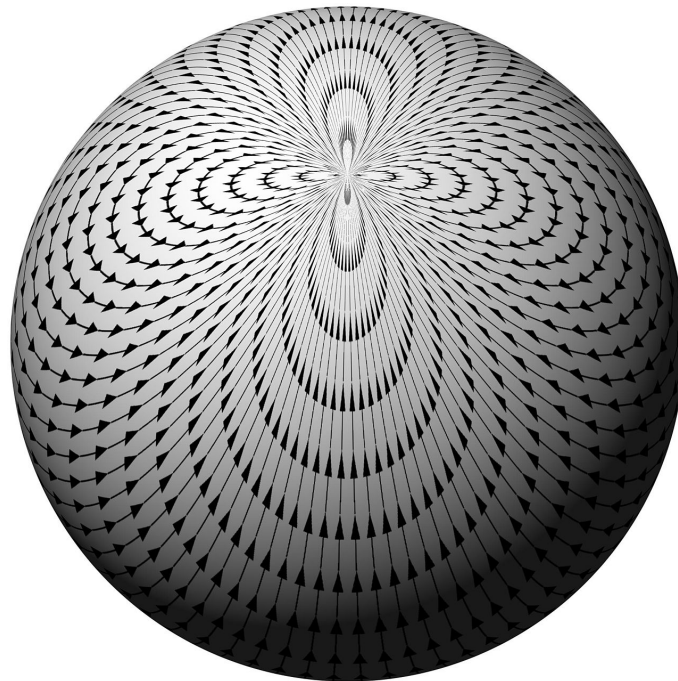


Rapport de stage de M1 :  
*K*-théorie et problème des champs de  
vecteurs sur la sphère

Nail Bouberbachene  
Encadré par Yosuke Morita



Août 2023  
Université de Kyoto  
École Normale Supérieure

## Table des matières

<b>Déroulement du stage</b>	<b>3</b>
<b>Introduction mathématique</b>	<b>3</b>
<b>1 Fibrés vectoriels</b>	<b>4</b>
1.1 Définitions et opérations sur les fibrés vectoriels . . . . .	4
1.2 Propriétés . . . . .	5
<b>2 K-théorie</b>	<b>8</b>
2.1 Définitions et notations . . . . .	8
2.2 Cohomologie de $K$ . . . . .	9
<b>3 Isomorphisme de Thom</b>	<b>12</b>
<b>4 Opérations en <math>K</math>-théorie</b>	<b>13</b>
<b>5 Le problème des champs de vecteurs sur la sphère</b>	<b>14</b>
5.1 Homotopie fibre à fibre . . . . .	15
5.2 La preuve du théorème . . . . .	17

## Déroulement du stage

J'ai effectué mon stage à l'université de Kyoto d'avril à août sous la direction de Yosuke Morita. Le sujet était la K-théorie topologique et l'objectif final était de comprendre la preuve de J. F. Adams du problème des champs de vecteurs sur la sphère. Je ne connaissais rien de cette théorie donc j'ai passé l'essentiel de ce stage à lire les livres *K-theory* d'Atiyah [1] et de Karoubi [2] pour acquérir de nouveaux outils et de nouvelles connaissances. A la fin du stage, Yosuke Morita m'a expliqué les liens entre ses recherches actuelles et les outils et résultats rencontrés.

Malheureusement mon maître de stage a changé de poste peu avant mon arrivée à Kyoto et nous avons dû travailler en visioconférence la plupart du temps. Mon hôte formel à l'université de Kyoto était donc Koji Fujiwara que j'ai rencontré plusieurs fois. Son domaine de recherche étant la géométrie différentielle, j'ai lu en parallèle certains chapitre de *Office hours with a geometric group theorist* [3] concernant les groupes hyperboliques et nous en avons discuté une à deux fois par mois.

En dehors des mathématiques, j'ai eu l'occasion de rejoindre différents clubs d'étudiants (orchestre, calligraphie, baseball...), de pratiquer le japonais et de visiter de nombreux temples dans plusieurs villes du pays.

Je tiens à remercier mon maître de stage Yosuke Morita, grâce à qui j'ai grandement apprécié cette expérience, pour tout le temps qu'il m'a accordé. Je remercie également Nicolas Tholozan et Olivier Benoist qui m'ont aidé à trouver un stage dans le domaine et le pays qui m'intéressaient.

## Introduction mathématique

Un des premiers résultats concernant les champs de vecteurs sur la sphère est le théorème de la boule chevelue : tout champs de vecteurs sur une sphère de dimension paire s'annule au moins en un point. Sur  $\mathbb{S}^1$ , on peut facilement trouver un champs de vecteurs ne s'annulant pas mais on remarque alors qu'un deuxième tel champs de vecteurs est en tout point colinéaire au premier. Vient alors la question du nombre maximal de champs de vecteurs linéairement indépendants (c'est à dire en tout point linéairement indépendants) sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ , quelque soit  $n$ .

A l'aide des algèbres de Clifford (nommées d'après les travaux de William Kingdon Clifford de la fin du 19ème siècle), il est possible de construire  $\rho(n) - 1$  champs de vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{S}^n$ , où  $\rho(n)$  est le  $n$ -ème nombre de Radon-Hurwitz. En revanche, il a fallu attendre 1962 pour que John Frank Adams fournisse une preuve que ce nombre est optimal [4]. Le théorème est le suivant :

**Théorème 0.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe au maximum  $\rho(n) - 1$  champs de vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{S}^n$ , où les nombres de Radon-Hurwitz  $\rho(n)$  sont définis par  $\rho((2k + 1)2^{c+4d}) = 2^c + 8d$  ( $k, d \geq 0$  et  $0 \leq c \leq 3$ ).

La preuve d'Adams s'appuie sur la K-théorie topologique, c'est à dire l'étude d'invariants liés à la géométrie des différents fibrés vectoriels existants au dessus d'un espace topologique donné. Avant d'en venir à la définition des K-groupes, je me propose d'exposer quelques définitions et résultats concernant les fibrés vectoriels.

# 1 Fibrés vectoriels

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux fibrés vectoriels complexes, la plupart des résultats étant identiques ou analogues dans le cas réel.

## 1.1 Définitions et opérations sur les fibrés vectoriels

**Définition 1.1.** Soit  $X$  un espace topologique. Un fibré vectoriel  $E$  sur  $X$  est la donnée de :

- Un espace topologique  $E$ .
- Une application continue  $p : E \rightarrow X$  telle que pour tout  $x$  dans  $X$ , la fibre  $p^{-1}(x)$  est munie d'une structure de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel compatible avec la topologie de  $E$ .
- Pour chaque  $x \in X$  d'un ouvert  $U$ , dit de trivialisatation, contenant  $x$  et un homéomorphisme  $\varphi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow p^{-1}(U)$  pour un certain  $n$ .

On note  $E_x$  la fibre en  $x$  et  $E|U$  la restriction de  $E$  au dessus de  $U \subset X$ . On définit alors les morphismes d'espaces vectoriels.

**Définition 1.2.** Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels au dessus de  $X$  (on note  $p_E$  et  $p_F$  les projections). Un morphisme d'espaces vectoriels de  $E$  vers  $F$  est une application continue  $\varphi : E \rightarrow F$  telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ & \searrow p_E & \swarrow p_F \\ & X & \end{array}$$

et telle que pour tout  $x \in X$ ,  $\varphi : E_x \rightarrow F_x$  est linéaire.

On définit alors la notion d'isomorphisme et on remarque qu'un morphisme de fibrés vectoriels est un isomorphisme si et seulement si c'est un morphisme d'espaces vectoriels sur chaque fibre. On remarque également que puisque  $Iso(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  est un ouvert de  $Hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ , se placer dans un ouvert de trivialisatation montre que si un morphisme  $\varphi$  induit un isomorphisme en  $x$ , alors il existe un voisinage  $U$  de  $x$  sur lequel  $\varphi$  est un isomorphisme.

