Spectre des Catégories Triangulées

Rémi Guénet

8 août 2023

Mon stage s'est déroulé à l'Universitat Autònoma de Barcelona et il a été encadré par Wolfgang Pitsch. Le sujet du stage était le spectre des catégories triangulées.

0 Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter la notion de spectre d'une catégorie triangulée ainsi que de donner un exemple de calcul de ce dernier dans le cadre des catégories dérivées des complexes de modules sur un anneau commutatif. Les catégories triangulées ont été introduites par Puppe et Verdier indépendamment et à peu près en même temps pour résoudre deux problèmes de natures différentes. Puppe cherchait à introduire une bonne catégorie pour étudier l'homotopie stable (voir [12]) tandis que Verdier voulait donner un cadre satisfaisant à son étude des catégories dérivées (voir [15]). En pratique, l'axiome [**TR4**], parfois appelé axiome de Verdier, est absent des travaux de Puppe, ainsi ce dernier travaille t-il avec des catégories pré-triangulées. De nombreuses catégories intéressantes sont triangulées, de fait la catégorie des spectres (utilisée en homotopie stable), les catégories dérivées (utiles notamment pour faire de l'algèbre homologique) ou encore les catégories stables (utilisées en théorie des représentations) sont toutes triangulées.

Très souvent, les structures triangulées sont accompagnées de structures monoidales symétriques, c'est à dire d'un bifoncteur qui se comporte peu ou prou comme le produit tensoriel sur un anneau commutatif. Cela amène à la notion de catégorie triangulée tensorielle (voir 5.0.1 pour une définition précise). Dans le cas des catégories dérivées des complexes sur un anneau ou dans le cas de la catégorie dérivée d'une algèbre, la structure monoidale est effectivement donnée par le produit tensoriel. Dans la catégorie des spectres, il est donné par le smash-produit. La conception de ce dernier a été le résultat de nombreux travaux afin de lui donner toutes les propriétés voulues.

Balmer observe alors dans [1] que de nombreuses applications de ces diverses catégories triangulées résultent de l'interaction entre la structure triangulée et la structure monoidale. Il introduit dans ce même papier la notion de spectre pour les catégories triangulées tensorielles afin de donner un cadre commun pour étudier ces interactions. Balmer montre alors de quelle manière on peut définir une notion de support pour des catégories triangulées. Cette notion de spectre permet de mettre en lumière un cadre général dans lequel s'incarnent des problématiques diverses en fonction du domaine d'application. Par exemple, dans les articles [2] et [3], Balmer s'intéresse aux problématiques de recollement qui avaient été jusqu'alors étudiées de manière essentiellement distincte en théorie des représentations et en géométrie algèbrique.

Durant la première partie du stage, j'ai dû apprendre les notions de base sur les catégories triangulées et me familiariser avec leur maniement. Pour ce faire, j'ai d'une part suivi le livre [11] écrit par Amnon Neeman, qui étudie la notion de catégorie triangulée de manière abstraite et d'autre part les notes [10] écrites par Henning Krause qui se centrent plutôt autour de la notion de catégorie dérivée. J'ai également étudié le papier [1] de Paul Balmer afin de voir ce à quoi correspond la notion de spectre pour des catégories triangulées.

Dans la suite, nous nous sommes concentrés sur l'article [9] écrit par Wolfgang Pitch (mon encadrant) ainsi que Joachim Kock. Cet article obtient, entre autres choses, un calcul explicite du spectre de la catégorie dérivée des complexes parfaits sur un anneau commutatif, ce qui est l'aspect sur lequel je me suis concentré. C'est par ailleurs cette idée là que j'explique dans la suite de ce rapport.

Finalement, nous nous sommes intéressés aux problématiques de recollement dans les catégories triangulées. Paul Balmer a tout d'abord écrit [2] dans lequel il s'intéresse à décomposer un objet en accord avec une décomposition du spectre dudit objet. Par suite, Paul Balmer et Giordano Favi ont continué d'explorer cette idée dans [3] en mettant en évidence une suite de Mayer Vietoris.

Les hypothèses nécessaires pour ces résultats nous ont semblé quelques peu arbitraires, nous avons donc essayé de voir s'il est possible de les affaiblir. Pour ce qui est de la suite de Mayer Vietoris, l'exactitude de la suite dont il est question redonne immédiatement les hypothèses de sorte qu'elles sont nécessaires et suffisantes. Pour ce qui est du résultat donné par Balmer plus tôt, nous avons essayé de briser la symétrie des hypothèses, mais une nouvelle fois, si le résultat tient alors il permet aussitôt de restaurer cette symétrie. Ainsi nous n'avons pas réussi à affablir les hypothèses mais nous avons mieux compris d'où viennent ces dernières.

Finalement, pour définir un spectre, Balmer impose que les catégories étudiées soient essentiellement petites, ce qui revient souvent en pratique à considérer la sous-catégorie des objets compacts. Cela empêche notamment d'utiliser des résultats comme le thèorème de Brown ou la localisation de Bousfield qui dépendent de l'existence de coproduits arbitraires. Nous nous sommes intéressés à savoir s'il pouvait exister des résultats de recollement qui abandonnent les hypothèses sur le spectre et qui les remplacent par des hypothèses sur l'existence de localisations de Bousfield. On peut trouver un résultat de ce genre dans l'article [13] de Raphaël Rouquier. Une question intéressante, mais que nous n'avons pas eu le temps d'étudier, serait de voir dans quelle mesure on peut étendre la notion de support à des catégories qui ne sont pas nécessairement essentiellement petites afin de pouvoir profiter du meilleur de chaque monde. Bien que je n'ai pas eu le temps de me pencher sur les articles en question, Paul Balmer a étudié cette question dans [4] et ces idées ont été reprises par Greg Stevenson dans une série d'articles et dans les notes [14].

1 Catégories triangulées

Cette section présente certains résultats basiques sur les catégories triangulées. Tout les résultats, à l'exception de ceux contenus dans les paragraphes sur les objets compacts et sur le théorème de Brown, sont contenus dans les deux premiers chapitres de [11] auquel on renvoie pour de plus amples détails.

1.1 Catégories pré-triangulées

Définition 1.1.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive et soit $\Sigma : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ un isomorphisme additif. Un triangle candidat est une suite

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

telle que $v \circ u = 0, w \circ v = 0$ et $\Sigma u \circ w = 0$.

Si on munit de plus $\mathscr{C}$ d'une sous-classe de triangles candidats appelés triangles distingués, alors $\mathscr{C}$ est une catégorie pré-triangulée si et seulement si elle vérifie

[**TR0**] : La classe des triangles distingués est stable par isomorphismes. De plus, pour tout objet X, le triangle candidat

$$X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

est distingué.

[**TR1**] : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, il existe un triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X.$$

[**TR2**] : Un triangle candidat

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

est distingué si et seulement si le triangle candidat

$$Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{-w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y$$

est distingué.

[**TR3**] : Tout diagramme commutatif comme ci-dessous (trait plein) dont les lignes sont des triangles peut être complété par une flèche $h : Z \to Z'$ (en pointillés dans le diagramme) de sorte à commuter.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

Remarque 1.1.2. Dans la définition ci-dessus, l'isomorphisme Σ est appelé la suspension par analogie avec la topologie. On l'appelle aussi parfois la translation. Par abus de notation, on dit seulement que $\mathscr{T}$ est une catégorie pré-triangulée sans faire figurer la translation et la classe de triangles distingués dans la notation. On réserve le mot "triangle" sans adjectif pour les triangles distingués. Si $\mathscr{T}$ est une catégorie pré-triangulée de suspension Σ alors $\mathscr{T}^{op}$ est une catégorie pré-triangulée de suspension Σ^{-1}. Cela permet d'avoir un principe de dualité pour les catégories pré-triangulées.

On énonce maintenant quelques-unes des propriétés les plus importantes sur les catégories pré-triangulées. On fixe donc $\mathscr{T}$ une catégorie pré-triangulée dans la suite de ce paragraphe.

Proposition 1.1.3. *Considérons un triangle*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

ainsi qu'un objet $T \in \mathscr{T}$. Alors, on a une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow \mathscr{T}(\Sigma X, T) \longrightarrow \mathscr{T}(Z, T) \longrightarrow \mathscr{T}(Y, T) \longrightarrow \mathscr{T}(X, T) \longrightarrow \dots$$

Cette proposition admet une version duale qui fait intervenir les foncteurs représentables covariants.

Démonstration. Il est clair que la suite de morphismes énoncée est un complexe car $\mathscr{T}(-, T)$ est un foncteur. Soit $f : Y \to T$ un morphisme tel que $fu = 0$. Il suffit de montrer qu'il existe $g : Z \to T$ avec $gv = f$. Pour ce faire, on considère le diagramme commutatif suivant (traits pleins), dans lequel la deuxième ligne est un triangle en vertu de [**TR0**] et [**TR2**].

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "g"] & \Sigma X \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & T \arrow[r, "-1"'] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Par [**TR3**], on obtient g faisant commuter le diagramme. On a alors $f = (-g)v$ ce qui conclut. ■

Proposition 1.1.4. *On considère un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont des triangles et tel que f, g soient des isomorphismes. Alors h est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{T}$ un objet quelconque. D'après la proposition précédente, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}(\Sigma Y, T) \arrow[r] \arrow[d, "(\Sigma g)^*"] & \mathscr{T}(\Sigma X, T) \arrow[r] \arrow[d, "(\Sigma f)^*"] & \mathscr{T}(Z, T) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"] & \mathscr{T}(Y, T) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \mathscr{T}(X, T) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathscr{T}(\Sigma Y', T) \arrow[r] & \mathscr{T}(\Sigma X', T) \arrow[r] & \mathscr{T}(Z', T) \arrow[r] & \mathscr{T}(Y', T) \arrow[r] & \mathscr{T}(X', T). \end{tikzcd}$$

Les morphismes $f^*, g^*, (\Sigma f)^*$ et $(\Sigma g)^*$ sont des isomorphismes car f et g sont des isomorphismes. Mais alors, h_* est un isomorphisme par le lemme des cinq. D'après le lemme de Yoneda, h est un isomorphisme. ■

Proposition 1.1.5. *On considère Λ un ensemble et pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on se donne un triangle*

$$X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \longrightarrow Z_\lambda \longrightarrow \Sigma X_\lambda.$$

Alors, $\Sigma\left(\coprod X_\lambda\right)$ est un coproduit de la famille (ΣX_λ) (par exemple car Σ est adjoint à gauche de Σ^{-1}). Le triangle candidat

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \longrightarrow \Sigma\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)$$

déduit par passage au coproduit est encore distingué.

