

Estimateurs d'erreur à posteriori pour la simplification géométrique des domaines

Alexandre BERTOLINO

Avril - Juillet 2023



Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | EDP elliptiques | 2 |
| 1.1 | Espaces de Sobolev | 2 |
| 1.2 | Formulation variationnelle du problème | 5 |
| 1.3 | Analyse numérique | 7 |
| 2 | Le problème de simplification de la géométrie | 9 |
| 2.1 | Irrégularité négative | 9 |
| 2.2 | Irrégularité positive | 10 |
| 3 | Estimateurs de l'erreur, cas continu | 11 |
| 3.1 | Irrégularité négative | 11 |
| 3.2 | Irrégularité positive | 12 |
| 4 | Estimateurs de l'erreur, cas discret | 13 |
| 4.1 | Choix des fonctions test | 13 |
| 4.2 | Irrégularités négatives | 14 |
| 5 | Erreur en norme L^2 | 15 |

Déroulement du stage

Le stage s'est déroulé à Pavie, à 40 km au sud de Milan en Italie. L'emplacement de cette ville entre Milan, Gênes et Turin donne de nombreuses idées de week-end touristiques. J'ai travaillé à l'IMATI CNR (Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche), sous la surveillance de Silvia Bertoluzza qui m'a permis de découvrir le monde de l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. J'ai partagé mon bureau avec Albert, doctorant qui travaille sur la méthode des éléments virtuels et l'équation de Navier-Stokes. J'ai également pu apprendre à implémenter des méthodes numériques pour les EDP grâce à Micol Pennacchio, chercheuse à l'IMATI qui m'a présenté FEniCSx, un ensemble de modules Python permettant d'utiliser la méthode des éléments finis.

Introduction

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 et $\Gamma = \partial\Omega$. On s'intéresse au problème suivant : étant données f et g des fonctions respectivement sur Ω et Γ , dont la régularité sera précisée plus tard, trouver u définie sur Ω telle que :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{sur } \Omega \\ u &= g & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Sous les bonnes hypothèses de régularité sur f et g , il existe une unique solution u au problème. Le problème est alors dit *bien posé*. Comme souvent en EDP, trouver une solution explicite pour des fonctions f et g données est difficile, voire impossible dans la plupart des cas. Pour cette raison, on cherche plutôt à calculer une version discrète de u , ce qui peut d'obtenir à l'aide d'un ordinateur. Les premiers exemples de telle discrétisation sont la méthode d'Euler et la méthode des différences finies mais ces approches sont très limitées. On étudiera dans ce rapport la méthode des éléments finis, qui consiste en la donnée d'une triangulation \mathcal{T}_h de Ω (par des triangles de diamètre au plus h , où h est assez petit) et le calcul de la projection u_h de u sur

$$V_h = \{u \in C(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, u \in P_1(T)\}$$

l'ensemble des fonctions continues affines (polynomiales de degré 1) sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$. L'utilisation d'une triangulation implique que l'ordinateur ne pourra capturer que des domaines polygonaux. L'erreur liée à cette discrétisation du domaine ne sera pas étudiée. Par conséquent, on suppose dans la suite que le domaine Ω est polygonal. La résolution numérique d'une EDP par la méthode des éléments finis passe donc par deux étapes : le calcul de la triangulation \mathcal{T}_h et celui de la solution u_h associée. On n'entrera dans le détail d'aucune de ces deux étapes.

De la même manière qu'en physique une mesure sans incertitude n'indique rien, en analyse une approximation sans estimation d'erreur est inutile. Il existe deux types d'estimateurs de l'erreur :

- Les estimateurs à priori majorent l'erreur globale à l'aide de h et d'une norme de u . Cette norme de u est elle-même contrôlée par les normes de f et g . Leur caractère "à priori" est dû au fait qu'ils peuvent être obtenus avant de calculer u_h . Ces estimateurs ne donnent qu'une idée de l'erreur globale et il est alors impossible d'en déduire la contribution de chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ dans celle-ci. Cela pose problème car on veut être capable d'identifier les régions contenant le plus d'erreur afin de raffiner la triangulation dans celles-ci et obtenir une deuxième solution numérique u_h^2 sur la nouvelle triangulation \mathcal{T}_h^2 . En répétant un tel procédé de raffinement on peut obtenir des fonctions u_h^n aussi proches de u que l'on souhaite. Le détail de ces stratégies de raffinement n'est pas le sujet de ce mémoire.
- Les estimateurs à posteriori majorent l'erreur avec une fonction de u_h et de h . Ils ne peuvent être calculés qu'après u_h . Très souvent ils prennent la forme d'une intégrale sur Ω d'une fonction d'erreur/de résidu. L'intégrale pouvant être décomposée en somme d'intégrales sur

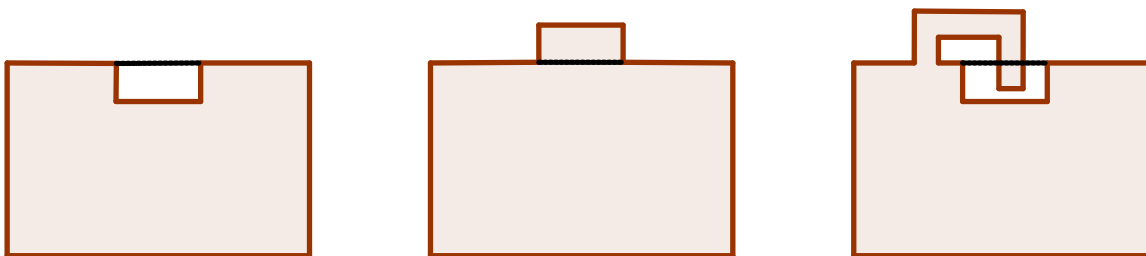


FIGURE 1 – Exemples de géométries complexes (en orange). Dans chaque cas, la géométrie simplifiée est obtenue en prenant le rectangle complété par la ligne noire

les $T \in \mathcal{T}_h$, on obtient une décomposition de l'erreur comme une somme de contributions locales, ce qui permet une stratégie de raffinement efficace.

L'objectif du stage était d'étudier les effets d'une nouvelle source d'erreur sur la solution : la simplification du domaine (en anglais *defeaturing*). Qu'entend-on par simplification ? Le domaine polygonal peut posséder des irrégularités (ou particularités, ou *features* en anglais) sur son bord telles que de petites bosses ou des trous (voir Figure 1). Celles-ci peuvent rendre la phase de triangulation difficile ou coûteuse. On aimerait donc pouvoir les retirer, ce qui lisserait et simplifierait le domaine. Ce rapport présentera différents estimateurs à posteriori de l'erreur induite par cette opération. Un résultat remarquable sera que l'erreur se concentre près de la frontière entre le domaine simplifié et les irrégularités et qu'elle peut même s'estimer comme une fonction dépendant uniquement des valeurs sur cette frontière de la solution u_0 du problème sur le domaine simplifié. Ensuite, l'erreur entre la solution numérique du problème simplifié $u_{0,h}$ et u sera estimée, combinant ainsi les erreurs numérique et de simplification.

1 EDP elliptiques

Dans cette section, on explique comment s'effectue l'analyse de l'équation (1), sans s'intéresser au problème de la simplification de la géométrie. On donne également des outils permettant d'effectuer l'analyse numérique de l'équation.

1.1 Espaces de Sobolev

Pour effectuer l'analyse numérique du problème (1), on a parlé de chercher la projection orthogonale de la solution u sur un espace de fonctions affines par morceaux V_h . Cela motive l'utilisation d'un cadre hilbertien et invite à considérer l'équation dans des espaces similaires à $L^2(\Omega)$.

