



---

# Introduction aux équations différentielles stochastiques et quelques applications

---

Rapport de stage de M1  
Université UC Berkeley  
Fraydoun Rezakhanlou

*Hugo NOUAILLE*  
2022-2023

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Solutions des EDS</b>	<b>4</b>
2.1	Rappels sur le mouvement Brownien . . . . .	4
2.2	Intégrale d'Itô . . . . .	4
2.3	Existence et unicité de solutions aux EDS . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Applications des EDS</b>	<b>12</b>
3.1	Un lien entre les équations de diffusion et les équations aux dérivées partielles . . . . .	12
3.1.1	Propriété de Markov . . . . .	12
3.1.2	Semi-groupe et générateur . . . . .	13
3.1.3	Formule de Dynkin . . . . .	14
3.1.4	Equation différentielle perturbée . . . . .	16

# 1 Introduction

**Plan du rapport** Ce texte porte sur les équations différentielles stochastiques (abrégé EDS par la suite), sur l'existence et unicité de solutions, une partie se concentrera sur l'intégrale d'Itô permettant de les formaliser. On finira par parler de quelques résultats obtenus grâce aux EDS. Nous essayerons au fil de ce rapport de faire référence à des généralisations étudiés durant ce stage ainsi qu'à la théorie des chemins rugueux.

**Histoire** Retournons dans les années 40 pour parler d'un objet nommé l'intégrale d'Itô. Celle-ci fut introduite par le mathématicien japonais *K. Itô* pendant qu'il cherchait à construire de nouveaux processus de Markov à partir du temps  $t$  et d'un mouvement Brownien  $B_t$ . Il remarque que si l'on s'intéresse aux équations différentielles de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds,$$

on trouve alors que la solution obtenue  $X$  est une chaîne de Markov. En effet, sachant la valeur de  $X$  en un temps  $s$  (vu comme le présent), le futur de  $X$  ne dépend pas des temps antérieurs à  $s$ . Comme la formule suivante en témoigne :

$$\forall t > s, X_t = X_s + \int_s^t b(u, X_u) du.$$

Partant de cette idée, il introduit une intégrale qui s'obtient, non plus à partir du temps, mais via le mouvement Brownien. C'est l'intégrale d'Itô qui se note

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Cette dernière produit une chaîne de Markov plus intéressante car elle n'est plus déterministe. Nous sommes ainsi en capacité d'introduire les EDS. Ce sont les équations s'écrivent

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Il est d'usage de les noter sous la forme différentielle

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t.$$

**Application à d'autres domaines** On utilise les EDS dans certains problèmes physiques. Certains modèles de particules évoluant dans un solvant ne prennent en compte que la situation d'équilibre ou les états moyens des particules, mais font fi de l'agitation thermique. Le modèle de Langevin permet de s'intéresser aux comportements particulières et aux fluctuations thermiques grâce à l'utilisation d'une EDS. On retrouve également les EDS en écologie : le modèle de dynamique de population de Lotka-Volterra, servant à modéliser des populations de proies et de prédateurs peut être en complexifier en rajoutant un terme aléatoire représentant des phénomènes anormaux et aboutissant à une EDS.

**Déroulement du stage** Mon stage a principalement constitué en un travail bibliographique autour de la théorie des chemins rugueux, des équations différentielles et celles aux dérivées partielles stochastiques. Plusieurs objectifs se sont dessinés. J'ai commencé en étudiant les notes de cours de mon encadrant sur les équations aux dérivées partielles stochastiques, (abrégé en EDPS par la suite) dont les premiers chapitres étaient basés sur le livre *Rough Path* de *M. Hairer*. Le second objectif était de comprendre les EDPS linéaires, j'ai donc pour cela traité plusieurs équations classiques tirées de la physique. Pour la fin de mon stage, j'ai terminé par des sujets en lien avec les systèmes dynamiques perturbés par de petits bruits.

## 2 Solutions des EDS

### 2.1 Rappels sur le mouvement Brownien

Prenons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  qui est une famille de tribus vérifiant  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ . Nous adopterons cet espace et ces notations pour toute la suite du texte.

**Définition 1.** On appelle martingale continue tout processus stochastique  $M : [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$  vérifiant les quatre propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], M_t &\in \mathcal{F}_t; \\ \forall t \in [0, T], M_t &\text{ est intégrable}; \\ \forall 0 \leq s \leq t \leq T, M_s &= \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s); \\ \text{Pour presque tout } \omega \in \Omega, &\text{ la fonction } t \mapsto M_t(\omega) \text{ est continue.} \end{aligned}$$

**Remarque 1.** Ainsi, un mouvement Brownien est une martingale continue relativement à la filtration  $(\sigma(B_s, 0 \leq s \leq t))_{t \geq 0}$ .

Rappelons divers résultats du mouvement Brownien.

**Proposition 1.** Pour presque tout  $\omega \in \Omega$  la fonction  $t \mapsto B_t(\omega)$  est localement  $\alpha$ -höldérienne, pour tout  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , à savoir pour tout temps  $T > 0$ , il existe une variable aléatoire  $c_{\alpha, T}(\omega)$  telle que pour tout  $0 \leq s < t \leq T$  l'inégalité suivante soit vérifiée

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq c_{\alpha, T}(\omega) |t - s|^\alpha.$$

De plus, les fonctions  $t \mapsto B_t(\omega)$  ne sont presque nulle part dérivables pour presque tout  $\omega \in \Omega$ .

On admet quelques résultats de la théorie des martingales continues utiles pour la suite.

**Théorème 1** (Inégalité de Doob). Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale continue, alors pour tout  $p \geq 0, T \geq$  et  $\lambda \geq 0$ , on a

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda \right) \leq \frac{\mathbb{E}(|M_T|^p)}{\lambda^p}$$

**Définition 2.** Pour  $M, N$  deux martingales continues relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , de carré intégrable, on peut montrer que pour tout  $t \in [0, T]$ , pour toutes suites de subdivisions  $(\{t_i^n\})$  de  $[0, T]$  dont le pas tend vers 0, les suites de processus

$$\sum_i (M_{t_{i+1}^n \wedge t} - M_{t_i^n \wedge t})(N_{t_{i+1}^n \wedge t} - N_{t_i^n \wedge t})$$

convergent en probabilité lorsque le pas tend vers 0 vers un processus appelé le crochet de  $M$  et  $N$  au temps  $t$ , noté  $\langle M, N \rangle_t$ .

