to X_i$ et $g : A \to X_j$, si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ X_j \arrow[r, "f_j"] & X \end{tikzcd}$$

on a $F(f)(x_i) = F(g)(x_j)$.

Alors il existe un unique $x \in X$ tel que pour tout i, $F(f_i)(x) = x_i$.

Remarque. *De manière plus synthétique, on peut demander que pour tout $S \in J(X)$*

$$F(X) = \varprojlim_{(X_l \xrightarrow{f_l} X) \in S} F(U)$$

Les faisceaux sur un site forment alors une sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaiseaux.

Définition 4. *On appelle topos une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux sur une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck.*

Pour E et E' des topos, on appelle morphisme de topos $f : E \to E'$ une paire de foncteurs adjoints

$$\left(E \xrightarrow{f^*} E', E' \xrightarrow{f_*} E\right)$$

telle que f^* respecte non seulement les colimites arbitraires mais aussi les limites finies. On appelle f_* l'image directe et f^* l'image réciproque.

On appelle points de E les morphismes de topos $Ens \to E$ avec Ens le topos des ensembles.

Un topos est une catégorie qui hérite de la grande majorité des propriétés catégoriques de la catégorie des ensembles. En autre, toutes les limites et colimites existent, il y a un Hom interne, on peut considérer des structures internes de monoïdes...

Définition 5. *On appelle théorie géométrique un théorie composée*
- *de sortes M_i*
- *de fonctions $f : M_1 M_2 ... \times M_k \to M_j$*
- *de relations $R \to M_1 \times M_2 ... \times M_k$*

et d'un ensemble d'axiomes qui sont des formules avec conjonctions finies et des disjonctions arbitraires.

Entre autres propriétés d'un topos, pour toute théorie géométrique T, on peut associer à tout topos E la catégorie des T-modèles de E. En effet, cela revient à associer à chaque sorte de T un objet de E, à chaque fonction un morphisme et à chaque relation un sous-objet.

Théorème 1. *Soit T une théorie géométrique. Il existe un topos C_T appelé topos classifiant de T muni d'un objet U_T appelé modèle universel de T qui vérifie la propriété universelle suivante :*

pour tout E, le foncteur

$$(f : E \to C_T) \longrightarrow f^* U_T$$

est une équivalence entre les morphismes de topos de E dans C_T et les modèle de T dans E.

Définition 6. *Soit T une théorie. On dit que T' est une théorie quotient de T si c'est une théorie avec le même langage et tel que les axiomes de T soient inclus dans ceux de T'.*

Théorème 2. *Soit T une théorie.*
Les sous-topos de C_T forment une catégorie équivalente à celle des théories quotients de T.

Par ailleurs, si on présente un topos C_T comme une catégorie de faisceaux sur un site (C, J), les sous-topos sont en bijection avec les topologies sur C qui contienne J.

2.2 Point de vue adopté

Nous cherchons à étudier les monoïdes d'un point de vue topossique. Pour cela, nous associons à tout monoïde une théorie :
A un monoïde A engendré par $f_1, ..., f_n, ...$, et des relations $x_i = y_i$ on peut associer la théorie T_A de ses actions.
Le langage est constitué
— d'une unique sorte M,
— de fonctions $f_1, ..., f_n, ...$
— aucun symbole de relation.
Les axiomes de T_A sont de la forme $\top \vdash x_i = y_i$.
Ainsi, les modèles de cette théorie sont les actions de A.

On peut alors associer à T_A son topos classifiant C_A. Comme la théorie ne contient que des axiomes de la forme $\top \vdash f = g$, on dit qu'il s'agit d'une théorie algébrique et alors ce topos est de type préfaisceau (équivalent à une catégorie de préfaisceaux)[Car].

On veut maintenant savoir à quel point l'on peut retrouver A à partir de C_A. Pour cela, on considère les isomorphismes de topos entre C_A et C_B avec B un autre monoïde.

Ceci est équivalent à considérer les isomorphismes entre les points de C_A et C_B. Par définition, il s'agit des morphismes $Ens \to E$ donc des modèles de C_A et C_B donc des des équivalences de catégories entre $\hat{A}$ et $\hat{B}$. Cela s'appelle équivalences de Morita entre A et B.

Les isomorphismes entre les topos de préfaisceaux $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont en bijection avec les équivalences de catégories entre les complétions Karoubiennes K_A et K_B de A et B.[Car]

On appelle complétion Karoubienne d'une catégorie C la sous-catégorie pleine de $\hat{C}$ composée des rétractes d'objets représentables.

2.3 Complétion karoubienne

La catégorie K_A est définie ainsi :
Les objets sont les $x \in A$ tels que $x^2 = x$.

Les morphismes sont les $x \xrightarrow{f} y$ avec $f \in A$ qui vérifient $yf = fx = f$. En cas d'ambiguïté, on notera $f_{x \to y}$.

