

Rapport de stage : vers les faisceaux pervers

Jack Souami

Juin 2021

Expérience du stage

De février à juillet, j'ai fait un stage à la Humboldt Universität zu Berlin (HU) dans le labo de géométrie algébrique. Bruno Klingler m'a encadré, et il m'a proposé de découvrir les faisceaux pervers au cours de mon stage. Il y a de petites différences entre la vie quotidienne à Berlin et à Paris, mais c'est avant tout le nouveau contexte de mon passage à Berlin qui fut enrichissant : en tant que stagiaire étranger j'avais une expérience très différente de celle de normalien à Paris.

La ville de Berlin est très étendue comparée à Paris et en allant au labo j'ai pu traverser une grande diversité de quartiers : les *Kiez* ont une identité très marquée. Le labo consiste d'un couloir où travaillent 6 ou 7 professeur·e·s et postdocs, 4 ou 5 doctorants et 2 secrétaires auquel·le·s s'ajoutaient trois stagiaires lorsque j'étais là. Les mardi, mercredi et jeudi la majorité des gens viennent au labo en présentiel et on peut faire connaissance des autres membres du labo mais le lundi et vendredi nous étions un nombre plus restreint, souvent trois ou quatre personnes au total.

Au début du semestre d'été, j'ai pu assister à des cours à la HU et j'ai donc suivi les cours de géométrie différentielle et d'introduction à la théorie des schémas. Ces cours étaient dispensés en anglais, et les différences avec l'enseignement en France étaient minimales. La vie de l'école a repris à ce moment, et j'ai pu rencontrer beaucoup d'autres étudiant·e·s de la HU.

La première partie de mon rapport sera surtout des définitions car au début de mon stage l'important était de définir les objets géométriques de base. Dans la deuxième partie il s'agit de poser les outils algébriques, et dans la troisième partie on appliquera ces nouveaux objets pour définir les faisceaux pervers.

0.1 Les Faisceaux

Définition 1. Soit X un espace topologique et A une catégorie abélienne, un pré-faisceau F sur X est un foncteur contravariant de la catégorie X^{op} des ouverts de X dans A .

On note $PSh(X)$ la catégorie des pré-faisceaux sur X , où les objets sont les pré-faisceaux et les flèches sont les transformations naturelles.

Dans notre usage, on appellera $F(U)$ l'espace des fonctions sur U , ou encore les sections de F sur U . Les flèches i de X^{op} sont les inclusions, et leurs images $\rho = F(i)$ seront donc appelées les restrictions.

Pour représenter un espace de fonctions, on impose généralement des conditions supplémentaires en remplaçant la notion de pré-faisceau par celle de faisceau : une fonction est normalement déterminée par sa valeur en chaque point de l'espace, et on cherche donc à caractériser une fonction par son comportement local autour de chaque point.

Définition 2. Un faisceau est un pré-faisceau vérifiant, pour tout ouvert U et pour tout recouvrement $U = \cup_{i \in I} U_i$:

- Si deux fonctions $s, s' \in F(U)$ ont les mêmes restrictions sur chaque U_i , alors $s = s'$ (condition de séparation)

- Soit $(s_i)_{i \in I}$ une famille compatible, c'est-à-dire vérifiant $\forall i, j \in I$ les restrictions de s_i et de s_j à $U_i \cap U_j$ coïncident. Alors il existe $s \in F(U)$ vérifiant $\forall i \in I, \rho_i(s) = s_i$ avec ρ_i la restriction à U_i . (condition de recollement)

On note $Sh(X)$ la catégorie des faisceaux sur X . C'est une sous-catégorie complète de $PSh(X)$.

Exemple 1. Si A est un anneau et X un espace topologique, on peut considérer le pré-faisceau F des fonctions constantes sur X à valeurs dans A :

$$F(\emptyset) = 0$$

Pour tout ouvert U non vide, on a $F(U) = A$

Les restrictions sont soit l'identité soit l'application nulle. Dans cette situation F est un pré-faisceau de A -modules.

Ce n'est pas un faisceau en général. En effet, si on se donne U_1, U_2 deux ouverts de X disjoints et $x \neq y \in A$, alors la fonction égale à x sur U_1 et la fonction égale à y sur U_2 sont deux fonctions constantes compatibles, mais ne sont pas des restrictions d'une même section de F sur $U_1 \cup U_2$.

Pour faire de F un faisceau, on considérera les fonctions localement constantes, qui sont des recollements de fonctions constantes sur des ouverts plus petits.

D'autres exemples de faisceaux sont le faisceau des fonctions lisses sur une variété différentiables, des fonctions holomorphes sur une variété complexe ou des fonctions algébriques sur une variété algébrique. Ce sont a minima des faisceaux de groupes abéliens, mais ont des structures supplémentaires.

Définition 3. Soit F un pré-faisceau sur X et $x \in X$. On définit la tige de F en x par

$$F_x = \varprojlim_{U \ni x} F(U)$$

Soit $x \in U \subset X$ et $s \in F(U)$. On appelle germe de s en x son image s_x dans la tige F_x de F en x .

Nous avons maintenant le vocabulaire pour parler de faisceaux d'un point de vue local. C'est ce point de vue qui fait le lien entre faisceaux et pré-faisceaux, et on peut donc définir la faisceautisation. Désormais on supposera toujours que X est localement compact.

Définition 4. Soit P un pré-faisceau sur X , un faisceautisé de P est un faisceau F et une flèche $i : P \rightarrow F$ vérifiant pour tout faisceau G , $i \circ : Hom_{Sh(X)}(F, G) \rightarrow Hom_{PSh(X)}(P, G)$ est une équivalence.

