

Rapport de stage : Surfaces minimales dans
un produit d'arbres réels

Sardor Yakupov

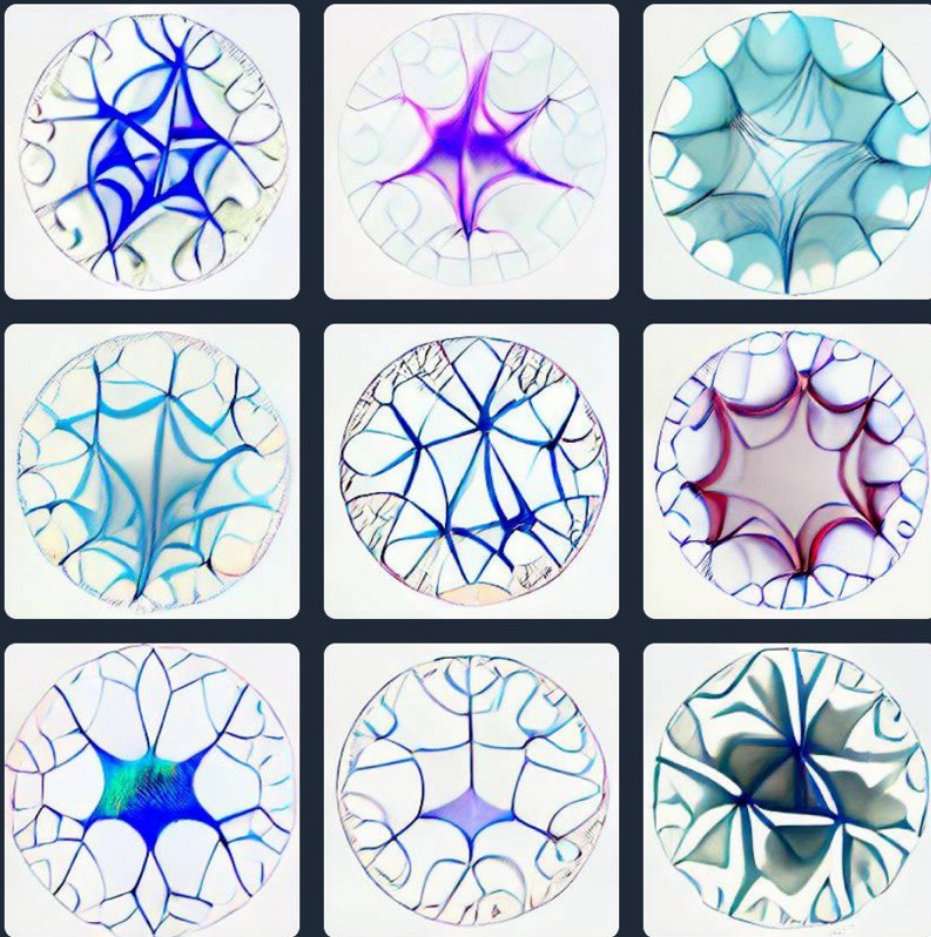
Avril - Juin 2022

DALL·E mini

AI model generating images from any prompt!

Minimal surfaces in a product of hy

Run



1

FIGURE 1 – Images générées par l'IA Dall-e mini sur le prompt "Minimal surfaces in hyperbolic trees"

Chapitre 1

Partie non-mathématique

1.1 Cadre générale

Pendant ma deuxième année à l'ENS je me suis beaucoup intéressé aux domaines à l'interface entre la topologie et la géométrie. Les matières "Classes caractéristiques", "Topologie algébrique des variétés", "Géométrie et RDP" et "Analyse des EDPs liées à la géométrie" y ont beaucoup contribué. En préparant des présentations pour les deux dernières je me suis particulièrement intéressé par la topologie et géométrie en basse dimension.

Cependant après quelques conversations avec des gens qui font de la topologie et de la géométrie, je me suis rendu compte que ces deux domaines, bien qu'ils soient proches, utilisent des méthodes assez distinctes. Jusqu'à maintenant je me suis plutôt intéressé par des méthodes de nature plus topologique : (co)homologie, homotopie, cobordismes etc. Pour cette raison j'ai décidé d'effectuer un stage dans le monde purement géométrique pour pouvoir faire un choix objectif entre la topologie et la géométrie dans le futur (car on ne peut pas faire un choix objectif si on ne connaît pas du tout une des deux options).