**Remarque 2.** Pour un mouvement Brownien  $B$ , on a  $\langle B \rangle_t = t$ .

### 2.2 Intégrale d'Itô

Rappelons l'équation définissant une EDS afin de comprendre quelle intégrale nous devons introduire.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Le second terme intégral impose un comportement stochastique de  $X$ . Ainsi, il ne doit pas être compris comme l'intégrale d'une fonction déterministe contre un mouvement Brownien, mais plutôt d'un processus stochastique contre un mouvement Brownien. Cela nous permet de fixer un cadre

d'étude. On supposera que l'espace de probabilité et la filtration précédemment introduits sont ceux associés au mouvement Brownien.

On ne peut que conseiller de se remémorer la construction de l'intégrale de Riemann ou celle de Stieltjes afin de comprendre la direction de cette partie. Pour ce faire, nous allons introduire en premier lieu une classe de processus stochastiques simples, sur laquelle nous allons définir l'intégrale d'Itô. Ensuite, nous observerons une isométrie entre les processus simples et les variables aléatoires de carrés intégrables. Nous finirons en utilisant la densité des processus simples dans un certain espace afin de pouvoir introduire l'intégrale d'Itô sur cet espace plus général.

**Définition 3.** *On dit d'un processus  $H : [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$  qu'il est simple et adapté s'il peut s'écrire sous la forme*

$$H_t := \sum_i X_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[},$$

avec  $\{t_i\}$  une partition de  $[0, T]$  et les  $X_i$  des variables aléatoires bornées  $\mathcal{F}_{t_i}$  mesurables. Nous notons l'ensemble de ces processus  $\mathcal{S}$ .

Dès lors nous pouvons introduire l'intégrale d'Itô sur l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Nous posons pour un processus  $H$  de la forme

$$H_t := \sum_i X_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[},$$

son intégrale d'Itô

$$\int_0^T H_s dB_s := \sum_i X_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Et nous pouvons déjà observer la propriété d'isométrie.

**Lemme 1** (Isométrie). *L'application*

$$H \mapsto \int_0^T H_s dB_s$$

*est une isométrie de  $\mathcal{S}$  dans  $L^2(\Omega)$ . Plus précisément, nous avons*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T H_s dB_s \right)^2 \right] = \int_0^T \mathbb{E} [H_s^2] ds.$$

*Preuve.* Nous considérons un processus simple et adapté  $H$  comme dans l'énoncé. Nous avons

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T H_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_i X_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)^2 \right] = \sum_{i,j} \mathbb{E} [X_i X_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})].$$

En considérant  $i < j$ , nous avons puisque  $X_i X_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  est  $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurable et  $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$  indépendante à  $\mathcal{F}_{t_j}$  :

$$E [X_i X_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = E [X_i X_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] \mathbb{E} [(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = 0.$$

De même si  $i > j$  la quantité précédente est nulle.

Nous obtenons alors le résultat d'isométrie en utilisant le fait que  $X_i^2$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable et  $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  est indépendante à  $\mathcal{F}_{t_i}$ .

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T H_s dB_s \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E} [X_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i \mathbb{E} [X_i^2] (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T \mathbb{E} [H_s^2] ds.$$

□

Grâce à cette isométrie, nous allons pouvoir étendre la définition de l'intégrale d'Itô à une plus grande classe de processus. Le lemme précédent indique de quel espace il s'agit. L'isométrie utilise le fait que  $\mathcal{S}$  soit inclus dans  $L^2([0, T] \times \Omega)$  ainsi que les processus soient adaptés à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . En se remémorant différentes constructions de l'intégrale, nous comprenons que l'on peut espérer au moins de la continuité presque partout.

**Remarque 3.** *On peut en réalité étendre l'intégrale d'Itô à un ensemble de processus plus varié en soulageant certaines hypothèses de continuité. Cela n'est pas présenté car dans la suite, nos fonctions seront suffisamment régulière et ne nous feront pas atteindre ce cadre. On peut se référer à [6] pour plus d'informations.*

**Lemme 2.** *L'ensemble  $\mathcal{S}$  est dense dans l'espace  $\mathcal{H}$  des processus  $H$  adaptés continus presque partout (Presque sûrement la fonction  $t \mapsto H_t$  est continue presque partout) et de carrés intégrables :*

$$\int_0^T \mathbb{E}[H_s^2] ds < \infty.$$

*Preuve.* La densité se traduit par le fait que pour tout processus  $H$  dans  $\mathcal{H}$  il existe une suite  $H^n$  de processus simples et adaptés tels que l'on ait

$$\int_0^T \mathbb{E}[(H_s^n - H_s)^2] \rightarrow 0.$$

Pour ce faire nous introduisons l'espace  $\mathcal{B}$  des processus adaptés, continus presque partout et bornés sur  $[0, T] \times \Omega$ . Ce dernier s'avère être dense dans  $\mathcal{H}$  et la fermeture de  $\mathcal{S}$  le contient.

Commençons par la densité de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{B}$ . Soit un processus  $H$  dans  $\mathcal{S}$ . Prenons une suite de subdivisions  $(\{t_i^n\})$  de l'intervalle  $[0, T]$  dont le pas tend vers 0. On introduit la suite candidate

$$H_t^n := \sum_i H_{t_i^n} \mathbb{1}_{[t_{i+1}^n, t_i^n]}.$$

Il est facile de vérifier que l'on définit bien des processus simples et adaptés via le fait que  $H$  est dans  $\mathcal{B}$ . Presque sûrement la fonction  $t \mapsto H_t(\omega)$  est continue presque partout. En les points de continuité de  $t \mapsto H_t(\omega)$  la suite  $H_t^n(\omega)$ , converge donc vers  $H_t(\omega)$ . Ainsi, nous avons la convergence simple presque partout. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que

$$\|H^n - H\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \rightarrow 0.$$

Pour obtenir la deuxième densité, on prend  $H$  dans  $\mathcal{H}$  et l'on considère la suite de processus

$$H_t^n := \mathbb{1}_{\{|H_t| < n\}} H_t + n \mathbb{1}_{\{H_t \geq n\}} - n \mathbb{1}_{\{H_t \leq -n\}}.$$

Ces processus sont bien dans  $\mathcal{B}$  et vérifient  $|H_t^n| \leq |H_t|$ . On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée (la convergence simple étant immédiate).  $\square$

Nous avons désormais les outils pour définir l'intégrale d'Itô.