Il est clair que pour F un faisceau, F est son propre faisceautisé par l'identité.

Proposition 1. Soit P un pré-faisceau, alors P admet un faisceautisé $i : P \rightarrow F$ unique à isomorphisme près. De plus, $\forall x \in X, i_x : P_x \rightarrow F_x$ est un isomorphisme.

Proof. Existence : Pour P un pré-faisceau, notons P^* le pré-faisceau défini par $P^*(U) = \prod_{x \in U} P_x$. Le pré-faisceau P se plonge canoniquement dans P^* . De plus P^* est un faisceau : c'est un vrai

espace de fonctions, et les conditions de recollement et de séparation vont de soi. En général il est beaucoup trop gros pour être le faisceautisé de P .

Posons ensuite F le pré-faisceau défini par

$$F(U) = \{s \in P^*(U) \mid \forall x \in U, \exists x \in V \subset U, \exists s' \in P(V), \forall y \in V, s(y) = s'_y\}$$

Autrement dit, on considère les sections de l'espace étalé $\prod_{x \in X} P_x$ qui ressemblent localement à des sections de P . On a ainsi imposé la condition de recollement. La condition de séparation découle de celle de P^* : pour tout ouvert U de X , $F(U) \subset P^*(U)$. Si s a des restrictions qui s'annulent pour F , elles le font aussi pour P^* et donc s est nulle, dans $P^*(U)$ donc dans $F(U)$. De plus, le morphisme de P dans P^* se factorise à travers F .

Montrons que les tiges de F sont égales aux tiges de P : P se plonge dans F , donc $\forall x \in X, P_x \subset F_x$. Si $s(x) \in F_x$, soit U un voisinage ouvert de x et $s \in F(U)$ de germe $s(x)$ en x . Quitte à restreindre U on peut supposer $s \in P(U)$ et alors on observe $s(x) \in P_x$. Ainsi $F_x = P_x$.

Montrons maintenant que F est bien le faisceautisé de P . Soit G un faisceau, considérons $i_0 : \text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\text{PSh}(X)}(P, G)$. Ce morphisme induit un isomorphisme $i_x : P_x \cong F_x$. Mais la localisation commute avec les morphismes de (pré-)faisceaux et une section du faisceau G est déterminée par ses germes. Ainsi i_0 est un isomorphisme, et on a bien construit l'adjoint souhaité. \square

Un morphisme de faisceaux donne lieu à de nouveaux faisceaux. Pour $\varphi : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux, $\ker \varphi : U \mapsto \ker \varphi_U$ est un faisceau, où $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ est le morphisme induit par φ . On peut aussi considérer le pré-faisceau $U \mapsto \text{coker} \varphi_U$. On appelle son faisceautisé le faisceau conoyau, et on le note $\text{coker} \varphi$. On définit ensuite le faisceau image par $\text{Im} \varphi = \ker(G \rightarrow \text{coker} \varphi)$.

Ces définitions correspondent bien à l'objet recherché car avec ces définitions, $\forall x \in X, (\ker \varphi)_x = \ker(\varphi_x)$ et $(\text{coker} \varphi)_x = \text{coker}(\varphi_x)$.

Enfin, on peut transporter des faisceaux d'un espace à un autre.

Définition 5. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques localement compacts. Soit F un faisceau sur Y , alors on définit f_*F le pré-faisceau sur X par $f_*F(U) = F(f^{-1}U)$. C'est un faisceau, qu'on appelle le faisceau image par f de F .

Définition 6. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques localement compacts. Soit F un faisceau sur X , alors on définit $f^{-1}F$ faisceautisé du pré-faisceau sur Y défini par $f^{-1}F(U) = \text{colim}_{f(U) \subset V} F(V)$. On l'appelle l'image inverse de F par f .

Proposition 2. Pour tout point $y \in Y$ et pour F un faisceau sur X , on a $F_{f(y)} = (f^{-1}F)_y$. En particulier f^{-1} est exact.

On a ainsi défini deux foncteurs, satisfaisant l'adjonction

$$f^{-1} : \text{Sh}(X) \leftrightarrow \text{Sh}(Y) : f_*$$

Proof. La première propriété découle directement de la définition.

On construit des transformations naturelles $f^{-1} \circ f_* \rightarrow \text{id}$ et $\text{id} \rightarrow f_* \circ f^{-1}$.

Pour $G \in \text{Sh}(Y)$ et $U \subset Y$ ouvert, $(f^{-1} \circ f_*)(G)(U) = \text{colim}_{f(U) \subset V} G(f^{-1}V)$. Tous les $f^{-1}(V)$ de cette colimite contiennent U donc on a une restriction $(f^{-1} \circ f_*)(G)(U) \rightarrow G(U)$. C'est la première transformation naturelle recherchée.

Pour $F \in Sh(X)$ et $U \subset X$ ouvert, $(f_* \circ f^{-1})(F)(U) = \text{colim}_{f(f^{-1}(U)) \subset V} F(V)$. Mais $f(f^{-1}(U)) \subset U$ donc la restriction donne $F(U) \rightarrow (f_* \circ f^{-1})(F)(U)$.