On a une proposition duale pour les produits.

1.2 Axiome de l'octaèdre

On fixe $\mathscr{T}$ une catégorie pré-triangulée.

Définition 1.2.1. On considère un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X'. \end{tikzcd}$$

Le cône de ce morphisme est le triangle candidat

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{pmatrix}} \Sigma X \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma u & 0 \\ \Sigma f & w' \end{pmatrix}} \Sigma Y \oplus \Sigma X'$$

Il ne s'agit pas forcément d'un triangle.

On dit que $\mathscr{T}$ est une catégorie triangulée si et seulement si, pour tout diagramme commutatif comme ci-dessous (traits pleins), il existe $h : Z \to Z'$ (en pointillé) faisant commuter le diagramme et de tel sorte que le cône de ce morphisme soit encore un triangle.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

Ce dernier axiome s'appelle [**TR4'**] et il est auto-dual (c'est à dire que si $\mathscr{T}$ vérifie [**TR4'**] alors $\mathscr{T}^{op}$ également).

L'axiome [**TR4'**] est équivalent à un axiome appelé [**TR4**] qui est également appelé axiome de l'octaèdre ou encore axiome de Verdier. Historiquement, c'est [**TR4**] qui a été utilisé pour définir les catégories triangulées. C'est seulement plus récemment que [**TR4'**] est apparu comme formulation alternative de la définition.

Définition 1.2.2. On dit qu'une catégorie triangulée $\mathscr{T}$ vérifie [**TR5**] si et seulement si elle possède tout les coproduits. Dualement, on dit que $\mathscr{T}$ vérifie [**TR5***] si et seulement si elle possède tout les produits.

1.3 Sous-catégories triangulées

On fixe $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée jusqu'à la fin de cette section.

Les catégories triangulées sont des catégories avec une structure supplémentaire. Comme d'habitude, il est utile de mettre en lumière sous quelles hypothèses une sous-catégorie de $\mathscr{T}$ possède elle même une telle structure. Ainsi, trois notions de sous-catégories apparaissent. Tout d'abord, les sous-catégories triangulées sont celles qui héritent d'une structure de catégorie triangulée. On verra notamment dans le paragraphe suivant qu'il est souvent naturel de demander à ces catégories d'être stables par facteur direct, ce qui amène à la notion de sous-catégorie épaisse. Enfin, lorsque $\mathscr{T}$ vérifie également [**TR5**], on introduit la notion de sous-catégorie localisante afin d'hériter également de cette dernière propriété.

Définition 1.3.1. Une sous-catégorie pleine $\mathscr{S}$ de $\mathscr{T}$ est dite triangulée si elle est stable par isomorphisme, suspension, désuspension et si, pour tout triangle

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

tel que $X, Y \in \mathscr{S}$, on a également $Z \in \mathscr{S}$. Alors $\mathscr{S}$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée.

On dit de plus que $\mathscr{S}$ est épaisse si et seulement si elle est stable par facteur direct. Par ailleurs, si $\mathscr{T}$ vérifie [**TR5**], on dit que $\mathscr{S}$ est localisante si elle est stable par coproduits. Dualement, on a la notion de sous-catégorie colocalisante. Une sous-catégorie (co)localisante est nécessairement épaisse. Ce dernier point repose en fait uniquement sur des (co)produits dénombrables. La preuve est néanmoins assez technique, on peut la trouver à la proposition 1.6.8 de [11].

Si $X \subset \mathscr{T}$ est un ensemble d'objets, on note $\langle X \rangle_{\aleph_0}$ la plus petite sous-catégorie épaisse contenant X. Si $\mathscr{T}$ vérifie [**TR5**], on note encore $\langle X \rangle$ la plus petite sous-catégorie localisante contenant X.

Si $X \subset \mathscr{T}$, on note $X_0 = X \cup \{0\}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose X_{n+1} l'ensemble des objets de l'une des formes suivantes :

— Une suspension ou une désuspension d'un objet de X_n.

— Une extension de deux objets de X_n (voir ci-dessous pour la définition).

— Un facteur direct d'un objet de X_n.

On dit d'un objet Y qu'il est une extension de Y' et de Y'' si il existe un triangle

$$Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow \Sigma Y'$$

On observe alors que $\langle X \rangle_{\aleph_0} = \bigcup \{X_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Cela permet en particulier d'établir le résultat de finitude suivant.

Proposition 1.3.2. *Soit $X \subset \mathscr{T}$ un ensemble d'objets. Soit $x \in \mathscr{T}$. Si $x \in \langle X \rangle_{\aleph_0}$ alors il existe $Y \subset X$ fini avec $x \in \langle Y \rangle_{\aleph_0}$.*

Ce résultat de finitude est typique des situations algèbriques. Pour prouver certains résultats que l'on énonce dans la suite, diverses conditions de finitude sont nécessaires. On rencontre ici la première de ces conditions. La notion de sous-catégories localisante, qui nous intéresse plus dans la suite, ne se comporte pas de manière aussi agréable. C'est ce qui nous pousse à introduire la notion d'objet compact dans la suite (voir 1.5.3)

1.4 Quotient de Verdier

Dans ce paragraphe, on énonce certains résultats relatifs à la question de passer au quotient dans les catégories triangulées. Une construction détaillée des catégories quotients se trouve au chapitre 2 de [11]. Par ailleurs, cette construction amène son lot de problèmes du point de vue de la théorie des ensembles. On les discute à la fin du paragraphe.

Définition 1.4.1. Un foncteur $F : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ entre catégories triangulées est dit triangulé si il existe un isomorphisme naturel $\phi : \Sigma F \cong F\Sigma$ (par abus de notation, on note Σ les suspensions de $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{S}$) et tel que, pour tout triangle

$$X \xrightarrow{\ u\ } Y \xrightarrow{\ v\ } Z \xrightarrow{\ w\ } \Sigma X$$

dans $\mathscr{T}$, le triangle candidat

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\phi_X \circ F(w)} \Sigma F(X)$$

dans $\mathscr{S}$ est distingué.

Le noyau de F est alors la sous-catégorie pleine dont les objets sont $\{X \in \mathscr{T} \mid F(X) \cong 0\}$. Il s'agit d'une sous-catégorie épaisse.

Proposition 1.4.2. *Soit $\mathscr{S}$ une sous-catégorie épaisse de $\mathscr{T}$. Alors, il existe une catégorie triangulée $\mathscr{T}/\mathscr{S}$ ainsi qu'un foncteur triangulé $Q : \mathscr{T} \to \mathscr{T}/\mathscr{S}$ de passage au quotient dont le noyau est $\mathscr{S}$ et tel que, pour tout foncteur triangulé $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$ de noyau $\mathscr{S}$, F se factorise de manière unique à travers Q.*

On donne quelques éléments de description de $\mathscr{T}/\mathscr{S}$. Les objets de cette catégorie sont exactement les objets de $\mathscr{T}$ et le foncteur Q est l'identité sur les objets. On pose $\mathrm{Mor}_{\mathscr{S}}$ la classe de morphismes telle que, pour un morphisme $f : X \to Y$, on a $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{S}}$ si et seulement si il existe un triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

avec $Z \in \mathscr{S}$. Si $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{S}}$, alors $Q(f)$ est un isomorphisme. De plus, tout morphisme $\alpha : X \to Y$ dans $\mathscr{T}/\mathscr{S}$ est de la forme $Q(g) \circ Q(f)^{-1}$ avec $f : Z \to X$ et $g : Z \to Y$ où on a de plus supposé que $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{S}}$.

On revient sur les problèmes ensemblistes induits par la construction du quotient de Verdier. On rappelle qu'une catégorie $\mathscr{T}$ est dite localement petite si, pour tout objets $X, Y \in \mathscr{T}$, la classe $\mathscr{T}(X,Y)$ est en fait un ensemble. Savoir que $\mathscr{T}$ est localement petite est très utile dans certaines constructions où on veut indexer une limite ou une colimite par un ensemble de morphismes, ce qui est une situation assez commune. Cela pousse certains auteurs à rajouter la condition d'être localement petite dans la définition même des catégories. On suivra cette dernière convention.

Si on suppose alors que $\mathscr{T}$ est une catégorie triangulée, le quotient de Verdier n'est pas une catégorie en général car les classes de morphismes que l'on construit ne sont pas nécessairement des ensembles. Cependant, si $\mathscr{T}$ est essentiellement petite alors la construction se passe sans problème. On n'aura à utiliser un quotient de Verdier qu'une seule fois dans la suite, au moment de définir la catégorie dérivée. On justifiera à posteriori qu'il s'agit bien d'une catégorie par le biais de résolutions projectives.

1.5 Objets Compacts

Dans ce paragraphe, on introduit la notion d'objet compact ainsi que certaines des premières propriétés liées à cette notion. Les résultats introduits sont issus des chapitres 3 et 4 de [11], bien qu'ils soient énoncés ici de manière bien moins générale. La définition des objets compacts tire son inspiration de la topologie, et notamment des CW complexes, ce sur quoi on reviendra en fin de paragraphe.

Définition 1.5.1. On dit que $x \in \mathscr{T}$ est un objet compact si et seulement si, pour toute famille $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'objets de $\mathscr{T}$ et tout morphisme $f : x \to \coprod y_\lambda$, il existe $\Lambda_0 \subset \Lambda$ une partie finie ainsi qu'une application $g : x \to \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda_0}$ de telle sorte que f se factorise sous la forme ιg où ι est l'inclusion canonique.

On note $\mathscr{T}^\omega$ la sous-catégorie de $\mathscr{T}$ constituée des objets compacts de $\mathscr{T}$. Il s'agit d'une sous-catégorie épaisse de $\mathscr{T}$.

La définition des objets compacts repose sur une idée de finitude. Cette même idée de finitude amène à la proposition suivante.

Proposition 1.5.2. *On suppose que $\mathscr{T}$ vérifie [**TR5**] et soit $S \subset \mathscr{T}^\omega$ un ensemble d'objets. Soit $x \in \langle \mathscr{S} \rangle \cap \mathscr{T}^\omega$. Alors, x est dans la catégorie épaisse engendrée par S.*

La proposition précédente est en fait un corollaire du lemme suivant (il suffit d'appliquer le lemme à id_x).

Lemme A. *On suppose que $\mathscr{T}$ vérifie [**TR5**]. On considère $S \subset \mathscr{T}^\omega$ un ensemble d'objets ainsi qu'un morphisme $f : x \to y$ où $x \in \mathscr{T}^\omega$ et $y \in \langle S \rangle$. Alors, il existe z dans la sous-catégorie épaisse engendré par S tel que f se factorise à travers z.*

Pour une preuve du lemme précédent, on renvoie au Théorème 4.3.3 de [11]. Comme de plus $\mathscr{T}^\omega$ est épaisse comme dit précédemment, on a le corollaire suivant, qui explique peut-être plus clairement le lien avec la topologie.