**Définition 4** (Intégrale d'Itô). *Soit  $H$  dans  $\mathcal{H}$ , en prenant une suite quelconque  $(H_t^n)$  de processus de  $\mathcal{S}$  convergeant vers  $H$ , on a que la suite de leurs intégrales d'Itô est convergente dans  $L^2(\Omega)$  vers une limite qui ne dépend pas du choix de la suite et que l'on appelle intégrale d'Itô de  $H$ . On la note*

$$\int_0^T H_s dB_s.$$

Nous avons prouvé un résultat très pratique lors de la preuve du lemme 2, que nous résumons dans la proposition suivante.

**Proposition 2.** Si le processus  $H$  dans  $\mathcal{H}$  est en plus borné, alors son intégrale d'Itô est obtenue par limite des sommes de Riemann

$$\sum_i H_{t_i^n} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})$$

où les  $(\{t_i^n\})$  forment une suite de partitions de  $[0, T]$  dont le pas tend vers 0. La convergence s'effectuant dans  $L^2(\Omega)$ .

**Remarque 4.** Nous n'avons considéré que des intégrales sur la droite réelle. Mais l'on peut facilement généraliser à un cadre où le processus  $H$  est une matrice et le mouvement Brownien est remplacé par un mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel standard  $B = (B_1, \dots, B_d)$  ayant pour coordonnées des mouvements Browniens indépendants. De plus, nous n'avons considéré que la version de l'intégrale d'Itô avec une différentielle d'un mouvement Brownien, mais l'on peut aussi prendre la différentielle de processus stochastiques plus généraux et les résultats obtenus sont similaires.

Nous finissons cette section en citant quelques propriétés de cette intégrale.

**Proposition 3.** Le processus définit par

$$\mathcal{I}_t := \int_0^t H_s dB_s := \int_0^T H_s \mathbb{1}_{[0,t]} dB_s,$$

vérifie

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}_t] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathcal{I}_t^2] = \int_0^t \mathbb{E}[H_s^2] ds.$$

De plus, le processus  $I$  peut être modifié sur un ensemble de mesure nulle en une martingale continue avec variation quadratique donnée par

$$\langle \mathcal{I} \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

*Preuve.* Nous prenons une suite de processus simples adaptés  $H^n$  donnée par la densité de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{H}$ . On note  $\mathcal{I}_t^n$  le processus

$$\int_0^t H_s^n dB_s.$$

Nous pouvons vérifier que les  $\mathcal{I}^n$  sont des martingales continues et que l'on a

$$\langle \mathcal{I}^n \rangle_t = \int_0^t (H_s^n)^2 ds.$$

Nous nous abstenons de montrer ce résultat car la démonstration est indigeste de par la présence de nombreuses disjonctions de cas et son aspect très calculatoire.

Ensuite, montrons que  $\mathcal{I}$  est continue.

Pour tout  $m, n \geq 1$ , le processus  $\mathcal{I}^m - \mathcal{I}^n$  est une martingale continue. On peut donc appliquer l'inégalité de Doob et l'isométrie d'Itô. Soit  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} |\mathcal{I}^m - \mathcal{I}^n| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} [|\mathcal{I}^m - \mathcal{I}^n|^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \mathbb{E} [(H_s^m - H_s^n)^2] ds$$

qui tend donc vers 0 lorsque  $m, n$  divergent. Une conséquence classique de cette convergence est l'obtention de la convergence presque sûre d'une sous-suite de  $(\mathcal{I}^n)$  dans  $L^\infty([0, T])$ , la limite obtenue sera encore notée  $\mathcal{I}$ . Elle est donc continue puisque les  $\mathcal{I}^n$  le sont. On peut désormais prouver que  $\mathcal{I}$  est une martingale dont la variation quadratique est bien celle présentée par l'énoncé. La  $\mathcal{F}_t$ -mesurabilité de  $\mathcal{I}$  est donnée par le fait qu'il existe une sous-suite tirée des  $\mathcal{I}_t^n$  convergeant presque sûrement vers

$\mathcal{I}_t$  et par leur  $\mathcal{F}_t$ -mesurabilité. Montrons que  $\mathbb{E}[\mathcal{I}_t|\mathcal{F}_s] = \mathcal{I}_s$  pour  $s < t$ . C'est une conséquence de  $\mathbb{E}[\mathcal{I}_t^n|\mathcal{F}_s] = \mathcal{I}_s^n$ . On a

$$\mathbb{E} \left[ (\mathbb{E}[\mathcal{I}_t^n|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\mathcal{I}_t|\mathcal{F}_s])^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\mathcal{I}_t^n - \mathcal{I}_t|\mathcal{F}_s]^2 \right] \leq E[(\mathcal{I}_t^n - \mathcal{I}_t)^2]$$

dernière quantité qui converge vers 0, d'où le résultat. Pour la variation quadratique il suffit d'appliquer les mêmes arguments suivis d'un Cauchy-Schwarz.  $\square$

**Remarque 5.** Dans la suite de ce texte nous introduisons les EDS et nous faisons le choix de comprendre l'intégrale contre un mouvement Brownien à la manière d'Itô. Il existe de nombreuses possibilités pour la définition de ces intégrales mais la plupart mènent à des objets différents ! Par exemple le mathématicien Ruslan Stratonovich définit son intégrale par l'idée

$$\int_0^T H_s \circ dB_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i H_{t_i} \frac{B_{t_{i+1}} + B_{t_i}}{2}$$