On compose ainsi :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & y \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd}$$

en prenant la multiplication dans A.

On remarque que la condition $yf = fx = f$ revient précisément à demander que $\mathrm{id}_x = x$.

2.4 Caractérisation des monoïdes Morita-équivalents

Proposition 1. *[Kna]*

On a une équivalence de Morita entre A et B ssi il existe $a, u, v \in A$ tels que $a^2 = a$, $au = u$, $va = v$ et $vu = 1_A$ avec 1_A l'élément neutre de A et $B \cong aAa$.

Plus précisément, à toute équivalence de Morita on peut associer un tel triplet d'éléments et un isomorphisme $B \cong aAa$ et réciproquement.

Remarque. *aAa est un monoïde d'élément neutre a. Il s'identifie dans K_A à $Hom(a,a)$*

La condition $va = v$ n'est pas nécessaire pour caractériser les équivalences de Morita. En effet, à partir d'un tripet a, u, v vérifiant $a^2 = a$, $au = u$, $vu = 1_A$, on peut poser $v' = va$ et on trouve alors $a^2 = a$, $au = u$, $v'u = vau = vu = 1_A$ et $v'a = vaa = va = v'$.

A partir du triplet, on construit une équivalence de catégories dont le foncteur $F : K_A \to K_B$ vérifie $F(1_A) = uv$. Cela implique que $A \cong uvBuv$.

Démonstration. Soient A et B des monoïdes équivalents au sens de Morita. On a alors des foncteurs F et G, $\begin{tikzcd} K_A \arrow[r, bend left, "F"] & K_B \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ avec $F \circ G \cong \mathrm{id}_{K_B}$ et $G \circ F \cong \mathrm{id}_{K_A}$.

Posons $F(1_A) = x$, $G(1_B) = a$ et $G(x) = y$.

On a des morphismes $x_{1\to x}$ et $x_{x\to 1}$ qui vérifient $x_{1\to x} \circ x_{x\to 1} = \mathrm{id}_x$. On pose $v' = G(x_{1\to x})$ et $u' = G(x_{x\to 1})$. On a alors $v'u' = G(x_{1\to x} \circ x_{x\to 1}) = G(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_y$.

De plus, comme $G \circ F \cong \mathrm{id}_{K_A}$, on a des morphismes η et η^{-1} entre 1_A et y inverses l'un de l'autre.

Cela donne le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_A & K_B \\
1_A \arrow[r] \arrow[d, bend left, "\eta"] & x \arrow[dl] \arrow[dd, bend left=40, "x"] \\
y \arrow[u, bend left, "\eta^{-1}"] \arrow[d, bend left, "u'"] & \\
a \arrow[u, bend left, "v'"] & 1_B \arrow[l] \arrow[uu, bend left=20, "x"]
\end{tikzcd}$$

Posons $u = u'\eta$ et $v = \eta^{-1}v'$.

On a alors en restreignant G à 1_B un isomorphisme de monoïdes $B = \mathrm{Hom}(1_B, 1_B) \cong \mathrm{Hom}(a, a) = aAa$, $a^2 = a$, $au = u$ et $va = v$ par définition d'un morphisme et $vu = \eta^{-1}v'u'\eta = \eta^{-1}\eta = 1_A$ donc le triplet (a, u, v) et l'isomomorphisme de monoïde ont bien été construits.

Réciproquement, soient un isomorphisme $\phi : B \cong aAa$, a, u et v donnés. Construisons les foncteurs F et G. On identifie dans la suite B avec aAa à l'aide de ϕ.

On définit $F : K_A \longrightarrow K_B$ par

$F(x) = uxv$ et $F(f) = ufv$ avec x un objet et $x \xrightarrow{f} y$ un morphisme.

Comme $au = u$ et $va = v$, F est bien à valeurs dans aAa.

On a $F(x)^2 = uxvuxv = F(x)$ donc F(x) est bien idempotent. Prenons $y \xrightarrow{g} z$ un autre morphisme. On a $F(g)F(f) = ugvufv = ugfv = F(gf)$. Donc $F(y)F(f) = F(yf) = F(f)$ et $F(f)F(x) = F(fx) = F(f)$. Enfin, $F(\mathrm{id}_x) = uxv = \mathrm{id}_{F(x)}$.

Cela montre que $F(f)$ est un morphisme de K_B et que F est un foncteur.

Soit G le foncteur d'inclusion de K_B dans K_A qui associe x à x et f à f.

Montrons $F \circ G \cong \mathrm{id}_{K_B}$ et $G \circ F \cong \mathrm{id}_{K_A}$:

$G(F(x)) = uxv$ et $F(G(x)) = uxv$.

Remarquons que $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "ux"] & uxv \arrow[l, bend left, "xv"] \end{tikzcd}$ est un isomorphisme. En effet :

$uxx = ux = uxvux$, $xv = xxv = xvuxv$, $uxxv = uxv$ et $xvux = x$.