Un autre argument en faveur d'un cadre hilbertien est l'estimation d'énergie. Pour présenter cette estimation on rappelle le résultat suivant, obtenu en appliquant le théorème de la divergence à $v\nabla u$:

Proposition 1.1. Soient $u, v \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\Gamma} v \partial_\nu u \quad (2)$$

où $\partial_\nu u$ note la dérivée normale de u sortant de Ω

Pour simplifier la discussion, supposons que $g = 0$. Supposons que (1) admette une solution $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Alors en appliquant la formule ci-dessus on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} u \Delta u = \int_{\Gamma} u \partial_{\nu} u$$

c'est-à-dire, puisque u vérifie (1),

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} f u = 0$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Puisque u est nulle sur les bords, avec un peu d'effort le théorème fondamental de l'analyse permet de démontrer que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ où la constante ne dépend que de Ω et pas de u . A l'avenir, une telle inégalité où la constante ne dépend que du domaine sera notée $\|u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Cela permet de voir que l'opérateur linéaire qui à une fonction source f associe la solution u de (1) pour $g = 0$ est continu, en prenant pour l'espace de f la norme $L^2(\Omega)$ et pour u la norme plus forte suivante :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

En effet :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

L'inégalité $\|u\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}$ invite alors à considérer la topologie induite par la norme euclidienne $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ sur $C^\infty(\bar{\Omega})$. De même que $(C^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{L^2(\bar{\Omega})})$, $(C^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ n'est pas complet. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est alors défini comme le complété de $C^\infty(\bar{\Omega})$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. C'est alors automatiquement un espace de Hilbert. Pour mieux comprendre qui sont ses éléments, on propose la définition alternative suivante :

Définition 1.1. Soit $v \in L^2$. v appartient à $H^1(\Omega)$ et a pour gradient $\nabla v = (\partial_1 v, \dots, \partial_d v)$ si pour tout $1 \leq i \leq d$, $\partial_i v \in L^2(\Omega)$ et pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a l'égalité de type "intégration par parties" suivante :

$$\int_{\Omega} v \partial_i \phi = - \int_{\Omega} (\partial_i v) \phi$$

D'un point de vue distributionnel, les éléments de H^1 sont les distributions dans L^2 dont les dérivées distributionnelles sont aussi dans L^2 . Le 1 de H^1 fait référence au fait que dans cet espace on peut dériver une fois. Ce nouvel espace donne le bon cadre pour la résolution de l'équation (1).

Une égalité du type " $u = g$ sur Γ " n'a à priori pas de sens pour u dans $L^2(\Omega)$. Cependant, une inégalité reposant sur le théorème fondamental de l'analyse, appelée théorème de trace, montre qu'on peut définir par densité la trace d'une fonction $H^1(\Omega)$ sur Γ :

Théorème 1.1. Soit $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Alors

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi, l'opérateur $u \mapsto u|_{\Gamma}$ se prolonge continûment à $H^1(\Omega)$

L'opérateur de trace défini ci-dessus n'est pas surjectif. Son image est en fait un autre espace de Sobolev, appelé $H^{1/2}(\Gamma)$. Prenons ceci comme définition de $H^{1/2}(\Gamma)$ et munissons donc cet espace de la norme la plus forte rendant l'application de trace $H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ continue :

$$\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = \phi} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi, $H^{1/2}(\Gamma)$ est un espace de Banach. C'est même un espace de Hilbert lorsqu'on le munit de la norme suivante, qu'on admet être équivalente à la norme définie ci-dessus.

$$\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\phi\|_{L^2(\Gamma)} + |\phi|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad |\phi|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy$$

(L'exposant de $|x - y|$ change si Ω n'est pas dans \mathbb{R}^2 mais dans un espace d'une autre dimension)

Si $\gamma \subset \Gamma$ est de mesure non nulle, le théorème de trace permet de définir $H^{1/2}(\gamma)$ comme l'image de l'application trace $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\gamma)$. Il peut, comme $H^{1/2}(\Gamma)$, être muni de la norme induite par celle sur $H^1(\Omega)$ et les fonctions de $H^{1/2}(\gamma)$ sont les restrictions à γ des fonctions $H^{1/2}(\Gamma)$. De même que ce dernier, $H^{1/2}(\gamma)$ est muni d'une structure hilbertienne pour une norme équivalente semblable. Une propriété remarquable dont les fonctions H^1 héritent par densité des fonctions lisses est la continuité de la trace :

Proposition 1.2. *Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ ouverts polygonaux tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$. Alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $u \in H^1(\Omega_i)$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et les traces $H^1(\Omega_i) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2)$, $i = 1, 2$ de u sont égales.*

On définit également $H_{0,\gamma}^1(\Omega)$ comme étant l'ensemble des éléments de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur γ est nulle. Dans le cas où $\gamma = \Gamma$, cet espace est plus simplement noté $H_0^1(\Omega)$. Ce dernier est en fait l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$, qui n'est alors pas dense dans $H^1(\Omega)$ (en effet, les fonctions test sont toutes nulles sur le bord du domaine). L'inégalité $\|u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ mentionnée plus haut se généralise par densité à toute fonction de $H^1(\Omega)$ nulle sur une portion non négligeable du bord. C'est l'inégalité de Poincaré :

Théorème 1.2. *Soit $\gamma \subset \Gamma$ de mesure non nulle. Alors pour u dans $H_{0,\gamma}^1(\Omega)$ on a*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

La constante peut exploser lorsque la mesure de γ tend vers 0.

Enfin, on définit $H^{-1/2}(\gamma)$ comme étant le dual topologique de $H^{1/2}(\gamma)$. On remarque que bien qu'il existe un opérateur d'extension $H^{-1/2}(\gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ obtenu comme adjoint de l'opérateur de restriction des fonctions $H^{1/2}$, on ne peut pas définir d'opérateur de restriction canonique $H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\gamma)$. On aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit $\psi \in H^1(\Omega)'$ (dual topologique de H^1). Alors sont équivalents :*

- (i) $H_{0,\gamma}^1(\Omega) \subset \ker(\psi)$
- (ii) $\psi(u)$ ne dépend que de la trace sur γ de u
- (iii) ψ peut être représenté comme un élément de $H^{-1/2}(\gamma)$: il existe $\tilde{\psi} \in H^{-1/2}(\gamma)$ tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$

$$\langle \psi, u \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} = \langle \tilde{\psi}, u \rangle_{H^{-1/2}(\gamma), H^{1/2}(\gamma)}$$

Preuve. (iii) \implies (ii) \implies (i) est clair. Supposons que ψ vérifie (i). Si u et v ont même trace sur γ , alors $u - v \in H_{0,\gamma}^1(\Omega)$ donc $\psi(u) = \psi(v)$. C'est (ii). ψ induit donc une forme linéaire $\tilde{\psi}$ sur $H^{1/2}(\gamma)$. Il reste à montrer que $\tilde{\psi} \in H^{-1/2}(\gamma)$, c'est-à-dire que $\tilde{\psi}$ est continue. Soit $\phi \in H^{1/2}(\gamma)$. Alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$ de trace ϕ , $|\psi(\phi)| = |\psi(u)| \leq \|\psi\| \cdot \|u\|_{1,\Omega}$. En passant à l'infimum :

$$|\tilde{\psi}(\phi)| \leq \|\psi\| \inf_{u \in H^1(\Omega), u|_{\gamma} = \phi} \|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\psi\| \|\phi\|_{1/2,\gamma}$$

Dans la suite on note $\|\cdot\|_{s,X} := \|\cdot\|_{H^s(X)}$, par exemple $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|_{0,\Omega}$, et $\|\cdot\|_{s,X}$ la semi-norme sur $H^s(X)$. Pour $s = 1$ cela donne $\|u\|_{1,X} = \|\nabla u\|_{0,X}$.