Grâce à ces transformations naturelles, on peut décrire l'adjonction $\text{Hom}(F, f_*G) \equiv \text{Hom}(f^{-1}F, G)$. \square

Proposition 3. *En tant qu'adjoint à droite de f^{-1} , le foncteur f_* est exact à gauche et envoie des injectifs sur des injectifs.*

Proposition 4. *Soit $i : Z \rightarrow X$ l'inclusion d'un ensemble fermé dans X . Pour $F \in Sh(Z), x \in Z$, on a $(i_*F)_x = F_x$ et si $x \notin Z$ alors $(i_*F)_x = 0$. Par conséquent $i_* : Sh(Z) \rightarrow Sh(X)$ est exact.*

Proposition 5. *Pour une composition de morphismes, on a $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Définition 7. *Pour $j : W \rightarrow X$ une inclusion, on appelle $F|_W := j^{-1}F$ la restriction de F à W et on note $\Gamma(W, F) := F|_W(W)$ ses sections globales.*

Le morphisme $F \rightarrow j_*j^{-1}F$ détermine un morphisme $\Gamma(X, F) \rightarrow \Gamma(W, F)$. En restreignant peu à peu X à des ouverts contenant W , on obtient un morphisme $\text{colim}_{W \subset U} \Gamma(U, F) \rightarrow \Gamma(W, F)$. Il est toujours injectif.

On rappelle qu'on s'intéresse à des espaces topologiques localement compacts.

Définition 8. *Un morphisme $f : Y \rightarrow X$ est dit propre si l'image par f de tout fermé est fermé et si l'image réciproque de tout compact est compacte.*

Proposition 6. *Soit $f : Y \rightarrow X$ propre et $G \in Sh(Y)$. Alors pour tout $x \in X$, $(f_*G)_x \equiv \Gamma(f^{-1}(x), G)$. En particulier si f est propre et que toutes ses fibres sont finies, alors f_* est exact.*

Définition 9. *Pour F un faisceau sur X et U un ouvert de X , le support d'une section $s \in F(U)$ est $\text{supp}(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$. C'est un fermé dans U .*

Définition 10. *Soit $f : Y \rightarrow X$, on définit $f_!G \subset f_*G$ par*

$$f_!G(V) = \{s \in f_*G(V) \mid f_{\text{supp}(s)} : \text{supp}(s) \rightarrow V \text{ est propre}\}$$

C'est un faisceau, appelé poussé en avant exceptionnel de G par f .

Définition 11. *Les sections de G à support propre sont définies par $\Gamma_c(Y, G) = p_{Y!}G$, où $p_Y : Y \rightarrow \{pt\}$ est la projection sur un point.*

Définition 12. *Un espace $Z \subset X$ est dit localement fermé s'il est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.*

Proposition 7. *Soit $f : Y \rightarrow X$ et $G \in Sh(Y)$, alors $\forall x \in X, (f_!G)_x \rightarrow \Gamma_c(f^{-1}(x), G)$ est un isomorphisme.*

Proof. La flèche en question est la restriction de $(f_*G)_x \rightarrow \Gamma(f^{-1}(x), G)$, qui est injective. Montrons donc la surjectivité.

Soit $s \in \Gamma_c(f^{-1}(x), G)$ et soit $K = \text{supp}(s)$. K est compact dans Y Hausdorff, donc on peut se donner U un voisinage ouvert de K et une section $t \in \Gamma(U, G)$ qui coïncide avec s sur K . Quitte à restreindre U on suppose que t et s coïncident sur $U \cap f^{-1}(x)$. Soit V un voisinage ouvert de K relativement compact avec $\bar{V} \subset U$. On peut trouver W un voisinage ouvert de x tel que $f^{-1}(W) \cap \bar{V} \cap \text{supp}(t) \subset V$. Enfin on pose $u \in \Gamma(f^{-1}(W), G)$ comme coïncidant avec t sur $\text{supp}(t) \cap \bar{V}$, et nulle en dehors. Sur le support de u , f est propre et $u|_{f^{-1}(x)} = s$: on a construit un antécédent de s . \square

Proposition 8. *Si X est localement compact et si $j : Y \rightarrow X$ est localement fermé, alors $j_!$ est exact.*

On se fixe $j : Z \rightarrow X$ localement fermé. Dans ce cas

$$\Gamma(U, j_!G) = \{s \in \Gamma(Z \cap U, G); \text{supp}(s) \text{ est fermé dans } U\}$$

Définition 13. *Soit F un faisceau sur X , alors le support de F est $\text{supp } F = \{x \in X; F_x \neq 0\}$*

Proposition 9. *On a une équivalence de catégories $j_! : Sh(Z) \leftrightarrow Sh_Z(X) : j^{-1}$, où $Sh_Z(X)$ est la sous-catégorie pleine de $Sh(X)$ dont les objets sont les faisceaux à support dans Z .*

Proof. Pour $G \in Sh(Z)$, on observe $j^{-1}j_!G = G$.

Si $F \in Sh_Z(X)$, le morphisme d'adjonction $F \rightarrow j_*j^{-1}F$ se factorise par $j_!j^{-1}F$. \square

Définition 14. *Pour $F \in Sh(X)$, on note $F_Z := j_!j^{-1}F$. On définit ainsi un foncteur $(\)_Z : Sh(X) \rightarrow Sh(X)$.*

Ce foncteur est exact en tant que composée de deux foncteurs exacts, et F_Z est le faisceau qui coïncide avec F sur Z mais qui s'annule sur son complémentaire.

Définition 15. *Soit $U \subset X$ ouvert et $Z \subset U$ fermé, on pose*

$$\Gamma_Z(U, F) = \{s \in F(U); \text{supp}(s) \subset Z\}$$

l'ensemble des sections de F sur U qui s'annulent identiquement hors de Z .