Prenons donc dans les deux cas comme transformations naturelles $\eta_x = ux$ et $\eta_x^{-1} = xv$.

On a bien que η est une transformation naturelle de id_{K_B} vers $F \circ G$ et une transformation naturelle de id_{K_A} vers $G \circ F$. En effet,

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "ux"] & y \arrow[d, "uy"] \\
uxv \arrow[r, "ufv"] & uyv
\end{tikzcd}$$

commute : $uyf = uf = ufx = ufvux$.

On conclut donc que $F \circ G \cong \mathrm{id}_{K_B}$ et $G \circ F \cong \mathrm{id}_{K_A}$. □

2.5 Caractérisation d'un foncteur

On peut donner une caractérisation générale des foncteurs pleinement fidèles $F : K_A \longrightarrow K_B$:

Posons $a = F(1_A)$. On a $A = \mathrm{Hom}(1_A, 1_A)$ que F identifie avec $\mathrm{Hom}(a, a) = aBa$. Nous utiliserons dans la suite l'identification $\phi : A \cong aBa$. En particulier, $a = \phi(1_A)$.

On peut alors définir $F' : K_A \longrightarrow K_B$ comme le plongement de K_A dans K_B induit par le plongement $A \xrightarrow{\phi} aBa \hookrightarrow B$.

Proposition 2. *On a $F \cong F'$.*

Démonstration. Soit $x \in K_A$. On a

$$\begin{tikzcd}
1_A \arrow[r, bend left, "x_1"] & x \arrow[l, bend left, "x_2"] & \overset{F}{\longrightarrow} & a \arrow[r, bend left, "F(x_1)"] & F(x) \arrow[l, bend left, "F(x_2)"]
\end{tikzcd}$$

.

Posons alors $\overrightarrow{x} = F(x_1)$ et $\overleftarrow{x} = F(x_2)$.

On trouve $F(x) = F(x_1x_2) = \overrightarrow{x}\,\overleftarrow{x}$ et $\overleftarrow{x}\,\overrightarrow{x} = F(x_2x_1) = F(x_{1_A \to 1_A}) = \phi(x)$.

De plus, on a par définition d'un morphisme $\overrightarrow{x}a = \overrightarrow{x}$, $a\overleftarrow{x} = \overleftarrow{x}$, $\overrightarrow{x}\,\overleftarrow{x}\,\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ et $\overleftarrow{x}\,\overrightarrow{x}\,\overleftarrow{x} = \overleftarrow{x}$.

Définissons alors η avec $\eta_x = \; F(x) \xrightarrow{\overleftarrow{x}} F'(x)$.

Montrons qu'il s'agit d'une transformation naturelle d'inverse $\eta'_x = \; F'(x) \xrightarrow{\overrightarrow{x}} F(x)$.

Soit $\; x \xrightarrow{f} y$. On a $f_{x \to y} = \; x \xrightarrow{x} 1_A \xrightarrow{f} 1_A \xrightarrow{y} y$.

Donc le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\overleftarrow{x}"] & F(y) \arrow[d, "\overleftarrow{y}"] \\
F'(x) \arrow[r, "F'(f)"] & F'(y)
\end{tikzcd}$$

est équivalent à

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "\overleftarrow{x}"] \arrow[d, "\overleftarrow{x}"] & F(1_A) \arrow[r, "F(f)"] & F(1_A) \arrow[r, "\overrightarrow{y}"] & F(y) \arrow[d, "\overleftarrow{y}"] \\
\phi(x) \arrow[rrr, "\phi(f)"] & & & \phi(y)
\end{tikzcd}$$

On a $\overleftarrow{y}\,\overrightarrow{y}F(f_{1_A \to 1_A})\overleftarrow{x} = F(y_{1_A \to 1_A} f_{1_A \to 1_A})\overleftarrow{x} = F(f_{1_A \to 1_A})\overleftarrow{x} = \phi(f)\overleftarrow{x}$ donc le diagramme commute.

On a $\eta_x\eta'_x = \overleftarrow{x}\,\overrightarrow{x} = \phi(x)$ et $\eta'_x\eta_x = \overrightarrow{x}\,\overleftarrow{x} = F(x)$. Nous avons donc bien un isomorphisme. □

Remarque. *Ainsi, un foncteur pleinement fidèle est uniquement déterminé à isomorphisme près par a et un isomorphisme $A \cong aBa$. Il ne dépend ni de u ni de v. Donc u et v sont seulement nécessaires pour montrer que F est essentiellement surjectif et pour construire l'inverse.*

2.6 Équivalence des deux représentations d'une équivalence de Morita

Comme dit précédemment, nous pouvons représenter une équivalence de Morita comme la donnée d'un triplet a, u, v et d'un isomorphisme $B \cong aAa$ ou de deux foncteurs et de deux transformations naturelles. Nous avons deux constructions pour aller de l'un vers l'autre.