1.2 Formulation variationnelle du problème

Soient $\Gamma^D, \Gamma^N \subset \Gamma$ tels que $\Gamma^D \cap \Gamma^N = \emptyset$ et $\bar{\Gamma}^D \cup \bar{\Gamma}^N = \Gamma$. On supposera toujours que Γ^D est de mesure non nulle, ce qui sera nécessaire pour avoir unicité de la solution. Pour $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma^D)$ et j de régularité à fixer, on souhaite étudier l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma^D \\ \partial_\nu u = j & \text{sur } \Gamma^N \end{cases} \quad (3)$$

où ∂_ν désigne la dérivée normale sortante de u et les exposants D et N de Γ font référence aux noms des conditions au bord appliquées, respectivement conditions de Dirichlet et de Neumann. Comme expliqué plus haut, pour bénéficier d'un bon cadre hilbertien on cherche u dans $H^1(\Omega)$. Si on a donné du sens à la condition $u = g$ sur Γ_D dans la sous-section précédente, les deux autres conditions n'ont a priori pas de sens pour $u \in H^1(\Omega)$.

On peut définir la notion de " $\Delta u \in L^2(\Omega)$ " de la même manière qu'on a défini les dérivées de u : u admet un laplacien dans $L^2(\Omega)$ s'il existe Δu tel que pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u(\Delta \phi) = \int_{\Omega} (\Delta u)\phi$$

En utilisant la formule (2) d'intégration par parties, qu'on peut étendre par densité au cas $v \in H^1(\Omega)$, la condition $-\Delta u = f$ se réécrit :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} f\phi = - \int_{\Omega} u(\Delta \phi) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi$$

Les deux extrémités de cette équation étant des fonctions continues de ϕ pour la norme H^1 , la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ permet d'écrire

$$-\Delta u = f \iff \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

On remarque que cette définition peut s'étendre au cas où $f \in H^1(\Omega)'$, c'est-à-dire au cas où f est une fonction, non nécessairement dans L^2 , mais dont l'intégrale contre les fonctions H^1 est bien définie et continue en la fonction H^1 contre laquelle on intègre. Un exemple de telle fonction est $1/\sqrt{t}$ dans $H^1([0, 1])'$. Néanmoins, on continue de supposer $f \in L^2(\Omega)$ pour pouvoir effectuer l'analyse numérique de l'équation dans la suite.

On donne maintenant un sens à la condition de Neumann. Si u était H^2 (i.e. deux fois faiblement dérivable), alors on aurait $\nabla u \in H^1(\Omega)$ et on pourrait définir la trace de ce dernier sur Γ^N puis définir $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$ où ν est le vecteur normal sortant de Ω . Dans le cas $u \in H^1$, pour proposer une définition de $\partial_\nu u$ on doit demander $\Delta u \in L^2(\Omega)$. En s'inspirant de l'identité (2), on définit $\partial_\nu u \in H^1(\Omega)'$ par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \langle \partial_\nu u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} v \Delta u$$

A l'aide de la proposition 1.3, on montre que $\partial_\nu u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ en montrant $H_0^1(\Omega) \subset \ker(\partial_\nu u)$. Par densité, il suffit de montrer que $\partial_\nu u$ est nulle contre toute fonction test $v \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\langle \partial_\nu u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\Delta v)u = \int_{\Gamma} u \partial_\nu v = 0$$

donc $\partial_\nu u \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Le bon cadre de régularité pour j est donc $j \in H^{-1/2}(\Gamma^N)$. Enfin, on peut montrer qu'on a un résultat similaire à celui de la Proposition 1.2 : si $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors sa dérivée normale ne fait pas de saut à travers une ligne intérieure à Ω : la dérivée normale sortante sur un côté est égale à la dérivée normale entrante sur l'autre.

Les observations précédentes motivent la formulation faible suivante :

Théorème 1.3. Soit $C^\infty(\bar{\Omega})$. Alors u est solution de (3) si et seulement si la trace de u sur Γ^D est g et pour tout $v \in H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma^N} j v$$

Cette formulation est appelée *formulation variationnelle* car elle équivaut au problème de recherche de point critique de la fonctionnelle $J(u) := \frac{1}{2}|u|_1^2 - \int_{\Omega} f u - \int_{\Gamma^N} j u$ sous la contrainte $u = g$ sur Γ^D , qui est en fait un problème de recherche de minimum. Cette formulation permet de donner un sens au problème (3) pour des fonctions H^1 : on dit que $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (3) si et seulement si u satisfait la formulation variationnelle du problème. Avec les conditions de régularité données sur f, g et j on obtient existence et unicité de la solution $u \in H^1(\Omega)$. On remarque que dans cette formulation, la condition de Dirichlet est imposée directement par une contrainte. A l'avenir, on se référera à cette formulation variationnelle en disant que la condition au bord de Dirichlet est appliquée *fortement*, par opposition à son application *faible*, présentée au paragraphe suivant.

On présente maintenant une autre formulation variationnelle qui sera celle principalement utilisée dans la suite. La formulation précédente crée une asymétrie entre l'espace de la solution $H^1(\Omega)$ et l'espace des "fonctions test" $H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$. Pour rétablir la symétrie, on impose la condition de Dirichlet à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange λ dans un espace à déterminer. La fonctionnelle à minimiser associée à la formulation variationnelle devient alors

$$J(u, \lambda) := \frac{1}{2}|u|_1^2 - \int_{\Omega} f u - \int_{\Gamma^N} j u - \int_{\Gamma^D} \lambda(u - g)$$

Le bon espace pour λ est donc $H^{1/2}(\Gamma^D)' = H^{-1/2}(\Gamma^D)$. On note dorénavant $V = H^1(\Omega)$ l'espace de u et $\Lambda = H^{-1/2}(\Gamma^D)$ l'espace du multiplicateur de Lagrange. La formulation variationnelle de l'EDP s'écrit alors

Définition 1.2. On dit que $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ est solution de (3) si pour tous $(v, \mu) \in V \times \Lambda$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma^D} \lambda v - \int_{\Gamma^D} u \mu = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma^N} j v - \int_{\Gamma^D} g \mu$$

L'espace de u et de v est maintenant le même, au prix de l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange. On préférera écrire l'équation variationnelle sous la forme suivante, obtenue en remplaçant μ par $-\mu$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma^D} \lambda v + \int_{\Gamma^D} u \mu = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma^N} j v + \int_{\Gamma^D} g \mu \quad (4)$$

Dans cette dernière équation, on note $A(u, \lambda; v, \mu)$ le membre de gauche et $\Phi(v, \mu)$ le membre de droite. On remarque que Φ est continue sur $V \times \Lambda$ et que A est bilinéaire continue sur $(V \times \Lambda)^2$.

Sous cette formulation, a-t-on existence et unicité de la solution ? La réponse est donnée par le lemme de Lax-Milgram :

Théorème 1.4. Soient E, F deux espaces de Hilbert réels, $A : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et $\Phi \in F'$. On suppose que la norme d'opérateur de $A(u, \cdot)$ est minorée par $\alpha \|u\|$ pour un certain $\alpha > 0$:

$$\forall u \in E, \quad \sup_{v \neq 0} \frac{A(u, v)}{\|v\|} \geq \alpha \|u\|$$

On suppose également que les $A(u, \cdot)$ séparent les points i.e. qu'il n'existe pas $v \in F$ non nul tel que $A(u, v) = 0$ pour tout $u \in E$. Alors il existe un unique $u \in E$ tel que

$$\forall v \in F, \quad A(u, v) = \Phi(v)$$

et de plus $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\Phi\|_{F'}$

On peut montrer que A vérifie les hypothèses de ce théorème donc il y a bien existence et unicité de (u, λ) . De plus, le contrôle de la solution par Φ montre que (u, λ) est une fonction continue de f, g et j . On remarque pour finir que la dérivée normale de la solution u est donnée par

$$\langle \partial_\nu u, \phi \rangle_\Gamma = \langle h, \phi_{\Gamma^N} \rangle_{|\Gamma^N} + \langle \lambda, \phi_{\Gamma^D} \rangle_{|\Gamma^D}$$

1.3 Analyse numérique

On commence par donner quelques détails sur le calcul de la solution numérique de (3). Soit \mathcal{T}_h une triangulation, dont les triangles sont de diamètre au plus h . Dans la méthode des éléments finis, les fonctions sont calculées dans un espace de fonctions polynomiales par morceaux. La continuité de la trace des fonctions H^1 mène alors à la définition suivante :

$$V_h = \{u \in C(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, u \in P_q(T)\}$$

où $P_q(T)$ est l'espace des fonctions polynomiales de degré $q \geq 1$ sur T .