Puisque ces sections s'annulent sur le complémentaire de Z , $\Gamma_Z(U, F)$ ne dépend pas de l'ouvert U dans lequel Z est fermé, et on le note $\Gamma_Z(X, F)$.

Définition 16. *On note $\Gamma_Z F$ le faisceau qui à un ouvert U associe $\Gamma_{Z \cap U}(U, F)$.*

Proposition 10. 1. *Soit $Z' \subset Z$ fermé, alors les suites suivantes sont exactes :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F_{Z \setminus Z'} \rightarrow F_Z \rightarrow F_{Z'} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \Gamma_{Z'}(F) \rightarrow \Gamma_Z(F) \rightarrow \Gamma_{Z \setminus Z'}(F) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. *Soit U_1, U_2 deux ouverts de X , alors les suites suivantes sont exactes :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F_{U_1 \cup U_2} \rightarrow F_{U_1} \oplus F_{U_2} \rightarrow F_{U_1 \cap U_2} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \rightarrow \Gamma_{U_1}(F) \oplus \Gamma_{U_2}(F) \rightarrow \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

3. *Soit Z_1, Z_2 deux fermés de X , alors les suites suivantes sont exactes :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F_{Z_1 \cup Z_2} \rightarrow F_{Z_1} \oplus F_{Z_2} \rightarrow F_{Z_1 \cap Z_2} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F) \rightarrow \Gamma_{Z_1}(F) \oplus \Gamma_{Z_2}(F) \rightarrow \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(F) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Définition 17. *Pour $F \in Sh(X)$, on définit $j^!F = j^{-1}\Gamma_Z F$*

Proposition 11. *On a l'adjonction $j_! : Sh(Z) \leftrightarrow Sh(X) : j^!$*

Proof. Pour U ouvert on a $j_!j^!F(U) = \Gamma_Z F(U) = \Gamma_{Z \cap U}(U, F) \subset \Gamma(U, F)$. Alors dès que $G \in Sh(Z)$ et $F \in Sh(X)$, on peut factoriser les morphismes de $j_!G$ dans F par $j_!j^!F : Hom(j_!G, F) \cong Hom(j_!G, j_!j^!F)$.

L'adjonction $(j_!, j^!)$ entre $Sh(Z)$ et $Sh_Z(X)$ donne la bijection entre $Hom(j_!G, j_!j^!F)$ et $Hom(G, j^!F)$. \square

Le foncteur $j^!$ est donc exact à gauche. Lorsque Z est ouvert dans X , on a même $j^{-1} = j^!$.

0.2 Algèbre Commutative : Foncteurs Dérivés

La catégorie $Sh(X)$ est une catégorie abélienne. On peut donc parler de complexes de faisceaux, et lorsqu'on a un complexe de faisceaux on peut considérer sa cohomologie. Pour s'intéresser spécifiquement à cette cohomologie, on construit la catégorie dérivée en localisant par les quasi-isomorphismes.

Pour A une catégorie abélienne, sa catégorie des complexes $K(A)$ est une catégorie triangulée. Le shift est le décalage de l'indice dans le complexe. Pour les triangles distingués, il faut d'abord définir le cône d'un morphisme.

Définition 18. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de complexes. Alors construit $M(f)$ le cône de f en posant $M(f)^n := X^{n+1} \oplus Y^n$ et $d_{M(f)}(x, y) := (-d_X x, f(x) + d_Y y)$

Avec cette définitions, on a des morphismes naturels de complexes $Y \rightarrow M(f), y \mapsto (0, y)$ et $M(f) \rightarrow X[1], (x, y) \mapsto x$ qui donnent un triangle

$$X \rightarrow Y \rightarrow M(f) \rightarrow X[1]$$

Définition 19. Les triangles distingués sont les triangles isomorphes à un triangle du type $X \rightarrow Y \rightarrow M(f) \rightarrow X[1]$.

La catégorie des complexes de faisceaux est ainsi une catégorie triangulée. Notons N la famille des complexes acycliques, c'est-à-dire des complexes sans cohomologie. Elle contient le complexe nul et est stable par shift $C \mapsto C[1]$. De plus, soit $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ un triangle distingué avec X et Y acycliques. L'acyclicité est préservée par isomorphisme, et il est clair par la définition du cône que si X et Y sont acycliques, alors Z aussi : si X et Y sont dans N , Z est aussi dans N . $M(f)$ est acyclique si et seulement si f est un quasi-isomorphisme. On vérifie ainsi qu'on peut bien localiser par N .

Définition 20. La nouvelle catégorie ainsi créée, dans laquelle les quasi-isomorphismes sont les isomorphismes, est appelée catégorie dérivée et notée $DSh(X)$.

On définit les sous-catégories pleines $D^b Sh(X), D^+ Sh(X), D^- Sh(X)$ comme ayant pour objets ceux où les rangs de cohomologie non nulle sont respectivement bornés, bornés inférieurement et bornés supérieurement.

Définition 21. Soit $F : A \rightarrow B$ un foncteur (additif) exact à gauche entre deux catégories abéliennes. Un objet $I \in A$ est dit injectif si $\text{Hom}(\hat{u}, I) : A \rightarrow \mathbf{Ab}$ est exact, ou de manière équivalente pour tout monomorphisme $X \rightarrow Y$ et pour toute flèche $f : X \rightarrow I$, on peut étendre f en $\varphi : Y \rightarrow I$.