Nous allons démontrer que ces constructions sont réciproques l'une de l'autre.

Proposition 3. *A partir d'un triplet a, u, v et d'un isomorphisme $\phi : B \cong aAa$, nous construisons des foncteurs F, G,* $\begin{tikzcd} K_A \arrow[r, bend left, "F"] & K_B \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *et des transformations naturelles $F \circ G \cong id_{K_B}$ et $G \circ F \cong id_{K_A}$. On en déduit alors un triplet a', u', v' et un isomorphisme $\phi' : B \cong aAa$. On a alors $a = a'$, $u = u'$, $v = v'$ et les deux isomorphismes sont identiques.*

Démonstration. On a $F(x) = uxv$ et $G(x) = x$. Calculons a', u' et v' :

Par définition, $a' = G(1_B) = 1_B = a$. On a donc ϕ qui s'identifie à $F : \mathrm{Hom}_{K_A}(1_A, 1_A) \to \mathrm{Hom}_{K_B}(a, a) = \mathrm{Hom}_{K_B}(a', a')$ qui s'identifie également à ϕ'. Ainsi, les deux isomorphismes $B \cong aAa$ sont identiques.

Écrivons le diagramme :

$$K_A \qquad\qquad K_B$$

$$\begin{tikzcd}
1_A \arrow[r] \arrow[d, bend left, "u"] & uv \arrow[dl] \arrow[dd, bend left, "uv"] \\
uv \arrow[u, bend left, "v"] \arrow[d, bend left, "uv"] & \\
a \arrow[u, bend left, "uv"] & 1_B \arrow[l] \arrow[uu, bend left, "uv"]
\end{tikzcd}$$

On a donc $u' = uvu = u$ et $v' = vuv = v$ ce qui conclut la démonstration. $\square$

Soient F et G des foncteurs quasi-inverses. La paire (F,G) est une adjonction. Par conséquent, toute transformation naturelle $F \circ G \to 1$ équivaut à une transformation naturelle $1 \to G \circ F$. De même (G,F) est une adjonction. Donc une transformation naturelle $F \circ G \to 1$ inversible équivaut à une transformation naturelle $G \circ F \to 1$ inversible

Proposition 4. *A partir des foncteurs F, G,* $\begin{tikzcd} K_A \arrow[r, bend left, "F"] & K_B \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *quasi-inverses et de la transformation naturelle $\eta : F \circ G \cong id_{K_B}$, on construit un triplet a, u, v et un isomorphisme $B \cong aAa$. On en déduit alors de nouveaux foncteurs F', G',* $\begin{tikzcd} K_A \arrow[r, bend left, "F'"] & K_B \arrow[l, bend left, "G'"] \end{tikzcd}$ *et une transformation naturelle $\eta' : F' \circ G' \cong id_{K_B}$. On a alors $(F, G, \eta) \cong (F', G', \eta')$.*

Démonstration. On a $G(1_B) = a$. Cela permet de déduire une identification $A \cong aBa$. On applique alors la proposition 2. qui nous donne un isomorphisme μ entre G et le plongement de K_B dans K_A. Il s'agit clairement du foncteur G'.

On a $F \cong F' \circ G' \circ F \cong F' \circ G \circ F \cong F'$ et donc on en déduit un isomorphisme entre F et F' compatible avec η et η'. On a donc bien $(F, G, \eta) \cong (F', G', \eta')$. $\square$

2.7 Caractérisation des équivalences de Morita à isomorphisme près

Proposition 5. *Considérons deux équivalences de Morita a, u, v, $\phi : B \cong aAa$ et a', u', v', $\phi' : B \cong a'Aa'$ entre A et B.*

Ces équivalences sont isomorphes ssi a et a' sont isomorphes dans K_A : $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "\eta"] & a' \arrow[l, bend left, "\eta^{-1}"] \end{tikzcd}$ *et que l'application $Hom(a,a) \longrightarrow Hom(a',a')$ qui associe $\eta x \eta^{-1}$ à x induit $\phi \cong \phi'$. Dit autrement, cela revient à $\eta\phi'(x)\eta^{-1} = \phi(x)$ pour tout $x \in B$.*

Remarque. *En particulier, si $a = a'$, deux équivalences de Morita sont équivalentes ssi les isomorphes ϕ et ϕ' sont conjugués comme morphismes de monoïdes.*

Démonstration. On a clairement des foncteurs F, G, F' et G' associés à nos triplets.

Supposons que les conditions soient satisfaites. Construisons l'isomorphisme μ entre G et G' :$\mu_x = \eta\phi(x)$.

Pour tout $x \in B$, on vérifie immédiatement que $\begin{tikzcd} G(x) = \phi(x) \arrow[r, bend left, "\eta\phi(x)"] & G'(x) = \eta\phi(x)\eta^{-1} \arrow[l, bend left, "\phi(x)\eta^{-1}"] \end{tikzcd}$ est un isomorphisme et que les morphismes sont bien définis.

