Représentations de la matrice unitaire et probabilité libre

Yulai Huang

Encadré par Pierre Tarrago
Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation

Table des matières

1 Introduction

On travail d'abord avec les représentations de la matrice unitaire $U(n)$. On désigne par V^λ la représentation irréductible de $U(n)$ avec le poids dominant λ. Soient λ, μ deux poids dominants. On peut décompose le produit tensoriel $V^\lambda \otimes V^\mu$ sous la forme

$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda\mu} V^\nu.$$

On s'intéresse au problème suivant. Considérons la mesure de probabilité $P(\cdot|\lambda, \mu)$ sur l'ensemble des poids dominants, définie par

$$P(\nu|\lambda, \mu) := \frac{c^\nu_{\lambda\mu} \dim V^\nu}{\dim V^\lambda \otimes V^\mu}.$$

On veut déterminer le comportement de P, car cela donne toutes les informations sur la décomposition de $V^{\lambda} \otimes V^{\mu}$.

Il existe déjà des résultats sur le problème. Par exemple, dans l'article [CŚ13], une certaine matrice aléatoire $X(\rho)$ est associée à toute représentation ρ de $U(n)$. Une telle matrice $X(\rho)$ comprend des informations sur la décomposition de ρ. Il faut donc étudier $X(V^{\lambda} \otimes V^{\mu})$ au lieu de P. Les auteurs ont montré que sous certaines hypothèses sur les représentations irréductibles ρ_1, ρ_2, lorsque $n \to \infty$, la matrice $X(\rho_1 \otimes \rho_2)$ converge en lois vers la convolution libre des lois de $X(\rho_1)$ et $X(\rho_2)$.

On n'a pas pu arriver au résultat dans [CŚ13], mais on a examiné le problème du point de vue de l'analyse. Dans ce rapport, on va d'abord introduire la langue de probabilité non commutative. Puis dans ce cadre on va prouver un résultat sur la liberté asymptotique pour les matrices de Haar. Dans la seconde partie, on va montrer que la mesure de probabilité P est liée avec la mesure spectrale de la somme de deux matrices hermitiennes aléatoires. Cela donne une vue différente de [CŚ13] sur le résultat dans celui-ci.

Mon stage a commencé en janvier en collaboration avec mon encadrant, Professeur Pierre Tarrago. Initialement, le but était d'étudier le lien entre la cohomologie des grassmanniennes et la probabilité non commutative, ainsi que leur contrepartie quantique. Cependant, au cours de la lecture des article, on a rencontré beaucoup de difficultés. On a étudié de l'énoncé et la preuve de formule de convolution de Weingarten. En même temps, j'ai acquis des connaissances fondamentales en théorie des représentations, par exemple, la dualité de Schur-Weyl pour $U(n)$ et la classification des représentations irréductibles de $U(n)$. Après avoir compris la preuve du théorème 2.8, on se concentrait sur le calcul de la densité spectrale de la matrice (3.0.1). Cependant, il y a eu quelques problèmes concernant l'intégrabilité qui n'étaient pas abordés dans les articles qu'on a consulté. On a trouvé une méthode directe pour les montrer. Cela a pris le reste du temps du stage.

2 Liberté asymptotique et matrice de Haar

Matrices aléatoires et probabilités libres

En théorie classique des probabilités, on travail souvent avec l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Soit A une matrice aléatoire, c'est-à-dire que les éléments de la matrice A sont variables aléatoires. Nous souhaitons examiner les quantités $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^k))$, qui fournissent des informations sur la distribution spectrale de A. Dans ce contexte, nous introduisons des notions plutôt d'ordre algébrique que analytique pour étudier ces quantités.

Définition 2.1. On dit que $(\mathscr{A}, \varphi)$ est un *espace de probabilité non commutatif*, si $\mathscr{A}$ est une algèbre unitaire (pas nécessairement commutative) sur $\mathbb{C}$ et φ est une forme linéaire sur $\mathscr{A}$ qui envoie l'identité sur 1. Habituellement φ est appelée un *état*, et les éléments de $\mathscr{A}$ sont dits les variables aléatoires (non commutatives).

Soient $A_{N,1}, \cdots, A_{N,n}$ des ensembles gaussiens unitaires indépendants de taille N. Pour rappel, un ensemble gaussien unitaire est une matrice aléatoire unitaire $A =$

(a_{ij}) où $a_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, $a_{ii} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et les éléments $a_{ij}(i \leq j)$ sont indépendants. Pour donner un exemple concret de la définition ci-dessus, considérons l'algèbre unitaire $\mathscr{A}_N$ des matrices aléatoires engendrée par les matrices aléatoires ci-dessus, et équipons-la de l'application $\varphi = \mathbb{E}(\mathrm{tr}(\cdot))$.

Remarque 2.2. Dans le contexte suivant, « Tr » désigne la trace et « tr » désigne la trace normalisée.

Définition 2.3. Soient $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ des sous-algèbres unitaires de $\mathscr{A}$. Les sous-algèbres sont dites *libres* si pour tous les éléments centrés $a_1, \cdots, a_r$ appartenant respectivement à $\mathscr{A}_{i_1}, \cdots, \mathscr{A}_{i_r}$ avec $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_r$, on a $\varphi(a_1 \cdots a_r) = 0$.

En d'autres termes, les sous-algèbres sont libres si les produits alternés d'éléments centrés provenant de celles-ci sont toujours centrés. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont dits libres si les algèbres qu'ils génèrent sont libres.

Remarque 2.4. Soit $\mathscr{B}$ l'algèbre engendrée par $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$. Alors $\varphi|_{\mathscr{B}}$ est déterminée par $\varphi|_{\mathscr{A}_1}, \cdots, \varphi|_{\mathscr{A}_n}$ et par la condition de liberté.

Définition 2.5. Pour tout entier positif N, soient $X_{N,1}, \cdots, X_{N,n}$ des variables aléatoires non commutatives dans un espace $(\mathscr{A}_N, \varphi_N)$. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des variables aléatoires dans un autre espace $(\mathscr{A}, \varphi)$. On dit que $(X_{N,1}, \cdots, X_{N,n})$ converge en loi vers $(a_1, \cdots, a_n)$ si tous les moments mixtes

$$\varphi_N(X_{N,i_1} X_{N,i_2} \cdots X_{N,i_r})$$

de $(X_{N,1}, \cdots, X_{N,n})$ convergent vers ceux de $(a_1, \cdots, a_n)$. Dans ce cas, on écrit

$$(X_{N,1}, \cdots, X_{N,n}) \xrightarrow{\text{loi}} (a_1, \cdots, a_n).$$

Définition 2.6. Dans le contexte ci-dessus, $X_{N,1}, \cdots, X_{N,n}$ sont dites *asymptotiquement libres* si en plus $a_1, \cdots, a_n$ sont libres.