Si pour tout objet $X \in A$ il existe un injectif I et un monomorphisme $X \rightarrow I$, on dit que A a suffisamment d'injectifs.

Définition 22. Soit $f : A \rightarrow B$ un foncteur exact à gauche entre variétés abéliennes tel que A contient suffisamment d'injectifs, alors on peut définir son foncteur dérivé à droite $Rf : D^+ A \rightarrow D^+ B$. Pour cela, si on cherche à calculer $Rf(X)$, on se donne $(I^n)_n$ une résolution injective de X , c'est-à-dire une famille de monomorphismes $i^n : X^n \rightarrow I^n$ où I est un complexe d'injectifs borné à gauche quasi-isomorphe à X .

Alors on pose $(Rf(X))^n = f(I^n)$ et $Rf(d_X^n) = f(d_I^n)$. On note $R^n f$ le n -ième foncteur dérivé de f défini par $R^n f(X) = H^n(\hat{f}(I))$

La propriété suivante, admise ici mais qui peut aussi servir de définition au foncteur dérivé, montre son utilité:

Proposition 12. *Lorsqu'il existe, le foncteur dérivé $Rf : D^+A \rightarrow D^+B$ est l'unique foncteur tel que pour tout foncteur $G : D^+A \rightarrow D^+B$, $\text{Hom}(Rf, G) = \text{Hom}(Q \circ \hat{f}, G \circ Q)$ en notant Q le quotient par les quasi-isomorphismes et en notant \hat{f} le foncteur f appliqué aux complexes.*

C'est donc la manière naturelle de passer d'un foncteur sur les complexes à un foncteur sur la cohomologie. On parle ici de dérivée à droite mais pour un foncteur exact à gauche on utilise naturellement la notion duale de foncteur dérivé à gauche, en regardant les complexes bornés à droite et leurs résolutions projectives. Lorsqu'un foncteur est exact, le foncteur dérivé se calcule directement à partir du complexe de départ, et on ne doit pas s'inquiéter de quelle dérivée on choisit.

Il se trouve que la catégorie $Sh(X)$ a suffisamment d'injectifs : pour tout faisceau de groupes abéliens F , F s'injecte dans $\prod_x F_x$ et chaque F_x s'injecte dans un groupe abélien I_x , donc F s'injecte dans $\prod_x I_x$.

Toutefois, pour calculer le foncteur dérivé Rf il n'est pas toujours nécessaire de trouver une résolution injective. Pour beaucoup de foncteurs f , on peut trouver des conditions moins restrictives que l'injectivité qui assurent quand même que f préserve l'acyclicité, et qui jouent donc le même rôle que les injectifs dans le calcul de Rf .

Définition 23. *Un faisceau est dit flasque si pour tout ouvert $U \subset X$, la restriction $F(X) \rightarrow F(U)$ est surjective.*

Proposition 13. *Soit F un faisceau flasque sur X .*

1. *Pour tout ouvert $U \subset X$, le faisceau $F|_U$ sur U est flasque.*
2. *Pour toute application continue $f : Y \rightarrow X$, f_*F est flasque.*
3. *Soit Z localement fermé dans X , alors $\Gamma_Z(F)$ est flasque.*

Proposition 14. *Soit $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans $Sh(X)$ avec F' flasque. Alors $0 \rightarrow \Gamma(X, F') \rightarrow \Gamma(X, F) \rightarrow \Gamma(X, F'') \rightarrow 0$ est exacte.*

Si Z est localement fermé dans X , les suites suivantes sont aussi exactes :

$$0 \rightarrow \Gamma_Z(X, F') \rightarrow \Gamma_Z(X, F) \rightarrow \Gamma_Z(X, F'') \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Gamma_Z(F') \rightarrow \Gamma_Z(F) \rightarrow \Gamma_Z(F'') \rightarrow 0$$

On sait maintenant calculer de nombreux foncteurs dérivés. Celui qui va nous intéresser est $R\Gamma$, et sa cohomologie est appelée cohomologie des faisceaux.

Exemple 2. *Soit R un A -module, calculons la cohomologie du faisceau F localement constant égal à R sur le cercle $S^1 = \mathbb{R}P^1$. Le cercle est l'union de deux ouverts $U_1 = \mathbb{R}P^1 \setminus \{0\}$ et $U_2 = \mathbb{R}P^1 \setminus \{\infty\}$. Utilisons maintenant la suite exacte courte vue en proposition 10 :*

$$0 \rightarrow \Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \rightarrow \Gamma_{U_1}(F) \oplus \Gamma_{U_2}(F) \rightarrow \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F) \rightarrow 0$$

Si on lui applique $R\Gamma$ on obtient un triangle, puis si on applique H^0 on obtient une suite exacte longue qui sera utile :

$$0 \rightarrow H^0(S^1, F) \rightarrow H^0(U_1, F) \oplus H^0(U_2, F) \rightarrow H^0(U_1 \cap U_2, F) \rightarrow H^1(S^1, F) \rightarrow H^1(U_1, F) \oplus H^1(U_2, F) \\ \rightarrow H^1(U_1 \cap U_2, F) \rightarrow H^2(S^1, F) \rightarrow H^2(U_1, F) \oplus H^2(U_2, F) \rightarrow \dots$$

Ensuite remplaçons les valeurs connues : H^0 est simplement Γ donc $H^0(S^1, F) = \Gamma(S^1, F) = R$ et similairement pour les autres ouverts.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow R \rightarrow R^2 \rightarrow R^2 \rightarrow H^1(S^1, F) \rightarrow H^1(U_1, F) \oplus H^1(U_2, F) \\ \rightarrow H^1(U_1 \cap U_2, F) \rightarrow H^2(S^1, F) \rightarrow H^2(U_1, F) \oplus H^2(U_2, F) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Puis $\forall i > 0, H^i(U_1, F) = 0$ et $H^i(U_1 \cap U_2, F) = 0$, donc la suite exacte longue est

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^2 \rightarrow R^2 \rightarrow H^1(S^1, F) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H^2(S^1, F) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

et donc la cohomologie de F est R en rang 0 et 1 et nulle sinon.