(on met un rond pour distinguer cette intégrale de celle d'Itô). Nous avons un objet différent de l'intégrale d'Itô qui présente moins de propriétés intéressantes pour générer des processus stochastiques. L'avantage de l'intégrale de Stratonovich est calculatoire, nous avons l'intégration par partie et la règle de la chaîne qui sont naturelle :

$$\int_0^T H_s \circ dB_s + \int_0^T B_s \circ dH_s = H_T B_T - H_0 B_0,$$

$$\int_0^T f'(B_s) \circ dB_s = f(B_T) - f(B_0).$$

Heureusement, les deux choix sont liés par la formule suivante

$$\int_0^T H_s \circ dB_s = \int_0^T H_s dB_s + \frac{1}{2} \langle X, B \rangle_T.$$

**Remarque 6.** Il y a une manière différente de voir les choses, celle de la théorie des chemins rugueux, dont les bases furent posées par T. Lyons en 1998 [7]. Son objectif était de résoudre des équations différentielles de la forme

$$dX_t = \sigma(X_t) dY_t$$

où  $Y$  est un signal connu. Le mathématicien L. Young avait déjà partiellement répondu à cette question en introduisant sa version de l'intégrale :

$$\int \sigma(X) dY.$$

Qui existe dès lors que  $\sigma(X)$  et  $Y$  sont des fonctions respectivement  $\alpha$  et  $\beta$  Hölderienne, avec  $\alpha + \beta > 1$ , voir [9]. Malheureusement, cela ne permet pas de traiter l'équation considérée par T. Lyons dans le cas où  $Y$  est un mouvement Brownien,  $\sigma$  l'identité. En effet, si l'on souhaite traiter cette équation avec l'intégrale de  $\sigma(X)$  par  $Y$  comprise au sens de Young, il faut d'abord estimer la  $\gamma$ -Hölderiennté de  $\sigma(X)$  qui s'avère être aussi bonne que celle de  $Y$ . Comme  $Y$  est un mouvement Brownien, nous avons donc  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $\gamma + \gamma < 1$  et la théorie de Young ne permet pas de donner sens à l'intégrale. C'est donc pour surmonter ce type de problèmes que la théorie des chemins rugueux est créée et engendrera une généralisation de l'intégrale de Young. Pour se donner une idée de l'intégration rugueuse, on doit comprendre que la clé réside dans l'Hölderiennté des objets utilisés. Dans le cas où  $\sigma(X)$  et  $Y$  sont  $\alpha$ -Hölderienne avec  $\alpha$  compris dans  $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ . Pour ce faire on introduit des objets servant de "dérivée" de  $X$  selon  $Y$  vérifiant

$$X_t = X_s + X'_s(Y_t - Y_s) + R_{s,t}.$$

Le reste  $R_{s,t}$  étant borné par un contrôle Hölderien, ce dernier permettra. Le cas le plus illustratif est celui où  $X = f(Y)$  et  $\sigma$  l'identité. Nous pouvons alors prendre comme "dérivée"  $X' = Df(Y)$ . Pour  $s, t$  proche on a alors formellement

$$\int_s^t \sigma(X_u) dY_u = \int_s^t X_u dY_u \approx f(Y_s)(Y_t - Y_s) + Df(Y_s) \int_s^t (Y_u - Y_s) dY_u.$$

La grande idée est alors de vouloir créer un candidat  $\mathbb{Y}_{s,t}$  pour donner sens à  $\int_s^t (Y_u - Y_s) dY_u$  pour ensuite de pouvoir définir  $\int X dY$  en utilisant le fait que pour  $s, t$  proche notre quantité de l'approximation converge vite vers un objet candidat à l'intégrale. La donnée  $(y, \mathbb{Y})$  est appelé chemin rugueux et est considéré comme un enrichissement de la donnée  $Y$ . On peut d'ailleurs compléter encore la donnée de chemin rugueux, en considérant les intégrales itérées de  $Y$ . Cela permet si l'on a suffisamment itérer, de donner sens à toutes les intégrales, peu importe les coefficients d'Hölderienité de  $\sigma(X)$  et  $Y$ . Il est à noter que cette théorie s'adapte notamment bien aux problématiques engendrées lorsque  $X$  et  $Y$  sont des processus stochastiques. On peut même aller plus loin en généralisant à des régularités Hölderiennes négatives comme l'a fait M. Hairer avec sa théorie des structures régulières et son théorème de régularité [5]. Mais cela dépasse le cadre de fonction car fait intervenir la théorie des distributions. Le lecteur curieux pourra explorer la théorie des chemins rugueux en se référant à [4].

### 2.3 Existence et unicité de solutions aux EDS

**Définition 5** (Vocabulaire des EDS). *Nous considérons un mouvement Brownien  $B : [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , un réel  $x$ , deux applications  $b : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  et  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . On appelle solution au sens d'Itô de l'équation*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

tout processus adapté  $X$ , continu presque partout et vérifiant pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^t \mathbb{E} [(X_s)^2] ds < \infty$$

et

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

On considère le mouvement Brownien  $B$  comme le signal de cette équation. Lorsque l'équation prend la forme

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

on parle aussi d'équation de diffusion.

**Théorème 2** (Existence et unicité d'une solution d'EDS de diffusion). *Si l'on considère l'EDS de diffusion donnée par la définition précédente, en supposant que  $b$  et  $\sigma$  sont des fonctions Lipschitziennes en leur seconde variable et bornées. Alors l'EDS admet une solution au sens d'Itô quelque soit la condition initiale. Cette solution est unique dans le sens où si l'on prend deux processus solutions alors ils sont presque partout égaux sur  $[0, T] \times \Omega$  (on peut alors dire qu'ils sont indistinguables).*

Nous noterons dans toute la suite de cette partie  $K$  une constante de Lipschitz commune à  $b$  et  $\sigma$  et qui bornent ces deux fonctions.

*Preuve.* Prouvons d'abord l'existence. On prend  $X^n$  des processus définis par  $X^0 := x$ , puis

$$X_t^{n+1} := x + \int_0^t b(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s.$$

On peut nommer une telle suite schéma d'itération de Picard.

Par une récurrence rapide nous pouvons prouver que  $X^n$  définit une suite de processus adaptés, continues presque sûrement. Pour cela on utilise les résultats des parties précédentes.