Vérifions qu'il s'agit d'une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd} G(x) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\eta\phi(x)"] & G(y) \arrow[d, "\eta\phi(y)"] \\ G'(x) \arrow[r, "G'(f)"] & G'(y) \end{tikzcd}$$

$G'(f)\eta\phi(x) = \eta\phi(f)\eta^{-1}\eta\phi(x) = \eta\phi(fx) = \eta\phi(yf) = \eta\phi(y)G(f)$ donc μ est bien un isomorphisme de foncteurs.

Réciproquement, soit μ un isomorphisme entre G et G'. Posons $\eta = \mu_{1_B}$. On a pour tout $x \in B$

$$\begin{tikzcd} G(1_B) = a \arrow[r, "\phi(x)"] \arrow[d, "\eta"] & G(1_B) = a \arrow[d, "\eta"] \\ G'(1_B) = a' \arrow[r, "\phi'(x)"] & G'(1_B) = a' \end{tikzcd}$$

soit $\eta\phi(x) = \phi'(x)\eta$ donc $\phi'(x) = \eta\phi(x)\eta^{-1}$. De plus, on a $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "\eta"] & a' \arrow[l, bend left, "\eta^{-1}"] \end{tikzcd}$ ce qui conclut.

□

2.8 Engendrement

Proposition 6. *Soient A et B deux monoïdes équivalents au sens de Morita. A est finiment engendré ssi B est finiment engendré.*

Démonstration. Gardons les notations précédentes.

Montrons que nous avons $A =< aAa, u, v >$. Ainsi, si $B \cong aAa$ est finiment engendré, A l'est aussi.

Posons $A' =< aAa, u, v >$. Comme remarqué précédemment, puisque $B \cong aAa$, $A \cong uvBuv$.

De même, $B \cong aA'a$ et A' est un monoïde qui possède le même triplet a, u, v que A. Comme il s'agit du même triplet, on a également $A' \cong uvBuv$. Mais puisque les tripets sont identiques, les deux isomorphismes $A' \cong uvBuv$ et $A \cong uvBuv$ sont construits avec la même formule et sont donc identiques.

On en déduit donc $A = A'$. □

2.9 Présentation

Proposition 7. *Soient A et B deux monoïdes équivalents au sens de Morita. A est de présentation finie ssi B est de présentation finie.*

Démonstration. Sans perte de généralité, $B = aAa$ est de présentation finie.

Ainsi, on a $aAa =< \alpha_1, ..., \alpha_n >$ et aAa est présenté par un ensemble de relations $R = \{x_i = y_i | 1 \leq i \leq k\}$.

Posons L le monoïde libre engendré par $\alpha_1, ..., \alpha_n, u, v$ et ϕ la projection canonique de L dans A. On a démontré qu'il s'agit d'une surjection.

On écrit les règles liées à u et v. Comme $ua, av \in aAa$, on peut poser $ua = \alpha_{u_1}...\alpha_{u_n}$ et $av = \alpha_{v_1}...\alpha_{v_m}$ pour certaines suites (u_i) et (v_i).

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a donc $u\alpha_i = ua\alpha_i = \alpha_{u_1}...\alpha_{u_n}\alpha_i$ et de même $\alpha_i v = \alpha_i\alpha_{v_1}...\alpha_{v_m}$. De même $v^2 = vav = v\alpha_{v_1}...\alpha_{v_m}$ et $u^2 = \alpha_{u_1}...\alpha_{u_n}u$. On peut ensuite ajouter les règles $uv = 1$ et $vu = \alpha_{c_1}...\alpha_{c_p}$ pour une certaine suite (c_i).

On pose R' l'ensemble de ces règles liées à u ou v. Posons alors $S = R \cup R'$ et $\mu : L \to L/S$ le quotient par S.

Il s'agit de montrer que pour $x, y \in L$, $\mu(x) = \mu(y)$ ssi $\phi(x) = \phi(y)$. Le sens direct est vrai car les règles de S sont vérifiées par A. Le sens réciproque est vrai dans $\phi^{-1}(aAa) \cap < \alpha_1, ..., \alpha_n >$ car aAa est engendré par R.

Lemme 1. *Pour tout $x \in L$, il existe une certaine suite j_k et $r, s \in \{0, 1\}$ tels que $\mu(x) = v^r\alpha_{j_1}...\alpha_{j_k}u^s$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en prenant un $x \in L$ qui ne vérifie pas cette propriété et qui minimise le nombre de u et v. En appliquant les règles de R' de gauche à droite, on diminue strictement le nombre de u et v et la propriété est conservée car $\mu(x)$ est inchangé.