**Définition 1.3.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue et  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$ . On définit le tiré en arrière  $f^*(E)$  comme le fibré vectoriel au dessus de  $Y$  défini par  $f^*(E) = \{(e, y) \in E \times Y | p(e) = f(y)\}$  muni de la topologie induite par la topologie produit et de la projection sur la deuxième coordonnée.

Nous pouvons désormais définir la catégorie  $\mathcal{E}(X)$  des fibrés vectoriels au dessus de  $X$ . Afin de définir efficacement des opérations dans cette catégorie, nous allons voir comment construire en toute généralité un foncteur de  $\mathcal{E}(X)$  vers  $\mathcal{E}(X)$  à partir d'un foncteur de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie  $\mathcal{E}$  vers elle même.

Soit donc  $T$  un foncteur covariant de  $\mathcal{E}$ . Supposons  $T$  continu, c'est à dire que pour

tout espaces vectoriels  $V$  et  $W$  de dimensions finies, l'application  $T : Hom(V, W) \rightarrow Hom(T(V), T(W))$  est continue. Soit  $E \in \mathcal{E}(X)$ . On définit l'ensemble  $T(E)$  comme  $\bigcup_{x \in X} T(E_x)$  et pour chaque  $\varphi \in Hom(E, F)$  on définit  $T(\varphi) : T(E) \rightarrow T(F)$  par  $T(\varphi)_x = T(\varphi_x)$ . On remarque que  $T(\varphi_1 \varphi_2) = T(\varphi_1)T(\varphi_2)$ .

Il nous faut munir  $T(E)$  d'une topologie naturelle et voir que selon cette topologie, il s'agit d'un fibré vectoriel (la trivialité locale reste à prouver) et que l'application  $T(\varphi)$  est un morphisme de fibrés vectoriels (la continuité reste à prouver). Dans le cas de produits  $E = X \times V$  et  $F = X \times W$ , on a  $T(E) = X \times T(V)$  que l'on munit de la topologie produit. Ainsi, la continuité de  $T(\varphi) : X \times T(V) \rightarrow X \times T(W)$  équivaut à celle de  $T(\phi) : X \rightarrow Hom(T(V), T(W))$ , où  $\phi : X \rightarrow Hom(V, W)$  est définie par  $\phi(x) = \varphi(x)$ . Or  $\phi$  est continue car  $\varphi$  l'est donc  $T(\phi)$  est continue par continuité de  $T$ . D'où la continuité de  $T(\varphi)$ .

Soit maintenant  $E$  un fibré vectoriel trivial et  $\alpha : E \rightarrow X \times V$  une trivialisation. On munit  $T(E)$  de la topologie faisant de  $\alpha$  un homeomorphisme. Si  $\beta : X \times W$  est une autre trivialisation, d'après le premier cas  $T(\alpha\beta^{-1})$  est un homeomorphisme. Or  $T(\alpha\beta^{-1}) = T(\alpha)T(\beta^{-1})$  donc  $\alpha$  et  $\beta$  induisent la même topologie sur  $T(E)$ . Ainsi la topologie de  $T(E)$  ne dépend pas de  $\alpha$  et on vérifie que si  $\varphi : E \rightarrow F$  est continue alors  $T(\varphi)$  aussi.

Enfin, dans le cas général on prend pour ouverts les ensembles  $V \subset T(E)$  tels que pour tout ouvert de trivialisation  $U \subset X$ , l'intersection  $V \cap (T(E)|U)$  est un ouvert de  $T(E|U)$  (muni de la topologie décrite précédemment). On vérifie que cela définit une topologie et la continuité étant une propriété locale, d'après le cas précédent, si  $\varphi$  est continue alors  $T(\varphi)$  est continue.

Enfin, on remarque que si  $f : Y \rightarrow X$  est une application continue, on dispose d'un isomorphisme naturel  $T(f^*E) \cong f^*T(E)$ . Cette construction peut être adaptée au cas d'un foncteur à plusieurs variables, covariantes comme contravariantes. On peut alors l'appliquer aux opérations classiques sur les espaces vectoriels pour obtenir, à partir de fibrés vectoriels  $E$  et  $F$ , les fibrés vectoriels suivants :

- $E \oplus F$  la somme directe
- $E \otimes F$  le produit tensoriel
- $Hom(E, F)$  le fibré vectoriel dont la fibre en  $x$  est l'espace vectoriel  $Hom(E_x, F_x)$
- $E^*$  le fibré vectoriel dual
- $\lambda^i(E)$  où  $\lambda^i$  est la  $i$ -ème puissance extérieure

De plus on dispose des mêmes isomorphismes que dans le cas des espaces vectoriels :

- $E \oplus F \cong F \oplus E$
- $E \otimes F \cong F \otimes E$
- $E \otimes (F \oplus F') \cong (E \otimes F) \oplus (E \otimes F')$
- $Hom(E, F) \cong E^* \otimes F$
- $\lambda^k(E \oplus F) \cong \bigoplus_{i+j=k} \lambda^i(E) \otimes \lambda^j(F)$

## 1.2 Propriétés

A partir de maintenant, nous considérons tous les espaces bases compacts. Cela nous permettra d'utiliser des partitions de l'unité ainsi que le théorème d'extension de Tietze :

**Théorème 1.4.** Soit  $X$  un espace compact,  $Y \subset X$  un sous-espace fermé,  $V$  un espace vectoriel et  $f : Y \rightarrow V$  une application continue. Alors il existe une application continue  $g : X \rightarrow V$  telle que  $g|_Y = f$ .

A l'aide d'une partition de l'unité, on peut utiliser ce théorème sur des ouverts de trivialisations et l'étendre au cas des fibrés vectoriels sous la forme suivante :

**Lemme 1.5.** Soit  $X$  un espace compact,  $Y \subset X$  un sous-espace fermé et  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$ . Alors toute section  $s : Y \rightarrow E|_Y$  s'étend à  $X$ .

En remarquant qu'un morphisme  $E \rightarrow F$  de fibrés est une section du fibré  $Hom(E, F)$ , on peut appliquer le lemme précédent et utiliser le fait qu'induire un isomorphisme sur une fibre est une propriété ouverte pour montrer le lemme suivant :

**Lemme 1.6.** Soit  $Y$  un sous-espace fermé d'un espace  $X$  compact et  $E, F$  des fibrés vectoriels sur  $X$ . Si  $f : E|_Y \rightarrow F|_Y$  est un isomorphisme alors il existe un ouvert  $U$  contenant  $Y$  et une extension  $f : E|_U \rightarrow F|_U$  qui est un isomorphisme.

Nous pouvons alors énoncer un premier résultat lié à l'homotopie :

**Proposition 1.7.** Soit  $X, Y$  des espaces compacts,  $f, g : Y \rightarrow X$  deux applications homotopes et  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$ . Alors on a l'isomorphisme

$$f^*E \cong g^*E$$

*Démonstration.* Soit  $I = [0, 1]$  et  $h : Y \times I \rightarrow X$  l'homotopie entre  $f = h_0$  et  $g = h_1$ . On pose  $\pi : Y \times I \rightarrow Y$  la projection sur la première coordonnée et on applique le lemme précédent aux fibrés vectoriels  $h^*E$ ,  $\pi^*h_t^*E$  et au sous-espace  $Y \times \{t\}$  de  $Y \times I$  pour  $t \in I$  (leurs restrictions à ce sous-espace sont égales donc isomorphes). On obtient ainsi un isomorphisme entre  $h^*E$  et  $\pi^*h_t^*E$  sur une bande ouverte  $Y \times \partial t$  où  $\partial t$  est un ouvert de  $I$  contenant  $t$ . On a donc montré que la classe d'isomorphisme de  $h_t^*E$  est localement constante lorsque  $t$  varie. Par connexité de  $I$  on en déduit qu'elle est même constante et en particulier

$$f^*E = h_0^*E \cong h_1^*E = g^*E.$$

□

Nous noterons  $Vect(X)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur  $X$  et  $Vect_n(X)$  celui des classes d'isomorphisme de fibrés de dimension  $n$ . On remarque que  $Vect(X)$  est un semi-groupe abélien pour l'addition  $\oplus$  et nous noterons directement  $n$  la classe du fibré trivial de dimension  $n$ . La proposition suivante découle directement de la proposition 1.7 :

**Proposition 1.8.** On a les deux propriétés suivantes :

1. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie alors  $f^* : Vect(Y) \rightarrow Vect(X)$  est bijective.
2. Si  $X$  est contractile alors tout fibré vectoriel au dessus de  $X$  est trivial et  $Vect(X)$  est isomorphe à  $\mathbb{N}$ .