Pour calculer d'autres groupes de cohomologie, on peut utiliser la cohomologie de Čech : en recouvrant l'espace X d'ouverts U_i tels que la cohomologie des intersections multiples soit toujours nulle, le calcul de la cohomologie de Čech convient aussi pour la cohomologie des faisceaux.

0.3 Variétés Stratifiées et Faisceaux Pervers

Initialement on ne s'est intéressé qu'à des variétés lisses, où tous les points se ressemblent et où l'information recherchée est dans le passage du local au global. Mais lorsqu'on regarde des variétés avec des singularités, il faut décomposer la variété selon l'apparence locale, c'est-à-dire selon le type de singularité.

Définition 24. Soit X une variété algébrique. Une stratification de X est une décomposition en un nombre fini de strates disjointes

$$X = \cup_{i \in I} X_i$$

où chaque X_i est une variété lisse connexe qui est localement fermée dans X pour la topologie de Zariski et telle que la clôture de chaque X_i est une union de strates.

Exemple 3. Le parapluie de Whitney : Considérons la surface $X \subset \mathbb{C}^3$ d'équation $x^2 = zy^2$. Pour $x, y \neq 0$, la surface est lisse. Mais autour de la droite $x = 0, y = 0$, X ressemble à deux surfaces sécantes transverses, sauf en $(0, 0, 0)$ où ces deux surfaces deviennent tangentes. Ainsi la décomposition adaptée est $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$ avec :

$$X_0 = \{(0, 0, 0)\}$$

$$X_1 = \{x = 0, y = 0\} \setminus X_0$$

$$X_2 = X \setminus X_1$$

Il existe d'autres décompositions : la droite $X_1 \cup X_0 = \{x = 0, y = 0\}$ et son complémentaire vérifient les conditions pour former une stratification de X . Mais cette stratification n'est pas la mieux adaptée au parapluie de Whitney car les strates ne sont pas équisingulières : les homéomorphismes de X dans X n'agissent pas transitivement sur chaque strate.

Pour garantir l'équisingularité sur une variété algébrique complexe stratifiée, on demande une condition appelée condition de Whitney :

Définition 25. Condition de Whitney : Soit $X_\lambda \subset \overline{X_\mu}$, soit $a_i \in X_\lambda$ et $b_j \in X_\mu$ deux suites de points convergentes vers une même limite $c \in X_\lambda$. Alors la limite des droites (a_i, b_i) est incluse dans la limite des plans tangents en a_i dès que les deux limites existent.

Une stratification de Whitney est une stratification vérifiant la condition de Whitney.

On admet que cette condition impose l'équisingularité le long des strates, et que tout variété algébrique complexe admet une stratification de Whitney.

Maintenant que l'on peut stratifier notre variété, il faut exploiter cette stratification. Pour cela, on regarde les faisceaux constructibles pour une stratification donnée. On se fixe k un anneau noetherien de dimension globale finie, et on s'intéresse à la catégorie $Sh_k(X)$ des faisceaux de k -modules. Pour $f : Y \rightarrow X$, on a une adjonction

$$f_* : Sh_k(Y) \leftrightarrow Sh_k(X) : f^{-1}$$

On fixe un k -module V qu'on munit de la topologie discrète. Alors on considère le faisceau \underline{V}_X qui à U associe les fonctions continues (i.e. localement constantes) de U dans V . Les tiges de \underline{V}_X sont toutes égales à V car X est localement connexe.

En particulier, \underline{k}_X est à la fois un faisceau et un anneau. La catégorie \underline{k}_X -mod des \underline{k}_X -modules de type fini sera le cadre général dans ce qui suit.

Définition 26. *Un faisceau F est un système local s'il est localement constant et de type fini : sur un voisinage de tout point, F coïncide avec un faisceau constant à valeurs dans un k -module de type fini. On note $Loc_k(X)$ la catégorie des systèmes locaux sur X , et c'est une sous-catégorie abélienne de $Sh_k(X)$.*

Si X est connexe et $x \in X$, on a une équivalence de catégories entre les systèmes locaux sur X et les représentations de $\pi_1(X, x)$ sur les k -modules de type fini.