J'ai donc décidé d'effectuer un stage géométrique. Le thème initial étant l'étude de l'espace de Teichmüller, mon tuteur Nicolas Tholozan m'a

proposé plusieurs options de stage. Mon choix finale était le stage à Bonn sous la direction de Prof. Ursula Hamenstaedt. Après une conversation, on a décidé de changer légèrement le thème de stage, le nouveau thème étant *Unicité des surfaces minimales dans des espaces hyperboliques*.

1.2 Mes acquisitions lors de ce stage

Ce stage étant mon premier, m'a apporté énormément d'expériences. Tout d'abord, j'ai pu apprendre le quotidien d'un mathématicien, le fonctionnement de la recherche mathématique et la façon dont le travail en groupe s'organise. Après j'ai pu rencontrer beaucoup de mathématiciens, leur parler de leur recherche et voir les directions principale de recherche dans ce domaine. Finalement, j'ai pu visiter plein de bons séminaires et suivre un cours de M2 à UniBonn.

Parmi des acquisitions non-mathématiques, j'ai beaucoup apprécié la possibilité de visiter l'Allemagne. J'ai pu voir des monuments historiques, la ville de Bonn et les alentours. J'ai aussi pu rencontrer des bons gens, autant dans le monde mathématique que dans le monde non-mathématique.

Chapitre 2

Partie mathématique

2.1 Une petite introduction aux surfaces minimales et leur unicité

La notion d'une surface minimale vient d'une question assez naturelle : quelle surface dans \mathbb{R}^3 ayant un bord fixé possède une aire minimale ? Cette question nous donne plusieurs définitions équivalentes, on en choisira la plus utile pour le problème de Marković.

Définition 2.1.1 (Potentiel de Dirichlet). *Soit $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ une fonction, où (M, g) et (N, h) sont deux variétés riemanniennes. On définit le potentiel de Dirichlet de f comme*

$$E(f) := \frac{1}{2} \int_M \|\nabla_g^h f\|^2 dV_g$$

Définition 2.1.2 (Surface minimale). *On dit que $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une surface minimale, si f est une immersion conforme et c'est un point critique du potentiel de Dirichlet.*

On remarque que dans le cas où M est un segment $[0; 1]$ avec la métrique usuelle, cette notion correspond à la notion d'une géodésique. On sait bien que le problème de l'unicité des géodésiques aux extrémités fixes est très lié à la courbure de N :

Exemple. *Dans un espace hyperbolique \mathbb{H}^2 les géodésiques divergent exponentiellement. Alors le minimum du potentiel de Dirichlet avec des extrémités*

fixes est unique.

Exemple. Sur la sphère S^2 , il existe une famille de géodésiques connectantes les deux pôles, qui minimisent tous le potentiel de Dirichlet.

Il est donc naturel d'étendre l'étude de la question d'unicité des surfaces minimales au-delà du cas $\dim M = 1$. On procède donc au cas $\dim M = 2$. On se restreint au cas où M est une surface (i.e. variété fermée orientable connexe) et on commence par donner quelques propriétés importantes pour ce cas :

Proposition 2.1.1. L'équation d'Euler-Lagrange pour le potentiel de Dirichlet est l'équation de Laplace-Beltrami $\Delta f = 0$

Démonstration. Soit $l : M \rightarrow N$ une perturbation, on considère $E(f + tl)$:

$$E(f + tl) = E(f) + t \int \langle \nabla_g^h l, \nabla_g^h f \rangle dV_g + o(t)$$

Maintenant en appliquant le théorème de Stokes on retrouve $\Delta f = 0$. \square

On remarque que le laplacien dépend seulement de la classe conforme de g . En effet, si on considère $g' = e^\lambda g$, le laplacien dans la métrique g' diffère du laplacien dans la métrique g juste par un facteur $e^{-\lambda}$ ce qui ne change pas la notion d'harmonicité. De plus, dans le cas d'une surface les classes conformes des métriques riemanniennes correspond exactement aux structures complexes sur une surface de Riemann associée. On parlera donc de surfaces minimales où la source est une surface de Riemann (très souvent de genre $g \gg 1$).