On suppose que la triangulation est adaptée à Γ^N et Γ^D (chaque arête du bord de la triangulation est soit essentiellement incluse dans Γ^D , soit disjointe). On note $\mathcal{F}_h^N, \mathcal{F}_h^D, \mathcal{F}_h^i$ respectivement les arêtes dans Γ^N , dans Γ^D et intérieures de la triangulation. Le multiplicateur de Lagrange sera cherché dans

$$\Lambda_h = \{\lambda \in C(\Gamma^D) \mid \forall F \in \mathcal{F}_h^D, u \in P_q(F)\}$$

Ces deux définitions assurent $V_h \subset V, \Lambda_h \subset \Lambda$. (u_h, λ_h) s'obtient alors comme solution du problème linéaire

$$A(u_h, \lambda_h; v, \mu) = \Phi(v, \mu) \quad \forall (v, \mu) \in V_h \times \Lambda_h$$

On sait ensuite résoudre de telles équations avec les méthodes habituelles de résolution numérique des systèmes linéaires (les espaces V_h et Λ_h sont de dimension finie). On pose $e = u - u_h$ et $\delta = \lambda - \lambda_h$. Puisque A est continue et vérifie la condition de type coercivité dans le lemme de Lax-Milgram donné plus haut, il semble raisonnable d'estimer la norme de e en l'étudiant à travers A . Cette idée mène au découpage suivant de l'erreur :

Proposition 1.4. *Pour tous $v \in V, \mu \in \Lambda$, en notant $[[\partial_\nu u_h]]$ le saut de la dérivée normale de u_h de part et d'autre d'une arête intérieure,*

$$\begin{aligned} A(e, \delta, v, \mu) = & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \Delta u_h) v - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F [[\partial_\nu u_h]] v \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^D} \int_F (\lambda_h - \partial_\nu u_h) v + \int_{\Gamma^D} (g - u_h) \mu + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^N} \int_F (j - \partial_\nu u_h) v \end{aligned}$$

Preuve. *On rappelle que $u = g$ et $\lambda = \partial_\nu u$ sur Γ^D . On a :*

$$A(e, \delta, v, \mu) = \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v - \int_{\Gamma^D} (\partial_\nu u - \lambda_h) v + \int_{\Gamma^D} (g - u_h) \mu$$

On rappelle que puisque $\Delta u \in L^2(\Omega)$, sa dérivée normale ne saute pas à travers les arêtes intérieures : $\forall F \in \mathcal{F}_h^i, [[\partial_\nu u]]_F = 0$. On applique maintenant la formule d'intégration par parties

(2) sur chaque triangle :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \Delta u_h) v + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\partial_\nu u - \partial_\nu u_h) v \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \Delta u_h) v - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \llbracket \partial_\nu u_h \rrbracket v + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^N} \int_F (j - \partial_\nu u_h) v \\
&\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^D} \int_F (\partial_\nu u - \partial_\nu u_h) v
\end{aligned}$$

A la dernière étape, on a séparé les intégrales sur les ∂T en trois intégrales, une pour chaque côté du triangle puis on a séparé les arêtes selon qu'elles sont intérieures, sur Γ^D ou Γ^N . Les arêtes intérieures ont été regroupées deux par deux et $\partial_\nu u$ n'effectue pas de saut à travers celles-ci. En découpant les deux autres intégrales qui composent $A(e, \delta; v, \mu)$ en somme sur \mathcal{F}_h^D et en sommant avec le calcul précédent on obtient la représentation de l'erreur proposée.

Cette représentation de l'erreur est remarquable car u et λ ont été éliminés. Un bon choix de v et μ permettra alors d'estimer l'erreur seulement en fonction des données du problème et de la solution numérique calculée. On a donc trouvé un moyen de créer des estimateurs à posteriori de l'erreur. On remarque que, comme annoncé dans l'introduction, l'erreur se décompose en somme d'erreurs localisées. La procédure générale pour dériver des estimateurs à posteriori à partir de ce type de représentation de l'erreur est de trouver de bonnes fonctions test v, μ , majorer leur norme et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chaque terme de l'erreur. Il est donc préférable d'utiliser des v, μ de norme minimale. Cela conduit à présenter un autre argument en faveur de l'utilisation de A pour l'étude de l'erreur : l'orthogonalité de Galerkin.

Il s'agit du phénomène suivant : si $v_h, \mu_h \in V_h \times \Lambda_h$ alors

$$A(u, \lambda, v_h, \mu_h) = \Phi(v_h, \mu_h) = A(u_h, \lambda_h, v_h, \mu_h)$$

donc $A(e, \delta, v_h, \mu_h) = 0$ et $A(e, \delta, v, \mu) = A(e, \delta, v - v_h, \mu - \mu_h)$. Dès lors, si v_h, μ_h est une bonne approximation de v, μ , alors $v - v_h, \mu - \mu_h$ est une fonction test de petite norme. Une telle approximation est donnée par le projecteur de Scott-Zhang $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ dont on ne donne pas la définition mais présente quelques propriétés :

Proposition 1.5. (i) Π_h est un projecteur d'image V_h : il induit l'identité sur ce sous-espace

(ii) Π_h préserve la nullité des fonctions sur le bord : $\Pi_h(H_0^1(\Omega)) \subset H_0^1(\Omega)$. De manière équivalente, Π_h préserve la trace des fonctions dont la trace est incluse dans la trace de V_h .

(iii) Pour $T \in \mathcal{T}_h$ on note ΔT l'union des triangles qui ont un sommet en commun avec T . Alors pour tous $v \in V, \mathcal{T}_h \in \mathcal{T}_h$,

$$\|v - \Pi_h v\|_{0,T} \leq C_\sigma h |v|_{1,\Delta T}$$

où C_σ est une constante qui ne dépend que de σ , l'aplatissement maximal des triangles de \mathcal{T}_h : si r_T est le diamètre du cercle inscrit dans T , alors $\sigma = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{diam}(T)}{r_T}$

On a donc intérêt à choisir une triangulation dont les triangles ne sont pas trop aplatis. Cette contrainte est responsable d'une partie de la difficulté du problème de triangulation et est beaucoup moins facile à satisfaire lorsque le maillage de triangles doit s'adapter à de petites irrégularités du domaine. D'où l'intérêt du problème de simplification de la géométrie.