Par conséquent, aucune règle ne peut encore être appliquée sur x de gauche à droite. Ainsi, aucun terme u ne peut apparaître dans x avec un caractère à sa droite et aucun v avec un caractère à sa gauche. Dans le cas contraire, on aurait pu appliquer une règle de R' de gauche à droite. Donc x s'écrit de la forme $(v^r\alpha_{j_1}...\alpha_{j_k}u^s$ et ainsi $\mu(x) = v^r\alpha_{j_1}...\alpha_{j_k}u^s$ ce qui est une contradiction. □

Soient $x, x' \in L$ tels que $\phi(x) = \phi(x')$. On peut écrire $\mu(x) = v^r y u^s$ et $\mu(x') = v^{r'} y' u^{s'}$ avec $y, y' \in aAa$.

Comme $\phi(x) = \phi(x')$, $\phi(uv^r y u^s v) = \phi(uxv) = \phi(ux'v) = \phi(uv^{r'} y' u^{s'} v) \in aAa$ et ainsi $\mu([uv^r]y[u^s v]) = \mu([uv^{r'}]y'[u^{s'}v])$ en prenant $[l]$ une écriture de $l \in aAa$ avec des α_i choisis à partir des règles de R'.

On a alors $\mu(x) = \mu(vuxvu) = \mu(v)\mu(uxv)\mu(u) = \mu(v)\mu([uv^r]y[u^s v])\mu(u) = \mu(v)\mu([uv^{r'}]y'[u^{s'}v])\mu(u) = \mu(v)\mu(ux'v)\mu(u) = \mu(vu'xvu) = \mu(x')$.

Pour $x, y \in L$, $\mu(x) = \mu(y)$ ssi $\phi(x) = \phi(y)$ donc l'ensemble de relations S permet de présenter A. On a bien prouvé que A est donc de présentation finie.

□

2.10 Invariants de topos

Par ailleurs, on peut essayer de réinterpréter les résultats Proposition 6 et Proposition 7 de façon plus abstraite. Par hypothèse, les topos $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont équivalents. Il suffit donc de trouver une propriété stable par équivalence de catégorie, une propriété du topos.

Nous n'avons pas réussi à trouver une telle propriété mais nous avons une propriété proche pour l'engendrement :

Définition 7. *[com] Soit T l'objet final d'un topos E. On appelle morphisme de section globale de E le morphisme $\Gamma : E \to Ens$ définit par*

$$\Gamma(A) = Hom(T, A)$$

. On vérifie qu'il s'agit de l'image directe d'un morphisme de topos.

Un topos est dit fortement compact si Γ commute avec toutes les colimites filtrantes.

Remarque. *La propriété d'être fortement compact est clairement invariante par les équivalences de catégorie. Il s'agit donc bien d'une propriété de topos. Ainsi, si A et B sont équivalents au sens de Morita, A est fortement compact ssi B est fortement compact.*

Définition 8. *On dit qu'un monoïde est universellement de présentation finie s'il n'existe pas de suite infinie* (u_i) *telle que pour tout* n, $< u_1, ...u_n > \neq < u_1, ..., u_{n+1}$.

Remarque. *Il serait intéressant de savoir s'il existe de tels monoïdes infinis.*

Proposition 8. *Un topos d'action de monoïde* $\hat{A}$ *est fortement compact ssi* A *est universellement de d'engendrement finie. [La démonstration ne fonctionne pas].*

Démonstration. L'objet final de ce topos est l'action triviale sur un singleton $\{e\}$. En effet, pour toute action M, le seul morphisme possible est d'associer e à tout élément de M.

Par conséquent, le morphisme de section globale Γ consiste à associer à X l'ensemble $Hom(\{e\}, X)$. Il s'agit donc des x tels que pour tout $a \in A$, $a.e = a.x$ donc $x = a.x$.

Donc $\Gamma(X)$ est l'ensemble des points fixes de X.

Supposons que A est universellement d'engendrement finie. Considérons un diagramme filtrant $(X_)i$ d'actions de A. On a clairement un morphisme injectif

$$colim\Gamma(X_i) \rightarrow \Gamma(colim X_i)$$

qui consiste à associer à tout point fixe de X_i l'élément de $colim X_i$ associé. Il s'agit clairement d'un point fixe donc cela induit bien par propriété universelle le morphisme en question.

Il s'agit donc de voir quand ce morphisme est surjectif.

Soit $x \in \Gamma(colim X_i)$ un point fixe de $colim X_i$. Il existe i et $x_i \in X_i$ qui est envoyé dessus. Si x_i est un point fixe de X_i, $x_i \in \Gamma(X_i)$ et cela conclut.