Exemple 2.7. Grâce à une formule de Wick [MS17], on peut démontrer que $\frac{A_{N,1}}{\sqrt{N}}, \cdots, \frac{A_{N,n}}{\sqrt{N}}$ sont asymptotiquement libres, et elles convergent toutes en lois vers la loi du demi-cercle de Wigner.

Liberté asymptotique pour les matrices de Haar

Dans ce qui suit, si l'espace de probabilité non commutatif traité est constitué de matrices aléatoires, l'état φ de cet espace est par défaut $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(\cdot))$. Soit $U_N \in U(N)$ une matrice aléatoire unitaire choisie selon la mesure de Haar. On l'appelle *la matrice de Haar* de taille N.

Théorème 2.8. *Soient $\{A_N\}, \{B_N\}$ deux suites de matrices déterministes convergeant en loi vers a, b respectivement et A_N, B_N sont de taille N par N. Alors on a la convergence en loi*

$$(U_N A_N U_N^*, B_N) \xrightarrow{\text{loi}} (a, b)$$

où a et b sont libres dans le même espace de probabilité non commutatif.

Pour montrer le théorème, on a besoin d'une formule pour calculer les moments mixtes des matrices de Haar. C'est ce qu'on appelle la formule de convolution de Weingarten 2.9. Beaucoup de techniques en théorie de la représentation sont réquis dans la construction des fonctions de Weingarten et la preuve de cette formule. On peut se référer à [CŚ06].

Théorème 2.9 (Formule de convolution de Weingarten)**.** *Fixons un entier positif n. Soit $N \geq n$ un entier et soit $U \in U(N)$ la matrice de Haar. Alors il existe une fonction $\mathrm{Wg}_N \in \mathbb{C}[S_n]$ sur S_n telle que pour tous les multi-indices $i, j, i', j' : [n] \to [N]$, on a*

$$E[U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_n j_n} \overline{U_{i'_1 j'_1}} \cdots \overline{U_{i'_n j'_n}}] = \sum_{\sigma,\tau \in S_n} \delta_{i,i'_\sigma} \delta_{j,j'_\tau} \mathrm{Wg}_N(\sigma\tau^{-1}).$$

Proposition 2.10. *Il existe une fonction $\phi \in \mathbb{C}[S_n]$ telle que lorsque $N \to \infty$ on a*

$$\mathrm{Wg}_N(\sigma) = \phi(\sigma) N^{-|\sigma|-n} + O(N^{-|\sigma|-n-1}).$$

Notons qu'ici $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ en tant que multi-indices et $\delta_{ij} = 0$ dans l'autres cas. On note aussi $i_\sigma = (i_{\sigma 1}, \cdots, i_{\sigma n})$. On peut décrire une permutation $\sigma \in S_n$ comme le produit de transpositions. Alors le nombre minimal de transpositions nécessaires pour réaliser cette décomposition est noté par $|\sigma|$.

Démonstration du théorème 2.8. Pour simplifier le calcul, on supprime tous les indices N. Soient $f_1, \cdots, f_n$ et $g_1, \cdots, g_n$ des polynômes à coefficients complexes. On calcule la limite de l'expression

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(U f_1(A) U^* g_1(B) \cdots U f_n(A) U^* g_n(B))\right). \tag{2.10.1}$$

Notons $f_i(A) = (A^{(i)}_{..})$, $g_i(B) = (B^{(i)}_{..})$ et $U = (U_{..})$. Alors on a

$$\mathrm{Tr}(U f_1(A) U^* g_1(B) \cdots U f_n(A) U^* g_n(B)) = \sum_{i,j,i',j'} U_{i_1 j_1} A^{(1)}_{j_1 j'_1} \bar{U}_{i'_1 j'_1} B^{(1)}_{i'_1 i_2} \cdots U_{i_n j_n} A^{(n)}_{j_n j'_n} \bar{U}_{i'_n j'_n} B^{(n)}_{i'_n i_1}$$

où i, j, i', j' prennent toutes les fonctions de $[n]$ vers $[N]$. Par la formule de convolution de Weingarten 2.9, on a

$$\begin{aligned}(2.10.1) &= \sum_{i,j,i',j'} \sum_{\sigma,\tau \in S_n} A^{(1)}_{j_1 j'_1} B^{(1)}_{i'_1 i_2} \cdots A^{(n)}_{j_n j'_n} B^{(n)}_{i'_n i_1} \delta_{i,i'_\sigma} \delta_{j,j'_\tau} \mathrm{Wg}_N(\sigma\tau^{-1}) \\ &= \sum_{\sigma,\tau \in S_n} \sum_{i,j} A^{(1)}_{i_1 i_{\tau 1}} \cdots A^{(n)}_{i_n i_{\tau n}} B^{(1)}_{j_1 j_{\sigma 2}} \cdots B^{(n)}_{j_n j_{\sigma 1}} \mathrm{Wg}_N(\sigma\tau).\end{aligned}$$

On peut simplifier davantage cette formule en introduisant la notation suivante. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre et φ une forme linéaire sur $\mathscr{A}$. Supposons que φ est une trace. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et toutes les éléments $A_1, \cdots, A_n$ dans $\mathscr{A}$, on définit $\varphi_\sigma(A_1, \cdots, A_n)$ comme suit. Si $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_n)$ est un cycle, on définit

$$\varphi_\sigma(A_1, \cdots, A_n) = \varphi(A_{i_1}, \cdots, A_{i_n}).$$

Dans le cas général, on décompose σ en cycles disjoints $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ et on définit la quantité comme le produit de celles de ces cycles. De cette manière, on peut obtenir une formule plus compacte :

$$(2.10.1) = \sum_{\sigma,\tau \in S_n} \mathrm{Tr}_\tau \left(f_1(A), \cdots, f_n(A)\right) \mathrm{Tr}_{\sigma\gamma} \left(g_1(B), \cdots, g_n(B)\right) \mathrm{Wg}_N(\sigma\tau)$$

où $\gamma = (1, 2, \cdots, n)$. Par proposition 2.10, on a $\mathrm{Wg}_N(\sigma) \sim \phi(\sigma) N^{-|\sigma|-n}$ où ϕ est une fonction sur S_n indépendante de N. On en déduit que la suite des moments mixtes

$$\varphi_N \left(U f_1(A) U^* g_1(B) \cdots U f_n(A) U^* g_n(B)\right)$$

converge vers la limite

$$\sum_{|\tau|+|\sigma\gamma|+|\sigma\tau|=n-1} \phi(\sigma\tau)\, \varphi_\tau \left(f_1(a), \cdots, f_n(a)\right) \varphi_{\sigma\gamma} \left(g_1(b), \cdots, g_n(b)\right). \qquad (2.10.2)$$