Pour comprendre l'intérêt de l'article de Marković il faut d'abord citer quelques résultats importants :

Théorème 2.1.1 (Schoen [6]). Soit Σ une surface de Riemann, (S, h) une surface riemannienne telle que $\kappa_S = -1$ et $g(S) = g(\Sigma) > 1$. Alors pour toute application continue de degré un $\phi : \Sigma \rightarrow (S, h)$ il existe un unique difféomorphisme harmonique $\tilde{\phi}$ homotope à ϕ .

Théorème 2.1.2 (Schoen-Yau [5]). Soit Σ une surface de Riemann, (S, h) une surface riemannienne telle que $\kappa_S \leq 0$ et $g(S) = g(\Sigma) > 1$. Alors pour toute application continue de degré un $\phi : \Sigma \rightarrow (S, h)$ il existe un unique difféomorphisme harmonique $\tilde{\phi}$ homotope à ϕ .

Théorème 2.1.3 (Marković[3]). *Soit Σ une surface de Riemann, (S, h) une surface riemannienne telle que $g(S) = g(\Sigma) > 1$. Alors dans chaque classe d'homotopie il existe au plus un difféomorphisme minimal $\Sigma \rightarrow (S, h)$.*

De plus, dans la même article Marković démontre qu'on peut avoir un résultat encore meilleur : il existe au plus un difféomorphisme minimal $\Sigma \rightarrow (S, h) \times (S', h')$ dans chaque classe d'homotopie, où $g(S) = g(S') = g(\Sigma) > 1$.

Il est donc évident de vouloir étudier le cas de produit de trois éléments et plus. C'est là où Marković publie son résultat très récent (Janvier 2022) donnant la réponse négative à cette question.

2.2 L'article de Marković

On commence par énoncer le théorème.

Théorème 2.2.1 (Marković [2]). *Pour tout $g \gg 1$ ils existent des surfaces de Riemann M_i et des homéomorphismes $G_i : \Sigma_g \rightarrow M_i, i = 1, 2, 3$ tels que l'énergie de l'application produit $T_g \rightarrow \mathbb{R}^+$ possède au moins deux points critiques, où T_g est l'espace de structures complexes marquées sur Σ_g .*

L'idée principale de la démonstration est la suivante : en calculant une seconde variation de l'énergie on trouve qu'un minimum local doit satisfaire une certaine inégalité. L'énergie possède le minimum global (qui est aussi, évidemment, un minimum local) et donc en construisant un point critique qui ne satisfait pas l'inégalité de la seconde variation, on est sûr d'avoir trouvé un point critique distinct du minimum global.

On commence par introduire deux notions importantes : l'énergie et la différentielle de Hopf.

Définition 2.2.1. *Pour un difféomorphisme $h : S \rightarrow M$ entre deux surfaces de Riemann de genre g on définit :*

$$|\partial h|^2 = (\sigma^2 \circ h)|h_z|^2 dx dy$$

$$|\bar{\partial} h|^2 = (\sigma^2 \circ h)|h_{\bar{z}}|^2 dx dy$$

$$\mathcal{E}(h) = \int_S (|\partial h|^2 + |\bar{\partial} h|^2)$$

$$\text{Hopf}(h) = (\sigma^2 \circ h) h_z \overline{(h_{\bar{z}})} dz^2$$

Où $\sigma^2|dz|$ est la métrique, $\text{Hopf}(h)$ est la différentielle de Hopf de h .
 Pour l'application produit $h = (h_1, h_2, h_3)$ on définit $\mathcal{E}(h) = \sum \mathcal{E}(h_i)$ et
 $\text{Hopf}(h) = \sum \text{Hopf}(h_i)$.

On remarque que $\text{Hopf}(h) = 0$ implique que h est un point stationnaire de l'énergie (en calculant simplement la première variation). L'idée est donc de commencer par une application $h = (h_1^0, h_2^0, h_3^0)$ telle que $\text{Hopf}(h_i^0) = 0$. On procède à déformer la structure complexe sur les M_i tout en conservant $\sum \text{Hopf}(h_i) = 0$ pour pouvoir violer l'inégalité de la seconde variation. Cependant, pour parler de la déformation de la structure complexe et de la variation de l'énergie en fonction de la structure complexe il faut introduire un bon outil pour le faire.