Dans le cas contraire, il existe $a \in A$ tel que $ax_i \neq x_i$. On considère alors les $a^n.x_i$. Il s'agit soit de $\mathbb{Z}$ soit on a $a^n.x_i = a^m.x_i$. Si a agit avec le même ordre ou un ordre qui divise n sur tous les antécédents de x, par propriété universelle, a agirait de même sur x ce qui contredit que x est un point fixe. Donc il existe j tel que a agit différemment sur x_j et on considère alors $x_{i \wedge j}$ puisque la colimite est filtrante. Avec un principe de minimalité, on peut alors supposer que $x_{i \wedge j}$ est un point fixe. [Démonstration problématique]

On peut alors réitérer ce processus à partir de $i \wedge j$ et cela va s'arrêter d'après la propriété d'universel d'engendrement fini.

Réciproquement, soit une telle suite (u_i). On pose X_n comme l'action de translation à droite de A sur $A/ < u_1, ...u_n >$. On a un morphisme de projection de $A/ < u_1, ...u_n >$ vers $A/ < u_1, ...u_{n+>1}$. Par hypothèse, il n'y a pas de fixe. Mais leur colimite consiste en T. Donc Γ ne commute pas aux colimites filtrantes ce qui conclut. □

On en déduit alors que A est universellement d'engendrement fini ssi c'est cas pour un monoïde équivalent au sens de Morita.

Cela se vérifie : supposons $B \cong aAa$. Si B est universellement d'engendrement fini, on a une suite (u_i) telle que pour tout n, $< u_1, ...u_n > \neq < u_1, ..., u_{n+1} >$. Cette propriété est également vérifié pour (u_i) dans A car $aAa \subset A$.

2.11 Existence d'un système de confluence

Nous aurions voulu obtenir un résultat du type A admet un système de réécriture confluant ssi B en admet un pour A et B équivalents au sens de Morita. Je n'ai pas réussi à obtenir de tel résultat. Il y a tout de même le lemme suivant qui permet de savoir si deux éléments x et y sont égaux dans A en admettant un système de réécriture dans B.

Lemme 2. *Soient* $x, y \in A$. *On a* $x = y$ *ssi* $uxv = uyv$. *De plus,* $uxv, uyv \in B$.

Démonstration. Si $x = y$, on trouve immédiatement $uxv = uyv$.

Réciproquement, si $uxv = uyv$, on a $vuxvu = vuyvu$ donc $x = y$.

Comme $au = u$ et $va = v$, on a bien $uxv, uyv \in A \cong B$. □

3 Engendrement de topologies

3.1 Introduction

Nous changeons légèrement de manière de considérer le sujet : on regarde comment la question de l'engendrement d'égalité entre éléments du monoïde en quotientant par des égalités se retrouve dans l'engendrement de topologie.

On considère un monoïde L libre engendré par $x_1, ..., x_n$ et A un monoïde quotient de L par des règles $y_1 = y'_1, ..., y_m = y'_m$. Soit $\phi : L \longrightarrow A$ la projection canonique.

On peut associer à L et A les théories respectives de leurs actions T_L et T_A. Il s'agit de théories algébriques et donc cartésiennes. La théorie T_A est une théorie quotient de T_L. Par conséquent, le topos classifiant de T_A peut être présenté comme un topos de faisceaux sur le site syntactique cartésien associée à T_L.

Dans la suite, tous les cribles couvrants seront engendrés par un seul morphisme. On parlera alors de morphismes couvrants. Par ailleurs, pour $A \xrightarrow{h} C$, $B \xrightarrow{s} C$ et S le crible engendré par s, on remarque que l'image réciproque $h^*(S)$ est le crible engendré par le produit cartésien s'

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r] \arrow[d, "s'"] & B \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

On s'intéresse alors à la topologie sur le site syntactique cartésien associée à T_L qui définit le topos classifiant de T_A. De manière générale, pour un ensemble d'axiomes $x_i \vdash y_i$, il s'agit de la plus petite topologie telle que les morphismes $x_i \wedge y_i y_i$ soient tous couvrants.

Dans le cas présent, il s'agit donc de la topologie engendrée par les morphismes $y_i(a) = y'_i(a)\top(a)$.

3.2 Recouvrement et réécriture

Proposition 9. *Soient $x, y \in L$. On a $\phi(x) = \phi(y)$ ssi $x(a) = y(a)\top(a)$ est couvrant.*

Démonstration. Si $\phi(x) \neq \phi(y)$, $x(a) = y(a)\top(a)$ ne peut pas être couvrant. En effet, $x(a) = y(a)$ n'est pas vérifié pour A qui est un modèle de la théorie T_A.

Réciproquement, nous allons montrer comment fonctionne l'engendrement.