Nous prouvons ensuite que la suite  $X^n$  converge dans  $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ . Pour cela, nous remarquons que par définition

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dB_s.$$

Ensuite, intervient l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis le caractère Lipschitzien de  $b$  pour obtenir

$$\mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds \right|^2 \right] \leq T \int_0^t \mathbb{E} [|b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})|^2] ds \leq K^2 T \int_0^t \mathbb{E} [|X_s^n - X_s^{n-1}|^2] ds.$$

Si l'on utilise l'isométrie d'Itô et le caractère Lipschitzien de  $\sigma$  on montre

$$\mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dB_s \right|^2 \right] \leq K^2 \int_0^t \mathbb{E} [|X_s^n - X_s^{n-1}|^2] ds.$$

De ces inégalités on tire

$$\mathbb{E} [|X_t^{n+1} - X_t^n|^2] \leq 2K^2(1+T) \int_0^t \mathbb{E} [|X_s^n - X_s^{n-1}|^2] ds.$$

Nous posons  $C := 2K^2(1+T)$ .

Itérons notre égalité pour obtenir la convergence.

$$\mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dB_s \right|^2 \right] \leq C^n \int_{0 < s_1 < \dots < s_n < T} \mathbb{E} [|X_{s_1}^1 - X_{s_1}^0|^2] ds_1 \dots ds_n.$$

Comme  $X_{s_1}^1 - X_{s_1}^0 = b(s_1, x)s_1 + \sigma(s_1, x)B_{s_1}$ , nous pouvons obtenir

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [|X_t^{n+1} - X_t^n|^2] \leq 2C^n K^2 (T + T^2) \int_{0 < s_1 < \dots < s_n < T} ds_1 \dots ds_n \leq 2K^2 (T + T^2) \frac{(CT)^n}{n!}.$$

Ainsi la suite de fonction  $X^n$  est convergente dans  $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ . Nous notons  $X$  sa limite. On prouve ensuite par des arguments similaires que  $X$  définit bel et bien un processus solution.

Après avoir traité l'existence, l'unicité est facile de par ses similarités avec la preuve de l'unicité.  $\square$

**Remarque 7.** *La théorie des chemins rugueux permet d'avoir un énoncé avec des conditions moins strictes sur les fonctions  $b$  et  $\sigma$  en relâchant la Lipschitzienité et en imposant seulement des conditions d'Hölder. De plus, on peut prendre une classe plus large de signaux et ne pas se restreindre au mouvement Brownien. On peut aussi construire une application continue de l'espace dans lequel vivent les signaux vers l'espace des solutions que l'on appelle application de Itô-Lyons. Voir [4] pour plus de détails.*

**Remarque 8.** *La méthode appliquée ici est très similaire à celle utilisée pour prouver le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cadre non stochastique et avec Lipschitzienité globale. Ces similarités sont plus profondes. Par exemple, pour les équations aux dérivées partielles stochastiques on retrouve des ressemblances avec l'étude des équations aux dérivées partielles classique. Pour un lot d'équations aux dérivées partielles stochastiques, on introduit leur fonction de Green de la même manière que pour l'équation classique associée. Une des difficultés contrairement au cas classique et comme pour les EDS, est d'introduire une bonne théorie de l'intégration. A contrario des EDS, les intégrales en jeu sont selon un mouvement Brownien en temps et en espace, menant à des intégrales multi-dimensionnelles*

plus difficiles à traiter. On préfère donc une méthode analogue à celle de l'intégration de Lebesgue, car présentant des avantages à l'intégrale de Riemann, comme dans le cas non stochastique. Pour finir, toutes les équations aux dérivées partielles stochastiques ne sont pas que des équations classiques auxquelles on a ajouté un terme de bruit blanc. Si l'on considère l'équation des ondes avec un bruit blanc et que l'on essaye d'appliquer les mêmes méthodes, on comprend vite pour des problèmes de définition de l'intégrale stochastique que cela ne peut pas fonctionner. Par exemple en essayant d'introduire la fonction de Green on se retrouve avec des intégrales divergentes du fait du bruit blanc. Il faut donc ruser, en introduisant plutôt qu'un bruit obtenu par un mouvement Brownien, un bruit engendré par une régularisation du mouvement Brownien. Pour plus d'informations sur les méthodes utilisées, on peut se référer au texte de Walsh [1] ou à cette série de cours [2].

**Remarque 9.** Tous les résultats de cette section ont leurs analogues pour des fonctions  $X, b, \sigma$  et  $B$  vectorielles. Les preuves ne sont pas plus dures, mais moins compréhensibles à la lecture. On considérera que l'on connaît l'extension naturelle de nos résultats à ce cadre.

Avant de poursuivre sur les applications, nous présentons un résultat d'une utilité cruciale dans l'étude des EDS : la formule d'Itô. Elle permet de calculer l'effet d'un changement de variable malgré la dépendance stochastique pour des processus décrits par une équation de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t g_s dB_s,$$

où  $f_s$  et  $g_s$  sont des processus  $\mathcal{F}$ -mesurables, adaptés à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et qui sont pour presque tout  $\omega$  intégrables selon le temps. Son cadre permet de traiter le cas de processus définis par le biais d'EDS.

**Théorème 3** (Formule d'Itô). On reprend les notations introduites ci-dessus. Soit une fonction  $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  deux fois continûment différentiables par rapport à sa première variable  $t$  et de même pour la seconde  $x$ . Alors le processus  $Y_t := u(t, X_t)$  vérifie

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \partial_t u(s, X_s) ds + \int_0^t \partial_x u(s, X_s) f_s ds + \int_0^t \partial_x u(s, X_s) g_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x^2 u(s, X_s) g_s^2 ds.$$

On apprécie écrire cette égalité sous sa forme différentielle

$$dY_t = \partial_t u(t, X_t) dt + \partial_x u(t, X_t) dt (f_t dt + g_t dB_t) + \frac{1}{2} \partial_x^2 u(t, X_t) g_t^2 dt.$$

La preuve de ce résultat est longue dans le cas le plus général possible. C'est pour cela que nous ne la présentons pas. Le lecteur curieux pourra se référer au livre [8].