Si on essaye de déformer la structure complexe juste en choisissant un chemin dans $\text{Diff}(S)$, on ne peut pas être sûrs de déformer cette structure d'une façon contrôlée. On introduit donc l'équation de Beltrami :

Définition 2.2.2. Soit $\mu \in L_1^\infty(\mathbb{D})$ (i.e. une fonction dans L^∞ de norme au plus 1). On définit l'équation de Beltrami de manière suivante :

$$\begin{cases} f_{\bar{z}} = \mu f_z & \text{sur } \mathbb{D} \\ f_{\bar{z}} = 0 & \text{en dehors de } \mathbb{D} \end{cases}$$

La seule solution de cette équation qui satisfait de plus $f(z) - z = O(1)$ pour $|z| \gg 0$ est appelée la solution normale et notée f^μ .

On dit que $\mu \sim \nu$ si $f^\mu = f^\nu$ sur $\mathbb{D}^* := \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$

On remarque que la fonction f est conforme sur \mathbb{D}^* . Elle est conforme partout si et seulement si $\mu = 0$. On admet l'existence et l'unicité de la solution, car la construction passe par l'utilisation assez technique de transformations intégrales (la transformation de Cauchy et la transformation de Beurling).

Comme on veut effectuer une déformation continue de la structure complexe, on va la déformer par des solutions de l'équation de Beltrami

pour $\mu''[0; t_0] \rightarrow L_1^\infty(\mathbb{D})$ avec $\mu(t) = t\dot{\mu} + t^2\ddot{\mu} + o(t^2)$ avec $\dot{\mu}, \ddot{\mu} \in L^\infty(\mathbb{D})$. On dit que $\dot{\mu} \approx \dot{\nu}$ si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D})$ on a $\int \phi \dot{\mu} = \int \phi \dot{\nu}$. On admet le fait que $\mu \sim \nu$ implique $\dot{\mu} \approx \dot{\nu}$. On doit aussi admettre la proposition suivante concernant l'existence des chemins dans $L_1^\infty(\mathbb{D})$ avec le comportement infinitésimal prescrit.

Proposition 2.2.1. *Pour $\dot{\mu}, \dot{\nu} \in C_0^\infty(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$ avec $\dot{\mu} \approx \dot{\nu}$ il existe un chemin $\left\{ \begin{array}{l} [0; t_0] \rightarrow L_1^\infty(\mathbb{D}) \cap C_0^\infty(\mathbb{D}) \\ \mu(t) = t\dot{\mu} + t^2\ddot{\mu} + o(t^2) \end{array} \right.$ tel que $\int \phi \ddot{\mu} = \int \phi(\dot{\nu}T(\dot{\nu}) - \dot{\mu}T(\dot{\mu}))$, où T est la transformation de Beurling.*

Même si on n'a pas introduit la transformation de Beurling, on peut quand même remarquer l'intérêt de cette proposition : toute expression contenant l'intégrale de $\ddot{\mu}$ (une quantité difficile à contrôler) peut être remplacée par une expression contenant seulement les $\dot{\mu}$ et $\dot{\nu}$.

On introduit le lemme principal :

Lemme 2.2.1. *Ils existent $\mu_i : [0; t_0] \rightarrow L_\infty^1 \cap C_0^\infty(\mathbb{D})$ tels que $\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_3$ et des fonctions $\phi_i \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D})$ avec une propriété*

$$\Re \sum \int_{\mathbb{D}} \phi_i \ddot{\mu}_i > \sum \int_{\mathbb{D}} |\phi_i| |\dot{\mu}_i|^2$$

La démonstration se fait grâce aux bons estimations des intégrales, à des approximations des fonctions en norme intégrales en contrôlant les propriétés ponctuelles et en utilisant la théorie des transformations de Cauchy et de Beurling. Cependant l'idée principale est plutôt simple :

Marković choisit trois polynômes quadratiques

($\psi_1 = i - 5z + \frac{25i}{4}z^2$, $\psi_2 = i + 5z + i\frac{25}{4}z^2$, $\psi_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\frac{25}{4}z^2$) qui satisfont deux égalités simples à vérifier :

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$$

$$\pi \sum (|a_i|^2 + \Re(a_i c_i)) = -21\pi$$

La première étant importante pour la nullité de la différentielle de Hopf totale (car les ψ_i^2 sont des prototypes de la Hopf(h) cherchée) et la deuxième étant importante pour les estimations intégrales.

Le lemme principal couplé avec quelques égalités venantes de la théorie des différentielles de Beltrami implique le résultat principal assez facilement. Le seul problème restant est compris dans le fait que notre lemme (et la plupart de nos outils jusqu'au maintenant) concerne les fonctions sur le disque et pas sur une surface de Riemann Σ_g . C'est là où on utilise l'hypothèse de genre g suffisamment grand.