Corollaire 1.5.3. *On suppose que $\mathscr{T}$ vérifie [**TR5**] et on considère $S \subset \mathscr{T}^\omega$ un ensemble d'objets. Alors, on a l'égalité suivante*

$$\langle S \rangle_{\aleph_0} = \langle S \rangle \cap \mathscr{T}^\omega.$$

Ce corollaire est particulièrement intéressant lorsque $\langle S \rangle = \mathscr{T}$. Considérons par exemple la catégorie des CW complexes (celle-ci n'est pas réellement triangulée car il n'existe pas de désuspension, on se limite donc à utiliser un langage informel qui met en lumière l'analogie). Les CW complexes peuvent tous être "construits" à partir des boules. Ainsi, par application du corollaire précédent, on voit que les objets compacts sont ceux qui peuvent se construire à partir des boules en un nombre fini d'étapes, c'est à dire exactement les CW complexes finis. Ainsi, on retombe bien sur la notion usuelle de compacité.

On verra un exemple d'application dans la section suivante lorsque l'on déterminera les objets compacts dans la catégorie dérivée des complexes sur un anneau.

1.6 Théorème de Brown

Le théorème de Brown est un résultat clef sur les catégories triangulées. Sous certaines hypothèses, il donne une caractérisation alternative des foncteurs représentables contravariants. En particulier, on peut également utiliser le théorème de Brown pour obtenir des adjoints à certains foncteurs. On renvoie au chapitre 8 de [11] pour une preuve. Le théorème y est par ailleurs exprimé sous une forme plus générale mais qui utilise certaines définitions plus techniques.

On commence par définir une classe de foncteurs qui nous intéressent particulièrement.

Définition 1.6.1. Soit $\mathscr{T}$ une catégorie pré-triangulée et $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. Un foncteur contravariant $F : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ est dit cohomologique si et seulement si, pour tout triangle

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

la suite

$$F(Z) \xrightarrow{F(v)} F(Y) \xrightarrow{F(u)} F(X)$$

est exacte.

On a également une notion duale de foncteur homologique qui s'applique dans le cas covariant. On remarque que, si $F : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ est cohomologique, alors il est additif. Par ailleurs, si

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

est un triangle alors, d'après [**TR2**], on a en fait une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow F(\Sigma X) \xrightarrow{F(w)} F(Z) \xrightarrow{F(v)} F(Y) \xrightarrow{F(u)} F(X) \xrightarrow{F(\Sigma^{-1}w)} F(\Sigma^{-1}Z) \longrightarrow \dots$$

On s'intéressera aussi aux foncteurs triangulés dans la suite de ce paragraphe. Comme pour les foncteurs homologiques, on peut remarquer que les foncteurs triangulés sont automatiquement additifs

On sait déjà que les foncteurs contravariants représentables préservent les coproduits sur des produits. La proposition 1.1.3 donne alors la proposition suivante.

Proposition 1.6.2. *Les foncteurs contravariants représentables sont cohomologiques et envoient les coproduits sur des produits.*

Le théorème de Brown donne des conditions suffisantes sur la catégorie triangulée $\mathscr{T}$ pour obtenir une réciproque à la proposition ci-dessus.

Théorème 1.6.3. *Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée vérifiant [**TR5**] et engendrée par des objets compacts (c'est à dire que $\langle \mathscr{T}^\omega \rangle = \mathscr{T}$). Alors*

(i) Un foncteur cohomologique $F : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ qui envoie les coproduits sur des produits est représentable.

(ii) Un foncteur $F : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ triangulé préservant les coproduits possède un adjoint à droite.

On peut aussi se demander si le foncteur adjoint dont le théorème de Brown garantit l'existence est nécessairement triangulé. La proposition suivante répond à cette question dans un cadre plus général.

Proposition 1.6.4. *Soit $\mathscr{T}, \mathscr{S}$ deux catégories triangulées et soit $L : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ un foncteur. On suppose qu'il possède un adjoint à droite $R : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$. Alors, L est triangulé si et seulement si R est triangulé.*

Pour conclure ce paragraphe, on donne un critère plus maniable pour voir qu'une catégorie triangulée est engendrée par des objets compacts. Tout d'abord, on suppose que $\mathscr{T}$ est une catégorie triangulée qui vérifie [**TR5**] et telle que $\langle \mathscr{T}^\omega \rangle = \mathscr{T}$. Soit X un objet tel que $\mathscr{T}(Y, X) = 0$ pour tout objet compact Y. Alors, le foncteur $\mathscr{T}(-, Y)$ est triangulé et envoie les coproduits sur des produits. Ainsi, son noyau est une sous-catégorie localisante contenant les objets compacts. On en déduit finalement que $\mathscr{T}(Y, X) = 0$ pour tout objet Y d'où $X = 0$ par le lemme de Yoneda. On a alors une réciproque à ce résultat.

Proposition 1.6.5. *Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée vérifiant [**TR5**]. On suppose de plus que, pour tout objet $X \in \mathscr{T}$, si $\mathscr{T}(Y, X) = 0$ pour tout objet compact $Y \in \mathscr{T}^\omega$, alors $X = 0$. Sous ces hypothèses on peut conclure que $\mathscr{T}$ est compactement engendrée.*

2 Catégories dérivées

L'un des exemples les plus simples de catégories triangulées sont les catégories dérivées. Celles-ci forment le cadre naturel pour s'intéresser aux questions d'homologie. Historiquement, la notion de catégorie triangulée est apparue pour la première fois dans les travaux de Verdier qui s'intéressait à trouver le bon cadre pour l'étude des catégories dérivées. La présentation des catégories dérivées entreprise dans cette section est très largement inspiré de l'article [10] de Henning Krause. On fixe $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne durant toute cette section.

2.1 Définition

On rappelle qu'un complexe $X_\bullet$ dans $\mathscr{A}$ est une suite de morphismes

$$\dots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d^n} X_{n-1} \longrightarrow \dots$$

dans $\mathscr{A}$. Un morphisme de complexes $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ est une famille de morphismes $f_n : X_n \to Y_n$ de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_n^X"] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^Y"] & Y_n \arrow[r, "d_n^Y"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

commute.

En pratique, lorsqu'il est clair qu'on parle d'un complexe ou d'un morphisme de complexes on note seulement X au lieu de $X_\bullet$ et f au lieu de $f_\bullet$. Les définitions précédentes permettent de considérer la catégorie $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ des complexes dans $\mathscr{A}$.

Définition 2.1.1. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de complexes, alors une contraction ρ de f est une famille de morphismes $\rho_n : X_n \to Y_{n+1}$ de sorte que $f_n = d_{n+1}^Y \rho_n + \rho_{n-1} d_n^X$. Si un morphisme f possède une contraction on dit que f est contractile. Pour X, Y deux complexes, on considère $\mathscr{I}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes contractiles de X dans Y.

Proposition 2.1.2. *Si $f : X \to Y$ est un morphisme contractile et $g : Y \to Z, h : Z' \to X$ sont deux morphismes, alors gf et fh sont contractiles. De plus, si $f, g : X \to Y$ sont deux morphismes contractiles alors $f - g$ est encore contractile.*

On peut également exprimer la proposition précédente en disant que $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathbf{C}(\mathscr{A})$. Ainsi, on peut définir une catégorie $\mathbf{K}(\mathscr{A})$ dont les objets sont les mêmes que $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ et dont les ensembles de morphismes sont donnés par $\mathbf{K}(\mathscr{A})(X,Y) = \mathbf{C}(\mathscr{A})(X,Y)/\mathscr{I}(X,Y)$. La catégorie $\mathbf{K}(\mathscr{A})$ est appelé la catégorie homotopique de $\mathscr{A}$.

Définition 2.1.3. Si X est un complexe, on pose ΣX le complexe tel que $(\Sigma X)_n = X_{n-1}$ et $d_n^{\Sigma X} = -d_{n-1}^X$. De plus, si $f : X \to Y$ est un morphisme de complexes, on pose $(\Sigma f)^n = f^{n+1}$. Alors, Σ est un automorphisme de catégorie de $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ qui passe au quotient en un automorphisme de $\mathbf{K}(\mathscr{A})$.

Définition 2.1.4. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de complexes. Le cône de f est le complexe Z tel que $Z_n = X_{n-1} \oplus Y_n$ et dont la différentielle est donnée par $d_n^Z = \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix}$. On a une suite de morphismes

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} \Sigma X$$

qui se réduit en degré n à

$$X_n \xrightarrow{f_n} Y_n \xrightarrow{\iota_2} X_{n-1} \oplus Y_n \xrightarrow{\pi_1} X_{n-1}$$

où ι_2 et π_1 sont respectivement la deuxième injection et la première projection. L'image d'une telle suite dans $\mathbf{K}(\mathscr{A})$ est appelé un triangle standard.

Proposition 2.1.5. *Si on munit $\mathbf{K}(\mathscr{A})$ de la suspension Σ et qu'on décrète qu'un triangle candidat est distingué si et seulement si il est isomorphisme à un triangle standard, alors $\mathbf{K}(\mathscr{A})$ est une catégorie triangulée.*

On rappelle alors la définition suivante.

Définition 2.1.6. Si X est un complexe dans $\mathscr{A}$ alors on pose $H_n(X) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Tout morphisme $f : X \to Y$ de complexes induit un morphisme $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$. Ainsi, H_n est un foncteur.

Un morphisme $f : X \to Y$ est dit acyclique si et seulement si $H_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Si f est un morphisme contractile alors il est acyclique donc H_n passe au quotient en un foncteur sur $\mathbf{K}(\mathscr{A})$. On dit que f est un quasi-isomorphisme si $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Proposition 2.1.7. *La sous-catégorie pleine $\mathscr{S}$ de $\mathbf{K}(\mathscr{A})$ dont les objets sont les complexes acycliques est épaisse. De plus,* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{S}}$ *est la classe des quasi-isomorphismes. On pose $\mathbf{D}(\mathscr{A}) = \mathbf{K}(\mathscr{A})/\mathscr{S}$. Alors, si $\alpha : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathbf{D}(\mathscr{A})$, il existe Z un troisième complexe ainsi que $f : Z \to X$ et un quasi-isomorphisme et $g : Z \to Y$ un morphisme de complexes tels que $\alpha = gf^{-1}$ où on a identifié un morphisme de complexes avec son image dans $\mathbf{D}(\mathscr{A})$.*

On revient ici sur les problèmes de théorie des ensembles induits par les constructions ci-dessus. Il est clair que $\mathbf{K}(\mathscr{A})$ est une catégorie par définition même des ensembles de morphismes. Cependant, on n'a pour l'instant aucun argument pour justifier que $\mathbf{D}(\mathscr{A})$ est bien une catégorie. On verra plus tard, à l'aide de résolutions projectives, qu'il s'agit bien d'une catégorie dans un cas important (et notamment dans le cas où $\mathscr{A} = A - Mod$ avec A un anneau).