On expliquera plus tard le choix de (v, μ) (section 4.1). En travaillant un peu, cela permet d'obtenir un bon estimateur à posteriori :

Théorème 1.5. Soit u la solution de 3 et u_h la solution numérique sur V_h . On note \mathcal{P}_h l'ensemble des noeuds de la triangulation qui se situent sur Γ et pour $P \in \mathcal{P}_h$, ΔP l'union des deux arêtes extérieures qui se joignent en P . On définit les résidus suivants :

$$\begin{aligned}
r_\Delta(T) &= h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} & \forall T \in \mathcal{T}_h \\
r_i(F) &= h_F^{1/2} \|j(\partial_\nu u_h)\|_{0,F} & \forall F \in \mathcal{F}_h^i \\
r^N(F) &= h_F^{1/2} \|(h - \partial_\nu u_h)\|_{0,F} & \forall F \in \mathcal{F}_h^N \\
r_1^D(P) &= |u_h - g|_{1/2, \Delta P} & \forall P \in \mathcal{P}_h \\
r_0^D(F) &= h_F^{-1/2} \|u_h - g\|_{0,F} & \forall F \in \mathcal{F}_h^D \\
r_\nu^D(F) &= h_F^{-1/2} \|\lambda_h - \partial u_h\|_{0,F} & \forall F \in \mathcal{F}_h^D
\end{aligned}$$

Soit également \mathcal{E}_{num} la racine carrée de la somme des carrés de toutes les quantités introduites ci-dessus. Alors

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \lesssim_\sigma \mathcal{E}_{num}(u_h)$$

\lesssim_σ signifie que la constante dans l'inégalité ne dépend que du domaine et de σ l'applatissage maximal des triangles.

Le fait de ne majorer que la semi-norme $|e|_1 = \|\nabla e\|_0$ ne pose pas de problème car e n'a pas de partie constante. En effet, la fonction constante égale à 1 est dans V_h et l'intégrant contre u_h on obtient alors, par orthogonalité de Galerkin, $\int_\Omega u_h = \int_\Omega u$. V_h capture donc la partie constante de u . Plus rigoureusement, une version de l'inégalité de Poincaré indique que si $v \in V$ est de moyenne \bar{v} , alors $\|v - \bar{v}\|_0 \lesssim \|\nabla v\|_0$. Ainsi, la norme H^1 d'une fonction sans partie constante est contrôlée par sa semi-norme $|\cdot|_1$.

2 Le problème de simplification de la géométrie

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Nous distinguons deux types fondamentaux d'irrégularité dans la géométrie de Ω . Les irrégularités négatives sont les "trous" dans Ω , les parties qui apparaissent comme un défaut de matière. Les irrégularités positives sont les "bosses", qui ressemblent à des surplus de matière. Ces deux cas correspondent respectivement aux premier et deuxième domaine de la Figure 1. Pour traiter la simplification d'un domaine plus complexe, comme par le exemple le dernier domaine de la Figure 1, on peut composer les irrégularités positives et négatives. Par exemple, dans la Figure 1 le dernier domaine peut être vu comme le premier auquel on a ajouté une irrégularité positive. Dans cette section, on donne une définition rigoureuse de ces deux types d'irrégularité et dans chaque cas on explique le problème que l'on souhaite résoudre.

2.1 Irrégularité négative

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert connexe de bord polygonal et $X \subset \mathbb{R}^2$ un défaut de matière de Ω : X est un domaine ouvert de bord polygonal, disjoint de Ω et tel que Ω_0 , l'intérieur de $\bar{X} \cup \bar{\Omega}$, est connexe. Soit $\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\gamma = \Gamma \cap \partial F$, $\gamma_0 = \Gamma_0 \cap \partial F$. Voir la Figure 2

On aimerait résoudre le problème (3) sur Ω mais comme expliqué dans l'introduction, trouver une triangulation convenable sur Ω est difficile. On préfère donc résoudre un problème similaire sur Ω_0 , dont la géométrie plus simple facilite la recherche de triangulations. Pour cela, il faut spécifier une condition au bord sur γ_0 et prolonger f à X . Il est naturel d'imposer une condition au bord sur γ_0 sur même type que celle présente sur γ . Le cas d'une condition de Neumann a déjà été traité par Annalisa Buffa. On suppose donc que $\gamma \subset \Gamma^D$ et note $\Gamma_0^D = (\Gamma^D \setminus \gamma) \cup \gamma_0$. Avec une notation similaire, $\Gamma_0^N = \Gamma^N$. Soit $\tilde{g} \in H^{1/2}(\gamma_0)$ une condition au bord de Dirichlet sur γ_0 . On suppose que \tilde{g} est compatible avec la condition de Dirichlet sur $\Gamma_0^D \setminus \gamma_0 = \Gamma^D \setminus \gamma$,

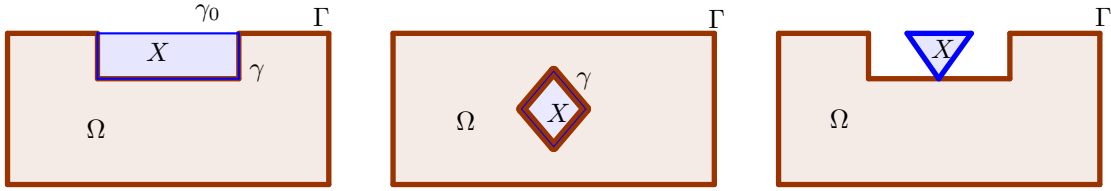


FIGURE 2 – L'irrégularité peut être une bulle de vide dans Ω (deuxième exemple). Dans le dernier exemple, X n'est pas une irrégularité négative valide

c'est-à-dire que la fonction g_0 coïncidant avec g sur $\Gamma_0^D \setminus \gamma_0$ et \tilde{g} sur γ_0 est dans $H^{1/2}(\Gamma_0^D)$. On suppose également que $f \in L^2(\Omega_0)$. Soit u_0 la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{sur } \Omega_0 \\ u_0 = g_0 & \text{sur } \Gamma_0^D \\ \partial_\nu u_0 = j & \text{sur } \Gamma_0^N \end{cases} \quad (5)$$

$\Omega \subset \Omega_0$ donc u_0 est définie sur Ω . La suite de ce rapport essaie de trouver un estimateur a posteriori de l'erreur $|u - u_0|_{1,\Omega}$ causée par la simplification de Ω et le choix de g_0 et $f|_X$. Dans ce problème, il n'y a aucune mention de discrétisation ou de solution numérique : il isole l'erreur due à la simplification de Ω . On dit qu'on se place dans le cas *continu*. Dans un second temps, on étudiera le cas *discret*, c'est-à-dire le cas où on remplace u_0 par u_h , la solution numérique de (5).

2.2 Irrégularité positive

Dans le cas d'une irrégularité positive, $X \subset \Omega$ et Ω_0 est l'intérieur de $\Omega \setminus X$. On maintient les définitions du cas précédent pour γ et γ_0 . On suppose encore que $\gamma \subset \Gamma^D$. On résout un problème d'EDP elliptique sur Ω_0 dont on ne précise pas encore la condition au bord sur γ_0 . Soit u_0 la solution de ce problème. Cette fois ci, Ω_0 est strictement inclus dans Ω donc u_0 n'est pas définie sur Ω . Il faut donc résoudre un deuxième problème pour obtenir une fonction u_X définie sur X , qui étend u_0 . Dans les problèmes sur Ω_0 et X , la condition au bord sur γ_0 est une condition de compatibilité entre u_0 et u_X . On peut demander deux types de compatibilité : la continuité de la trace à travers γ_0 (condition de Dirichlet) ou la conservation du flux (condition de Neumann).