Définition 2.2.3. *Le rayon d'injectivité d'une surface de Riemann S de genre $g > 1$ est le rayon maximal de disque hyperbolique qui s'injecte dans S de manière isométrique.*

Le résultat connu de la géométrie hyperbolique est le fait que pour tout $r > 0$ le rayon d'injectivité de Σ_g est plus grand que r pour tout g suffisamment grand. On utilise aussi le fait que toute surface de Riemann Σ_g pour $g > 1$, le disque hyperbolique \mathbb{D} est le revêtement de Σ_g . Plus précisément, il existe une action de $\pi_1(\Sigma_g)$ sur \mathbb{D} telle que $\Sigma_g \simeq \mathbb{D}/\pi_1(\Sigma_g)$. Une fonction (ou un différentiel quadratique) de source Σ_g est donc équivalente à une fonction (ou un différentiel quadratique) de source \mathbb{D} qui est $\pi_1(\Sigma_g)$ -équivariante. Ceci motive la définition suivante :

Définition 2.2.4. *Soit Γ une représentation (Fuchsienne) de $\pi_1(\Sigma_g)$ dans $PSL_2(\mathbb{R})$.*

1. *Pour une différentielle de Beltrami $h \in L_1^\infty(\mathbb{D})$ on dit qu'elle est Γ -équivariante si pour tout $A \in \Gamma$ on a $(h \circ A) \frac{A'}{A'} = h$.*
2. *Pour une différentielle quadratique h sur \mathbb{D} on dit qu'elle est Γ -équivariante si pour tout $A \in \Gamma$ on a $(h \circ A)A'^2 = h$.*

Maintenant, pour transformer une différentielle quadratique sur \mathbb{D} en une différentielle Γ -équivariante on prend la construction la plus directe possible :

Définition 2.2.5. *Pour $\phi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D})$ une différentielle quadratique on définit sa Θ -projection par*

$$\Theta(\phi) = \sum_{A \in \Gamma} (\phi \circ A)(A')^2.$$

On admet le fait que pour tout compact $K \subset \mathbb{D}$ et tout $\varepsilon > 0$ on a $\|(\Theta(\phi) - \phi)_K\|_\infty < \varepsilon$ si le rayon d'injectivité est suffisamment large.

Pour transmettre les différentielles de Beltrami sur Σ_g on utilise encore une fois le rayon d'injectivité suffisamment grand et le fait que les différentielles de Beltrami qu'on utilisera ont des supports compacts.

Les estimations intégrales marchent sur Σ_g pour g assez grand (car la Θ -projection et l'extension de la différentielle de Beltrami restent proches de l'original pour un rayon d'injectivité grand). De plus, la Θ -projection étant linéaire on a $\text{Hopf}(h) = \sum \Theta(\phi_i) = \Theta(\sum \phi_i) = 0$. On a donc construit trois difféomorphismes $(h_i) : S \rightarrow (M_i, \sigma_i)$ tels que l'application-produit $h : S \rightarrow \prod M_i$ soit un point critique de l'énergie (car $\text{Hopf}(h) = \sum \text{Hopf}(h_i) = 0$) sans être le minimum global de l'énergie. On a donc démontré la non-unicité de surfaces minimale dans une classe d'homotopie d'applications $S \rightarrow \prod_{i \leq 3} M_i$.

2.3 Arbres hyperboliques

Dans cette section on passe à une autre construction venant de l'article par Farb et Wolf[1]. On commence par donner quelques définitions de base.

Définition 2.3.1. *Un \mathbb{R} -arbre T est un espace métrique tel que tout point $x, y \in T$ il existe un unique arc joignant x et y . De plus, tout arc est isométrique à un segment de \mathbb{R} .*

On dit que x est un sommet si $T \setminus \{x\}$ possède au moins 3 composantes connexes. On dit que x est un point d'arête si le nombre de composantes connexes de $T \setminus \{x\}$ est 2.

Une arête est un segment non-trivial de T .

On remarque qu'un \mathbb{R} -arbre ressemble beaucoup à un espace hyperbolique :

- il satisfait la définition d'un espace hyperbolique de Gromov,
- pour tout deux points distincts il existe un unique arc de longueur minimale les connectant.