2.2 Premières propriétés

Au premier abord, il peut sembler compliqué de trouver des triangles en pratique. Cependant, la proposition suivante donne une méthode commode d'en obtenir.

Proposition 2.2.1. *On considère une suite exacte courte de complexes*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0.$$

Alors, il existe un triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \Sigma X$$

dans $\mathbf{D}(\mathscr{A})$.

On a dit en introduction que $\mathbf{D}(\mathscr{A})$ est le cadre naturel pour faire de l'homologie. La proposition suivante abonde dans ce sens en montrant que toute l'information concernant Ext^* se trouve dans la catégorie dérivée. L'énoncé de la proposition se repose sur le fait que tout objet $X \in \mathscr{A}$ peut être vu comme un complexe concentré en degré 0.

Proposition 2.2.2. *Soit $A, B \in \mathscr{A}$. Alors on a un isomorphisme naturel*

$$\mathbf{D}(\mathscr{A})(A, \Sigma^n B) \cong \mathrm{Ext}^n(A, B).$$

Le cas $n = 0$ montre notamment que le foncteur $\mathscr{A} \to \mathbf{D}(\mathscr{A})$ obtenu en voyant les objets de $\mathscr{A}$ comme des complexes concentré en degré 0 est pleinement fidèle.

2.3 Résolutions et foncteurs dérivés

Le but de ce paragraphe est de répliquer la construction homologique usuelle des foncteurs dérivés. Il faut tout d'abord obtenir une notion convenable de résolution projective. Une fois cette notion obtenue, on définit les foncteurs dérivés à gauche. Une grande différence avec la construction classique est que, comme on manipule des complexes, il n'y a pas besoin d'une famille de foncteurs dérivés mais seulement d'un unique foncteur. Tout ce que l'on fait donne, par dualité, une notion de résolutions injectives et de foncteurs dérivés à droite.

On commence par faire un commentaire sur la nature des résolutions projectives en algèbre homologique qui motive la construction dans la suite. Si $X \in \mathscr{A}$ est un objet, une résolution projective de X est une suite exacte

$$\dots \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} X \longrightarrow 0$$

où chaque P_n est projectif. Dire que la suite est exacte équivaut à dire que ϵ est un quasi-isomorphisme du complexe P vers X vu comme un complexe concentré en degré 0. Ainsi, une résolution projective consiste à remplacer un objet potentiellement compliqué par un objet que l'on considère comme plus simple sans perte d'information homologique.

On suppose dans toute cette sous-section que $\mathscr{A}$ possède des coproduits arbitraires qui sont exacts (c'est à dire que $\mathscr{A}$ vérifie [**AB4**]) et qu'elle possède également un générateur projectif U. Alors $\mathbf{D}(\mathscr{A})$ vérifie [**TR5**]

Définition 2.3.1. On pose $\mathbf{K}_{\mathrm{proj}}(\mathscr{A})$ la sous-catégorie localisante engendrée par les objets projectifs de $\mathscr{A}$.

Cette sous-catégorie doit être vue comme la classe des objets que l'on considère comme simples. Afin d'imiter la construction vue plus haut, il faut montrer que tout complexe est quasi-isomorphe à l'un de ces complexes simples. La première étape est d'approcher chaque complexe au mieux par un complexe de $\mathbf{K}_{\mathrm{proj}}(\mathscr{A})$. Cela correspond trouver un adjoint à l'inclusion dont la proposition suivante garantit l'existence.

Proposition 2.3.2. *La catégorie $\mathbf{K}_{proj}(\mathscr{A})$ est parfaitement générée par U de sorte que le foncteur d'inclusion $\mathbf{K}_{proj}(\mathscr{A}) \to \mathbf{K}(\mathscr{A})$ possède un adjoint à droite $\mathbf{p} : \mathbf{K}(\mathscr{A}) \to \mathbf{K}_{proj}(\mathscr{A})$ d'après le théorème de Brown.*

Avant de continuer, on donne un exemple de calcul de $\mathbf{p}$. On considère A un objet quelconque et on considère une résolution projective $\epsilon : P_\bullet \to A$. Tout d'abord, $P_\bullet$ est un complexe de $\mathbf{K}_{\mathrm{proj}}(\mathscr{A})$. Par ailleurs, considérons la sous-catégorie

$$\mathscr{S} = \{X \in \mathbf{K}(\mathscr{A}) \mid \forall n \in \mathbf{Z}, \forall f : \Sigma^n X \to A, \exists! g : X \to P, f = \epsilon g\}.$$

Proposition 2.3.3. *La sous-catégorie $\mathscr{S}$ est localisante et contient tout les objets projectifs.*

Démonstration. Le fait que les objets projectifs sont dans $\mathscr{S}$ est un résultat standard d'algèbre homologique dans le cadre classique. Par ailleurs, on peut également définir $\mathscr{S}$ de la manière suivante.

$$\mathscr{S} = \{X \in \mathbf{K}(\mathscr{A}) \mid \mathbf{K}(\mathscr{A})(X, \epsilon) \text{ est un isomorphisme}\}.$$

Le lemme des 5 ainsi que la proposition 1.1.3 permettent de déduire que $\mathscr{S}$ est triangulée. De plus, le bifoncteur $\mathbf{K}(\mathscr{A})(-,-)$ transforme les coproduits en produits en la première variable donc $\mathscr{S}$ est localisante. ■

Cette proposition permet de voir que $P_\bullet = \mathbf{p}A$.

On note ϵ la counité de cette adjonction. Alors, pour $X \in \mathbf{K}(\mathscr{A})$, on a que $\epsilon_X : \mathbf{p}X \to X$. Il s'agit de notre candidat pour être une résolution projective. La proposition suivante montre que ϵ_X est effectivement un quasi-isomorphisme comme attendu.

Proposition 2.3.4. *Soit $X \in \mathbf{K}(\mathscr{A})$. Alors, ϵ_X est un quasi-isomorphisme. De plus, le foncteur composé*

$$\mathbf{K}_{proj}(\mathscr{A}) \xrightarrow{\iota} \mathbf{K}(\mathscr{A}) \xrightarrow{Q} \mathbf{D}(\mathscr{A})$$

(on note ι le foncteur d'inclusion et Q le foncteur de passage au quotient) est une équivalence de catégories. L'équivalence de catégories inverse sera encore notée $\mathbf{p} : \mathbf{D}(\mathscr{A}) \to \mathbf{K}_{proj}(\mathscr{A})$.

Enfin, étant munis de résolutions projectives, il nous reste seulement à définir la notion de foncteurs dérivés à gauche. Dans le reste de cette section, on fixe un foncteur additif $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ où $\mathscr{B}$ est une catégorie abélienne quelconque. On peut étendre F en un foncteur additif de la catégorie des complexes dans $\mathscr{A}$ vers la catégories des complexes dans $\mathscr{B}$. Comme ce foncteur envoie les complexes contractiles sur des complexes contractiles, il passe au quotient en un foncteur $\mathbf{K}(F) : \mathbf{K}(\mathscr{A}) \to \mathbf{K}(\mathscr{B})$. Le foncteur dérivé à gauche de F est alors le foncteur composé

$$\mathbf{D}(\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{K}(\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathbf{K}(F)} \mathbf{K}(\mathscr{B}) \xrightarrow{Q_{\mathscr{B}}} \mathbf{D}(\mathscr{B}).$$

On le note $\mathbf{L}F$.

On avait mentionné plus tôt que la construction de $\mathbf{D}(\mathscr{A})$ était potentiellement incorrecte à cause de problèmes de taille. Si on suppose néanmoins que $\mathscr{A}$ possède un générateur projectif et vérifie [**AB4**] comme dans le reste de ce paragraphe, l'équivalence de catégories construite plus haut entre $\mathbf{K}_{\mathrm{proj}}(\mathscr{A})$ et $\mathbf{D}(\mathscr{A})$ permet de garantir que la catégorie dérivée est bien une catégorie.

2.4 Complexes parfaits

On fixe A un anneau et on note $\mathbf{D}(A), \mathbf{K}(A), \ldots$ la catégorie dérivée, homotopique, ... de $A-\mathbf{Mod}$. On termine cette section en donnant une brève description des complexes parfaits dans $\mathbf{D}(A)$. Tout d'abord, on appelle complexe parfait un objet compact de $\mathbf{D}(A)$. La sous-catégorie des complexes parfaits est notée $\mathbf{D}^{\omega}(A)$. Afin de décrire $\mathbf{D}^{\omega}(A)$, on a besoin d'une proposition qui sera également utile dans d'autres circonstances.

Proposition 2.4.1. *Dans la catégorie* $\mathbf{D}(A)$*, on a* $\langle A \rangle = \mathbf{D}(A)$*.*

Démonstration. On note $\mathscr{S} = \langle A \rangle$ au sens de $\mathbf{D}(A)$. On peut alors vérifier que $\mathscr{S}$ est encore localisante dans $\mathbf{K}(A)$ (on rappelle que les objets de $\mathbf{K}(A)$ sont les mêmes que les objets de $\mathbf{D}(A)$). Par ailleurs, $A \in \mathscr{S}$. Il est par ailleurs clair que, pour tout module projectif P, on a $P \in \mathscr{S}$ de sorte que $\mathbf{K}_{\mathrm{proj}}(A) \subset \mathscr{S}$. Mais alors, comme tout objet est isomorphe dans $\mathbf{D}(A)$ à un objet dans $\mathbf{K}_{\mathrm{proj}}(A)$, il s'ensuit que $\mathscr{S} = \mathbf{D}(A)$. ■

Alors, en utilisant le corollaire 1.5.3, on obtient $\mathbf{D}^{\omega}(A) = \langle A \rangle_{\aleph_0}$. On peut alors donner la description suivante.