De la même manière que remarque 2.4, pour montrer le théorème il suffit de vérifier que si $f_i(a), g_i(b)$ sont tous centré, la limite (2.10.2) égale zéro. En fait, au moins l'une des valeurs de $|\tau|$ et $|\sigma\gamma|$ est inférieure ou égale à $\frac{n-1}{2}$, ce qui signifie que τ ou $\sigma\gamma$ a un point fixe. Donc tous les termes s'annulent dans (2.10.2). Cela conclut la démonstration. $\square$

3 Mesures orbitales

Soit H_n l'epace des matrices hermitiennes n par n, et soit $H_{n,0}$ le sous-espace de H_n constitué des matrices sans trace. Pour $A \in H_n$, définissons *l'orbite coadjointe unitaire* comme

$$\Omega_A := \{UAU^* : U \in U(n)\}.$$

Alors Ω_A est constituée des matrices hermitiennes avec le même spectre que A. Pour deux matrices hermitiennes A et B, la détermination des spectres possibles des matrices dans $\Omega_A + \Omega_B$ est connue sous le nom du « problème de Horn ». Celui-ci a été résolu à l'aide des méthodes combinatoires par Knutson et Tao [KT99] [KT00].

On choisit deux matrices hermitiennes dans Ω_A et Ω_B de manière uniforme, puis on forme leur somme. Plus précisément, Soient U et V deux matrices de Haar indépendantes, et on veut déterminer la lois de probabilité du spectre de la matrice aléatoire

$$H = UAU^* + VBV^*. \qquad (3.0.1)$$

Pour faciliter nos calculs, on doit se débarraser d'une quantité invariante — la trace. Puisque la situation reste la même si l'on remplace A par $A + \lambda I_n$, on peut supposer apriori que A et B sont sans trace. Ainsi, on ne considère que la loi de probabilité de H dans $H_{n,0}$.

Outils utiles pour les calculs

Nous introduisons d'abord quelques techniques de calcul. En tant qu'espaces vectoriels réels, on a l'identification $H_{n,0} \cong \mathbb{R}^{n^2-1}$. Définissons la mesure de Lebesgue sur $H_{0,n}$ par

$$dY := dY_{11} \cdots dY_{n-1,n-1} d\,\mathrm{Re}\, Y_{12} d\,\mathrm{Im}\, Y_{12} \cdots d\,\mathrm{Re}\, Y_{n-1,n} d\,\mathrm{Im}\, Y_{n-1,n}.$$

Soit $f \in \mathcal{S}(H_{n,0})$ une fonction de Schwartz sur $H_{n,0}$. Définissons la transformation de Fourier

$$\mathcal{F} f(A) = \hat{f}(A) := \int_{H_{n,0}} e^{-i\,\mathrm{Tr}(AY)} f(Y) dY,\ A \in H_{0,n}.$$

On peut écrire la transformation de Fourier inverse sous une forme compacte.

Lemme 3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(H_{n,0})$. Définissons la transformation de Fourier inverse par*

$$\mathcal{F}^{-1} f(Y) := \frac{n2^{n(n-1)}}{(2\pi)^{n^2-1}} \int_{H_{0,n}} e^{i\,\mathrm{Tr}(YA)} f(A) dA.$$

Alors on a $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathrm{Id}$.

Par souci de concision, on pose

$$\hat{\kappa} = \frac{(2\pi)^{n^2-1}}{n2^{n(n-1)}}.$$

De même, on note la mesure de Lebesgue sur H_n par

$$dX := dX_{11} \cdots dX_{nn} d\,\mathrm{Re}\, X_{12} d\,\mathrm{Im}\, X_{12} \cdots d\,\mathrm{Re}\, X_{n-1,n} d\,\mathrm{Im}\, X_{n-1,n}.$$

Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur. On utilise $\underline{x}$ pour désigner la matrice diagonale $\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$. Puisque toutes les matrices hermitiennes sont diagonalisables, on a une "paramétrisation" de H_n :

$$\begin{aligned} \Phi :\ U(n) \times \mathbb{R}^n &\to H_n \\ (U, x) &\mapsto U\underline{x}U^* \end{aligned}$$

Théorème 3.2 (Formule d'intégration de Weyl)**.** *Pour toutes les fonctions intégrables sur H_n, on a*

$$\int_{H_n} f(X) dX = \kappa \int_{U(n)\times\mathbb{R}^n} f(U\underline{x}U^*) \Delta(x)^2 dU dx$$

où $\kappa = \pi^{n(n-1)/2} / \prod_{p=1}^{n} p!$.

Pour prouver la formule d'intégration de Weyl, on doit d'abord prendre le quotient de $U(n)\times\mathbb{R}^n$ modulo le "noyau" de Φ, et obtenir un difféomorphisme. Ensuite il faut seulement faire des calculs avec des formes différentielles. On peut se référer à [Far08] pour une preuve dans le cas réel. Nous avons également une formule d'intégration de Weyl pour les groupes unitaires.

Théorème 3.3 (Formule d'intégration de Weyl pour $U(n)$)**.** *Soit f une fonction intégrable sur $U(n)$ et soit T^n le tore maximal. Alors on a*

$$\int_{U(n)} f(g)dg = \frac{1}{n!}\int_{T^n}\left(\int_{U(n)} f(gtg^*)dg\right)|\Delta(t)|^2dt$$

où dg et dt sont mesures de Haar.

On a besoin d'un dernier outil pour faire des calculs concernant les matrices de Haar. Pour $A, B \in H_n$ on définit *l'intégrale orbitale*

$$\mathscr{H}(A,B) := \int_{U(n)} e^{\mathrm{Tr}(AUBU^*)}dU$$

où dU est la mesure de Haar sur $U(n)$. En tant que conséquences faciles des symétries de la mesure de Haar, nous avons :

Proposition 3.4. *L'intégrale orbitale $\mathscr{H}(A,B)$ a les propriétés suivantes :*
— *$\mathscr{H}(A,B)$ dépend seulement des valeurs propres de A et B.*
— *$\mathscr{H}(A,B) = \mathscr{H}(B,A)$.*
— *$\mathscr{H}(A+\lambda I_n, B) = e^{\lambda \mathrm{Tr}\, B}\mathscr{H}(A,B)$.*

Après avoir étudié l'équation de la chaleur dans H_n, on peut obtenir l'évaluation ci-dessous de l'intégrale orbitale en conséquence de la formule d'intégration de Weyl et de la partie radiale du Laplacien. Ce traitement provient également de [Far08].