Si  $Y$  est un sous-espace fermé de  $X$  et  $E$  est un fibré vectoriel sur  $X$ , nous appellerons trivialisations de  $E$  au dessus de  $Y$  tout isomorphisme  $\alpha : E|_Y \rightarrow Y \times V$  où  $V$  est un espace vectoriel. Nous admettrons la construction suivante :

**Définition/Proposition 1.9.** Une trivialisations  $\alpha$  d'un fibré vectoriel  $E$  au dessus de  $Y \subset X$  définit un fibré vectoriel  $E/\alpha$  sur  $X/Y$ . La classe d'isomorphisme de ce fibré vectoriel ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\alpha$ .

**Lemme 1.10.** Soit  $Y \subset X$  un sous-espace fermé et contractile. Alors la projection  $f : X \rightarrow X/Y$  induit une bijection  $f^* : Vect(X/Y) \rightarrow Vect(X)$ .

*Démonstration.* Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$ . Par la proposition 1.8, la restriction  $E|_Y$  est triviale et deux trivialisations  $\alpha, \beta : E|_Y \rightarrow Y \times \mathbb{C}^n$  diffèrent d'un automorphisme de  $Y \times \mathbb{C}^n$ , c'est à dire d'une application  $\gamma : Y \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ . Il s'agit de montrer que  $\gamma$  est homotope à la constante  $y \mapsto I_n$  pour montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont homotopes. En effet, la proposition 1.9 assurera alors que la classe d'isomorphisme  $E/\alpha$  est uniquement déterminée par celle de  $E$  et on aura construit un inverse  $[E] \mapsto [E/\alpha]$  à  $f^*$ . Pour ce faire, l'espace  $GL(n, \mathbb{C})$  étant contractile, on se donne une homotopie  $H : GL(n, \mathbb{C}) \times I \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  entre la constante  $I_n$  (on peut la choisir car  $GL(n, \mathbb{C})$  est connexe par arc) et l'identité. On pose alors  $(y, t) \mapsto H(\gamma(y), t)$  qui réalise l'homotopie  $Y \times I \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  entre  $I_n$  et  $\gamma$  comme souhaité.  $\square$

On note  $[X, Y]$  l'ensemble des classes d'homotopie d'applications  $X \rightarrow Y$ .

**Proposition 1.11.** Pour tout espace  $X$ , il y a une bijection naturelle  $Vect_n(X \times I/X \times \{0\}, X \times \{1\}) \cong [X, GL(n, \mathbb{C})]$

*Démonstration.* L'espace  $X \times I/X \times \{0\}, X \times \{1\}$  est constitué de deux cônes de  $X$  reliés en  $X \times \{\frac{1}{2}\}$ . L'idée de la preuve est de montrer que puisque ces cônes sont contractiles, tout fibré sur cet espace est trivial sur chacun des cônes. Ainsi, les classes d'homotopies  $[\alpha]$  et  $[\beta]$  des trivialisations de  $E$  sur ces cônes sont uniquement déterminées et donc après restriction à  $X \times \{\frac{1}{2}\}$ , la classe de  $[\alpha][\beta^{-1}] : X \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  également. On peut construire une réciproque à cette fonction à l'aide d'un théorème de recollement permettant de construire des fibrés vectoriels à partir de trivialisations et de fonctions de recollement (ici n'importe quel représentant de la classe d'homotopie).  $\square$

Enfin à l'aide des propositions précédentes et de quelques lemmes supplémentaires, on montre le théorème très important suivant :

**Théorème 1.12.** Pour tout fibré vectoriel  $E$  il existe un fibré vectoriel  $F$  tel que  $E \oplus F$  est trivial.

## 2 K-théorie

L'objectif ici est de définir des foncteurs  $K$  et  $\tilde{K}$  qui à un espace topologique renvoient un anneau puis d'établir des suites exactes faisant intervenir ces anneaux.

### 2.1 Définitions et notations

Commençons par énoncer la définition du  $K$ -groupe d'un semi-groupe abélien quelconque.

**Définition/Proposition 2.1.** Soit  $A$  un semi-groupe abélien. Il existe un unique groupe abélien noté  $K(A)$  vérifiant la propriété universelle suivante : il existe un morphisme de semi-groupe  $\alpha : A \rightarrow K(A)$  tel que si  $G$  est un groupe et  $\gamma : A \rightarrow G$  un morphisme de groupe alors il existe un unique morphisme de groupe  $\kappa : K(A) \rightarrow G$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & G \\ & \searrow \alpha & \nearrow \kappa \\ & K(A) & \end{array}$$

*Démonstration.* Il existe plusieurs descriptions de  $K(A)$ . Une manière de procéder consiste à poser  $\Delta : A \rightarrow A \times A$  le morphisme de semi-groupe  $a \mapsto (a, a)$ . On pose  $K(A) = A \times A / \Delta(A)$  et on remarque que l'interversion  $(a, b) \mapsto (b, a)$  donne des inverses. Ainsi  $K(A)$  est un groupe et on pose  $\alpha : a \mapsto (a, 0)$ . Tout morphisme  $\gamma : A \rightarrow G$  se factorise de manière unique par  $\kappa : (a, b) \mapsto \gamma(a) - \gamma(b)$ .  $\square$

**Exemple.**  $K(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$

Remarquons que lorsque  $A$  est un semi-anneau, le groupe  $K(A)$  est même un anneau. En particulier pour un espace topologique  $X$  nous noterons directement

$$K(X) := K(\text{Vect}(X))$$

Si  $E \in \text{Vect}(X)$  on note  $[E]$  son image dans  $K(X)$ , ou simplement  $E$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

**Exemple.**  $K(\{*\}) = \mathbb{Z}$

Tout élément de  $K(X)$  s'écrit sous la forme  $[E] - [F]$  avec  $E, F \in \text{Vect}(X)$ . Si  $G$  est un fibré vectoriel tel que  $F \oplus G = n$  le fibré trivial de dimension  $n$ , on a  $[E] - [F] = [E] + [G] - ([F] + [G]) = [E + G] - [n]$ . Ainsi tout élément de  $K(X)$  s'écrit sous la forme  $[H] - [n]$ .

Si  $E, F \in \text{Vect}(X)$  sont tels que  $[E] = [F]$  alors il existe  $G \in \text{Vect}(X)$  tel que  $[E] + [G] = [F] + [G]$ , c'est à dire  $E \oplus G \cong F \oplus G$ . Soit  $G'$  tel que  $G \oplus G' \cong [n]$ . Alors  $E \oplus G \oplus G' \cong F \oplus G \oplus G'$  et donc  $E \oplus n \cong F \oplus n$ . On dira que  $E$  et  $F$  sont stablement équivalents s'ils sont isomorphes après addition du même fibré trivial. Ainsi  $[E] = [F]$  si et seulement si  $E$  et  $F$  sont stablement équivalents.

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une fonction continue, la fonction  $f^* : \text{Vect}(Y) \rightarrow \text{Vect}(X)$  induit un morphisme d'anneau  $f^* : K(Y) \rightarrow K(X)$  qui ne dépend que de la classe d'homotopie

de  $f$  d'après la proposition 1.7. On montre alors que  $K$  définit un foncteur.