Théorème 2.4.2. *Les complexes parfaits sont exactement les complexes isomorphes à des complexes bornés dont tout les objets sont des modules projectifs de type fini.*

Démonstration. Il est évident que tout module projectif de type fini est dans $\langle A \rangle_{\aleph_0}$. On peut ensuite prendre leurs (dé)suspensions. Finalement, le cône de $f : X \to Y$ (où X et Y sont vus comme des complexes concentrés en degré 0) est le complexe

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots.$$

En généralisant la construction précédente, on voit que tout complexe borné dont tout les objets sont des modules projectifs de type fini est un complexe parfait.

D'un autre côté, on peut vérifier que la sous-catégorie proposée comme candidat pour $\mathbf{D}^{\omega}(A)$ est bien épaisse ce qui montre l'inclusion inverse. ■

On remarque d'ailleurs que, comme dans le cas des CW complexes, que l'on avait analysé informellement, les objets compacts sont ceux que l'on peut construire avec un nombre fini de copies d'un ensemble d'objets "simples". Ici, cet ensemble se réduit à un seul objet, à savoir A.

Une autre remarque intéressante est que certains objets, que l'on tend à considérer comme petits, ne sont pas nécessairement compacts. Par exemple, prenons $A = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $E = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Une résolution projective de E en tant que A-module est donnée par

$$\ldots \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

où π est la projection canonique et 2 est la multiplication par 2. On peut utiliser cette résolution pour voir que $\mathrm{Tor}_n(E, E) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi, E ne possède aucune résolution projective de longueur finie. On en déduit que E n'est pas parfait. On verra plus tard (4.1.2) qu'il est néanmoins possible de remplacer E par un complexe parfait dans certains problèmes.

3 Réticules et espaces topologiques

Dans la suite de ce travail, on va construire une notion de spectre d'une catégorie triangulée. Il s'agit d'un espace topologique qui donne lieu à une bonne notion de support. Si $\mathscr{T}$ est une catégorie triangulée qui vérifie de bonnes hypothèses (que l'on énonce plus tard, voir 5.0.1), de sorte que la notion de spectre de $\mathscr{T}$ a bien un sens, alors les ouverts de $\mathrm{Spec}(\mathscr{T})$ sont naturellement en bijection avec un certain type de sous-catégories de $\mathscr{T}$. Plutôt que d'étudier les ouverts, il sera souvent plus pratique de travailler directement sur les sous-catégories en question, qui sont les objets qui nous intéressent particulièrement.

Pour procéder de la sorte, on utilisera la notion de réticules. L'exemple qui motive l'introduction des réticules est le suivant. Si X est un espace topologique, l'ensemble ordonné (par inclusion) des ouverts de X est un réticule. Par ailleurs, étant donné un réticule F, il est possible de lui associer un espace topologique. On construit ainsi une adjonction entre la catégorie des espaces topologiques et la catégorie des réticules. En se restreignant à des sous-catégories pleines bien choisies, cette adjonction devient une équivalence de catégories, ce qui permet de travailler indifféremment avec des espaces topologiques ou des réticules selon ce qui semble le plus approprié.

Les seuls espaces topologiques qui nous intéressent dans la suite sont les espaces topologiques cohérents, c'est à dire les espaces topologiques homéomorphes au spectre d'un anneau. On verra ci-dessous que la catégorie des espaces topologiques cohérents est équivalente, par restriction de l'adjonction évoquée ci-dessus, à la catégorie des réticules dits cohérents que l'on définit plus bas. Ainsi, dans la suite de ce travail, on pourra toujours considérer les réticules et les espaces topologiques comme deux interprétations d'un même concept. Comme annoncé plus haut, on utilisera essentiellement la perspective des réticules car ceux-ci sont plus proches des objets qui nous intéressent.

On utilisera également ces considérations pour introduire de manière naturelle la dualité de Hochster pour les espaces topologiques cohérents, qui a été introduite pour la première fois dans [6]. Cette dualité apparaît naturellement dans le calcul du spectre de la catégorie dérivée des modules sur un anneau commutatif, comme on le verra plus tard (voir 4.3). Afin de se familiariser avec les réticules, on montre ensuite de quelle manière le spectre d'un anneau peut se décrire en tant que réticule. Pour un traitement plus détaillé des notions introduites dans cette section, on renvoie au texte [7] de Johnstone.

3.1 Notions sur les réticules

Si X est un espace topologique, l'ensemble ordonné de ses ouverts possède un certain nombre de propriétés utiles que l'on abstrait en une définition ci-dessous.

Définition 3.1.1. Un réticule F est un treillis complet (c'est à dire que c'est un ensemble ordonné dans lequel toute partie possède une borne supérieure et toute partie finie possède une borne inférieure) dans lequel est vérifiée la relation de distributivité

$$\forall a \in F, \forall S \subset F, \qquad a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s \mid s \in S\}.$$

En particulier, en appliquant l'existence de bornes supérieures et inférieures à $\varnothing$, on voit que F possède un plus grand élément noté $\mathbf{1}$ et un plus petit élément noté $\mathbf{0}$. Un morphisme de réticules $f : F \to F'$ est une application telle que $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pour tout $x, y \in F$ on a $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ et pour tout $S \subset F$, $f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$.

On considère X un espace topologique. Comme annoncé précédemment, l'ensemble de ses ouverts ordonné par inclusion est un réticule. Sous des hypothèses assez peu restrictives sur les espaces topologiques impliqués, on peut reconstruire X à partir du réticule de ses ensembles ouverts. En pratique, cela signifie que l'on peut souvent se dispenser entièrement de l'espace topologique et se limiter à considérer le réticule.

Un exemple d'espace topologique qui nous intéresse particulièrement dans la suite sont les espaces cohérents qui peuvent être caractérisés comme étant les espaces homéomorphes au spectre d'un anneau. Ces espaces peuvent toujours être reconstruits à partir de leur réticule d'ensembles ouverts. De plus, ce dernier réticule est cohérent dans le sens de la définition suivante.

Définition 3.1.2. Soit F un réticule. Un élément $c \in F$ est dit fini si, pour tout $S \subset F$ tel que $c \leq \bigvee S$, il existe $K \subset S$ fini tel que $c \leq \bigvee K$. Il s'agit d'une traduction de la notion de quasi-compacité.

Le réticule F est dit cohérent si $\mathbf{1}$ est un élément fini, pour tout $x, y \in F$ deux éléments finis, $x \wedge y$ est encore un élément fini et si, pour tout $x \in F$, il existe $S \subset F$ dont tout les éléments sont finis et tel que $x = \bigvee S$.

Si F, F' sont deux réticules cohérents, un morphisme $f : F \to F'$ de réticules cohérents est un morphisme de réticules qui envoie les éléments finis sur des éléments finis.

Le processus discuté plus haut consistant à envoyer un espace topologique sur son réticule d'ouverts induit en particulier une équivalence contravariante de catégories entre la catégorie des espaces topologiques cohérents et la catégorie des réticules cohérents. C'est cette équivalence qui justifie que l'on puisse travailler avec le réticule des ensembles ouverts sans perte d'information.

3.2 Idéaux d'un treillis

Les idéaux d'un treillis sont utiles d'une part pour reconstruire l'espace topologique associé à un réticule mais également pour reconstruire un réticule cohérent à partir de ses éléments finis. On explore ces deux applications dans cette sous-section et on montre de quelle manière on arrive ainsi à la définition d'une dualité dite dualité de Hochster.

Définition 3.2.1. Soit F un treillis quelconque et $I \subset F$ un sous-ensemble. On dit que I est un idéal de F si

— Pour tout $x \in I$ et tout $y \in F$, si $y \leq x$ alors $y \in I$.

— Pour tout $x, y \in I$, on a $x \vee y \in I$.

Le théorème suivant permet de ramener l'étude des espaces cohérents à l'étude des treillis distributifs.

Proposition 3.2.2. *Le foncteur qui envoie un espace cohérent F sur le treillis distributif F^{ω} des éléments finis de F est une équivalence de catégorie entre réticules cohérents et treillis distributifs.*

L'équivalence inverse est obtenue en associant à chaque treillis distributif F le réticule de ses idéaux. On peut également utiliser les idéaux pour construire l'espace topologique associé à un réticule.

Définition 3.2.3. Soit F un réticule et $I \subset F$ un idéal. Il est dit premier si $\mathbf{1} \notin I$ et, pour tout $x, y \in F$ tels que $x \wedge y \in I$, alors $x \in I$ ou $y \in I$. On considère X l'ensemble des idéaux premiers de F et on dit que $Y \subset X$ est fermé si et seulement si il existe $x \in F$ avec

$$Y = \{I \in X \mid x \in I\}.$$

On a ainsi défini une topologie sur X. Si F est cohérent alors X également.

Le fait que les points de X soient des idéaux premiers peut sembler désagréable au premier abord mais la proposition suivante montre qu'on peut en fait remplacer ces idéaux par des éléments bien choisis dans F.

Proposition 3.2.4. *Soit F un réticule et soit $\mathscr{P} \subset F$ un idéal premier. Il existe alors un unique $c_{\mathscr{P}} \in \mathscr{P}$ tel que*

$$\mathscr{P} = \{x \in F \mid x \leq c_{\mathscr{P}}\}.$$

On dit que $c_{\mathscr{P}}$ est un générateur de $\mathscr{P}$. Les éléments qui génèrent des idéaux premiers sont appelés les éléments premiers de F. Ils sont en bijection avec les idéaux premiers par définition.

Une application des idées précédentes est la dualité de Hochster. D'après ce que l'on a vu, on a trois catégories équivalentes : la catégorie opposée des espaces cohérents, la catégorie des réticules cohérents et la catégories des treillis distributifs. Parmi ces trois catégories, seule la dernière possède une notion intuitive de dualité. En effet, si F est un treillis distributif, alors l'ensemble ordonné F^{op} obtenu en renversant la relation d'ordre est encore un treillis distributif. On obtient donc une dualité, appelée la dualité de Hochster, sur les deux autres catégories par le biais des équivalences considérées.

Si F est un réticule, pour construire son dual de Hochster, il faut tout d'abord prendre les éléments finis de F qui forment un treillis distributif, inverser l'ordre sur ce treillis, puis prendre le réticule des idéaux, ce qui correspond à rajouter des supremums formels. On note ce dual $F^{\wedge}$.

Si maintenant X est un espace topologique cohérent, soit F son réticule des ouverts. Alors, les éléments finis de F correspondent aux ouverts quasi-compacts de X. Pour renverser l'ordre de ce treillis, on peut par exemple passer au complémentaire. Enfin, pour rajouter des supremums, on peut prendre des unions arbitraires. Ainsi, en analysant la construction, on voit que $F^{\wedge}$ peut encore se réaliser comme un sous-ensemble de $\mathscr{P}(X)$, ce qui définit une nouvelle topologie cohérente sur X. On note $X^{\wedge}$ ce nouvel espace topologique. La description précédente montre que les ouverts de $X^{\wedge}$ sont exactement les unions arbitraires de fermés à complémentaire quasi-compact de X.