Il est donc naturel de comparer les \mathbb{R} -arbres aux espaces hyperboliques moins singuliers. Il se trouve de plus, que les \mathbb{R} -arbres sont des cas limites des surfaces hyperboliques. On donnera plusieurs points de vue sur ce passage Surfaces de Riemann \rightarrow Arbre. On commence par la voie la plus directe :

Définition 2.3.2. *Un feuilletage d'une variété M de dimension n par les sous-variétés de dimension k est un atlas $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ tel que les*

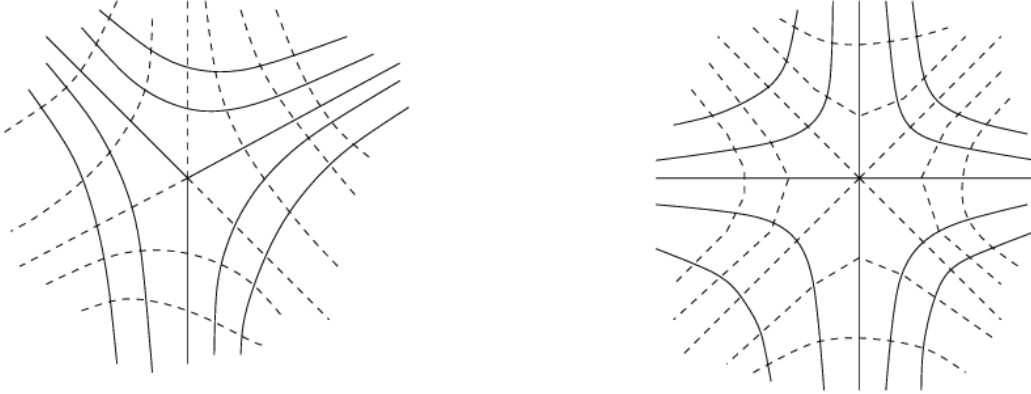
changements de cartes préservent la décomposition :

$$f_\alpha \circ f_\beta^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{a\}) = \mathbb{R}^k \times \{b\}$$

Une classe d'équivalence de points ayant la même seconde coordonnée (c'est bien défini, car atlas préserve la décomposition) est appelé une feuille. L'espace des feuilles hérite naturellement une topologie.

Dans notre cas il est très important de considérer une généralisation légère de ce concept : on parle d'une *foliation singulière* par des courbes si c'est une foliation partout sauf au voisinage d'un ensemble de points isolés, où le point singulier a une valence 3 et plus.

FIGURE 2.1 – Exemple de points de valence 3 et 4.
Source : image venante de l'article [4]



Définition 2.3.3. Une foliation mesurée (\mathcal{F}, μ) sur une surface S est une foliation par des courbes d'une surface S munie d'une mesure satisfaisant les propriétés suivantes :

1. pour tout arc Γ , $\mu(\Gamma) \in \mathbb{R}^+$. De plus, $\mu(\Gamma) = 0$ si et seulement si Γ appartient à une seule feuille,
2. la mesure μ est additive pour un union d'arcs,
3. la mesure d'un arc est invariante par les translations qui préservent les feuilles de ces extrémités.

Maintenant on introduit une façon de rélier trois concepts déjà vus : différentielles quadratiques, foliations mesurés et \mathbb{R} -arbres.

Proposition 2.3.1. *Soit $\Phi = \phi(z)dz^2$ une différentielle quadratique holomorphe sur une surface de Riemann S . Il existe une variable ζ telle que localement $\Phi = d\zeta^2$, on peut l'exprimer juste comme $\zeta(z) = \int \sqrt{\phi} dz$. Alors les niveau de $\Re(\zeta)$ nous donne une foliation (singulière) mesurée appelée une foliation verticale. L'espace de feuilles de cette foliation est un \mathbb{R} -arbre et la métrique vient de la mesure μ .*