Théorème 3.5. *Soient $A, B \in H_n$. Supposons que $a = (a_1,\cdots,a_n)$ et $b = (b_1,\cdots,b_n)$ sont les valeurs propres de A et B respectivement. Alors on a*

$$\mathscr{H}(A,B) = \prod_{p=1}^{n-1} p!\ \frac{\det\left(e^{a_ib_j}\right)_{i,j=1}^n}{\Delta(a)\Delta(b)}.$$

Calcul de la fonction de densité spectrale

Supposons que $A \in H_{n,0}$ a les valeurs propres $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$ avec $\alpha_1+\cdots+\alpha_n = 0$. Définissons l'opérateur spectral

$$\begin{aligned}\sigma:\ H_{n,0} &\to \Omega\\ A &\mapsto (\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\end{aligned}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est l'ensemble des vecteurs y qui satisfaisons

$$y_1 \geq \cdots \geq y_{n-1} \geq -y_1 - \cdots - y_{n-1}.$$

L'opérateur σ est mesurable en conséquence de la propriété de min-max de Courant-Fischer :

Lemme 3.6. *Soit $H \in H_n$ une matrice hermitienne, et soient $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ ses valeurs propres. Alors*

$$\alpha_k = \sup_{\dim V = k} \inf_{v \in V} \frac{vHv^*}{\|v\|^2}.$$

Notons par μ la lois de $H = UAU^* + VBV^*$ sur $H_{n,0}$, où A et B sont sans trace. On va déterminer la lois du spectre de H, c'est-à-dire trouver une expression pour $\sigma_* \mu$.

On fait tout d'abord le calcul suivant. Soit $f \in \mathcal{S}(H_{n,0})$ invariante sous la conjugaison des matrices unitaires. Alors, $\hat{f}$ est également invariante sous la conjugaison, et $f(H)$ est une variable aléatoire bornée. Par la formule de Fourier inverse et le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} E[f(H)] &= \frac{1}{\hat{\kappa}} E[\int_{H_{0,n}} e^{i\,\mathrm{Tr}(HX)} \hat{f}(X) dX] \\ &= \frac{1}{\hat{\kappa}} \int_{H_{n,0}} \hat{f}(X) E[e^{i\,\mathrm{Tr}(HX)}] dX. \end{aligned}$$

Par l'indépendance de U et V,

$$\begin{aligned} E[e^{i\,\mathrm{Tr}(HX)}] &= E[e^{i\,\mathrm{Tr}(UAU^*X)}] E[e^{i\,\mathrm{Tr}(VBV^*X)}] \\ &= \mathscr{H}(iX, A) \mathscr{H}(iX, B). \end{aligned}$$

Avant d'utiliser la formule d'intégration de Weyl, on a besoin d'un petit truc pour avoir une intégrale sur H_n. Considerons le changement de variable :

$$\begin{aligned} H_{n,0} \times \mathbb{R} &\to H_n \\ (X, \lambda) &\mapsto Y := X + \lambda I_n \end{aligned}$$

Alors $dY = n\, dX d\lambda$. En intégrant $\hat{f}(Y - \mathrm{tr}\, Y I_n) e^{-(\mathrm{tr}\, Y)^2} \mathscr{H}(iY, A) \mathscr{H}(iY, B)$ sur H_n (cela est intégrale grâce au théorème de Fubini), nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{H_n} \hat{f}(Y - \mathrm{tr}\, Y I_n) e^{-(\mathrm{tr}\, Y)^2} \mathscr{H}(iY, A) \mathscr{H}(iY, B)\, dY \\ &= n \int_{H_{n,0}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(X) e^{-\lambda^2} \mathscr{H}(iX, A) \mathscr{H}(iX, B) dX d\lambda \\ &= n \sqrt{\pi} \hat{\kappa} E[f(H)]. \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à la formule d'intégration de Weyl nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{H_n} \hat{f}(Y - \operatorname{tr} Y I_n) e^{-(\operatorname{tr} Y)^2} \mathscr{H}(iY, A)\mathscr{H}(iY, B) dY \\
&= \kappa \int_{U(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(U\underline{x}U^* - \operatorname{tr} \underline{x} I_n) e^{-(\operatorname{tr} \underline{x})^2} \mathscr{H}(ix, A)\mathscr{H}(ix, B)\Delta(x)^2 dU dx \\
&= \kappa \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\underline{x} - \operatorname{tr} \underline{x} I_n) e^{-(\operatorname{tr} \underline{x})^2} \mathscr{H}(ix, A)\mathscr{H}(ix, B)\Delta(x)^2 dx.
\end{aligned}$$

Appliquons le changement de variable $(x_1, \cdots, x_n) = (y_1 + \lambda, \cdots, y_{n-1} + \lambda, \lambda - y_1 - \cdots - y_{n-1})$. Nous avons $dx = n\, dy d\lambda$ et donc

$$E[f(H)] = \frac{\kappa}{\hat{\kappa}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}(y)\mathscr{H}(iy, A)\mathscr{H}(iy, B)\Delta(y)^2 dy. \tag{3.6.1}$$

Remarque 3.7. Dans l'intégrale 3.6.1, on utilise y pour désigner le vecteur $(y_1, \cdots, y_{n-1}, -y_1 - \cdots - y_{n-1})$ et dy pour désigner $dy_1 \cdots dy_{n-1}$. On adopte cette convention dans ce qui suitin the the subsequent text On adopte cette convention dans le texte ultérieur, chaque fois que le domaine d'intégration a une dimension de $n-1$ et qu'un vecteur de dimension n est requis dans l'intégrande.