3.3 Réticule de Zariski

Soit A un anneau commutatif. Alors, on note $\mathbf{RadId}(A)$ l'ensemble des idéaux radicaux de A ordonnés par inclusion. On l'appelle aussi le réticule de Zariski de A. Cet ensemble ordonné est isomorphe au réticule des ensembles ouverts du spectre de A. Il s'agit donc d'un réticule cohérent. On voit ici l'avantage d'utiliser des réticules plutôt que des espaces topologiques, au lieu de devoir parler de l'ouvert défini par un idéal radical, on peut directement parler de l'idéal radical lui-même.

Définition 3.3.1. Un support pour A à valeurs dans un réticule F est la donnée d'une application $d : A \to F$ vérifiant les propriétés suivantes.

[**S**1] $d(1) = \mathbf{1}$ et $d(0) = \mathbf{0}$.

[**S**2] Si $x, y \in A$ alors $d(xy) = d(x) \wedge d(y)$.

[**S**3] Si $x, y \in A$ alors $d(x+y) \leq d(x) \vee d(y)$.

Si $d : A \to F$ et $d' : A \to F'$ sont deux supports, alors un morphisme de supports de d dans d' est la donnée d'un morphisme de réticules $f : F \to F'$ tel que $d'f = d$.

Le réticule de Zariski fournit un exemple particulièrement important de support donné par $x \mapsto \sqrt{(x)}$. On l'appelle le support de Zariski de A. L'importance de ce support se justifie au vue de la proposition suivante, due à Joyal dans [8].

Proposition 3.3.2. *Le support de Zariski de A est un objet initial dans la catégorie des supports.*

On a annoncé plus haut que le réticule des ouverts du spectre de Zariski est isomorphe au réticule de Zariski. Cela se comprend bien à l'aide de la proposition suivante qui décrit les éléments premiers du réticule de Zariski.

Proposition 3.3.3. *Soit $\mathscr{P} \subset$ **RadId**(A) un idéal premier et soit $c_{\mathscr{P}}$ son élément générateur. Alors $c_{\mathscr{P}}$ est un idéal premier de A.*

Finalement, on aura besoin plus loin de la description suivante des éléments finis dans le réticule.

Proposition 3.3.4. *Un idéal radical $\mathfrak{a}$ est un élément fini de* **RadId**(A) *si et seulement si $\mathfrak{a}$ est le radical d'un idéal de type fini.*

On note alors **RadfgId**(A) le treillis distributif des éléments finis de **RadId**(A). La proposition précédente décrit entièrement ce treillis.

4 Sous-catégories localisantes de $\mathbf{D}(A)$

Dans tout cette section on fixe A un anneau commutatif. Notre but est de classifier les sous-catégories localisantes de $\mathbf{D}(A)$ compactement engendrées. On verra que ce problème de classification fait naturellement apparaître le dual de Hochster du réticule de Zariski de A. Pour plus de détails sur certaines preuves, on renvoie à [9].

4.1 Les sous-catégories $\langle A/I \rangle$.

Pour commencer notre classification, on va s'intéresser de plus près aux sous-catégories localisantes $\langle A/I \rangle$ où I est un idéal. On remarque que A/I n'est pas un objet compact en général. On a notamment donné précédemment l'exemple de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ en tant que $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$-module qui n'est pas compact. Cependant, dans le cas où I est un idéal de type fini, la sous-catégorie $\langle A/I \rangle$ est néanmoins compactement engendrée. C'est le premier résultat que l'on obtient. On donne ensuite une description précise de $\langle A/I \rangle$, toujours dans le cas où I est un idéal de type fini. Finalement, la dernière proposition de cette sous-section permettra plus tard de se ramener à étudier uniquement les sous-catégories localisantes de la forme $\langle A/I \rangle$ avec I un idéal de type fini.

On commence par définir les complexes de Koszul.

Définition 4.1.1. Si $x \in A$ alors $K(x)$ est le complexe

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ x\ } A \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

où x désigne la multiplication par x et où les deux copies de A sont en degrés -1 et 0. Si $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ est une famille d'éléments de A alors $K(\mathbf{x})$ est le complexe

$$K(x_1) \otimes K(x_2) \otimes ... \otimes K(x_n).$$

Finalement, si I est un idéal de type fini de A alors un complexe de Koszul de I est n'importe quel complexe $K(\mathbf{x})$ où $\mathbf{x}$ est une famille génératrice de I.

On a alors le résultat essentiel suivant (voir [5]).

Proposition 4.1.2. *Soit I un idéal de type fini de A. Alors $\langle A/I \rangle = \langle K(I) \rangle$ où $K(I)$ est n'importe quel complexe de Koszul de I.*

L'intérêt principal de cette proposition est de voir que les sous-catégories localisantes de la forme $\langle A/I \rangle$ avec I un idéal de type fini sont compactement engendrées. La proposition suivante (voir [5]) permet alors d'appréhender quels sont les objets de $\langle A/I \rangle$.

Proposition 4.1.3. *Soit I un idéal de type fini de A et soit E un complexe quelconque. Alors, $E \in \langle A/I \rangle$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et pour tout $x \in H_n(E)$, il existe $p \geq 0$ avec $I^p.x = 0$.*

On peut par exemple en déduire que, si $A = \mathbf{Z}$, alors $\mathbf{Z} \notin \langle \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rangle$. Bien que ce résultat puisse paraître évident à première vue, il n'est pas si évident à démontrer. En effet, on peut construire des complexes relativement compliqués à partir de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, comme le montre l'isomorphisme entre ce dernier et le complexe

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots .$$

Corollaire 4.1.4. *Si I, J sont deux idéaux de type fini de A alors $\langle A/I \rangle \subset \langle A/J \rangle$ si et seulement si $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$. En particulier, $\langle A/I \rangle = \langle A/J \rangle$ si et seulement si $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.*

Finalement, le résultat suivant, pour lequel on renvoie à [9], va nous permettre d'utiliser les résultats ci-dessus pour aboutir à une classification des sous-catégories localisantes compactement engendrées.

Proposition 4.1.5. *Soit C un complexe. On suppose que $H_n(C)$ est de type fini pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et qu'il est nul pour tout $n \in \mathbf{Z}$ sauf possiblement pour un nombre fini de valeurs. Alors, il existe des idéaux $J_1, ..., J_m$ tels que*

$$\langle C \rangle = \langle A/J_1, ..., A/J_m \rangle.$$

On remarque en particulier que, si C est un complexe parfait, alors il vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus.

4.2 Le cas Noethérien

Les résultats du paragraphe précédents s'appliquent particulièrement bien au cas où A est un anneau Noethérien, c'est à dire lorsque tout les idéaux de A sont de type fini. On suppose durant ce paragraphe que A est Noethérien et on raffine les résultats obtenus précédemment.

Proposition 4.2.1. *Soit I, J deux idéaux de A. On a alors la chaîne d'égalités*

$$\langle R/I, R/J \rangle = \langle R/I \oplus R/J \rangle = \langle R/IJ \rangle = \langle R/(I \cap J) \rangle.$$

Démonstration. On donne quelques éléments de preuve. La première égalité est évidente et la dernière résulte de ce que $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. On conclut en considérant le triangle associé à la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow A/(I \cap J) \longrightarrow A/I \oplus A/J \longrightarrow A/(I + J) \longrightarrow 0.$$

■

En fait, on n'a pas besoin de supposer que A est Noethérien mais seulement que I, J sont de type fini. Cependant la preuve est plus compliquée car $I \cap J$ n'a pas alors de raison d'être de type fini. Le résultat suivant est un corollaire de cette proposition et de la proposition 4.1.5.

Corollaire 4.2.2. *Soit C un complexe parfait. Alors, il existe un idéal I (qui est nécessairement de type fini) tel que $\langle C \rangle = \langle A/I \rangle$.*

On verra plus tard comment ce résultat permet de classifier entièrement les sous-catégories localisantes compactement engendrées. Pour le moment, on s'intéresse à étendre le résultat au cas des anneaux non nécessairement Noethériens.

4.3 Le cas général

Dans ce paragraphe, on s'intéresse tout d'abord à étendre la classification des sous-catégories localisantes engendrées par un unique objet compact au cas d'un anneau général. On verra ensuite que cette classification permet alors de classifier entièrement les sous-catégories localisantes compactement engendrées.

On ne suppose plus que A est un anneau Noethérien. On a alors toujours le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *Soit C un complexe parfait. Alors, il existe I un idéal de type fini de A tel que $\langle C \rangle = \langle R/I \rangle$.*

Démonstration. La démonstration s'appuie sur le cas Noethérien ainsi que les deux lemmes ci-dessous. D'après le lemme A, on pose donc $B \subset A$ un sous-anneau Noethérien ainsi que C_B un complexe parfait de $\mathbf{D}(B)$ tel que $C \cong C_B \otimes A$. Il existe alors $I \subset B$ un idéal de type fini tel que $\langle C_B \rangle = \langle B/I \rangle$. Comme $- \otimes A$ est un foncteur triangulé de $\mathbf{D}(B)$ dans $\mathbf{D}(A)$, il vient par le lemme B que $\langle C_B \rangle = \langle A/IA \rangle$ d'où le résultat. ■

Lemme A. *Soit C un complexe parfait. Alors, il existe $B \subset A$ un sous-anneau Noethérien de A ainsi que C_B un complexe parfait de $\mathbf{D}(B)$ tel que $C \cong C_B \otimes A$.*

Lemme B. *Soit $F : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ un foncteur triangulé qui préserve les coproduits entre catégories triangulées vérifiant [**TR5**]. Soit de plus $x \in \mathscr{T}$. Alors, $\langle F(x) \rangle \supset F(\langle x \rangle)$. En particulier, si $x, y \in \mathscr{T}$ sont tels que $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ alors $\langle F(x) \rangle = \langle F(y) \rangle$.*

Démonstration. La sous-catégorie $F^{-1}(\langle F(x) \rangle)$ est une sous-catégorie triangulée contenant x. Ainsi, $\langle x \rangle \subset F^{-1}(\langle F(x) \rangle$ d'où $F(\langle x \rangle) \subset \langle F(x) \rangle$. En particulier, si $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ alors $x \in \langle y \rangle$ d'où $F(x) \in \langle F(y) \rangle$ puis $\langle F(x) \rangle \subset \langle F(y) \rangle$. Par symétrie, on obtient l'inclusion inverse d'où $\langle F(x) \rangle = \langle F(y) \rangle$. ■

On considère maintenant $\mathbf{CGLoc}(A)$ l'ensemble ordonné (par inclusion) des sous-catégories localisantes compactement engendrées de $\mathbf{D}(A)$. On verra dans la partie suivante qu'il s'agit d'un réticule cohérent. Pour le moment, on suppose ce résultat acquis. La proposition suivante caractérise les éléments finis.