Lemme 3. *Soient $x, y, z \in L$. Si $x(a) = y(a)\top(a)$ est couvrant, $x(z(a)) = y(z(a))\top(a)$ l'est aussi.*

Démonstration. Appliquons l'axiome de stabilité : $x(b) = y(b) \xrightarrow{b=c} \top(c)$ est couvrant donc

$$\begin{tikzcd} \exists c(c = z(b) \wedge a = c \wedge x(a) = y(a)) \arrow[r] \arrow[d, "\text{couvrant}"] & x(a) = y(a) \arrow[d, "a=c"] \\ \top(b) \arrow[r, "c=z(b)"] & \top(c) \end{tikzcd}$$

mais $\exists c(c = z(b) \wedge a = c \wedge x(a) = y(a))$ est équivalent à $a = z(b) \wedge x(z(b)) = y(z(b))$. Cet objet est isomorphe à $x(z(b)) = y(z(b))$ ce qui conclut la preuve. □

Lemme 4. *Soient $x, y, z \in L$. Si $x(a) = y(a)\top(a)$ est couvrant, $z(x(a) = z(y(a))\top(a)$ l'est aussi.*

Démonstration. Appliquons l'axiome de transitivité :

$$\begin{tikzcd} \exists a(x(c) = y(c) \wedge a = c \wedge a = b \wedge z(x(b)) = z(y(b))) \arrow[r] \arrow[d] & x(c) = y(c) \arrow[d, "a=c"] \\ z(x(b)) = z(y(b)) \arrow[r, "a=b"] & \top(a) \end{tikzcd}$$

mais $x(c) = y(c)$ implique $z(x(c)) = z(y(c))$ donc cela revient à

$$\begin{tikzcd} x(c) = y(c) \arrow[r, "\text{id}"] \arrow[d] & x(c) = y(c) \arrow[d, "a=c"] \\ z(x(b)) = z(y(b)) \arrow[r, "a=b"] & \top(a) \end{tikzcd}$$

.

Par maximalité, id est couvrant. Par hypothèse, $x(a) = y(a) \to \top(a)$ est couvrant donc la transitivité est bien vérifiée et $z(x(a) = z(y(a))\top(a)$ est couvrant. $\square$

Lemme 5. *Soient $x, y, z \in L$. Si $x(a) = y(a)\top(a)$ et $z(a) = y(a)\top(a)$ sont couvrants alors $x(a) = z(a)\top(a)$ l'est aussi.*

Démonstration. Par stabilité,

$$\begin{tikzcd} x(a) = y(a) = z(a) \arrow[r] \arrow[d] & y(a) = z(a) \arrow[d] \\ x(a) = y(a) \arrow[r] & \top(a) \end{tikzcd}$$

on trouve que $x(a) = y(a) = z(a)x(a) = y(a)$ est couvrant.

Par transitivité,

$$\begin{tikzcd} x(a) = y(a) = z(a) \arrow[r, "\text{couvrant}"] \arrow[d] & x(a) = y(a) \arrow[d, "\text{couvrant}"] \\ x(a) = z(a) \arrow[r] & \top(a) \end{tikzcd}$$

implique que $x(a) = z(a)\top(a)$ est couvrant.

$\square$

Soient x et y tels que $\phi(x) = \phi(y)$. On a alors une suite $x = x_0, ..., x_n = y$ telle que $\phi(x_i) = \phi(x_{i+1})$ se déduit immédiatement par une réécriture $y_j \to y'_j$ (ou $y_j \leftarrow y'_j$).

On peut donc écrire $x_i = f_1...f_{k''} = f_1...f_k y_j f_{k'}...f_{k''}$ et $x_{i+1} = f_1...f_k y'_j f_{k'}...f_{k''}$.

Comme $y_j(a) = y'_j(a)\top(a)$ est couvrant, on déduit à l'aide des lemmes que $f_1...f_k y_j(a) = f_1...f_k y'_j(a)\top(a)$ est couvrant puis $f_1...f_k y_j f_{k'}...f_{k''}(a) = f_1...f_k y'_j f_{k'}...f_{k''}(a)\top(a)$ est couvrant donc $x_i(a) = x_{i+1}(a)\top(a)$ est couvrant.

Clairement, $x_0(a) = x_0(a)\top(a)$ est couvrant.

Par une récurrence immédiate, on trouve alors $x_0(a) = x_n(a)\top(a)$ couvrant ce qui conclut la preuve. $\square$

Références

[BB21] Jean-Claude Belfiore and Daniel Bennequin. Topos and stacks of deep neural networks. https://arxiv.org/abs/2106.14587, 2021.

[Car] Olivia Caramello. *Theories, Sites, Toposes Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'.*

[com] Proper geometric morphism. https://ncatlab.org/nlab/show/proper+geometric+morphism#Definition.

[Kna] Ulrich Knauer. Projectivity of acts and morita equivalence of monoids. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02572973.pdf.

[Ler] Olivier Leroy. Groupoïde fondamental et théorème de van kampen en théorie des topos. https://agrothendieck.github.io/divers/leroy.pdf.

[Ler13] Olivier Leroy. Théorie de la mesure dans les lieux réguliers ou les intersections cachées dans le paradoxe de banach-tarski. https://arxiv.org/abs/1303.5631, 2013.