Exemple 4. *Lors du calcul de cohomologie à la fin de la partie précédente, on a utilisé un système local très simple où la représentation de $\pi_1(X, x)$ était l'identité.*

Définition 27. *Un \underline{k}_X -module F est dit constructible s'il existe une stratification $X = \cup_\lambda X_\lambda$ telle que $F|_{X_\lambda}$, la restriction de F à chaque strate est un système local.*

Exemple 5. *Fixons $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, considérons $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^m$. On s'intéresse à $f_*\underline{k}_{\mathbb{C}}$. Le point 0 n'a qu'un seul antécédent, et les petites boules autour de 0 ressemblent à leurs antécédents par f . En particulier elles restent simplement connexes, donc $(f_*\underline{k}_{\mathbb{C}})_0 = k$.*

Les boules ne contenant pas 0, cependant, ont $|m|$ antécédents différents, et ces antécédents sont disjoints et simplement connexes. Ainsi pour $x \neq 0$, $(f_\underline{k}_{\mathbb{C}})_x = k^{|m|}$. Les sections sur un voisinage de 0 s'incluent dans les sections globales diagonalement et l'action du groupe fondamental sur les sections de $f_*\underline{k}_{\mathbb{C}}$ est un m -cycle.*

Dans ce cas la stratification de la courbe \mathbb{C} était $\mathbb{C}^ \cup \{0\}$.*

Définition 28. *Pour Λ une stratification de X , on dit qu'un objet $F \in D^b(ShX)$ est Λ -constructible si tous ses faisceaux de cohomologie le sont. Il est dit constructible s'il existe une stratification Λ telle que F est Λ -constructible. On note $D_\Lambda^b(ShX)$ la sous-catégorie pleine des faisceaux Λ -constructibles et $D_c^b(ShX)$ celle des faisceaux constructibles.*

Normalement, la manière la plus naturelle de plonger une catégorie A dans sa catégorie dérivée $D(A)$ est de tout placer en degré 0, de sorte que la réciproque du foncteur $A \rightarrow D(A)$ soit H^0 . Mais maintenant que nous avons stratifié notre variété, on aimerait prendre les différences de strate en compte. Pour cela on utilisera une t -structure.

Définition 29. *Une t -structure est un couple $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ de sous-catégories pleines telles que*

1. en posant $D^{\leq i} = D^{\leq 0}[-i]$, $D^{\geq i} = D^{\geq 0}[-i]$ on ait $\text{Hom}(D^{\leq 0}, D^{\geq 1})$
2. avec $D^{\leq -1} \subset D^{\leq -1}$ et $D^{\geq 1} = D^{\geq 0}$
3. tout objet $X \in D$ soit dans un triangle distingué $A \rightarrow X \rightarrow B$ avec $A \in D^{\leq 0}$, $B \in D^{\geq 1}$.

Etant donnée une t-structure, on définit le cœur $M = D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$.

Proposition 15. On a deux projections $\tau_{\leq 0}, \tau_{\geq 0}$ qui commutent, et leur composée $\tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0} : D \rightarrow M$ est un foncteur de cohomologie. On le note \bar{H}^0 .

Soit D_Z, D, D_U trois catégories triangulées, supposons D_Z et D_U munies d'une t-structure et supposons qu'on a six foncteurs donnant les adjonctions suivantes :

$$i^* : D_Z \leftrightarrow D : i_*$$

$$i_* : D \leftrightarrow D_Z : i^!$$

$$j_! : D_U \leftrightarrow D : j^*$$

$$j^* : D \leftrightarrow D_U : j_*$$

avec l'égalité $i_*j^* = 0$; on note $i_* = i_!$ et $j^! = j^*$

et donnant lieu pour tout X aux triangles distingués :

$$j_!j^!X \rightarrow X \rightarrow i_*i^*X \xrightarrow{[1]}$$

$$i_!i^!X \rightarrow X \rightarrow j_*j^*X \xrightarrow{[1]}$$

Enfin on demande que i_* , j_* et $j_!$ soient pleinement fidèles.

Dans ce cas on a une situation de recollement.

Proposition 16. On vérifie que les sous-catégories pleines suivantes déterminent une t-structure sur D , recollement de celle sur D_U et de celle sur D_Z .

$$D^{\leq 0} = \{X \in D; i^*X \in D_Z^{\leq 0} \text{ et } j^*X \in D_U^{\leq 0}\}$$

$$D^{\geq 0} = \{X \in D; i^!X \in D_Z^{\geq 0} \text{ et } j^!X \in D_U^{\geq 0}\}$$

Définition 30. Pour $p : X \rightarrow pt$ la projection, notons $\omega_X = p^!k_{pt}$, où $p^!$ est l'adjoint à droite de $p_!$. L'existence de $p^!$ n'est garantie que dans la catégorie dérivée. Notons aussi d_X la dimension de X . Alors posons $\mathbb{D} = R\mathbf{H}\text{om}(-, \omega_X)$

On admet les propriétés suivantes :

Proposition 17. Il s'agit d'une dualité : $\mathbb{D}^2 \equiv id$ et $\mathbb{D}_Y f_! \equiv f_*\mathbb{D}_X$.

Si X est lisse et L est un système local sur X alors $\mathbb{D}L \equiv L^\vee[2d_X]$

On peut maintenant définir les faisceaux pervers : soit $X = \cup_\lambda X_\lambda \in \Lambda$ une stratification telle que la dualité \mathbb{D} préserve $D_\Lambda^b(X)$. Une stratification de Whitney convient. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, notons $i_\lambda : X_\lambda \rightarrow X$ l'inclusion et notons d_λ la dimension de X_λ . Soit pour chaque strate une t-structure :

$${}^p D_\lambda^{\leq 0} = \{F \in D_{const}^b(X_\lambda); \mathbf{H}^i(F) = 0 \text{ pour } i > -d_\lambda\}$$

$${}^p D_\lambda^{\geq 0} = \{F \in D_{const}^b(X_\lambda); \mathbf{H}^i(F) = 0 \text{ pour } i < -d_\lambda\}$$

de sorte que

$${}^p D_\lambda^{\leq 0} \cap {}^p D_\lambda^{\geq 0} = \text{Loc}(X_\lambda)[d_\lambda]$$

Nous pouvons maintenant recoller toutes ces t-structures simultanément en écrivant

$$\begin{aligned} {}^p D^{\leq 0} &= \{F \in D; \forall \lambda \in \Lambda, i_\lambda^* F \in {}^p D_\lambda^{\leq 0}\} \\ {}^p D^{\geq 0} &= \{F \in D; \forall \lambda \in \Lambda, i_\lambda^! F \in {}^p D_\lambda^{\geq 0}\} \end{aligned}$$

Et on a ainsi défini une t-structure sur D .