**Remarque 10.** Le lemme d'Itô trouve son analogue dans la théorie des chemins rugueux. A la différence du précédent il n'est pas probabiliste, il permet d'effectuer des changements de variables lorsque la fonction dépend d'un chemin (rugueux) et ne nécessite quasiment que des contrôles d'analyse pour la démontrer, mais nécessite plus de régularité sur la fonction  $u$ . Se référer à nouveau à [4] pour un complément d'informations.

### 3 Applications des EDS

Pour les applications que l'on donne nous nous concentrons sur des équations dites de diffusion. Pour rappel, ce sont les EDS qui prennent la forme

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geq s \geq 0 \quad X_s = x. \quad (1)$$

Avec  $b : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$  et  $\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d \times l}$  et une régularité permettant d'obtenir une unique solution. Pour éviter certains détails techniques considérons les cas où l'on a au moins de la continuité. (Nous rappelons que nous avons évoqué dans une remarque le fait que l'on puisse prendre un cadre plus général avec notamment des Browniens multidimensionnels et que les résultats de la partie précédente restent valides). Leur nom provient de leur ressemblance avec certaines équations tirées de la physique. Dans l'écriture des diffusions, le terme  $b(x)$  est compris par exemple comme une force déterministe agissant sur une particule à la position  $x$ . La fonction  $\sigma(x)$  elle correspond aux effets de l'agitation thermique sur la particule en  $x$ , c'est ce terme que l'on voit comme un terme de diffusion. On se fixe pour la suite une telle équation.

Nous donnons quelques définitions qui nous seront utiles pour la suite. Nous appellerons  $X_t^{s,x}$  la solution de l'équation 1.

#### 3.1 Un lien entre les équations de diffusion et les équations aux dérivées partielles

Nous explorons un lien surprenant entre équations de diffusion et équations aux dérivées partielles du second ordre. Grâce à ce lien, nous pouvons établir des résultats sur les équations aux dérivées partielles à partir des EDS et vice versa.

Nous noterons  $\mathbb{P}^x, \mathbb{E}^x$  la loi de probabilité engendrée par les variables  $X_t^{0,x}$  définie par

$$\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k) = \mathbb{P}(X_{t_1}^{0,x} \in A_1, \dots, X_{t_k}^{0,x} \in A_k)$$

et l'espérance associée. Nous pouvons voir cette loi comme la loi du processus de diffusion sachant qu'il provient de  $x$ .

##### 3.1.1 Propriété de Markov

Dans un premier lieu il est facile de voir le lemme suivant

**Lemme 3.** *Les processus  $(X_{s+h}^{s,x})_{h \geq 0}$  et  $X^{0,x}$  ont la même loi.*

Ainsi la définition de  $\mathbb{P}^x$  prend sens.

On peut alors passer au résultat principale de cette partie.

**Théorème 4** (Propriété de Markov). *Soit une fonction  $\varphi$  mesurable et bornée à valeurs réelles. Nous avons*

$$\mathbb{E}^x [\varphi(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t] (\omega) = \mathbb{E}^{X_t(\omega)} [\varphi(X_h)].$$

La dernière espérance correspondant à la fonction  $y \mapsto \mathbb{E}^y[\varphi(X_h)]$  évalué en  $X_t$

*Démonstration.* Soit un vecteur  $y$  de  $\mathbb{R}^d$  et deux réels  $s \geq t$ . On définit la fonction

$$F(y, t, s, \omega) = X_s^{t,y}(\omega) = y + \int_t^s b(X_u(\omega))du + \int_t^s \sigma(X_u(\omega))dB_u.$$

Par unicité des solutions de 1 nous avons

$$X_s(\omega) = F(X_t(\omega), t, s, \omega).$$

Si l'on pose  $G(y, \omega) = \varphi \circ F(y, t, t + h, \omega)$ , nous avons pour toutes fonctions séparables  $G(y, \omega) = \Phi(y)\Psi(\omega)$  l'égalité

$$\mathbb{E} [\Phi(X_t)\Psi(\omega)|\mathcal{F}_t] = \Phi(X_t)\mathbb{E} [\Psi(\omega)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E} [\Phi(y)\Psi(\omega)|\mathcal{F}_t] \Big|_{y=X_t(\omega)}.$$

De là on obtient

$$E [G(X_t, \omega)|\mathcal{F}_t] = E [G(y, \omega)|\mathcal{F}_t] \Big|_{y=X_t(\omega)}.$$

Or par le lemme facile, nous avons

$$E [G(y, \omega)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E} [G(y, \omega)] = \mathbb{E} [\varphi \circ F(y, t, t + h, \omega)] = \mathbb{E} [\varphi \circ F(y, 0, h, \omega)],$$

ce qui offre la relation à prouver. Maintenant, un argument d'approximation permet de traiter le cas des fonctions non séparables et de finir la preuve grâce à la linéarité du résultat.  $\square$

### 3.1.2 Semi-groupe et générateur

**Définition 6** (Semi-groupe de Markov). *Pour toute fonction mesurable et bornée  $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , on associe pour tout  $t \geq 0$  la fonction  $T_t\varphi$  définie par*

$$(T_t\varphi)(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_t)).$$

Les opérateurs  $T_t$  ainsi définis sont les semi-groupes de Markov associés à la diffusion  $X$ .

**Lemme 4** (Propriété de semi-groupe). *Pour tout couple de réels positifs  $t, h$  nous avons*

$$T_h \circ T_t = T_{t+h}$$

*Preuve.* La preuve repose sur la propriété de Markov, on a

$$(T_h \circ T_t)(\varphi)(x) = \mathbb{E}^x [(T_t\varphi)(X_h)] = \mathbb{E}^x [\mathbb{E}^{X_h} [\varphi(X_t)|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}^x [\mathbb{E}^x [\varphi(X_{t+h})|\mathcal{F}_t]].$$

D'où

$$(T_h \circ T_t)(\varphi)(x) = \mathbb{E}^x [\varphi(X_{t+h})] = (T_{t+h}\varphi)(x)$$

$\square$

Ce lemme montre un comportement très intéressant. Il suffit de connaître les opérateurs  $T_t$  sur un intervalle de petite taille  $[0, \varepsilon]$  pour connaître tous les opérateurs  $T_t$ . Il est alors normal de se demander si l'on ne peut pas interpréter ce qu'il se passe pour un intervalle infiniment petit. Nous allons donc étudier la "dérivée" des  $T_t$  en 0.