On calcule maintenant la transformation de Fourier de f. Soit $C \in H_{n,0}$. On a

$$\begin{aligned}
&\int_{H_n} f(Y - \operatorname{tr} Y I_n) e^{-(\operatorname{tr} Y)^2} e^{-i \operatorname{Tr}(YC)} dY \\
=&n \int_{H_{n,0}} \int_{\mathbb{R}} f(X) e^{-\lambda^2} e^{-i \operatorname{Tr}(XC)} dX d\lambda \\
=&n\sqrt{\pi}\hat{f}(C)
\end{aligned}$$

et on a par la formule d'intégration de Weyl

$$\begin{aligned}
&\int_{H_n} f(Y - \operatorname{tr} Y I_n) e^{-(\operatorname{tr} Y)^2} e^{-i \operatorname{Tr}(YC)} dY \\
=&\kappa \int_{U(n)} \int_{\mathbb{R}} f(U\underline{y}U^* - \operatorname{tr} \underline{y} I_n) e^{-(\operatorname{tr} \underline{y})^2} e^{-i \operatorname{Tr}(U\underline{y}U^* C)} \Delta(y)^2 dU dy \\
=&\kappa \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{y} - \operatorname{tr} \underline{y} I_n) e^{-(\operatorname{tr} \underline{y})^2} \mathscr{H}(-iy, C)\Delta(y)^2 dy \\
=&n!\kappa \int_{y_1 \geq \cdots \geq y_n} f(\underline{y} - \operatorname{tr} \underline{y} I_n) e^{-(\operatorname{tr} \underline{y})^2} \mathscr{H}(-iy, C)\Delta(y)^2 dy.
\end{aligned}$$

Appliquons le changement de variable $(y_1, \cdots, y_n) = (z_1 + \lambda, \cdots, z_{n-1} + \lambda, \lambda - z_1 - \cdots - z_{n-1})$, on a $dy = n\, dz d\lambda$ et donc

$$\hat{f}(C) = n!\kappa \int_{\Omega} f(z)\mathscr{H}(-iC, z)\Delta(z)^2 dz. \tag{3.7.1}$$

En Combinant (3.6.1) et (3.7.1) on a le calcul suivant :

Proposition 3.8. *Soient U, V deux matrices de Haar indépendantes et soient A, B deux matrices hermitiennes sans trace. On considère la matrice aléatoire $H = UAU^* + VBV^*$. Alors pour toute fonction de Schwartz f sur $H_{n,0}$ invariante sous la conjugaison de $U(n)$, on a*

$$E[f(H)] = \frac{n!\kappa^2}{\hat{\kappa}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_\Omega f(z)\mathscr{H}(-iy, z) \\ \mathscr{H}(iy, A)\mathscr{H}(iy, B)\Delta(y)^2\Delta(z)^2 dz \Big)\, dy$$

On s'intéresse aux cas généraux, où on suppose que les valeurs propres de A soient $(\alpha_1 > \cdots > \alpha_n)$ et celles de B soient $(\beta_1 > \cdots > \beta_n)$. En tant qu'exigence supplémentaire, on ne considère que **le cas $\boldsymbol{n \geq 3}$** dans les arguments suivants.

Par l'évaluation de l'intégrale orbitale, on a

$$E[f(H)] = \frac{n!\kappa^2}{\hat{\kappa}} (\prod_{p=1}^{n-1} p!)^3 \int_\Omega f(z) \frac{\Delta(z)}{\Delta(\alpha)\Delta(\beta)} \\ \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\det(e^{-iy\cdot z}) \det(e^{iy\cdot\alpha}) \det(e^{iy\cdot\beta})}{\Delta(iy)} dy \right) dz \tag{3.8.1}$$

si l'intégrande est intégrable sur $(z, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n-1}$. On va maintenant prouver un résultat d'intégrabilité pour justifier le calcul ci-dessus.

Lemme 3.9. *Soient α, β, y des nombres réels avec $y > 0$. Alors on a*

$$\int_0^\infty \frac{|e^{i\alpha(x+y)} - 1||e^{i\beta x} - 1|}{(x+y)x} dx \leq \frac{|\alpha\beta| + 4\log(1+y^2)}{y}.$$

Démonstration. En fixant $A > 0$, on a

$$\int_0^\infty \frac{|e^{i\alpha(x+y)} - 1||e^{i\beta x} - 1|}{(x+y)x} dx \leq \int_0^A |\alpha\beta| dx + \int_A^\infty \frac{4}{x(x+y)} dx \\ = |\alpha\beta| A + \frac{4}{y} \log(1 + \frac{y}{A}).$$

On peut obtenir le résultat désiré en prenant $A = 1/y$. □

Proposition 3.10. *Soit $n \geq 3$ et soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sup_{\alpha \in K} \left| \frac{\det(e^{i\alpha y})}{\Delta(y)} \right| dy < \infty.$$

Démonstration. Par les symmetries de l'intégrande, on a

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sup_{\alpha \in K} \left| \frac{\det(e^{i\alpha y})}{\Delta(y)} \right| dy = n! \int_\Omega \sup_{\alpha \in K} \left| \frac{\det(e^{i\alpha y})}{\Delta(y)} \right| dy.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que le domaine d'intégration de y est Ω. Considérons le changement linéaire de variable $u_k = y_k - y_{k+1}$ $(1 \le k \le n-1)$. Alors le domaine d'intégration de u est $\{(u_1, \cdots, u_{n-1}) : u_k \ge 0\ \forall k\}$. Désignons l'intégrande par $R(u)$, i.e.

$$R(u) = \sup_{\alpha \in K} \left| \frac{\det(e^{i\alpha\tilde{u}})}{\prod_{1\le j<k\le n}(u_j + \cdots + u_{k-1})} \right|$$

où $\tilde{u}_k = u_k + \cdots + u_{n-1}, \tilde{u}_n = 0$. Utilisons $\overset{abs.}{=}$ pour désigner l'égalité de magnitude. Pour $n = 3$ on a

$$\det(e^{i\alpha\tilde{u}}) \overset{abs.}{=} \begin{vmatrix} e^{i(\alpha_1-\alpha_3)(u_1+u_2)} & e^{i(\alpha_1-\alpha_3)u_2} & 1 \\ e^{i(\alpha_2-\alpha_3)(u_1+u_2)} & e^{i(\alpha_2-\alpha_3)u_2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la première et la deuxième ligne par 1 et en appliquant le développement de Laplace à la troisième ligne, nous obtenons

$$|\det(e^{i\alpha\tilde{u}})| \le |e^{ip(u_1+u_2)} - 1||e^{iqu_2} - 1| + |e^{iq(u_1+u_2)} - 1||e^{ipu_2} - 1|$$

où $p = \alpha_1 - \alpha_3, q = \alpha_2 - \alpha_3$. En utilisant la même technique que le lemme précédent, on a

$$\int_0^\infty \sup_{\alpha\in K} \left| \frac{\det(e^{i\alpha\tilde{u}})}{u_2(u_1+u_2)} \right| du_2 \lesssim \frac{C_K + \log(1+u_1^2)}{u_1}.$$

Donc

$$\int_1^\infty \int_0^\infty \sup_{\alpha\in K} \left| \frac{\det(e^{i\alpha\tilde{u}})}{u_1 u_2(u_1+u_2)} \right| du \lesssim \int_1^\infty \frac{C_K + \log(1+u_1^2)}{u_1^2} du_1 < \infty.$$

De même on a $\int_0^\infty \int_1^\infty R(u)du < \infty$. Comme $R(u)$ est bornée par l'intégrale orbitale, on a $\int_{u\ge 0} R(u)du < \infty$.