Dans le cas d'une condition de Dirichlet, on note $\Gamma_0^D = (\Gamma^D \setminus \gamma) \cup \gamma_0$ et $\Gamma_0^N = \Gamma^N$. On choisit $\tilde{g} \in H^{1/2}(\gamma_0)$ telle que la fonction g_0 définie à la sous-section précédente soit dans $H^{1/2}(\Gamma_0^D)$ et la fonction g_X , égale à \tilde{g} sur γ_0 et g sur γ soit dans $H^{1/2}(\partial X)$. On résout alors les problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{sur } \Omega_0 \\ u_0 = g_0 & \text{sur } \Gamma_0^D \\ \partial_\nu u_0 = j & \text{sur } \Gamma_0^N \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_X = f & \text{sur } X \\ u_X = g_X & \text{sur } \partial X \end{cases} \quad (6)$$

Il faut faire attention au fait que cette extension ne garantit pas la conservation du flux à travers γ_0 , ce qui est pourtant une propriété de toutes les fonctions dont le laplacien est dans $L^2(\Omega)$. Si u_D est la fonction obtenue par recollement de u_X et u_0 , on n'a pas nécessairement $\Delta u_D \in L^2(\Omega)$. Pourtant, $\Delta u_D \in L^2(\Omega) \cap L^2(X)$. Cela est dû au fait que la non conservation du flux à travers γ_0 induit dans la distribution Δu_D une composante localisée dans γ_0 . Or γ_0 est de mesure nulle dans Ω donc $L^2(\Omega)$ ne peut pas comprendre cette composante.

Dans le cas d'une condition de Neumann, on note $\Gamma_0^D = \Gamma^D \setminus \gamma$ et $\Gamma_0^N = \Gamma^N \cup \gamma_0$. Soit $\tilde{j} \in H^{-1/2}(\gamma_0)$. On note j_0 la fonction obtenue par union de j et \tilde{j} . Il n'y a pas de compatibilité à demander entre \tilde{j} et j car $j_0 \in H^{-1/2}(\Gamma_0^N)$ est automatique. On résout les problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{sur } \Omega_0 \\ u_0 = g & \text{sur } \Gamma_0^D \setminus \gamma_0 \\ \partial_\nu u_0 = j_0 & \text{sur } \Gamma_0^N \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_X = f & \text{sur } X \\ u_X = g & \text{sur } \gamma \\ \partial_\nu u_X = \tilde{j} & \text{sur } \gamma_0 \end{cases} \quad (7)$$

Comme l'extension de Dirichlet, cette extension a un inconvénient majeur : elle n'assure pas que la fonction u_N obtenue par union de u_0 et u_X est dans $H^1(\Omega)$. En effet, rien n'assure la continuité de la trace à travers à γ_0 .

Pour les deux types d'extension, l'erreur à estimer est

$$\sqrt{|u - u_0|_{1,\Omega_0}^2 + |u - u_X|_{1,X}^2}$$

Des estimations de l'erreur dans le cas discret seront également données.

3 Estimateurs de l'erreur, cas continu

3.1 Irrégularité négative

On reprend le cadre de la section 2.1 : soit (u, λ) la solution du problème variationnel sur Ω et (u_0, λ_0) la solution sur Ω_0 . On pose $e = u - u_0$ sur Ω et cherche à estimer $\|e\|_{1,\Omega}$. On ne peut pas encore poser $\delta = \lambda - \lambda_0$ car λ_0 n'est pas définie sur γ . u et u_0 se ressemblent suffisamment, on peut espérer que e est une solution d'une EDP elliptique du type (3), dans laquelle les membres de droite sont petits ou nuls. On pourra alors utiliser le contrôle des solutions donné par le lemme 1.4 de Lax-Milgram pour estimer $\|e\|_{1,\Omega}$. u satisfaisant déjà une EDP linéaire sur Ω , pour trouver une EDP satisfaite par e il suffit de trouver une EDP semblable satisfaite par u_0 sur Ω . Le candidat naturel est :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{sur } \Omega \\ u_0 = u_0 & \text{sur } \Gamma^D \\ \partial_\nu u = j & \text{sur } \Gamma^N \end{cases}$$

Proposition 3.1. *Il existe $\tilde{\lambda}_0$ tel que $(u_0, \tilde{\lambda}_0)$ est solution du problème ci-dessus.*

Preuve. *D'après la formulation variationnelle (4), en prenant $\mu = 0$, $\tilde{\lambda}_0$ doit être l'élément de $H^1(\Omega)'$ tel que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,*

$$\langle \tilde{\lambda}_0, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma^N} j v$$

Il reste à montrer que $\tilde{\lambda}_0 \in \Lambda = H^{-1/2}(\Gamma^D)$. On utilise la Proposition 1.3 et il suffit alors de montrer que $\tilde{\lambda}_0$ est nulle sur $H_{0,\Gamma^D}^1(\Omega)$. Soit v dans cet espace. $\partial\Omega \cap \partial X = \gamma \subset \Gamma^D$ par hypothèse donc v est nulle sur l'interface entre X et Ω et peut alors se prolonger en une fonction $H^1(\Omega_0)$ nulle sur X . La formule variationnelle définissant u_0 sur Ω donne alors

$$\langle \tilde{\lambda}_0, v \rangle = \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla v - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\Gamma^N = \Gamma_0^N} j v = \int_{\Gamma_0^D} \lambda_0 v = 0$$

Ceci conclut la preuve.

Par superposition (linéarité), e est donc solution de

$$\begin{cases} -\Delta e = 0 & \text{sur } \Omega \\ e = g - u_0 & \text{sur } \Gamma^D \\ \partial_\nu e = 0 & \text{sur } \Gamma^N \end{cases}$$

et le lemme de Lax-Milgram 1.4 donne

$$\|e\|_{1,\Omega} \lesssim \|g - u_0\|_{1/2,\Gamma^D}$$

L'erreur se trouve donc dans Γ^D et provient du fait que u_0 ne vérifie la condition au bord sur γ . En remarquant que le théorème de trace donne l'inégalité inverse :

Théorème 3.1. *Pour une irrégularité négative, on a l'estimation suivante de l'erreur dans le cas continu :*

$$\|e\|_{1,\Omega} \simeq \|g - u_0\|_{1/2,\Gamma^D}$$

On s'attend cependant à ce que l'erreur soit concentrée dans γ et ne s'étale pas sur tout Γ^D , car la condition au bord sur $\Gamma^D \setminus \gamma$ est vérifiée par u_0 . On essaie alors d'utiliser le fait que $e = 0$ sur $\Gamma^D \setminus \gamma$ pour obtenir un estimateur qui n'utilise que les valeurs de $g - u_0$ sur γ . L'espace des fonctions de $H^{1/2}(\gamma)$ qui lorsque prolongées par 0 tombent dans $H^{1/2}(\Gamma^D)$ porte un nom : il s'agit de $H_{0,\Gamma^D \cap \partial\gamma}^{1/2}(\gamma)$. C'est un analogue (et même la trace) de l'espace $H_{0,\Gamma^D \setminus \gamma}^1(\Omega)$ des fonctions H^1 qui s'annulent sur $\Gamma^D \setminus \gamma$ mais il faut faire attention au fait que trace d'un élément de $H^{1/2}(\gamma)$ n'est pas définie (il suffit en fait d'une régularité $H^{1/2+\epsilon}$). La norme associée aux espaces $H_{0,K}^{1/2}(\gamma)$ ($K \subset \partial\gamma$) est :

$$\|\cdot\|_{H_{0,K}^{1/2}(\gamma)} = \|\cdot\|_{H^{1/2}(\gamma)} + |\cdot|_{H_{0,K}^{1/2}(\gamma)}, \quad |v|_{H_{0,K}^{1/2}} = \int_{\gamma} \frac{v(x)^2}{\text{dist}(x,K)^2} dx$$

de telle sorte que

$$\|\cdot\|_{H_{0,\Gamma^D \cap \partial\gamma}^{1/2}(\gamma)} \simeq \|\cdot\|_{1/2,\Gamma^D}$$

Si $K = \emptyset$, on a $H_{0,K}^{1/2}(\gamma) = H^{1/2}(\gamma)$. On peut alors réécrire l'estimateur de la manière suivante :