Nous sommes désormais en mesure d'établir une théorie cohomologique à partir des  $K$ -groupes. Pour ce faire, on commence par définir, pour un espace topologique compact  $X$  muni d'un point-base  $x_0 \in X$ , l'anneau  $\tilde{K}$  comme étant le noyau du morphisme  $i^* : K(X) \rightarrow K(x_0)$  avec  $i : \{x_0\} \rightarrow X$  l'inclusion. Si  $c : X \rightarrow \{x_0\}$  est la projection de  $X$  sur  $x_0$ , l'application  $c^*$  induit la décomposition  $K(X) = \tilde{K}(X) \oplus K(x_0)$ . Celle-ci est naturelle et  $\tilde{K}$  est donc un foncteur de la catégorie  $\mathcal{C}^+$  des espaces compacts avec point-base vers celle des anneaux. En pratique on ne précisera pas les points-base. On définit maintenant, pour une paire  $(X, Y)$  d'espaces compacts vérifiant  $Y \subset X$  (on note  $\mathcal{C}^2$  cette catégorie), l'anneau  $K(X, Y) = \tilde{K}(X/Y)$ . Il s'agit d'un foncteur également.

Nous utiliserons également le smash-produit. Si  $X, Y \in \mathcal{C}^+$  il est défini par  $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$  où  $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$  est le bouquet de  $X$  et  $Y$ . Cette opération est associative et on remarque que  $\mathbb{S}^n$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \wedge \dots \wedge \mathbb{S}^1$  (avec  $n$  facteurs). Pour  $X \in \mathcal{C}^+$  on appelle suspension réduite de  $X$  l'espace  $\mathbb{S}^1 \wedge X$  et on notera  $\mathbb{S}^n X = \mathbb{S}^n \wedge X$  la  $n$ -ème suspension de  $X$ . Enfin on note  $X^+$  ou encore  $X/\emptyset$  l'union disjointe de  $X$  et d'un point.

**Définition 2.2.** Soit  $X, Y \in \mathcal{C}^2$ . Pour  $n \geq 0$  on définit :

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{-n}(X) &= \tilde{K}(\mathbb{S}^n X) \text{ si } X \in \mathcal{C}^+ \\ K^{-n}(X, Y) &= \tilde{K}^{-n}(X/Y) = \tilde{K}(\mathbb{S}^n(X/Y)) \\ K^{-n}(X) &= K^{-n}(X, \emptyset) = \tilde{K}(\mathbb{S}^n(X^+)) \end{aligned}$$

Ces opérations définissent également des foncteurs. Avant de poursuivre nous aurons besoin de définir le cône d'un espace  $X$  par  $CX = I \times X / \{0\} \times X$ . On identifiera  $X$  au sous-espace  $\{1\} \times X$  de  $CX$ . L'espace  $CX/X = I \times X / \partial I \times X$  est la suspension de  $X$ . Si  $X$  possède un point-base  $x_0$ , on a l'inclusion naturelle  $I \approx Cx_0/x_0 \rightarrow CX/X$  et le quotient obtenu par contraction de  $I$  est la suspension réduite  $\mathbb{S}X$ . Ainsi d'après la proposition 1.10 l'application  $p : CX/X \rightarrow \mathbb{S}X$  induit des isomorphismes  $K(\mathbb{S}X) \cong K(CX/X)$  et  $\tilde{K}(\mathbb{S}X) \cong K(CX, X)$ . Nous pourrions donc écrire  $\mathbb{S}X$  à la fois pour la suspension réduite et non réduite de  $X$  sans problème dans la suite. Enfin on définit  $X \cup CY$  comme l'espace obtenu en identifiant  $Y \subset CY$  et  $Y \subset X$  dans l'union disjointe de  $X$  et  $CY$ . On a alors l'homéomorphisme  $X \cup CY/X \approx CY/Y$  et donc

$$\begin{aligned} K(X \cup CY, X) &\cong K(CY, Y) \\ &\cong \tilde{K}(\mathbb{S}Y) \\ &\cong \tilde{K}^{-1}(Y). \end{aligned}$$

## 2.2 Cohomologie de $K$

L'objectif est de donner une suite exacte longue faisant intervenir les  $K$ -groupes d'une paire  $(X, Y)$  donnée. Pour ce faire, on commence par le lemme suivant.

**Lemme 2.3.** Soit  $(X, Y) \in \mathcal{C}^2$ . On a la suite exacte :

$$K(X, Y) \xrightarrow{j^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(Y)$$

où  $i : Y \rightarrow X$  et  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$  sont les inclusions.

*Démonstration.* La composition  $i^*j^*$  est induite par la composition  $ji : (Y, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$  et se factorise donc par  $K(Y, Y) = 0$ . D'où  $i^*j^* = 0$ . Supposons maintenant  $\xi \in \text{Ker}(i^*)$ . On peut écrire  $\xi = [E] - [n]$  avec  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$ . Puisque  $i^*\xi = 0$  on a  $[E|Y] = [n]$  dans  $K(Y)$ . Il existe donc un entier  $m$  tel que  $(E \oplus m)|Y = n \oplus m$ . On dispose donc d'une trivialisatation  $\alpha$  de  $(E \oplus m)|Y$ . Cela définit un fibré vectoriel  $E \oplus m/\alpha$  sur  $X/Y$  et donc un élément

$$\eta = [E \oplus m/\alpha] - [n \oplus m] \in \tilde{K}(X/Y) = K(X, Y).$$

Enfin  $j^*(\eta) = [E \oplus m] - [n \oplus m] = \xi$ . Ainsi  $\text{Ker}(i^*) = \text{Im}(j^*)$ .  $\square$

On peut écrire la même suite exacte avec les  $\tilde{K}$ -groupes. Ceci nous permet d'établir la proposition suivante.

**Proposition 2.4.** Soit  $X, Y \in \mathcal{C}^2$  avec point-base. Alors on a la suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots K^{-2}(Y) \xrightarrow{\partial} K^{-1}(X, Y) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-1}(Y) \quad . \\ \xrightarrow{\partial} K^0(X, Y) \xrightarrow{j^*} K^0(X) \xrightarrow{i^*} K^0(Y) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord qu'il suffit d'établir la suite exacte suivante :

$$\tilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\partial} K(X, Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(Y) .$$

En effet en remplaçant  $(X, Y)$  par  $(\mathbb{S}^n X, \mathbb{S}^n Y)$  on peut prolonger la suite puis en remplaçant  $(X, Y)$  par  $(X^+, Y^+)$  on obtient la suite cherchée. L'exactitude des trois derniers termes est donnée par le lemme 2.3. Pour les termes du milieu, appliquons le lemme 2.3 à  $(X \cup CY, X)$ . On obtient la suite

$$K(X \cup CY, X) \xrightarrow{m^*} \tilde{K}(X \cup CY) \xrightarrow{k^*} \tilde{K}(X)$$

Puisque  $CY$  est contractile, la proposition 1.10 assure que  $p : X \cup CY \rightarrow X \cup CY/CY = X/Y$  induit un isomorphisme  $p^* : \tilde{K}(X/Y) \rightarrow \tilde{K}(X \cup CY)$ . On remarque que  $k^*p^* = j^*$ . D'autre part posons  $\theta$  l'isomorphisme  $K(X \cup CY, X) \rightarrow K^{-1}(Y)$  évoqué précédemment et  $\partial = m^*\theta^{-1}$ . L'exactitude de  $m^*k^*$  entraîne alors l'exactitude de la suite :

$$\tilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\partial} K(X, Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X)$$

Pour prouver l'exactitude des premiers termes, appliquons le lemme 2.3 à  $(X \cup C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y)$  où les cônes  $C^1Y$  et  $C^2X$  ont pour intersection  $Y$ . On obtient ainsi

$$K(X \cup C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) \longrightarrow \tilde{K}(X \cup C_1Y \cup C_2X) \longrightarrow \tilde{K}(X \cup C_1Y)$$

Par définition de  $\partial$ , il est suffisant de montrer que le diagramme (D) suivant commute (au signe près) :

$$\begin{array}{ccc}
 K(X \cup C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) & \longrightarrow & \tilde{K}(X \cup C_1Y \cup C_2X) & (D) \\
 \parallel & & \parallel & \\
 \tilde{K}(C_2X/X) & & \tilde{K}(C_1Y/Y) & \\
 \parallel & & \parallel & \\
 K^{-1}(X) & \xrightarrow{i^*} & K^{-1}(Y) & 
 \end{array}$$