Proposition 4.3.2. *Une sous-catégories localisante $\mathscr{S}$ de $\mathbf{D}(A)$ est un élément fini si et seulement si $\mathscr{S}$ est engendrée par un unique objet compact.*

Démonstration. Supposons que $\mathscr{S}$ soit un élément fini. De l'égalité $\mathscr{S} = \bigvee \{\langle E \rangle \mid E \in \mathscr{S} \cap D^{\omega}(A)\}$ il vient qu'il existe $E_1, ..., E_n \in \mathscr{S} \cap D^{\omega}(A)$ avec $\mathscr{S} = \langle E_1 \rangle \vee ... \vee \langle E_n \rangle = \langle E_1, ..., E_n \rangle$. Mais alors, on a également $\mathscr{S} = \langle E_1 \oplus ... \oplus E_n \rangle$.

Pour la réciproque, supposons que $\langle C \rangle \subset \langle X \rangle$ où C est un objet compact et X est un ensemble d'objets compacts. En appliquant la proposition 1.5.2, on voit que $C \in \langle X \rangle_{\aleph_0}$ d'où il existe $Y \subset X$ fini tel que $C \in \langle Y \rangle_{\aleph_0}$ d'après la proposition 1.3.2. ■

On note $\mathbf{fgCGLoc}(A)$ le treillis distributif des éléments finis de $\mathbf{CGLoc}(A)$. Alors, les propositions 4.3.2 et 4.3.1 montrent que l'on a un isomorphisme

$$\mathbf{fgCGLoc}(A) \cong \mathbf{RadfgId}(A).$$

En reconstruisant les réticules cohérents associés à ces treillis distributifs, on obtient alors un isomorphisme de réticules

$$\mathbf{CGLoc}(A) \cong \mathbf{RadId}(A)^{\wedge}.$$

Cela donne donc une classification entière des sous-catégories localisantes compactement engendrées de $\mathbf{D}(\mathscr{A})$. On voit notamment que la dualité de Hochster apparaît d'elle même dans ce contexte.

5 Spectre d'une catégorie triangulée

On commence par une définition utile dans toute la suite.

Définition 5.0.1. On dit que $(\mathscr{T}, \otimes, 1)$ est une catégorie triangulée tensorielle si

1. La catégorie $\mathscr{T}$ est triangulée.
2. Le produit tensoriel est un bifoncteur $\otimes : \mathscr{T} \times \mathscr{T} \to \mathscr{T}$.
3. On demande que $\otimes$ se comporte comme un produit tensoriel usuel, c'est à dire qu'il doit être associatif et commutatif à isomorphismes près et que 1 doit être une unité pour $\otimes$ à isomorphisme près. Techniquement, on demande à avoir une structure de catégorie monoidale symétrique ce qui impose également des conditions de cohérence entre les différents isomorphismes mais cela n'interviendra pas dans la suite.
4. Les deux structures doivent être compatibles entre elles, c'est à dire que $\otimes$ est triangulé en chaque variable.

Dans la suite, on fixe $(\mathscr{T}, \otimes, 1)$ une catégorie triangulée tensorielle essentiellement petite.

La notion de spectre pour une telle catégorie a été introduite pour la première fois dans [1]. Dans ce papier, Balmer voit le spectre comme un espace topologique. Le traitement donné ci-dessous se base plutôt sur l'exposé de ces idées que l'on trouve en section 3 de [9]. Ainsi, on se débarrasse de l'espace topologique au profit d'un réticule. Il se trouve que le spectre d'une catégorie triangulée tensorielle est un espace cohérent donc il n'y a pas de perte d'information à procéder de la sorte.

On suppose également, comme indiqué précédemment que $\mathscr{T}$ est essentiellement petite. Cette hypothèse a pour but de garantir que $\mathscr{T}$ ne peut avoir qu'un ensemble (et non pas une classe) de sous-catégories triangulées. On évite donc certains problèmes de théorie des ensembles en faisant cette hypothèse.

5.1 Le réticule de Zariski

On utilise tout d'abord le produit tensoriel pour introduire une notion d'idéal.

Définition 5.1.1. Un idéal épais de $\mathscr{T}$ est une sous-catégorie épaisse $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ telle que, si $a \in \mathscr{S}$ et $b \in \mathscr{T}$ alors $a \otimes b \in \mathscr{S}$. On dit de plus que $\mathscr{S}$ est radical si, dès lors que $a \in \mathscr{T}$ vérifie qu'il existe $n \geq 1$ avec $a^{\otimes n} \in \mathscr{S}$, alors $a \in \mathscr{S}$.

L'ensemble ordonné des idéaux radicaux de $\mathscr{T}$ est appelé le réticule de Zariski et on le note $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$.

La définition précédente repose sur l'hypothèse que $\mathscr{T}$ est essentiellement petite, en effet on a besoin que $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$ soit un ensemble ce que l'on ne peut pas garantir en général.

On veut maintenant voir que $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$ est un réticule cohérent. Pour ce faire, on commence par introduire la notion de radical d'un idéal.

Définition 5.1.2. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ un idéal. Alors, on pose

$$\sqrt{\mathscr{S}} = \{a \in \mathscr{T} \mid \exists n \geq 0, a^{\otimes n} = 0\}.$$

Il s'agit du radical de $\mathscr{S}$.

Le nom que l'on a donné à la construction précédente suggère la proposition suivante.

Proposition 5.1.3. *Si $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ est un idéal, alors $\sqrt{\mathscr{S}}$ est un idéal radical.*

La preuve repose sur le lemme ci-dessous.

Lemme A. *Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ un idéal et considérons un triangle*

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z \longrightarrow \Sigma x.$$

Si $x^{\otimes p}, y^{\otimes q} \in \mathscr{S}$ avec $p, q \geq 1$ alors $z^{\otimes(p+q-1)} \in \mathscr{S}$.

Démonstration. Il s'agit en fait de prouver par récurrence sur k que $x^{\otimes i} \otimes y^{\otimes j} \otimes z^{\otimes k} \in \mathscr{S}$ dès lors que $i + j + k \geq p + q - 1$. Le résultat est évident pour $k = 0$. Si on suppose le résultat prouvé pour k, alors il suffit de prendre le produit tensoriel du triangle ci-dessus avec $x^{\otimes i} \otimes y^{\otimes j} \otimes z^{\otimes k}$ pour voir le résultat pour $k + 1$. ■

À partir des considérations précédentes, on peut maintenant décrire les infimums et les supremums dans $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$. Tout d'abord, une intersection d'idéaux radicaux est encore un idéal radical. Ainsi, les infimums sont donnés par intersections, ce qui permet en particulier de définir $\langle X \rangle^{\otimes}$ le plus petit idéal contenant une partie $X \subset \mathscr{T}$ quelconque. On dit que cet idéal est engendré par X. Si $\mathscr{X}$ est une famille d'idéaux radicaux alors le supremum de $\mathscr{X}$ est le radical de l'idéal engendré par $\bigcup \mathscr{X}$. On peut alors démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.1.4. *L'ensemble ordonné $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$ est un réticule cohérent.*

Il se trouve que le spectre introduit par Balmer dans [1] est l'espace topologique associé à ce réticule. Le résultat précédent permet alors de déduire que ce dernier espace est cohérent ce qui donne comme corollaires bon nombre de résultats présentés par Balmer.

5.2 Support de Zariski

Comme dans le cas du spectre d'un anneau, on a une notion de support.

Définition 5.2.1. Un support sur $\mathscr{T}$ est la donnée d'un réticule F et d'une application $d : \mathscr{T} \to F$ telle que

[**S**1] $d(0) = 0$ et $d(1) = 1$.

[**S**2] Pour $x \in \mathscr{T}$, on a $d(\Sigma x) = x$.

[**S**3] Pour tout $x, y \in \mathscr{T}$, on a $d(x \oplus y) = d(x) \vee d(y)$.

[**S**4] Pour tout $x, y \in \mathscr{T}$ on a $d(x \otimes y) = d(x) \wedge d(y)$.

[**S**5] Pour tout triangle

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z \longrightarrow \Sigma x$$

on a $d(y) \leq d(x) \vee d(z)$.

Si (F, d) et (F', d') sont deux supports de $\mathscr{T}$, alors un morphisme du premier dans le second est la donnée d'un morphisme de réticules $f : F \to F'$ tel que $fd = d'$.

On définit alors le support de Zariski comme envoyant tout objet $x \in \mathscr{T}$ sur l'idéal radical engendré par x (c'est à dire le radical de l'idéal engendré par x).

Proposition 5.2.2. *Le support de Zariski est un élément initial dans la catégorie des supports de* $\mathscr{T}$.

En particulier, cette universalité permet de voir que la construction du réticule de Zariski est fonctorielle. En effet, si $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$ est un foncteur triangulé tensoriel, alors, en notant $\mathrm{supp}_{\mathscr{T}}$ (resp. $\mathrm{supp}_{\mathscr{T}'}$) le support de Zariski dans $\mathscr{T}$ (resp. dans $\mathscr{T}'$), on voit que $\mathrm{supp}_{\mathscr{T}'} \circ F$ est un support d'où l'on déduit un morphisme $f : \mathbf{Zar}(\mathscr{T}) \to \mathbf{Zar}(\mathscr{T}')$.

5.3 Interprétation en Termes d'Espaces Topologiques

On réinterprète $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$ en termes d'espaces topologiques. Tout d'abord, les éléments premiers de $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$ sont exactement les idéaux premiers de $\mathscr{T}$ au sens de la définition suivante.

Définition 5.3.1. Un idéal $\mathscr{P} \subset \mathscr{T}$ est dit premier si, pour tout $x, y \in \mathscr{T}$ tels que $x \otimes y \in \mathscr{P}$, on a $x \in \mathscr{P}$ ou $y \in \mathscr{P}$.

Par ailleurs, l'ensemble fermé associé à l'idéal radical $\mathscr{I}$ est l'ensemble

$$\{\mathscr{P} \text{ idéal premier} \mid \mathscr{I} \subset \mathscr{P}\}.$$

Ainsi, le support de $x \in \mathscr{T}$ correspond à l'ouvert

$$\{\mathscr{P} \text{ idéal premier} \mid a \notin \mathscr{P}\}.$$

Ce dernier ensemble peut également être décrit comme l'ensemble des idéaux premiers $\mathscr{P}$ tels que x n'est pas nul dans $\mathscr{T}/\mathscr{P}$.