**Définition 7** (Générateur d'une diffusion d'Itô). *Pour une diffusion, on définit un opérateur  $L$  appelé générateur infinitésimal via ses semi-groupes par la formule suivante*

$$(L\varphi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(T_h\varphi)(x) - \varphi(x)}{h},$$

où  $\varphi$  est une fonction test.

Soyons formel. Juste avant la définition, nous évoquons le fait qu'il suffisait de connaître les  $T_t$  sur un intervalle infiniment petit pour tous les déterminer. Nous avons alors introduit ce générateur infinitésimal. Mais comment remonter aux  $T_t$  ? Nous avons

$$\frac{dT_t}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{t+h} - T_t}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h - I}{h} T_t = LT_t.$$

Par une résolution nous obtenons alors

$$T_t = \exp(tL).$$

C'est formel, mais il est pratique de l'avoir en tête et il existe une formalisation de ce fait.

**Proposition 4.** *Le générateur infinitésimal de notre diffusion est l'opérateur différentiel*

$$L = \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma \sigma^T)_{ij}(x) \partial_{ij}^2.$$

*Preuve.* On se restreint pour cette preuve au cas réel, encore une fois la généralisation n'est pas hardue. On utilise la formule d'Itô pour  $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , on pose  $Y_t = \varphi(X_t)$ . Comme il n'y a pas de dépendance en une première variable de temps, la formule se simplifie alors en

$$Y_h = \varphi(X_0) + \int_0^h \varphi'(X_s) b(X_s) ds + \int_0^h \varphi'(X_s) \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^h \varphi''(X_s) \sigma(X_s)^2 ds.$$

Un passage à l'espérance fait disparaître l'intégrale stochastique par REFERENCE DE LA PROP. Ainsi, par un réordonnement on trouve

$$\frac{\mathbb{E}^x[\varphi(X_h)] - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbb{E}^x [\varphi'(X_s) b(X_s)] ds + \frac{1}{2h} \int_0^h \mathbb{E}^x [\varphi''(X_s) \sigma(X_s)^2] ds.$$

Un passage à la limite offre

$$(L\varphi)(x) = \varphi'(x)b(x) = \frac{1}{2}\varphi''(x)\sigma(x)^2.$$

□

Par exemple, en appliquant la formule précédente on trouve que le générateur infinitésimal du mouvement Brownien est  $\frac{\Delta}{2}$ .

**Remarque 11.** *C'est cette formule qui nous permet d'établir le lien entre EDS et équations aux dérivées partielles. On considère le générateur infinitésimal  $L$  de la diffusion introduite en début de partie. On peut montrer que l'équation aux dérivées partielles*

$$\partial_t u(t, x) = Lu(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x)$$

*admet une solution s'écrivant*

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x [u_0(X_t)].$$

*Grâce à ce résultat nous pouvons obtenir des résultats sur la dynamique de  $u$  à partir de l'étude de celle de la diffusion  $X$ .*

### 3.1.3 Formule de Dynkin

Dans cette partie nous abordons une formule qui permet d'obtenir des résultats sur la dynamique du mouvement Brownien.

**Théorème 5.** *Pour notre diffusion  $X$ , rappelons que l'on note  $L$  son générateur infinitésimal. Si l'on prend  $\tau$  un temps d'arrêt intégrable et une fonction test  $\varphi$ . Alors*

$$\mathbb{E}^x(\varphi(X_\tau)) = \varphi(x) + \mathbb{E} \left( \int_0^\tau (L\varphi)(X_s) ds \right)$$

*Démonstration.* Encore une fois, on se restreint au cadre réel. On peut montrer par des arguments similaires à la proposition 4 que l'on a

$$\mathbb{E}^x [\varphi(X_\tau)] = \varphi(x) + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau (L\varphi)(X_s) ds \right] + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau \sigma(X_s) \varphi'(X_s) dB_s \right].$$

Comme grâce aux hypothèses  $\sigma\varphi'$  est bornée, on a pour tout entier naturel  $n$

$$\mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge n} \sigma(X_s) \varphi'(X_s) dB_s \right] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^n \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} \sigma(X_s) \varphi'(X_s) dB_s \right] = 0$$

par la proposition 3. On montre ensuite facilement que  $\int_0^{\tau \wedge n} \sigma(X_s) \varphi'(X_s) dB_s$  converge dans  $L^2(\Omega, \mathbb{P}^x)$  vers  $\int_0^\tau \sigma(X_s) \varphi'(X_s) dB_s$  grâce à l'intégrabilité de  $\tau$  ce qui montre la nullité de  $\int_0^\tau \sigma(X_s) \varphi'(X_s) dB_s$  et donne le résultat.  $\square$

On peut désormais établir un critère de récurrence/transience du mouvement Brownien ainsi qu'un résultat sur son temps de sortie de compact. Tout cela nous est permis par la formule de Dynkin. Nous noterons  $B(a, r)$  la boule ouverte euclidienne de rayon  $r$  et de centre  $a$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposition 5.** *Le mouvement Brownien sort de tout compact en temps fini.*

*Le mouvement Brownien est récurrent en dimension 1 et 2. Il est transient en dimension supérieure ou égale à 3.*

*Preuve. Temps de sortie de compact.* Prenons la boule  $B := B(0, r)$ . Définissons le temps de sortie

$$\tau_r := \inf\{t > 0, B_t \notin B\}$$

ainsi que les temps bornés

$$\tau_n := \tau_r \wedge n.$$

On considère une fonction lisse  $\varphi(x)$  valant  $\|x\|^2$  sur l'adhérence de  $B$  et étant nulle en dehors de la boule  $B(0, r+1)$ . Sur  $B$  nous avons  $\Delta\varphi(x) = 2d$ . Ainsi la formule de Dynkin donne

$$\mathbb{E}^x [\|B_{\tau_n}\|^2] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_n} \frac{1}{2} \Delta\varphi(B_s) ds \right] = d\mathbb{E}^x [\tau_n].$$

Sachant que  $\|B_{\tau_n}\| \leq r$ , la suite  $\mathbb{E}[\tau_n]$  est croissante et bornée, elle admet donc une limite qui est  $\mathbb{E}[\tau_r]$ . On montre ensuite que l'on a

$$\mathbb{E}[\tau_r] = \frac{r^2}{d}.$$

On conclut que le mouvement Brownien sort presque sûrement de tout compact.