La difficulté réside dans le fait que  $i^*$  est induit par l'inclusion de  $C_2Y$  dans  $C_2X$  et non de  $C_1Y$ . Il s'agit alors de montrer que si  $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  réalise  $t \mapsto 1 - t$ , l'application  $T \wedge \text{Id}_Y : \mathbb{S}Y \rightarrow \mathbb{S}Y$  (qui retourne la suspension non réduite de  $Y$ ) induit  $(T \wedge \text{Id}_Y)^*y = -y$  dans  $\tilde{K}(\mathbb{S}X)$ . Pour le prouver nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 2.5.** Pour toute application continue  $f : Y \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  on note  $E_f$  le fibré vectoriel sur  $\mathbb{S}Y$  correspondant via la proposition 1.11. Alors  $\Psi : f \mapsto [E_f] - [n]$  induit un isomorphisme de groupe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [Y, GL(n, \mathbb{C})] \cong \tilde{K}(\mathbb{S}Y)$$

Par cet isomorphisme, l'opération  $(T \wedge \text{Id}_Y)^*$  dans  $\tilde{K}(\mathbb{S}Y)$  correspond à l'opération qui envoie  $y \mapsto f(y)$  sur  $y \mapsto f(y)^{-1}$  c'est à dire à l'inverse. Ainsi il ne reste plus qu'à prouver le lemme. Pour ce faire, on utilise le fait que  $\Psi : f \mapsto [E_f] - [n]$  est une bijection par la proposition 1.11 et on montre que c'est un morphisme en montrant que les applications  $(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  et  $(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont homotopes. En effet ceci implique que  $\Psi([AB]) = \Psi([\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}]) = [E(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix})] - [2n] = [E_A + E_B] - [2n] = \Psi(A) + \Psi(B)$ .

L'homotopie souhaitée est donnée par

$$h_t(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

□

Nous aurons besoin du lemme suivant pour pouvoir énoncer la périodicité de Bott :

**Lemme 2.6.** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces compacts. Alors il existe une application naturelle  $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$

*Démonstration.* Le produit tensoriel extérieur, qui à deux fibrés vectoriels  $E$  et  $F$  sur des espaces  $X$  et  $Y$  associe le fibré vectoriel  $E \otimes F$  sur  $X \times Y$  (dont la fibre en  $(x, y) \in X \times Y$  est  $E_x \otimes F_y$ ), induit un produit  $K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y)$ . On vérifie que  $\tilde{K}(X \wedge Y)$  est le noyau de  $i_X^* \oplus i_Y^* : K(X \times Y) \rightarrow K(X) \oplus K(Y)$ . Ceci montre que le produit extérieur se restreint en un produit  $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$  comme souhaité. □

Nous arrivons à l'un des résultats les plus essentiels de la  $K$ -théorie, la périodicité de Bott. Nous en admettrons la forme suivante :

**Théorème 2.7.** Il existe un élément  $\beta \in \tilde{K}(\mathbb{S}^2)$  tel que la multiplication par cet élément induit, pour tout  $n$ , un isomorphisme  $\beta : K^{-n}(X) \rightarrow K^{-n-2}(X)$ .

Ce résultat permet de réduire la suite exacte longue à la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X, Y) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(Y) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(Y) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K^1(X, Y) \end{array}$$

### 3 Isomorphisme de Thom

L'objectif ici est d'établir l'isomorphisme de Thom, un résultat très important dont l'énoncé est le suivant :

**Théorème 3.1.** Soit  $X$  un espace topologique compact,  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$  et  $\dot{E}$  son compactifié d'Alexandrov. Il existe un isomorphisme de  $K(X)$ -modules naturel :

$$K(X) \rightarrow K(\dot{E})$$

**Remarque.** Nous appellerons  $\dot{E}$  l'espace de Thom du fibré vectoriel  $E$ . Il s'agit d'un espace compact mais ce n'est pas un fibré.

**Remarque.** Si  $P(E)$  est le fibré constitué des espaces projectifs  $P(E)_x = P(E_x)$ , on a également  $\dot{E} = P(E \oplus 1)/P(E)$  où  $P(E)$  est inclus dans  $P(E \oplus 1)$  via  $[e] \mapsto [e, 0]$ . Ainsi on a  $\tilde{K}(\dot{E}) = K(P(E \oplus 1), P(E))$ .

L'isomorphisme de Thom peut être décrit explicitement car il s'agit de la multiplication par un élément que l'on sait construire. Pour ce faire, on introduit certains groupes de suites exactes de fibrés vectoriels et on montre qu'ils sont naturellement isomorphes aux  $K$ -groupes. C'est via ce nouveau point de vue que l'on décrit explicitement l'élément dont nous aurons besoin. Ici nous nous contenterons d'utiliser la proposition suivante :

**Proposition 3.2.** Pour tout fibré vectoriel  $E$  sur  $X$  il existe un élément  $\lambda_E \in \tilde{K}(\dot{E})$  appelé classe de Thom de  $E$  qui vérifie :

1. Pour tout  $x \in X$  l'image de  $\lambda_E$  dans  $\tilde{K}(\dot{E}_x)$  est  $\lambda_{E_x}$
2.  $\lambda_{E \oplus F} = \lambda_E \cdot \lambda_F$  dans  $\tilde{K}(\dot{E} \oplus \dot{F})$
3. L'image de  $\lambda_E$  via le morphisme  $\tilde{K}(\dot{E}) = K(P(E \oplus 1), P(E)) \rightarrow K(P(E \oplus 1))$  est  $\sum_{i \geq 0} (-1)^i [H]^i [\lambda^i E]$  où  $H$  est le fibré en droites canonique sur  $P(E \oplus 1)$  (c'est à dire  $H_x = x$ ).
4. On a  $\lambda_1 = \beta \in \tilde{K}(\dot{C}) = \tilde{K}(\mathbb{S}^2)$ .

Pour montrer le théorème il faut combiner ces propriétés de la classe de Thom avec la proposition suivante :

**Proposition 3.3.** Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$  décomposable en une somme  $E = \bigoplus L_i$  de fibrés en droites. Alors  $K(P(E))$  est une  $K(X)$ -algèbre générée par le fibré en droites canonique  $[H]$  sous la relation :

$$\prod ([L_i][H] - 1) = 0$$

Cette proposition se démontre par récurrence via des manipulations explicites sur  $[H]$  et permet d'établir l'isomorphisme de Thom sous la forme suivante :

**Théorème 3.4.** Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$  compact. Alors  $\tilde{K}(\dot{E})$  est un  $K(X)$ -module libre généré par  $\lambda_E$ .

*Démonstration.* L'idée de la preuve dans le cas d'un fibré vectoriel  $E = \bigoplus L_i$  décomposable est de remarquer que  $\sum (-1)^i [H]^i [\lambda^i] E = \prod (1 - [L_i][H])$ . Ainsi par le point 3 de la proposition 3.2, l'image de  $\lambda_E$  dans  $K(P(E \oplus 1))$  génère (comme idéal) le noyau de

$$i^* : K(P(E \oplus 1)) \rightarrow K(P(E)).$$

On montre alors que cela implique que  $\lambda_E$  génère  $K(P(E \oplus 1), P(E)) = \tilde{K}(\dot{E})$  comme  $K(X)$ -module. Ensuite le résultat s'étend au cas général via le principe de décomposition, un résultat très utile en général mais que nous n'utiliserons pas ici.  $\square$

## 4 Opérations en $K$ -théorie

Nous qualifierons d'opération toute transformation naturelle  $\varphi : K \rightarrow K$ . C'est à dire la donnée, pour chaque espace  $X$ , d'une application  $\varphi_X : K(X) \rightarrow K(X)$  vérifiant, pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$ , l'égalité  $\varphi_X f^* = f^* \varphi_Y$ .