Démonstration. Remarquons que les zéros de Φ sont isolés à cause de la nature holomorphe de Φ (et donc de ϕ). Loin de zéros le passage de z à ζ se fait facilement, car une primitive de $\sqrt{\phi}$ est bien définie dans ce cas. Ceci forme une foliation, car un changement de cartes holomorphe laisse $\Re(\zeta)$ invariant. La mesure vient juste de l'intégration de la forme $|d\Re(\zeta)|$. La foliation se comporte bien autour de points singuliers (i.e. tout point a une valence finie bien définie), car l'ordre des zéros de Φ est bien défini et fini. On a donc montré que la foliation verticale est bien défini et est mesurée. Montrons maintenant que l'espace des feuilles est un \mathbb{R} -arbre. Il est évident que loin de points singuliers les voisinage d'une feuille est isométrique à un segment de \mathbb{R} . Il est aussi assez clair que les points singuliers devient les sommets de l'arbre avec une certaine valence. Enfin, il nous reste de montrer que ceci est un arbre, i.e. pour toute couple de points x, y il existe un unique arc les joignant. Pour cela il faut considérer un lift de la foliation \mathcal{F} sur \mathbb{D} et comprendre l'action de $\pi_1(S)$ sur le lift de \mathcal{F} . Nous admettons ce résultat. \square

On a donc construit un \mathbb{R} -arbre à partir d'une surface de Riemann S et une différentielle quadratique holomorphe Φ . On a déjà rencontré une différentielle quadratique holomorphe, apparante naturellement dans la discussion des applications harmoniques : la différentielle de Hopf.

On peut donc construire un \mathbb{R} -arbre T à partir d'une surface de Riemann S et un difféomorphisme harmonique $f : S \rightarrow S'$ (tel que $\text{Hopf}(f) \neq 0$).

Quelle est l'interprétation géométrique de cette tranformation de S en T ? Pour la comprendre il faut d'abord trouver une interprétation géométrique de $\text{Hopf}(f)$.

Exemple. *On considère une surface de Riemann plus simple possible - \mathbb{C} avec la structure complexe et la métrique usuelle. Soit $f(z) = \frac{5}{4}z + \frac{3}{4}\bar{z}$, la différentielle de Hopf correspondante est $\frac{15}{16}dz^2$ et donc les lignes de $\Re(\zeta)$ et $\Im(\zeta)$ correspond aux lignes $\Re(z) = \text{const}$ et $\Im(z) = \text{const}$. En réécrivant $f(z)$ comme $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$ on remarque que la direction tangente à la foliation verticale est la direction de la dilatation maximale, tandis que la*

direction orthogonale est la direction de la contraction maximale.

En effet, en prenant un exemple plus général $f(x, y) = (ax, by)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on trouve $f(z) = \frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2}\bar{z}$. Alors, $\text{Hopf}(f) = \frac{a^2-b^2}{4}dz^2$ et donc en fonction de signe de $a^2 - b^2$ soit $x = \text{const}$ soit $y = \text{const}$ est la foliation verticale, ce qui correspond exactement à la direction de la dilatation maximale.

Maintenant qu'on a une interprétation géométrique de $\text{Hopf}(f)$, l'interprétation géométrique de T en fonction de S et f devient presque évidente. Par définition de l'espace des feuilles, localement T correspond à S où la partie imaginaire de ζ est collapsée sur l'axe réelle : c'est le cas limite de la contraction et dilatation de S par f . Il devient aussi évident pourquoi il est nécessaire d'avoir $\text{Hopf}(f) \neq 0$: une application conforme ne donne pas un arbre limite T .

Il nous reste d'introduire deux dernières notions pour les \mathbb{R} -arbres.

Définition 2.3.4. Soit $f : S \rightarrow (T, d)$ une application lipschitzienne, où S est une surface de Riemann et T est un \mathbb{R} -arbre localement fini. On définit alors

1. le tenseur d'énergie comme

$$e(f)dz \otimes d\bar{z} = (\|f_*\partial_z\|_d^2 + \|f_*\partial_{\bar{z}}\|_d^2)dz \otimes d\bar{z}$$

et l'énergie totale comme $E(f) = \int e(f)dz \wedge d\bar{z}$.

2. la différentielle de Hopf comme

$$\Phi = 4(f_*\partial_z) \cdot_d (f_*\partial_{\bar{z}})dz^2$$

L'énergie totale est bien définie, car $e(f)$ est bien défini partout sauf aux points singuliers isolés.

Maintenant qu'on a parlé de similarités entre les surfaces hyperboliques et les \mathbb{R} -arbres, introduit le concept de l'énergie et de la différentielle de Hopf d'une application $S \rightarrow T$ et donné une façon de construire un \mathbb{R} -arbre T à partir d'une application $h : S \rightarrow S'$ harmonique avec $\text{Hopf}(h) \neq 0$, on peut avoir une idée assez directe d'appliquer cette machinerie au contrexemple de Marković.