Pour $n = 4$ on applique le développement de Laplace à la première ligne :

$$|\det(e^{i\alpha\tilde{u}})| \le |\det(e^{i\alpha_j\tilde{u}_k})_{j,k\ge 2}| + \text{similar terms.}$$

D'après le résultat pour $n = 3$, on a l'estimation

$$\int_{u_1\ge 1} \sup_{\alpha\in K} \frac{|\det(e^{i\alpha_j\tilde{u}_k})_{j,k\ge2}|}{\Delta(\tilde{u})} du \le \int_1^\infty \frac{du_1}{u_1^3} \int \sup_{\alpha\in K} \frac{|\det(e^{i\alpha_j\tilde{u}_k})_{j,k\ge2}|}{u_2u_3(u_2+u_3)} du_2 du_3$$

Donc $\int_{u_1\ge1} R(u)du$ est finie. De même $\int_{u_3\ge1} R(u)du$ est finie. It reste à montrer que $\int_{u_1,u_3\le1,u_2\ge1} R(u)du < \infty$. Notons que

$$\det(e^{i\alpha\tilde{u}}) \overset{abs.}{=} \begin{vmatrix} e^{i\alpha_1u_1} & 1 & e^{-i\alpha_1u_2} & e^{-i\alpha_1(u_2+u_3)} \\ e^{i\alpha_2u_1} & 1 & e^{-i\alpha_2u_2} & e^{-i\alpha_2(u_2+u_3)} \\ e^{i\alpha_3u_1} & 1 & e^{-i\alpha_3u_2} & e^{-i\alpha_3(u_2+u_3)} \\ e^{i\alpha_4u_1} & 1 & e^{-i\alpha_4u_2} & e^{-i\alpha_4(u_2+u_3)} \end{vmatrix}.$$

On applique le développement de Laplace aux deux premières lignes :

$$|\det(e^{i\alpha\tilde{u}})| \le |e^{i\alpha_1 u_1} - e^{i\alpha_2 u_1}||e^{-i\alpha_3 u_3} - e^{-i\alpha_4 u_3}| + \text{similar terms}.$$

On a

$$\int_{u_1,u_3\le 1, u_2\ge 1} \sup_{\alpha\in K} \frac{|e^{i\alpha_1 u_1} - e^{i\alpha_2 u_1}||e^{-i\alpha_3 u_3} - e^{-i\alpha_4 u_3}|}{\Delta(\tilde{u})} du \le \int_{u_1,u_3\le 1} \sup |\alpha_1 - \alpha_2||\alpha_3 - \alpha_4| \int_1^\infty \frac{du_2}{u_2^3}$$

ce qui est finie. Cela justifie le cas $n = 4$.

Supposons maintenant que la proposition est vérifiée pour les cas $\le n$, où n est au moins 5. Fixons $1 \le j \le n-3$. Considérons le développement de Laplace des premières j lignes de $\delta(e^{i\alpha\tilde{u}})$:

$$|\det(e^{i\alpha\tilde{u}})| \le A(u_1, \cdots, u_{j-1})B(u_{j+1}, \cdots, u_{n-1}) + \text{termes similaires}$$

où

$$A \overset{abs.}{=} \begin{vmatrix} e^{i\alpha_1(u_1+\cdots+u_{j-1})} & e^{i\alpha_1(u_2+\cdots+u_{j-1})} & \cdots & 1 \\ e^{i\alpha_2(u_1+\cdots+u_{j-1})} & e^{i\alpha_2(u_2+\cdots+u_{j-1})} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ e^{i\alpha_j(u_1+\cdots+u_{j-1})} & e^{i\alpha_j(u_2+\cdots+u_{j-1})} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

et

$$B \overset{abs.}{=} \begin{vmatrix} e^{i\alpha_{j+1}(u_{j+1}+\cdots+u_{n-1})} & e^{i\alpha_{j+1}(u_{j+2}+\cdots+u_{n-1})} & \cdots & 1 \\ e^{i\alpha_{j+2}(u_{j+1}+\cdots+u_{n-1})} & e^{i\alpha_{j+2}(u_{j+2}+\cdots+u_{n-1})} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ e^{i\alpha_n(u_{j+1}+\cdots+u_{n-1})} & e^{i\alpha_n(u_{j+2}+\cdots+u_{n-1})} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On a

$$\int_{u_1,\cdots,u_{j-1}\le 1, u_j\ge 1} \sup_{\alpha\in K} \frac{AB}{\Delta(\tilde{u})} du \le \int_{(0,1)^{j-1}} \sup_{\alpha\in K} \frac{A(u_1,\cdots,u_{j-1})}{\Delta(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_j)} \cdot \int_1^\infty \frac{du_j}{u_j^{n-1}} \int_{(0,\infty)^{n-j-1}} \sup_{\alpha\in K} \frac{B(u_{j+1},\cdots,u_{n-1})}{\Delta(\tilde{u}_{j+1},\cdots,\tilde{u}_n)}$$

Notons les trois termes dans le produit par P, Q, R. Alors par l'évaluation d'intégrale orbitale, $P \lesssim \int_{(0,1)^{j-1}} \sup_\alpha \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_j)$ est finie. D'après l'hypothèse d'induction, R est finie. Par conséquent, l'intégrale du côté gauche est finie. Traitons les autres termes dans le développement de Laplace de manière similaire. On a $\int_{u_1,\cdots,u_{j-1}\le 1, u_j\ge 1} R(u)du < \infty$. En prenant l'union de tous les j on obtient

$$\int_{\exists j\le n-3 \text{ s.t. } u_j\ge 1} R(u)du < \infty.$$

De même on a

$$\int_{\exists j \geq 3 \text{ s.t. } u_j \geq 1} R(u)du < \infty.$$

En prenant l'union de ces deux intégrales, on arrive à montrer $\int_{u \geq 0} R(u)du < \infty$. La proposition est vérifiée pour n. On peut conclure la preuve par l'induction. $\square$