**Transience et récurrence.** Soit  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On considère une boule  $B := B(a, r)$  qui ne contient pas  $x$ . Définissons le temps d'arrêt

$$\tau := \inf\{t > 0, x + B_t \in B\}.$$

On définit aussi les couronnes  $C_n$  pour  $n$  entier :

$$C_n := B(a, 2^n r) - B(a, r),$$

ainsi que les temps de sortie associés notés  $\tau_n$ . On finit en introduisant  $\tau'_n$  le temps de sortie de  $B(a, 2^n r)$ .

On introduit la probabilité  $p_n$  de pénétrer la boule  $B(a, r)$  avant de sortir de  $B(a, 2^n r)$ . On a

$$p_n = \mathbb{P}^x(\|x + B_\tau\| = r) = 1 - \mathbb{P}^x(\|x + B_\tau\| = 2^n r).$$

Notons que les fonctions à symétrie sphérique solution de  $\Delta\varphi = 0$  sont proportionnelles à

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } d = 1, \\ -\log \|x\| & \text{si } d = 2, \\ \|x\|^{2-d} & \text{si } d > 2. \end{cases}$$

Prenons une des fonctions solution. La formule de Dynkin permet d'obtenir

$$\mathbb{E}^x [\varphi(x + B_{\tau_n})] = \varphi(x).$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}^x [\varphi(x + B_{\tau_n})] = \varphi(r)p_n + \varphi(2^n r)(1 - p_n).$$

Ce qui nous permet d'obtenir

$$p_n = \frac{\varphi(x) - \varphi(2^n r)}{\varphi(r) - \varphi(2^n r)}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}^x(\tau < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n,$$

qui vaut 1 en dimension 1 ou 2, et qui est strictement inférieur à 1 en dimension strictement plus grande. Nous pouvons dès lors obtenir notre résultat.  $\square$

### 3.1.4 Equation différentielle perturbée

Nous concluons ce texte avec un peu de théorie des équations différentielles perturbées présentée sous la forme d'une grande remarque où aucune démonstration n'est effectuée. Le lecteur voulant approfondir pourra prendre connaissance du très intéressant livre [3]. Les problématiques de ce sujet sont souvent abordées en physique. Si l'on considère un système à l'équilibre, il est important de savoir si sa situation d'équilibre est stable ou instable. Pour ce faire, lorsque le système est régi par une équation différentielle, on peut rajouter un terme aléatoire contrôlé par un paramètre  $\varepsilon > 0$  et observer comment agit les solutions perturbées. Ensuite, on peut se poser les questions suivantes : La solution obtenue après perturbation diverge t-elle de la solution non perturbée ? Reste-t-elle dans un voisinage de la solution non perturbée ? Lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0, les solutions associées convergent t-elles vers la solution non perturbée ? Si oui, dans quel sens ? Un cadre d'étude est le suivant : soit  $b : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$  une application suffisamment régulière et soit  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On considère l'équation différentielle

$$dX_t = b(X_t)dt, \quad X_0 = x.$$

On notera  $X$  sa solution.

On introduit ensuite ses versions perturbées.

$$dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon \sigma(X_t^\varepsilon)dB_t, \quad X_0^\varepsilon = x,$$

de solutions  $X^\varepsilon$ . Comme l'on considère  $b$  suffisamment régulière alors  $X$  et les  $X^\varepsilon$  existent et sont uniquement définies. On peut alors répondre à quelques une des questions évoquées :

**Théorème 6.** *On a pour tout  $t \geq 0$  et  $\delta > 0$*

$$\mathbb{E}|X_t^\varepsilon - X_t|^2 \leq \varepsilon^2 a(t) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq s \leq t} |X_s^\varepsilon - X_s| > \delta \right) = 0.$$

Ce premier résultat offre une première forme de stabilité. Sur un compact, les trajectoires des équations perturbées tendent uniformément vers la trajectoire initiale.

**Théorème 7.** *Nous avons pour tout  $k \geq 0$*

$$X_t^\varepsilon = X_t + \varepsilon X_t^1 + \dots + \varepsilon^k X_t^k + R_{k+1}^\varepsilon(t).$$

*Avec les fonctions  $X^i$  pouvant être déterminées grâce aux dérivées de  $b$  et le reste  $R_{k+1}^\varepsilon$  vérifiant*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |R_{k+1}^\varepsilon(t)| \leq C(\omega) \varepsilon^{k+1}$$

*avec  $C$  presque sûrement fini.*

Une application de ce second résultat par exemple est d'estimer le comportement des trajectoires perturbées par rapport à celle originelle lorsque cette dernière sort d'une surface.

Certains systèmes possèdent des positions d'équilibres très stables. Pourtant il y a un surprenant résultat qui indique que malgré cela, parmi ces systèmes il en existe toute une classe qui une fois perturbés ont leurs trajectoires s'échappant de la position d'équilibre. Mieux elles passent avec forte probabilité près d'un unique point si l'on restreint encore plus la classe des systèmes que l'on étudie.

## References

- [1] René Carmona, Harry Kesten, John B Walsh, and John B Walsh. *An introduction to stochastic partial differential equations*. Springer, 1986.
- [2] Robert Dalang. *A minicourse on stochastic partial differential equations*. Springer, 2009.
- [3] Mark Iosifovich Freidlin, Alexander D Wentzell, MI Freidlin, and AD Wentzell. *Random perturbations*. Springer, 1998.
- [4] Peter K Friz and Martin Hairer. *A course on rough paths*. Springer, 2020.
- [5] Martin Hairer. A theory of regularity structures. *Inventiones mathematicae*, 198(2):269–504, 2014.
- [6] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 1991.
- [7] Terry J Lyons. Differential equations driven by rough signals. *Revista Matemática Iberoamericana*, 14(2):215–310, 1998.
- [8] Philip E Protter and Philip E Protter. *Stochastic differential equations*. Springer, 2005.
- [9] Laurence Chisholm Young. *The theory of integration*. Number 21. The University Press, 1927.