Théorème 3.2. *Pour une irrégularité négative, on l'estimation suivante de l'erreur dans le cas continu :*

$$\|e\|_{1,\Omega} \simeq \|g - u_0\|_{H_{0,\Gamma^D \cap \partial\gamma}^{1/2}(\gamma)}$$

La concentration de l'erreur dans γ peut aussi être lue dans la formulation variationnelle de l'EDP vérifiée par e . En prenant e comme fonction test, elle donne

$$|e|_1^2 = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla e = \int_{\gamma} e(\lambda - \tilde{\lambda}_0)$$

Enfin, une expérience numérique permet de valider l'estimateur donné. Pour cela, on part d'un domaine carré auquel on peut ajouter différents défauts de matière. La Figure 3.1 illustre le cas d'un domaine carré auquel on a retiré un disque. Pour simuler les solutions u et u_0 dans le cas continu on choisit un maillage très fin. On calcule u et u_0 et obtient e . La Figure 3.1 confirme que l'erreur se concentre sur le bord de l'irrégularité. On calcule $|e|_{1,\Omega}$ et $\|e\|_{1/2,\Gamma^D}$. Cette dernière norme peut s'obtenir par transformée de Fourier. Le résultat obtenu est que, pour chaque géométrie testée, lorsque les paramètres f, g, j varient, le quotient entre les valeurs maximale et minimale de $\frac{|e|_{1,\Omega}}{\|e\|_{1/2,\Gamma^D}}$ est de l'ordre de 10. $\|e\|_{1/2,\Gamma^D}$ est donc un bon estimateur à un facteur de l'ordre de $\sqrt{10}$ près.

3.2 Irrégularité postive

On distingue deux cas, selon le type d'extension utilisée à travers γ_0 .

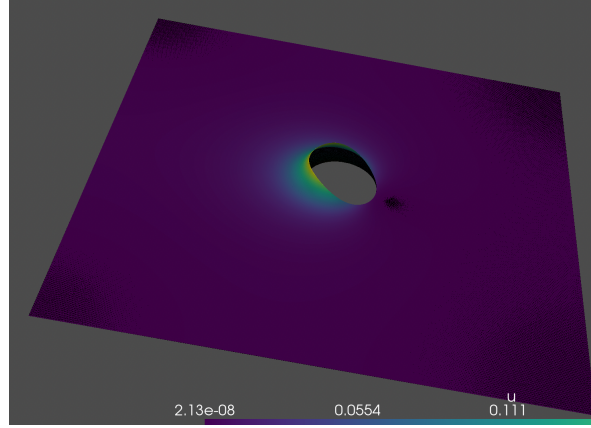


FIGURE 3 – Valeurs de $|\nabla e|^2$ dans un cas particulier, les couleurs chaudes représentent des valeurs plus élevées

Pour une extension de Dirichlet, on avait remarqué que la fonction obtenue par réunion de u_0 et u_X vérifie les mêmes conditions au bord que u mais n'a pas son laplacien dans $L^2(\Omega)$ car sa dérivée normale présente une brisure à travers γ_0 . L'estimateur de l'erreur repose donc naturellement sur cette brisure. On rappelle que lorsque (u, λ) est solution d'un problème tel que (3), on a $\lambda = \partial_\nu u$ sur Γ^D . Le saut de flux à travers γ_0 s'écrit donc $d = \lambda_X + \lambda_0$. Cette quantité n'est à priori pas définie sur γ_0 car on ne peut pas restreindre les fonctions $H^{-1/2}$. En supposant que $\lambda_X, \lambda_0 \in L^2(\Gamma^D)$, ce qui est le cas en pratique, on peut donner un sens à d sur γ_0 . En notant \bar{d}^{γ_0} la valeur moyenne de d sur γ_0 on a :

Théorème 3.3. *Pour une irrégularité positive, dans le cas continu avec une extension de Dirichlet, en notant $d = \lambda_0 + \lambda_X$ on a*

$$|u - u_0|_{1, \Omega_0}^2 + |u - u_X|_{1, X}^2 \lesssim |\gamma_0| \cdot \|d - \bar{d}^{\gamma_0}\|_{0, \gamma_0}^2 + \max(1, \log(|\gamma_0|)) |\gamma_0|^2 |\bar{d}^{\gamma_0}|^2$$

Pour une extension de Neumann, le problème était une discontinuité de la trace à travers γ_0 . Cela donne naturellement lieu à l'estimateur suivant :

Théorème 3.4. *Pour une irrégularité positive, dans le cas continu avec une extension de Neumann on a*

$$\|u_X - u_0\|_{H_{0, \Gamma_0^D \cap \partial \gamma_0}^{1/2}(\gamma_0)} \lesssim |u - u_0|_{1, \Omega_0}^2 + |u - u_X|_{1, X}^2 \lesssim \|u_X - u_0\|_{H_{0, \partial \gamma_0}^{1/2}(\gamma_0)}$$

4 Estimateurs de l'erreur, cas discret

4.1 Choix des fonctions test

On détaille ici le choix et quelques propriétés des fonctions test (v, μ) apparaissant dans le calcul des estimateurs à posteriori de l'erreur numérique. Considérons pour cette sous-section le problème (3), sans simplification de la géométrie. La forme bilinéaire A n'est pas un produit scalaire mais le lemme de Lax-Milgram donne un analogue du théorème de représentation de Riesz. Un choix de (v, μ) est donc équivalent au choix d'une forme linéaire continue L sur $V \times \Lambda$. Si \mathcal{E} est la fonction d'erreur que l'on cherche à estimer, il s'agit alors de trouver L tel que

$$\mathcal{E}(e, \delta) = L(e, \delta) \quad (= A(e, \delta; v, \mu))$$

On peut alors écrire les erreurs suivantes ainsi :

- $|e|_1 = L(e, \delta)$ pour $L(w, \eta) := \frac{1}{|e|_1} \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla w$
- $\|e\|_0 = L(e, \delta)$ pour $L(w, \eta) := \frac{1}{\|e\|_1} \int_{\Omega} ew$
- $\|\delta\|_{-1/2, \Gamma^D} = L(e, \delta)$ pour $L(w, \eta) := \frac{1}{\|\delta\|_{-1/2, \Gamma}} \int_{\Gamma^D} \delta w$

On remarque que dans chaque cas on a choisi L telle que $L \lesssim 1$. Le contrôle des représentants dans le lemme de Lax-Milgram 1.4 donne alors $\|(v, \mu)\|_{V \times \Lambda} \lesssim 1$.

On s'intéresse particulièrement au cas $\mathcal{E}(e, \delta) = |e|_1$. La proposition suivante aide à traiter ce cas

Proposition 4.1. *Soit L une forme linéaire continue sur $V \times \Lambda$, représentée par $(v, \mu) : L = A(\cdot; (v, \mu))$. Si $L(w, \eta)$ ne dépend que de w , alors $v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$*

Preuve. *En effet, si c'est le cas, pour tout $\eta \in \Lambda$*

$$A(0, \eta; v, \mu) = - \int_{\Gamma^D} \eta v = 0$$

donc la trace de v sur Γ^D est nulle.

Dans la suite de cette section, (v, μ) représente $L(w) := \frac{1}{|e|_1} \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla w$. Pour illustrer le rôle de la proposition précédente, on considère un exemple d'utilisation de la représentation de l'erreur de la Proposition 1.4.