Pour toute $f \in \mathcal{S}(H_{n,0})$ qui est invariante sous la conjugaison unitaire, on peut écrire l'équation 3.8.1 sous la forme

$$E[f(H)] = \int_{\Omega} f(z)p(z|\alpha,\beta)dz$$

où

$$p(z|\alpha,\beta) = \frac{\prod_{p=1}^{n-2} p!}{(2\pi)^{n-1}} \frac{\Delta(z)}{\Delta(\alpha)\Delta(\beta)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\det(e^{-iy\cdot z})\det(e^{iy\cdot\alpha})\det(e^{iy\cdot\beta})}{\Delta(iy)} dy. \quad (3.10.1)$$

D'après la naturalité des mesure-images,

$$\int_{\Omega} f d(\sigma_* \mu) = \int_{H_{n,0}} f(X)d\mu(X) = E[f(H)].$$

Donc

$$\int_{\Omega} f d(\sigma_* \mu) = \int_{\Omega} f(z)p(z|\alpha,\beta)dz.$$

D'après le fait que p est bornée localement, $p(z|\alpha,\beta)dz$ est une mesure sur Ω. Puisque $\sigma_*\mu(\partial\Omega) = 0$, pour montrer que $\sigma_*\mu = p(z|\alpha,\beta)dz$, it suffit de montrer que toutes les fonctions lisses g à support compact sur Ω° peuvent être prolongées à une fonction de Schwartz sur $H_{n,0}$, invariante sous la conjugaison unitaire. En fait, on définit $f(A) = g(\sigma(A))$ pour toute $A \in H_{n,0}$. Alors f est à support compact et s'annule sur un voisinage des matrices avec deux valeurs propres égales. De plus, par le théorème d'inverse locale, l'application

$$\begin{aligned} U(n)/T^n \times \Omega^\circ &\to H_{n,0} \\ (UT^n, z) &\mapsto U\underline{z}U^* \end{aligned}$$

est une difféomorphisme localement. Ainsi, f est lisse sur les matrices avec les valeurs propres distinctes. En résumé, on arrive finalement à la conclusion suivante :

Théorème 3.11. *Soient U, V deux matrices de Haar indépendantes et soient A, B deux matrices hermitiennes sans trace, avec des valeurs propres distinctes. Alors la loi du spectre de $H = UAU^* + VBV^*$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de dimension $(n-1)$ et la fonction de densité est donnée par $p(z|\alpha,\beta)\mathbb{1}_{\Omega}$. De plus, p est continue sur $(z,\alpha,\beta) \in \Omega \times \Omega^\circ \times \Omega^\circ$.*

4 Asymptotes des coefficients de Littlewood-Richardson

Coefficients de Littlewood-Richardson

On rappelle quelques faits sur les représentations des groupes unitaires $U(n)$. On peut se référer à [Far08] pour plus de détailles. On désigne le tore maximal de $U(n)$ par T^n et on désigne l'algèbre de Lie complexifiée de T^n par $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. En fixant la base canonique $\{E_{ii}\}_{i=1}^n$ de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, on peut exprimer le plus haut poids λ d'une représentation irréductible de $U(n)$ par une suite de n entiers $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. De plus, c'est un poids dominant, i.e. $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème concernant les représentations irréductibles de $U(n)$.

Théorème 4.1. *L'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $U(n)$ est en correspondance bijective avec l'ensemble des poids dominants.*

On désigne par V^λ la représentation irréductible correspondant au poids dominant λ. On peut calculer le caractère χ_λ de V^λ. Pour un poids α strictement dominant, on définit

$$A_\alpha(t) = \begin{vmatrix} t_1^{\alpha_1} & \cdots & t_1^{\alpha_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n^{\alpha_1} & \cdots & t_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Alors A_α est un polynôme trigonométrique en restreignant à T^n. En particulier, en prenant $\delta := (n-1, n-2, \cdots, 0)$, on retrouve le déterminant de Vandermonde

$$\Delta(t) := A_\delta(t) = \prod_{i<j}(t_i - t_j).$$

Théorème 4.2. *Pour tout $t \in T^n$ on a*

$$\chi_\lambda(t) = \frac{A_{\lambda+\delta}(t)}{A_\delta(t)}.$$

Celle-ci est également appelée la fonction de Schur associée à λ.

Maintenant nous introduisons les coefficients de Littlewood-Richardson.

Définition 4.3. Soient λ, μ, ν trois poids dominants. *Le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\mu}^\nu$* est défini comme la multiplicité de V^ν dans $V^\lambda \otimes V^\mu$.

Par la théorie des caractères et la formule d'intégration de Weyl, on peut exprimer $c_{\lambda\mu}^\nu$ sous la forme d'une intégration

$$\begin{aligned} c_{\lambda\mu}^\nu &= \int_{U(n)} \chi_\lambda(g)\chi_\mu(g)\overline{\chi_\nu}(g)dg \\ &= \frac{1}{n!}\int_{T^n} \chi_\lambda(t)\chi_\mu(t)\overline{\chi_\nu}(t)|\Delta(t)|^2 dt \end{aligned}$$

On peut voir directement qu'une condition nécessaire pour que $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ soit non-zéro est $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$. Si c'est le cas, on a davantage

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}n!} \int_{[0,2\pi)^{n-1}} \frac{R^{\nu+\delta}_{\lambda+\delta,\mu+\delta}(\theta_1, \cdots, \theta_n)}{\Delta(e^{i\theta})} d\theta \tag{4.3.1}$$

où $d\theta = d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$ et $\theta_n = -\theta_1 - \cdots - \theta_{n-1}$ comme remark 3.7. On utilise aussi la notation

$$R^c_{a,b}(\theta) = \det(e^{ia\theta}) \det(e^{ib\theta}) \det(e^{-ic\theta}).$$

Alors $R^c_{a,b}$ est de période 2π en tant que fonction de $\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$.

Comportements asymptotiques

La forme de (4.3.1) ressemble à celle de la densité spectrale de la somme de deux matrices aléatoires hermitiennes. En fait, cette ressemblance est précisée lorsque les poids dominants tendent vers l'infini d'une certaine manière.