La première opération dont nous aurons besoin ici a été introduite par A. Grothendieck de la manière suivante. Si  $V$  est un fibré vectoriel au dessus de  $X$ , on pose  $\lambda_t(V) \in K(X)[[t]]$  la série formelle :

$$\sum_{i \geq 0} t^i \lambda^i(V)$$

Pour tout fibré vectoriel  $W$ , l'isomorphisme  $\lambda^k(V \oplus W) \cong \sum_{i+j=k} \lambda^i(V) \otimes \lambda^j(W)$  permet de montrer que  $\lambda_t(V \oplus W) = \lambda_t(V) \lambda_t(W)$ . De plus  $\lambda_t(W)$  a pour coefficient constant 1 donc c'est un inversible de  $K(X)[[t]]$ . L'application  $\lambda_t$  définit donc un morphisme

$$\lambda_t : Vect(X) \rightarrow 1 + K(X)[[t]]^*$$

du semi-groupe  $Vect(X)$  vers le groupe multiplicatif des séries formelles sur  $K(X)$  de terme constant 1. Par la propriété universelle de  $K(X)$ , il s'étend donc en un morphisme :

$$\lambda_t : K(X) \rightarrow 1 + K(X)[[t]]^*.$$

Pour tout  $i$ , le coefficient de  $t^i$  donne donc une opération

$$\lambda^i : K(X) \rightarrow K(X).$$

Avant de définir d'autres opérations, définissons le rang d'un élément de  $K(X)$  :

**Définition 4.1.** Soit  $E$  un fibré vectoriel. Le rang de  $E$  est le fibré vectoriel  $rank(E)$  trivial sur chaque composante connexe dont la fibre en tout point  $x \in E$  est  $\mathbb{C}^{\dim E_x}$ . L'application  $E \mapsto rank(E)$  induit alors un morphisme d'anneau

$$rank : K(X) \rightarrow K(X)$$

Son noyau est noté  $K'(X)$ . Lorsque  $X$  est connexe on a  $K'(X) = \tilde{K}(X)$

Nous pouvons maintenant définir de nouvelles opérations introduites par J. F. Adams.

**Définition 4.2.** On pose dans  $K(X)[[t]]$ , pour tout  $x \in K(X)$ , la série formelle  $\psi_t(x) = \sum_{i \geq 0} t^i \psi^i(x)$  définie par :

$$\psi_t(x) = rank(x) - t \frac{d}{dt} (\log \lambda_{-t}(x))$$

Voyons les propriétés des opérations  $\psi^k$  ainsi définies :

**Proposition 4.3.** Pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$  et  $x, y \in K(X)$ , on a :

1.  $\psi^k(x + y) = \psi^k(x) + \psi^k(y)$
2.  $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y)$
3. Si  $x$  est un fibré en droites  $\psi^k(x) = x^k$
4.  $\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$
5. Si  $u \in \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$  alors  $\psi^k(u) = k^n u$
6. Si  $\beta : K(X) \rightarrow K^{-2}(X)$  est l'isomorphisme de Bott alors  $\psi^k \beta(x) = k \beta \psi^k(x)$

**Définition/Proposition 4.4.** Par l'isomorphisme de Thom, le groupe  $\tilde{K}(\dot{E})$  est un  $K(X)$ -module libre généré par  $\lambda_E$ . Pour tout  $k$ , il existe donc un unique élément  $\rho^k(E) \in K(X)$  tel que :

$$\psi^k(\lambda_E) = \rho^k(E) \lambda_E$$

Puisque  $\lambda_{E \oplus F} = \lambda_E \lambda_F$  on a  $\rho^k(E \oplus F) = \rho^k(E) \rho^k(F)$ . De plus avec  $E = 1$  et d'après le point 6 de la proposition 4.3 :

$$\rho^k(1) = k$$

## 5 Le problème des champs de vecteurs sur la sphère

Nous pouvons désormais donner les arguments de la preuve d'Adams [4] du théorème telle que présentée par Karoubi [2]. Plusieurs calculs seront admis car le cas réel nécessite parfois des hypothèses supplémentaires faisant intervenir des notions avec lesquelles je n'ai pas eu le temps de me familiariser. De plus nous admettrons que les résultats des sections précédentes sont valables pour  $K_{\mathbb{R}}$  le foncteur défini de la même manière que  $K$  mais avec des fibrés vectoriels réels.

## 5.1 Homotopie fibre à fibre

Tout d'abord, remarquons que par orthonormalisation de Gram-Schmidt, nous pouvons nous restreindre à des champs de vecteurs orthonormaux. Ainsi, l'existence de  $n - 1$  champs de vecteurs tangents à  $\mathbb{S}^{t-1}$  linéairement indépendants est équivalente à l'existence d'une section  $\sigma : O_{1,t} = \mathbb{S}^{t-1} \rightarrow O_{n,t}$  de la projection  $O_{n,t} \rightarrow O_{1,t}$  sur la dernière coordonnée  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_n$ , où  $O_{n,t}$  désigne la variété de Stiefel  $O(t)/O(t-n)$  (avec  $(a_1, \dots, a_n)$  une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ ). On note  $S(E)$  le fibré en sphères  $S(E)_x = S(E_x)$  d'un fibré vectoriel  $E$ .

**Proposition 5.1.** Supposons que  $\mathbb{S}^{t-1}$  admette  $n - 1$  champs de vecteurs tangents linéairement indépendants. Soit  $\xi$  le fibré en droites canonique au dessus de  $\mathbb{RP}_{n-1}$ . Alors il existe une application  $\tilde{\theta} : S(t) \rightarrow S(t\xi)$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S(t) & \xrightarrow{\quad} & S(t\xi) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{RP}_{n-1} & \end{array}$$

et telle que pour tout  $x \in \mathbb{RP}_{n-1}$ , l'application  $\tilde{\theta}_x$  est une équivalence d'homotopie.

*Démonstration.* Chaque  $a \in O(t)/O(t-n)$  définit une application linéaire  $\varphi_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^t$  injective et dépendant continument de  $a$ . Soit  $\theta : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{t-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{t-1}$  l'application continue définie par  $\theta(v, b) = (v, \varphi_{\sigma(b)}(v))$ . Enfin puisque  $\theta(-v, b) = -\theta(v, b)$ , l'application  $\theta$  induit une application continue  $\tilde{\theta} : \mathbb{S}^{n-1}/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^{t-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{t-1}/\mathbb{Z}_2$ . Ces espaces peuvent être identifiés respectivement avec les fibrés en sphères  $S(t)$  et  $S(t\xi)$  au dessus de  $\mathbb{RP}_{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}/\mathbb{Z}_2$ .

Cette application fait commuter le diagramme. Montrons le second point. Lorsque  $n = 1$ , le résultat est évident. Supposons  $n > 1$ . La sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  est connectée par arcs donc les applications  $b \mapsto \varphi_{\sigma(b)}(v)$  pour  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  sont toutes homotopes. De plus, avec  $v = e_n$  (dernier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ), on remarque que  $\varphi_{\sigma(b)}(v) = b$  car  $\sigma$  est une section de la projection  $a \mapsto a_n$ .  $\square$

**Remarque.** Dans ce cas on dit que les fibrés vectoriels  $t$  et  $t\xi$  ont même type d'homotopie fibre à fibre. Voyons un premier résultat lié au type d'homotopie fibre à fibre qui nous sera utile plus tard. Ce dernier requiert l'existence de structures spinorielles car il s'agit d'une hypothèse nécessaire à la définition de la classe de Thom dans le cas réel. Nous admettrons que les fibrés  $t\xi$  et  $t$  en sont munis.