En regardant les définitions précédentes ainsi que celles données par Balmer dans [1], on voit apparaître une légère subtilité, l'espace topologique introduit par Balmer n'est pas exactement l'espace topologique associé au réticule de Zariski mais il s'agit en fait du dual de Hochster de ce dernier. Dans l'article de Balmer, la dualité de Hochster est particulièrement visible lorsque, dans la section 4, celui-ci cherche à classifier les idéaux radicaux dans une catégorie triangulée tensorielle. Sans surprise, les sous-ensembles du spectre qui permettent de les classifier sont les ouverts de Hochster. Une nouvelle fois, la dualité de Hochster apparaît naturellement dans l'étude du spectre des catégories triangulées tensorielles.

5.4 Nilpotence

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à un théorème qui caractérise la nilpotence dans une catégorie triangulée tensorielle. Pour commencer, on s'intéresse à définir un support pour les morphismes. On discute informellement de la notion voulue puis on donne des définitions formelles qui reposent sur les réticules. Soit donc $f : x \to y$ un morphisme. On veut donc définir $\mathrm{supp}(f)$ comme étant l'ensemble des idéaux premiers $\mathscr{P}$ tels que f ne s'annule pas dans $\mathscr{T}/\mathscr{P}$.

On peut démontrer (voir le chapitre 2 de [11] par exemple) que f s'annule dans $\mathscr{T}/\mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est une sous-catégorie épaisse, si et seulement si f se factorise à travers un élément de $\mathscr{S}$. Ainsi, la définition naturelle de $\text{supp}(f)$ utilise une intersection de supports. Cependant les réticules sont faits pour parler d'unions et non d'intersections, on cherche donc une manière de contourner cette difficulté.

Les supports d'éléments sont des éléments finis de $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$. Ainsi, pour $x \in \mathscr{T}$, on a également $\text{supp}(x) \in \mathbf{Zar}(\mathscr{T})^\wedge$. Cependant, quant on voit le support de x comme étant un élément dans le dual de Hochster, on passe au complémentaire dans les espaces topologiques. Ce faisant, les intersections deviennent des unions. On voit donc qu'il est plus naturel de définir $\text{supp}(f)$ comme étant un élément dans le dual de Hochster.

Définition 5.4.1. On définit le support de f comme

$$\text{supp}(f) = \bigvee \{\text{supp}(z) \mid f \text{ se factorise par } z\},$$

le supremum étant pris dans le dual de Hochster.

Le théorème suivant relie alors la notion de nilpotence à la notion de support.

Théorème 5.4.2. *Supposons que* $\text{supp}(f) = \mathbf{1}$. *Alors, il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $f^{\otimes n} = 0$.

Ce théorème peut être vu comme une extension d'un résultat pour les objets qui résulte immédiatement de la définition de support. En effet, si $x \in \mathscr{T}$ est tel que $\text{supp}(x) = 0$ alors il existe $n \in \mathbf{N}$ avec $x^{\otimes n} = 0$ par définition. Par ailleurs, si x est un objet quelconque, son support est un élément fini de $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$ donc il peut être vu comme un élément de son dual de Hochster. On a alors $\text{supp}(x) = \text{supp}(\text{id}_x)$ dans le dual de Hochster ce qui permet de démontrer le résultat ci-dessus pour les morphismes identités.

Démonstration. L'hypothèse que $\text{supp}(f) = \mathbf{1}$ veut dire que

$$\bigvee \{\text{supp}(z) \mid f \text{ se factorise par } z\} = \mathbf{1}.$$

Comme $\mathbf{1}$ est un élément fini (par définition des réticules cohérents), il existe $z_1, \ldots, z_n \in \mathscr{T}$ tels que f se factorise à travers chacun des z_i et tels que $\bigvee\{\text{supp}(z_1), \ldots, \text{supp}(z_n)\} = \mathbf{1}$. Mais alors, ce supremum fini est pris dans le treillis distributif opposé des éléments finis de $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$. En repassant dans $\mathbf{Zar}(\mathscr{T})$, on trouve donc $\bigwedge\{\text{supp}(z_1), \ldots, \text{supp}(z_n)\} = \mathbf{0}$. Cela montre que $\text{supp}(z_1 \otimes \ldots \otimes z_n) = \mathbf{0}$. Mais alors, $z_1 \otimes \ldots \otimes z_n \in \mathbf{0}$ d'où il existe $k \geq 0$ avec $(z_1 \otimes \ldots \otimes z_n)^{\otimes k} = 0$. Finalement, comme $f^{\otimes n}$ se factorise à travers $z_1 \otimes \ldots \otimes z_n$, il s'ensuit que $f^{\otimes (nk)} = 0$. ■

5.5 Retour sur $\mathbf{D}(A)$

On fixe A un anneau commutatif. On a vu précédemment comment classifier les sous-catégories localisantes compactement engendrées de A mais on avait dû admettre que $\mathbf{CGLoc}(A)$ est un réticule cohérent. On montre ici que ce dernier ensemble ordonné est en fait isomorphe à $\mathbf{Zar}(\mathbf{D}^\omega(A))$ ce qui montre bien qu'il s'agit d'un réticule cohérent en vue du théorème 5.1.4.

On construit tout d'abord la bijection. Si $\mathscr{I} \subset \mathbf{D}^\omega(A)$ est un idéal radical alors on lui associe $\langle \mathscr{I} \rangle$ qui est une sous-catégorie localisante compactement engendrée de $\mathbf{D}(A)$. Inversement, si $\mathscr{S} \subset \mathbf{D}(A)$ est localisante et compactement engendrée, on lui associe $\mathscr{S} \cap \mathbf{D}^\omega(A)$. Il faut voir que ce dernier processus produit bien des idéaux radicaux.

Proposition 5.5.1. *Si* $(\mathscr{T}, \otimes, 1)$ *est une catégorie triangulée tensorielle vérifiant [**TR5**] et si* $\langle 1 \rangle = \mathscr{T}$, *alors toute sous-catégorie localisante est un idéal.*

Démonstration. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ une sous-catégorie localisante et soit $x \in \mathscr{S}$. Alors, on considère $\mathscr{S}_x = \{y \in \mathscr{T} \mid x \otimes y \in \mathscr{S}\}$. On peut vérifier que $\mathscr{S}_x$ est localisante et que $1 \in \mathscr{S}_x$ de sorte que $\mathscr{S}_x = \mathscr{T}$. ■

Proposition 5.5.2. *Tout idéal de* $D^\omega(A)$ *est radical.*

On donne quelques indications sur la manière de prouver cette dernière proposition. Tout d'abord, le produit tensoriel possède un adjoint à droite donné par le foncteur dérivé de Hom. On note alors $R\,\text{Hom}$ ce dernier foncteur dérivé. Ensuite, pour $X \in \mathbf{D}(A)$, on pose $X^\wedge = R\,\text{Hom}(X, 1)$, il s'agit du dual de X. Alors, on a une transformation naturelle $- \otimes X^\wedge \to R\operatorname{Hom}(X, -)$ qui s'obtient au vu de la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(Y \otimes X^\wedge, & R\operatorname{Hom}(X,Y)) \cong \operatorname{Hom}(Y, R\operatorname{Hom}(X^\wedge, R\operatorname{Hom}(X,Y))) \\ & \cong \operatorname{Hom}(Y, R\operatorname{Hom}(R\operatorname{Hom}(X,1) \otimes X, Y)) \cong \operatorname{Hom}(Y, R\operatorname{Hom}(1,Y)) \cong \operatorname{Hom}(Y,Y) \end{aligned}$$

où l'avant dernier isomorphisme est donné par le morphisme d'évaluation, qui s'obtient lui-même par la suite d'isomorphismes

$$\operatorname{Hom}(R\operatorname{Hom}(X,1) \otimes X, 1) \cong \operatorname{Hom}(R\operatorname{Hom}(X,1), R\operatorname{Hom}(X,1)).$$

On peut vérifier que, si X est un complexe parfait, alors la transformation naturelle que l'on a construite est en fait un isomorphisme naturel. Ainsi, on peut en déduire (voir [9]) que X est un facteur direct de $X \otimes X \otimes X^\wedge$. Par ailleurs, $X^\wedge$ est alors un complexe parfait.

On doit maintenant voir que ces deux associations sont inverses l'une de l'autre. Il est clair que, si $\mathscr{S} \subset \mathbf{D}(A)$ est localisante et compactement engendrée alors $\langle \mathscr{S} \cap D^\omega(A) \rangle = \mathscr{S}$. Pour voir l'autre sens, on utilise la proposition 1.5.2.

Références

[1] P. Balmer. The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, (588) :149–168, 2005.

[2] P. Balmer. Supports and filtrations in algebraic geometry and modular representation theory. *American Journal of Mathematics*, 129(5) :1227–1250, 2007.

[3] P. Balmer and G. Favi. Gluing techniques in triangular geometry. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 58(4) :415–441, 2007.

[4] Paul Balmer and Giordano Favi. Generalized tensor idempotents and the telescope conjecture. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 102(6) :1161–1185, 2011.

[5] W.G. Dwyer and J.P.C. Greenlees. Complete modules and torsion modules. *American Journal of Mathematics*, 124(1) :199–220, 2000.

[6] M. Hochster. Prime ideal structure in commutative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 142 :43–60, 1969.

[7] P.T Johnstone. *Stone Spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Reprint of the 1982 edition.

[8] A. Joyal. Spectral spaces and distributive lattices. In *Notices of the american mathematical society*, volume 18, page 393, 1971.

[9] J. Kock and W. Pitsch. Hochster duality in derived categories and point-free reconstruction of schemes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(1) :223–261, 2017.

[10] H. Krause. Derived categories, resolutions, and brown representability, 2006.

[11] A. Neeman. *Triangulated Categories*, volume 148 of *Annals of Mathematical Study*. Princeton University Press, Princeton, 2001.

[12] D. Puppe. On the structure of stable homotopy theory. In *Colloquium on algebraic topology*, pages 65–71. Aarhus Universitet Matematisk Institut, 1962.

[13] Raphaël Rouquier. Dimensions of triangulated categories. *Journal of K-Theory*, 1 :193–256, 04 2008.

[14] Greg Stevenson. A tour of support theory for triangulated categories through tensor triangular geometry, 2016.

[15] J.L. Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abeliennes*, volume 239 of *Asterisque*. Société Mathématique de France, 1996.