Théorème 4.4. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^\circ$. Supposons que $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N \in \mathbb{Z}^n$ soient sans trace, tels que les limites de $\frac{\alpha_N}{N}$, $\frac{\beta_N}{N}$ et $\frac{\gamma_N}{N}$ lorsque $N \to \infty$ soient respectivement α, β et γ. Alors on a*

$$p(\gamma|\alpha, \beta) \sim \frac{\Delta(\delta)\Delta(\gamma)}{\Delta(\alpha)\Delta(\beta)} N^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}} c^{\gamma_N}_{\alpha_N,\beta_N}. \tag{4.4.1}$$

L'idée est de diviser le domaine de l'intégration (4.3.1) en plusieurs parties et de les conquérir séparément. Considérons le cercle unité $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ l'application quotient. On appelle $\Gamma \subset \mathbb{S}^1$ un arc s'il est l'image sous p d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. De manière correspondante, on appelle I une réalisation de Γ dans $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de période 2π. On peut écrire grâce à la périodicité

$$\int_\Gamma f := \int_I f(x)dx.$$

Notons aussi que l'addition dans $\mathbb{S}^1$ est donnée par l'addition dans $\mathbb{R}$ modulo π.

Démonstration. Notons $\lambda_N = \alpha_N + \delta$, $\mu_N = \beta_N + \delta$ et $\nu_N = \gamma_N + \delta$. Divisons $\mathbb{S}^1$ également en K arcs fermés $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_K$ où $K = 2n$ et les points de coupure de la partition sont à déterminer.

On fixe $n-1$ arcs $\Gamma_{k_1}, \cdots, \Gamma_{k_{n-1}}$ et laisse les paramètres θ_j $(1 \leq j \leq n-1)$ varier respectivement dans les arcs Γ_{k_j}. Puisque la valeur de $\theta_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \theta_j$ est contenue dans au plus n arcs, il existe au moins un arc Γ_* qui ne touche aucun des θ_j $(1 \leq j \leq n)$. Par conséquent, on peut trouver des réalisations I_j pour les arcs Γ_{k_j}, telles que tous les intervalle I_j sont contenus dans le même composant connecté J de $p^{-1}(\mathbb{S}^1 - \Gamma_*)$.

De plus, pour les paramètres θ_j varient respectivement dans I_j, il existe un entier l tel que $\theta_n - 2\pi l$ est contenue dans J. Considerons un changement de variable $\tilde{\theta}_j = \theta_j + \frac{2\pi l}{n}$, $\tilde{\theta}_n = -\tilde{\theta}_1 - \cdots - \tilde{\theta}_{n-1}$. Comme $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N$ sont sans trace, on a

$$\int_{\theta_j \in \Gamma_{k_j}} \frac{R^{\nu_N}_{\lambda_N,\mu_N}(\theta)}{\Delta(e^{i\theta})} = \int_{\tilde{\theta}_j \in I_j + 2\pi l/n} \frac{R^{\nu_N}_{\lambda_N,\mu_N}(\tilde{\theta})}{\Delta(e^{i\tilde{\theta}})}.$$

Notons que J est un intervalle de longeur $2\pi \frac{K-1}{K}$. Alors on a $|\tilde{\theta}_j - \tilde{\theta}_k| \leq 2\pi \frac{K-1}{K}$ pour $1 \leq j, k \leq n$. Par un changement d'échelles, on a

$$N^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int_{\tilde{\theta}_j \in I_j + 2\pi l/n} \frac{R^{\nu_N}_{\lambda_N,\mu_N}(\tilde{\theta})}{\Delta(e^{i\tilde{\theta}})} = \int_{\tilde{\theta}_j \in N(I_j + 2\pi l/n)} \frac{R^{\frac{\nu_N}{N}}_{\frac{\lambda_N}{N},\frac{\mu_N}{N}}(\tilde{\theta})}{\Delta(i\tilde{\theta})} \frac{\Delta\left(i\frac{\tilde{\theta}}{N}\right)}{\Delta(e^{i\frac{\tilde{\theta}}{N}})}.$$

Par proposition 3.10 et convergence dominée, lorsque $N \to \infty$ l'expression ci-dessus a la limite

$$\int_{\theta_j \in \infty(I_j + 2\pi l/n)} \frac{R^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\theta)}{\Delta(i\theta)} d\theta.$$

Maintenant on peut choisir les arcs Γ_j tels que les points de coupure divisés par 2π sont irrationnels. Alors l'ensemble

$$\{(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) : \theta_j \in \infty(I_j + 2\pi l/n)\}$$

est soit $\mathbb{R}^{n-1}$, soit $\emptyset$. La condition équivalente pour obtenir $\mathbb{R}^{n-1}$ est que tous les indices k_j sont les mêmes et $p(-2\pi l/n) \in \Gamma_{k_1}$ pour certain entier l. Il existe exactement n tels séquences $(k_1, \cdots, k_{n-1})$. Donc

$$\lim_{N\to\infty} N^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}} c^{\gamma_N}_{\alpha_N,\beta_N} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{R^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\theta)}{\Delta(i\theta)} d\theta.$$

En combinant cela avec le calcul de la densité spectrale, on peut déduire le résultat. □

Pour conclure, notons que $\dim V^\lambda = \frac{\Delta(\lambda+\delta)}{\Delta(\delta)}$. Donc on obtient une expression plus simple concernant P, qui est donné dans l'introduction :

$$p(\gamma|\alpha, \beta) \sim N^{n-1} P(\gamma_N|\alpha_N, \beta_N).$$

Références

[CŚ06] Benoît Collins et Piotr Śniady (2006). "Integration with Respect to the Haar Measure on Unitary, Orthogonal and Symplectic Group". *Communications in Mathematical Physics* **264** (3), 773-795. DOI : 10.1007/s00220-006-1554-3. URL : https://doi.org/10.1007%2Fs00220-006-1554-3.

[CŚ13] Benoit Collîns et Piotr Śniady (2013). *Asymptotic fluctuations of representations of the unitary groups*. arXiv : 0911.5546 [math.RT].

[Far08] Jacques Faraut (2008). *Analysis on Lie Groups : An Introduction*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. doi : 10.1017/CBO9780511755170.

[KT00] Allen Knutson et Terence Tao (2000). *Honeycombs and sums of Hermitian matrices*. arXiv : math/0009048 [math.RT].

[KT99] Allen Knutson et Terence Tao (1999). *The honeycomb model of GL(n) tensor products I : proof of the saturation conjecture*. arXiv : math / 9807160 [math.RT].

[MS17] James A Mingo et Roland Speicher (2017). *Free probability and random matrices*. T. 35. Springer.