**Proposition 5.2.** Soient  $V$  et  $W$  des fibrés vectoriels de rang  $8p$  au dessus de  $\mathbb{RP}_{n-1}$  munis d'une structure spinorielle. Supposons également qu'il existe une application continue  $f : S(V) \rightarrow S(W)$  montrant que  $V$  et  $W$  ont même type d'homotopie fibre à fibre. Alors il existe un élément  $y$  de  $K'_\mathbb{R}$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\rho^k(V) = \rho^k(W) \frac{1 + y}{\psi^k(1 + y)}$$

*Démonstration.* Posons  $X = \mathbb{RP}_{n-1}$ . L'application  $f$  induit une application entre les suspensions non réduites  $\mathbb{S}f : \mathbb{S}S(V) \rightarrow \mathbb{S}S(W)$ . Or on remarque que  $\mathbb{S}S(V) = V^+$

l'espace où on a compactifié chaque fibre (c'est à dire  $V^+ = \bigsqcup_{x \in X} \dot{V}_x$ ). On obtient alors une application  $\tilde{f} : (V^+, X^\infty) \rightarrow (W^+, X^\infty)$  (où  $X^\infty$  est la copie de  $X$  constituée par les points à l'infini) et enfin un morphisme  $\tilde{f}^* : K_{\mathbb{R}}(W^+, X) \rightarrow K_{\mathbb{R}}(V^+, X)$  tel que pour tout point  $x \in X$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}}(W^+, X^\infty) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & K_{\mathbb{R}}(V^+, X^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{\mathbb{R}}(\dot{W}_x, \{x\}) & \xrightarrow{\tilde{f}_x^*} & K_{\mathbb{R}}(\dot{V}_x, \{x\}) \end{array}$$

où  $\tilde{f}_x^*$  est un isomorphisme car obtenu depuis l'équivalence d'homotopie  $f_x$  de la même manière que  $\tilde{f}^*$ . Puisque  $V^+/X^\infty = \dot{V}$  l'espace de Thom de  $V$  (de même pour  $W$ ), le diagramme se réécrit

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}}(\dot{W}) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & K_{\mathbb{R}}(\dot{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{\mathbb{R}}(\dot{W}_x) & \xrightarrow{\tilde{f}_x^*} & K_{\mathbb{R}}(\dot{V}_x) \end{array}$$

Soient  $\lambda_W$  et  $\lambda_V$  les classes de Thom de  $W$  et  $V$ . De plus soit  $\lambda \in K_{\mathbb{R}}(X)$  tel que  $\tilde{f}^*(\lambda_W) = \lambda * \lambda_V$  (car  $K_{\mathbb{R}}(\dot{V})$  est un  $K_{\mathbb{R}}(X)$ -module généré par  $\lambda_V$ ). Pour tout  $x \in X$  l'application  $\tilde{f}_x^*$  est un isomorphisme donc  $\lambda_{V_x}$  est inversible. En particulier  $\lambda$  est partout de rang 1 ou  $-1$ . Il existe donc  $y \in K'_{\mathbb{R}}(X)$  et  $\varepsilon \in K_{\mathbb{R}}(X)$  qui est égal à 1 ou  $-1$  tels que  $\lambda = \varepsilon(1 + y)$ . Enfin tout élément de  $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1})$  s'écrit sous la forme  $a + b(\xi - 1)$ . Ici on a  $y \in K'_{\mathbb{R}}(X)$  de rang 0 donc il s'écrit sous la forme  $b(\xi - 1)$ . Puisque  $(\xi - 1)$  est nilpotent, c'est le cas de  $y$  et  $(1 + y)$  est inversible. L'élément  $\lambda$  est donc inversible également. On peut alors écrire :

$$\frac{\psi^k(\lambda)}{\lambda} = \frac{\psi^k(\varepsilon(1 + y))}{\varepsilon(1 + y)} = \frac{\psi^k(1 + y)}{1 + y}$$

D'où :

$$\psi^k(\lambda_V) = \psi^k\left(\frac{\tilde{f}^*(\lambda_W)}{\lambda}\right) = \frac{\tilde{f}^*(\psi^k(\lambda_W))}{\psi^k(\lambda)} = \frac{\tilde{f}^*(\lambda_W \rho^k(W))}{\psi^k(\lambda)} = \frac{\lambda \lambda_V \rho^k(V)}{\psi^k(\lambda)} = \lambda_V \rho^k(W) \frac{1 + y}{\psi^k(1 + y)}$$

On identifie alors  $\rho^k(V) = \rho^k(W) \frac{1 + y}{\psi^k(1 + y)}$ .  $\square$

Enfin, voici le corollaire donc nous aurons besoin ici :

**Corollaire 5.3.** Soit  $W$  un fibré vectoriel de rang  $8p$  au dessus de  $\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}$  ayant le type d'homotopie fibre à fibre du fibré trivial  $8p$  (et muni d'une structure spinorielle). Alors  $\rho^k(W) = k^{4p}$  pour  $k$  impair.

*Démonstration.* Tout d'abord nous admettons ici que  $\rho_{\mathbb{R}}$  et  $\rho_{\mathbb{C}}$  sont compatibles, c'est à dire que  $\rho_{\mathbb{R}}(2) = \rho_{\mathbb{C}}(1) = k$ . De plus puisque  $\xi^2 = \xi$  et que  $k$  est impair, on a  $\psi^k(\xi - 1) = \xi^k - 1 = \xi - 1$ . De plus comme  $y$  appartient à  $K'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}) = \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1})$  qui est généré par  $\xi - 1$  (voir proposition 5.6), on a  $\psi^k(1 + y) = 1 + \psi^k(y) = 1 + y$ . On peut alors conclure en appliquant la proposition précédente à  $W$  et  $8p$  :

$$\rho^k(V) = \rho^k(8p) = \rho^k(2)^{4p} = k^{4p}$$

$\square$

## 5.2 La preuve du théorème

Énonçons maintenant une égalité dont nous aurons besoin dans la preuve du prochain résultat.

**Lemme 5.4.** Si  $k$  est impair, alors  $\rho^k(4l\xi + 4l) = k^{4l}(1 + \frac{k^{2l}-1}{2k^{2l}}(\xi - 1))$

Nous l'admettrons ici car elle résulte de calculs dans le cas réel. Nous admettrons aussi le calcul suivant :

**Proposition 5.5.** Soit  $n \geq 2$ . Alors  $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1})$  est généré par  $\lambda_{n-1} = \xi - 1$  avec les relations  $\lambda_{n-1}^2 = -2\lambda_{n-1}$  et  $2^f \lambda_{n-1} = 0$  où  $f$  est le nombre d'entiers  $i$  vérifiant  $0 < i < n$  et  $i \cong 0, 1, 2$  ou  $4$ [8].

On peut alors énoncer un premier résultat important sur les champs de vecteurs tangents à la sphères :

**Proposition 5.6.** Soit  $a_n$  l'ordre du groupe  $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1})$ , c'est à dire  $a_n = 2^f$  où  $f$  est le nombre d'entiers  $i$  vérifiant  $0 < i < n$  et  $i \cong 0, 1, 2$  ou  $4$ [8]. Si  $\mathbb{S}^{t-1}$  admet  $n - 1$  champs de vecteurs tangents linéairement indépendants, alors  $t$  est un multiple de  $a_n$ .

*Démonstration.* Commençons par le cas  $n = 2$ . Dans ce cas  $f = 1$  donc  $a_n = 2$  et il s'agit du théorème de la boule chevelue dont il existe des preuves élémentaires.

Supposons  $n \geq 3$  et commençons par montrer que  $t$  est un multiple de 4. D'après la proposition 5.1, les fibrés vectoriels  $t$  et  $t\xi$  sont homotopes fibre à fibre, disons via  $f$ . Nous admettrons ici que cela implique que  $\mathbb{S}f : t^+ \rightarrow (t\xi)^+$  est une équivalence d'homotopie. Ainsi  $t$  fait partie de l'ensemble  $N$  des entiers naturels  $u > 0$  tels qu'il existe un entier  $m$  vérifiant  $(u\xi + m)^+ \sim (u + m)^+$  (on note  $\sim$  le fait d'être homotopiquement équivalent). Cet ensemble possède un minimum  $\alpha$  divisant tout  $u \in N$ . L'idée est de montrer que si  $u \in N$ , on peut utiliser le fait que  $(V \oplus W)^+ = V^+ \wedge^+ W^+$  (où  $\wedge^+$  correspond à effectuer le smash-produit fibre à fibre) pour montrer que  $u - \alpha \in N$  et ainsi que  $\gcd(u, \alpha) \in N$ . Par minimalité de  $\alpha$ , on a  $\alpha | u$ . En particulier  $\alpha$  divise  $t$  et  $a_n$  (car  $a_n \xi = a_n$  dans  $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1})$ ) donc il existe un entier  $m$  tel que  $a_n \xi + m = a_n + m$ . Puisque  $a_n$  est une puissance de 2, c'est donc le cas de  $\alpha$ . Pour montrer que  $t$  est multiple de 4 il reste à prouver que  $\alpha \neq 1, 2$ . Or le calcul des  $K_{\mathbb{R}}^i(\mathbb{R}\mathbb{P}_n)$ , effectués dans [2], permet de montrer qu'il ne peut y avoir  $(\xi + m)^+ \sim (1 + m)^+$  ou  $(2\xi + m)^+ \sim (2 + m)^+$