Supposons que Ω présente une irrégularité négative. On approche u avec la solution continue u_0 du problème (5) sur Ω_0 . Puisque $\partial_\nu u_0 = j$ sur Γ^N et $f + \Delta u_0 = 0$, ce qui implique $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ et $[[\partial_\nu u_0]] = 0$ à travers les facettes intérieures, la Proposition 1.4, appliquée au problème (3) définissant u donne

$$|e|_1 = A(e, \delta, v, \mu) = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^D} \int_F (\tilde{\lambda}_0 - \partial_\nu u_0) v + \int_{\Gamma^D} (g - u_h) \mu$$

On remarque qu'il ne reste plus que les termes localisés dans Γ^D , ce qui est attendu car l'erreur de simplification de la géométrie est concentrée dans Γ^D et les autres termes de la représentation de l'erreur représentent alors de l'erreur numérique pure, qui est nulle dans le cas continu. $\tilde{\lambda}_0$ n'est pas une quantité donnée immédiatement par la résolution du problème (5) et son calcul est à éviter, notamment parce que lorsqu'on passera au cas discret il sera impossible car la triangulation de Ω_0 ne sera pas adaptée à γ . Heureusement, $v \in H_{0, \Gamma^D}^1(\Omega)$ donc on peut écrire

$$|e|_1 = \int_{\Gamma^D} (g - u_0) \mu \lesssim \|g - u_0\|_{1/2, \Gamma^D}$$

car $\|\mu\|_{\Lambda} \lesssim 1$. C'est l'estimateur qui avait déjà été trouvé.

4.2 Irrégularités négatives

On se place dans le cadre de la section 2.1. On rappelle qu'il est difficile de trouver une triangulation sur Ω , donc on choisit une triangulation \mathcal{T}_h sur Ω_0 adaptée à Γ_0^D, Γ_0^N mais qui n'est pas nécessairement adaptée à Ω . On note V_h l'espace des solutions pour la méthode des éléments finis sur \mathcal{T}_h . Soit $(u_{0,h}, \lambda_{0,h})$ la solution numérique du problème (5) définissant u_0 . On essaie d'appliquer le raisonnement de la section 1.3 au problème (3) en approchant u par $u_h := u_{0,h}|_{\Omega}$. Malheureusement, puisque u_h n'est pas calculée directement comme une solution numérique du problème (3), il n'y a pas orthogonalité de Galerkin et on n'a pas $A(e, \delta; v, \mu) = A(e, \delta; v - v_h, \mu)$ pour tout $v_h \in V_h$.

On résout ce problème en introduisant W_h , l'espace des fonctions de V_h qui sont nulles hors de Ω . L'idée est que les fonctions de W_h espace sont nulles sur γ donc elles ne peuvent pas voir que u_0 et u_h ne satisfont pas la condition au bord sur γ . Soit λ_h définie sur Γ^D par

$$\lambda_h = \begin{cases} \lambda_h^0 & \text{on } \Gamma^D \setminus \gamma \\ 0 & \text{on } \gamma \end{cases}$$

On rappelle que le choix de la valeur de λ_h sur γ importe peu si l'on souhaite minimiser l'erreur car, comme expliqué dans la sous-section précédente, les termes en λ_h de l'erreur sont nuls. On a alors, puisque v_h est nulle hors de Ω ,

$$\begin{aligned} \forall v_h \in W_h, \quad A(u_h, \lambda_h, v_h, 0) &= \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma^D \setminus \gamma} \lambda_h v_h \\ &= \int_{\Omega_0} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma_0^D \setminus \gamma_0} \lambda_{0,h} v_h \\ &= \int_{\Omega_0} \nabla u_{0,h} \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma_0^D} \lambda_{0,h} v_h \\ &= \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma_0^D} \lambda_0 v_h \\ &= \int_{\Omega_0} f v_h + \int_{\Gamma^N} j v_h \\ &= \int_{\Omega} f v_h + \int_{\Gamma^N} j v_h \\ &= A(u, \lambda; v_h, 0) \end{aligned}$$

On a donc l'orthogonalité de Galerkin sur W_h . On rappelle que le projecteur de Scott-Zhang conserve la nullité de la trace. En se souvenant du fait que $v = 0$ sur $\Gamma^D \supset \gamma$, il est possible d'utiliser ce projecteur et d'adapter la proposition 1.5 pour trouver $v_h \in W_h$ tel qu'une estimée du type (iii) de la proposition 1.5 soit vérifiée. La forme finale exacte de l'estimateur à posteriori tiré de cette méthode est complexe mais son allure générale est $\mathcal{E}(u_h) = \mathcal{E}_{num}(u_h) + \mathcal{E}_{simp}(u_h)$ où \mathcal{E}_{num} est l'erreur numérique de la section 1.3 pour le problème (5) définissant u_0 , avec les termes r_V^D en λ_h en moins et \mathcal{E}_{simp} est l'erreur due à la simplification de la géométrie calculée dans le cas continu.

Dans le cas d'irrégularités positives, l'erreur prend la forme $\sqrt{\mathcal{E}_{X,num}^2 + \mathcal{E}_{0,num}^2} + \mathcal{E}_{simp}$

5 Erreur en norme L^2

Souvent, ce qui intéresse la personne cherchant la solution u est une fonction de u (par exemple une énergie, un flux ou une trace) ou alors une portion localisée de u . Une de ces fonctions peut être l'injection $H^1 \rightarrow L^2$. Pour conclure ce rapport, on présente un estimateur de l'erreur L^2 . On ne traitera que le cas d'une irrégularité négative et n'estimera que l'erreur due à la simplification de la géométrie. C'est-à-dire qu'on traitera le cas continu.

Soient (u, λ) et (u_0, λ_0) les habituelles solutions de (3) et (5). On rappelle que $\tilde{\lambda}_0$ est un élément de Λ tel que (u_0, λ_0) soit solution d'un problème elliptique sur Ω et note $e = u - u_0$ et $\delta = \lambda - \tilde{\lambda}_0$. Pour estimer l'erreur dans L^2 , on utilise les techniques de la section 4.1 et introduit

$$L(w) := \frac{1}{\|e\|_{0,\Omega}} \int_{\Omega} e w$$

Soient $(v, \mu) \in V \times \Lambda$ tels que $A(w, \eta; v, \mu) = L(w)$. En réutilisant le raisonnement utilisé en

exemple à la fin de la section 4.1, on a

$$\|e\|_{0,\Omega} = \int_{\Gamma^D} (g - u_0)\mu$$

On aimerait trouver la régularité de μ pour pouvoir contrôler $\|e\|_{0,\Omega}$ avec la norme la plus petite possible de $g - u_0$. Pour cela, on remarque que $(v, -\mu)$ résout un problème elliptique :

$$A(v, -\mu; w, \eta) = A(w, -\eta; v, \mu) = \frac{1}{\|e\|_{0,\Omega}} \int_{\Omega} ew$$

donc v est solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{e}{\|e\|_{0,\Omega}} & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma^D \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \Gamma^N \end{cases}$$

et $\partial_\nu v = \mu$ sur Γ^D . On dispose du théorème de régularité elliptique suivant :

Théorème 5.1. *Soit Ω un domaine polygonal et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Alors l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ vérifie $u \in H^2(\Omega)$ (fonctions faiblement dérivables deux fois) et $\|u\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}$

On suppose donc $\Gamma^D = \Gamma$. le théorème donne alors $v \in H^2(\Omega)$ avec $\|v\|_{H^2} \lesssim 1$. On peut alors voir $\mu = \partial_\nu v$ comme la composante normale de la trace de ∇v et

$$\|\mu\|_{1/2,\Gamma} \lesssim \|\nabla v\|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{2,\Omega} \lesssim 1$$

donc $\|e\|_{0,\Omega} \lesssim \|g - u_0\|_{-1/2,\Omega}$

Théorème 5.2. *Pour une irrégularité négative dans le cas continu, si $\Gamma^D = \Gamma$, alors*

$$\|e\|_{0,\Omega} \lesssim \|g - u_0\|_{-1/2,\Omega}$$