La fonction de Marković $h : S \rightarrow \prod M_i$ nous donne trois fonctions harmoniques $h_i : S \rightarrow M_i$ avec $\text{Hopf}(h_i) \neq 0$. On peut donc construire trois

\mathbb{R} -arbres T_i et trois applications harmoniques $\tilde{h}_i : S \rightarrow T_i$. On remarque que par définition de Hopf et e sur un arbre, on retrouve presque exactement l'énergie et la différentielle de Hopf de l'application h , la différence étant que la multiplication et la norme se calcule dans les métriques d_i provenant des mesures sur \mathcal{F}_i . On en déduit que \tilde{h} est une surface minimale dans un produit de trois \mathbb{R} -arbres.

Il nous reste de montrer que \tilde{h} n'est pas le minimum global pour pouvoir conclure. Cependant, il suffit d'utiliser directement la démonstration de Marković, car l'énergie et la différentielle de Hopf ne change pas, et la déformation de Beltrami était appliquée à la source de h . On en déduit la non-unicité de surfaces minimales dans un produit de 3 (et plus) arbres hyperboliques.

Chapitre 3

Conclusion

Pour conclure, je voudrais dire que j'ai beaucoup apprécié l'expérience que j'ai pu acquérir lors de ce stage. Bien que les détails techniques du papier de Marković étaient trop compliqués pour moi au cours de mon stage, j'ai quand même pu comprendre les idées principales, les interprétations géométriques et les méthodes utilisés dans la géométrie hyperbolique. De plus, en révisant les articles de Marković, Farb et Wolf, mes notes de cours des EDPs de la géométrie et autres sources reliés à ce problématique, j'ai pu comprendre les détails techniques beaucoup plus clairement.

Je trouve quand même un peu dommage que je n'ai pas réussi d'aboutir à une démonstration stricte du résultat principal. Partiellement c'était dû au fait que la majorité des outils et méthodes étaient complètement nouveaux pour moi. Partiellement c'était lié au timing un peu malheureux de mon stage : la fin d'année scolaire étant le temps des grandes conférences, il y avait des moments (parfois assez longues) quand je ne pouvais pas beaucoup communiquer avec mes collègues.

Néanmoins, j'ai appris beaucoup de belles maths : dans les domaines reliés à on stage (en particulier, j'ai suivi un cours sur la correspondance de Hodge non-abélienne en entier), mais aussi dans d'autres domaines qui m'intéressent (spécialement la topologie des variétés de basse dimension). Enfin, je voudrais remercier mon tuteur Nicolas Tholozan de m'avoir aidé de trouver ce stage et mon directeur de stage Mme Ursula Hamenstaedt.

Bibliographie

- [1] Benson FARB et Michael WOLF. « Harmonic splittings of surfaces ». English. In : *Topology* 40.6 (2001), p. 1395-1414. ISSN : 0040-9383. DOI : 10.1016/S0040-9383(00)00018-5.
- [2] Vladimir MARKOVIĆ. « Non-uniqueness of minimal surfaces in a product of closed Riemann surfaces ». English. In : *Geom. Funct. Anal.* 32.1 (2022), p. 31-52. ISSN : 1016-443X. DOI : 10.1007/s00039-021-00590-4.
- [3] Vladimir MARKOVIĆ. « Uniqueness of minimal diffeomorphisms between surfaces ». English. In : *Bull. Lond. Math. Soc.* 53.4 (2021), p. 1196-1204. ISSN : 0024-6093. DOI : 10.1112/blms.12493.
- [4] Athanase PAPADOPOULOS et Guillaume THÉRET. « On Teichmüller's metric and Thurston's asymmetric metric on Teichmüller space ». English. In : *Handbook of Teichmüller theory. Volume I.* Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2007, p. 111-204. ISBN : 978-3-03719-029-6.
- [5] R. SCHOEN et S.-T. YAU. *Lectures on harmonic maps.* English. T. 2. Conf. Proc. Lect. Notes Geom. Topol. Cambridge, MA : International Press, 1997. ISBN : 1-57146-002-0.
- [6] Richard M. SCHOEN. « The role of harmonic mappings in rigidity and deformation problems ». English. In : *Complex geometry. Proceedings of the Osaka international conference, held in Osaka, Japan, Dec. 13-18, 1990.* New York : Marcel Dekker, 1993, p. 179-200. ISBN : 0-8247-8818-4.