Écrivons donc  $t = 4l$  avec  $l \in \mathbb{N}$  et appliquons le corollaire 5.3 avec  $W = 4l\xi + 4l$ . C'est possible car  $4l\xi = t\xi$  a même type d'homotopie fibre à fibre que  $4l$  d'après la proposition 5.1. On obtient  $\rho^k(4l\xi + 4l) = k^{4l}$  pour  $k$  impair. Or d'après le lemme 5.4 on a également  $\rho^k(4l\xi + 4l) = k^{4l}(1 + \frac{k^{2l}-1}{2k^{2l}}(\xi - 1))$ . En combinant ces égalités, on obtient l'égalité suivante dans le groupe multiplicatif  $1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1})$ , pour tout  $k$  impair :

$$1 = 1 + \frac{k^{2l} - 1}{2k^{2l}}(\xi - 1)$$

Posons  $\theta$  le morphisme de groupe  $1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2^{f+1}\mathbb{Z})^*$  vérifiant  $\theta(\xi - 1) = -2$ . On vérifie que  $\theta(1 + \frac{k^{2l}-1}{2k^{2l}}(\xi - 1)) = (\frac{1}{k})^{2l}$  et donc  $(\frac{1}{k})^{2l} = 1$ . Ceci est valable pour tout

$k$  impair. En particulier lorsque  $\frac{1}{k}$  est de la forme  $4p + 1$  avec  $p$  impair, l'ordre de  $\frac{1}{k}$  est  $2^{f-1}$ . En effet nous pouvons calculer la valuation 2-adique de  $(4p + 1)^{2^m} - 1$  (qui vaut exactement  $2^{f+1}$  pour  $2^m = \text{Ord}(4p + 1)$ ) :

$$\begin{aligned} v_2((4p + 1)^{2^m} - 1) &= v_2((4p + 1)^{2^{m-1}} - 1) + v_2((4p + 1)^{2^{m-1}} + 1) \\ &= v_2(4p) + v_2((4p + 1)^1 + 1) + \cdots + v_2((4p + 1)^{2^{m-1}} + 1) \\ &= 2 + 1 + \cdots + 1 \\ &= m + 2 \end{aligned}$$

Ainsi  $f + 1 = \text{Ord}(4p + 1) + 2$  et donc  $\text{Ord}(4p + 1) = f - 1$ . Soit donc  $k$  impair tel que  $\frac{1}{k} = 4p + 1$  avec  $p$  impair. Puisque  $(\frac{1}{k})^{2l} = 1$  on obtient que  $2^{f-1}$  divise  $2l$  c'est à dire que  $a_n = 2^f$  divise  $4l = t$ .  $\square$

Il ne nous reste plus qu'à établir la réciproque avant de donner la preuve de la forme finale du théorème.

**Proposition 5.7.** La sphère  $\mathbb{S}^{t-1}$  admet  $n - 1$  champs de vecteurs tangents linéairement indépendants si et seulement si  $t$  est un multiple de  $a_n$ .

*Démonstration.* Il nous reste à montrer le sens réciproque. Supposons donc que  $t$  est un multiple de  $a_n$  et construisons les champs de vecteurs. Posons  $C^p$  (pour  $p \in \mathbb{N}$ ) les  $\mathbb{R}$ -algèbres définies par  $C^{p+8} = M_{16}(C^p)$  et pour  $p < 8$  :

$p$	0	1	2	3	4	5	6	7
$C^p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})$

On montre alors que  $\mathbb{R}^t$  possède une structure de  $C^{n-1}$ -module. Pour ce faire, on vérifie que  $\mathbb{R}^{a_n}$  possède une structure de  $C^{n-1}$ -module lorsque  $n < 8$  puis on utilise le fait que  $a_{n+8} = a_n * 2^4 = 16a_n$  pour montrer que  $\mathbb{R}^{a_{n+8}} = \mathbb{R}^{16a_n}$  possède une structure de  $M_{16}(C^{n-1}) = C^{n+8-1}$ -module. Enfin, on utilise le fait que  $t$  est multiple de  $a_n$  pour obtenir le résultat général.

Ceci permet de définir  $n - 1$  automorphismes  $e_1, \dots, e_{n-1}$  de  $\mathbb{R}^t$  vérifiant  $e_i^2 = -1$  et  $e_i e_j + e_j e_i = 0$  pour  $i \neq j$  (il s'agit de multiplications par certains éléments de  $C^{n-1}$  que l'on peut expliciter par récurrence). On munit alors  $\mathbb{R}^t$  d'une métrique rendant ces

automorphismes orthogonaux en posant un nouveau produit scalaire  $(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i \cdot, e_i \cdot \rangle$ .

On remarque alors que  $e_i^* = -e_i$  car  $(e_i v, w) = (e_i v, -e_i e_i w) = (v, -e_i w)$ . Ainsi pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{S}^{t-1}$ , les vecteurs  $e_1 v, \dots, e_{n-1} v$  sont tangents à la sphère et sont linéairement indépendants. Pour le deuxième point on peut utiliser le fait que  $(e_i v, e_j v) = (v, e_i^* e_j v) = (v, (-e_i)(-e_j^* v)) = -(v, e_j^* e_i v) = -(e_j v, e_i v)$  donc  $(e_i v, e_j v) = 0$ .  $\square$

Il ne nous reste plus qu'à relier cette condition aux nombres de Radon-Hurwitz pour prouver le théorème d'Adams, que nous rappelons ici :

**Théorème 5.8.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe au maximum  $\rho(n) - 1$  champs de vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{S}^n$ , où les nombres de Radon-Hurwitz  $\rho(n)$  sont définis par  $\rho((2k + 1)2^{c+4d}) = 2^c + 8d$  ( $k, d \geq 0$  et  $0 \leq c \leq 3$ ).

*Démonstration.* D'après la proposition précédente, le maximum que l'on cherche est le plus grand entier  $\sigma(t)$  tel que  $t$  est multiple  $a_{\sigma(t)}$ . Tout d'abord remarquons que puisque  $a_{\sigma(t)}|t$  nous pouvons écrire que  $a_{\sigma(t)+8} = 16a_{\sigma(t)}|16t$ . D'où  $\sigma(16t) \geq \sigma(t) + 8$ . De plus, si  $a_{\sigma(t)+8+l}|16t$  pour  $l > 0$  alors comme  $a_{\sigma(t)+8+l} = 16a_{\sigma(t)+l}$  on a  $a_{\sigma(t)+l}|t$  ce qui contredit la maximalité de  $\sigma(t)$ . Ainsi,  $\sigma(16t) = \sigma(t) + 8$ . Or  $\rho(16t) = \rho(t) + 8$ . Enfin comme  $a_n$  est toujours une puissance de 2 la fonction  $\sigma$  ne dépend pas de  $k$  tout comme  $\rho$  (on a  $\sigma((2k+1)2^\alpha) = \sigma(2^s \alpha)$ ). Il ne reste donc qu'à vérifier que  $\rho(2) = \sigma(2) = 2$ ,  $\rho(4) = \sigma(4) = 4$ ,  $\rho(8) = \sigma(8) = 8$  et  $\rho(16) = \sigma(16) = 9$ . Ceci conclut.  $\square$

## Références

- [1] M. Atiyah, *K-theory*. Harvard University, 1964.
- [2] M. Karoubi, *K-theory*. Springer Berlin, Heidelberg, 1978.
- [3] M. Clay and D. Margalit, *Office hours with a geometric group theorist*. Princeton University Press, 2017.
- [4] J. F. Adams, *Vector fields on spheres*. Annals of mathematics, 1962.