Définition 31. *Le cœur de cette t-structure est la catégorie M_Λ des faisceaux pervers relativement à la stratification Λ .*

Pour Λ' un raffinement de Λ , M_Λ se plonge de manière pleinement fidèle dans $M_{\Lambda'}$. On définit la catégorie M_X des faisceaux pervers comme la limite directe de ces catégories : un faisceau $F \in D_c^b(X)$ est pervers s'il est pervers par rapport à une stratification.

Pour donner une application de cet objet, regardons les faisceaux pervers sur les courbes complexes. On cherche donc le comportement local des faisceaux pervers autour d'une singularité, pour ensuite recoller les différentes apparences locales. On considère donc U un petit disque autour de $0 \in U$ et on observe la catégorie M_0 des faisceaux pervers sur U ayant leur seule singularité en 0 . On supposera pour simplifier que k est un corps.

Soit $F \in M_0$, on peut restreindre F à $U \setminus \{0\}$ et obtenir un système local sur un disque troué. Ainsi $F|_{U \setminus \{0\}}$ correspond à la donnée d'un espace vectoriel V de dimension finie et d'une transformation inversible $\mu : V \rightarrow V$ correspondant à la monodromie.

Théorème 0.1. *La catégorie M_0 est équivalente à la catégorie abélienne des familles (V, V_0, μ, a, b) avec V, V_0 des k -espaces vectoriels de dimension finie, $\mu : V \rightarrow V$ une application linéaire inversible et $V \xrightarrow{a} V_0 \xrightarrow{b} V$ vérifiant $b \circ a = \mu - id_V$.*

On prouvera ce résultat dans ce qui suit.

On a compris nos faisceaux hors de 0 , mais en 0 on a affaire à une interaction entre le V ambiant et sa monodromie μ et au comportement ponctuel qu'il peut y avoir en 0 . Il faut donc introduire une nouvelle notation.

Proposition 18. *Soit D un disque fermé autour de 0 et soit x sur son bord. Supposons pour simplifier les notations que $x = 1$. Notons $v : D \setminus \{x\} \rightarrow D$ l'inclusion. Alors pour tout $F \in M_0$, $H^*(D, v_! v^! F)$ est concentré en degré 0 , et le foncteur $H^0(D, v_! v^! -)$ est exact.*

On prouvera ce résultat après quelques résultats intermédiaires.

Soit $D_{Re \geq t} = \{z \in D; Re z \geq t\}$, et regardons $H^*(D_{Re \geq t}, F)$ lorsque t va de proche de 1 à plus petit que -1 . Ces groupes vont de $H^*(F_1)$ à $H^*(D, F)$ et sont constants hors de $t = 0$. Soit $t > 0$, considérons

$$D_{Re < t} \xrightarrow{\tilde{v}} D \xleftarrow{\tilde{z}} D_{Re \geq t}$$

On en tire la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^{-1}(D, F|_{D_{Re \geq t}}) \rightarrow H^0(D, \tilde{v}_! \tilde{v}^! F) \rightarrow H^0(D, F) \rightarrow H^0(D, F|_{D_{Re < t}}) \rightarrow \dots$$

Par invariance par homotopie on observe $H^0(D, \tilde{v}_! \tilde{v}^! F) = H^0(D, v_! v^! F)$.

Proposition 19. *Soit $F \in M_0$, alors la restriction donne un isomorphisme $H^*(D, f) \xrightarrow{\sim} H^*(F_0)$: la restriction de D à $B(0, \epsilon)$ est une bijection.*

De plus les restrictions donnent des injections :

$$H^{-1}(D, F) \rightarrow H^{-1}(D, j_* j^* F) \rightarrow H^{-1}(D, F_x)$$

On peut maintenant démontrer la proposition 18. Notons $k : \{x\} \rightarrow D$ l'inclusion, on obtient la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^m(D, v_!v^!F) \rightarrow H^m(D, F) \rightarrow H^m(F_x) \rightarrow \dots$$

$H^m(D, v_!v^!F)$ et $H^m(D, F)$ sont concentrés dans les rangs 0 et -1 et $H^m(F_x)$ est concentré en rang -1.

Par les résultats précédents on trouve que $H^{-1}(D, F) \rightarrow H^{-1}(D, F_x)$ est une injection, donc $H^m(D, v_!v^!F)$ est concentré en $m = 0$.

Démontrons maintenant le théorème. L'axiome de l'octaèdre appliqué à $\{x\} \subset S^1 \subset D$ fournit que la composée $V = H^{-1}(F_x) \rightarrow H^0(D, v_!v^!F) \rightarrow H_!^0(D, F|_{S^1 \setminus \{x\}}) = V$ est $m = \mu - 1$.

Pour obtenir un faisceau pervers en général, on décompose X de la forme $\Lambda = U \cup \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_r\}$ puis les objets simples de M_Λ sont soit concentrés en un z_i , soit de la forme $j_{i!}L[1]$ pour L un système local sur U et $j_{i!}$ est le foncteur extension minimale, le foncteur image de $j_!F \rightarrow j_*F$.