

# Hypothèse de non indépendance en théorie des modèles

---

Xavier Pigé  
Printemps 2023  
Sous la direction de Daniel Palacín  
Universidad Complutense de Madrid

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Déroulement du stage</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Rappels et généralités de théorie des modèles</b>	<b>3</b>
3.1	Compacité et modèle monstre . . . . .	4
3.2	Suites d'indiscernables . . . . .	5
<b>4</b>	<b>La propriété de non-indépendance</b>	<b>6</b>
4.1	Types invariants, définissables et finiment satisfaisables . . . . .	7
4.2	Types héritiers . . . . .	8
4.3	Produit de types . . . . .	9
4.4	La rétraction canonique . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Mesures de Keisler</b>	<b>11</b>
5.1	Mesures invariantes, définissables et finiment satisfaisables . . . . .	13
5.2	Produit de mesures . . . . .	14
5.3	Mesures héritières . . . . .	14
5.4	Mesures lisses . . . . .	16
5.5	La rétraction canonique pour les mesures . . . . .	19
	<b>Références</b>	<b>20</b>

# 1 Introduction générale

La théorie des modèles est une branche de la logique mathématique qui s'intéresse à l'étude et à la classification des structures logiques en fonction de leur combinatoire définissable, c'est-à-dire en fonction de l'algèbre de Boole des parties définissables.

On peut distinguer deux approches : la théorie des modèles appliquée consiste à prendre une théorie concrète - par exemple, les corps algébriquement clos, les corps réels clos, les ordres linéaires denses sans extrémités... - et à chercher à comprendre comment se comportent leurs parties définissables, pour en déduire ensuite des résultats sur ces théories.

La théorie des modèles pure, dans le cadre de laquelle se place ce stage, consiste au contraire à considérer abstraitement les théories ayant une certaine propriété de "simplicité" de la combinatoire définissable, et à chercher à comprendre ce que cela implique pour les modèles de cette théorie. Ces deux approches sont bien sûr complémentaires : les propriétés que l'on étudie sont des propriétés assez répandues dans les modèles qui apparaissent naturellement, et réciproquement montrer qu'une théorie bien concrète vérifie une certaine propriété fournit de nombreux outils pour l'étudier.

L'hypothèse ici étudiée est l'hypothèse NIP, pour "Non-Independance Property", ou propriété de non-indépendance. Fixons un langage  $L$  et une théorie  $T$ , ainsi qu'un modèle monstre (c'est-à-dire un grand modèle, très saturé) de  $T$ , noté  $\mathcal{U}$ .

**Définition 1.** Soit  $\varphi(x; y) \in L$ . On dit que  $\varphi$  a la propriété d'indépendance (IP) s'il existe une famille infinie  $(a_i)_{i \in I}$  (chaque  $a_i$  ayant la taille de  $x$ ) telle que, pour tout  $J \subset I$ , il existe  $b_J \in \mathcal{U}$  (de la taille de  $y$ ) tel que  $\mathcal{U} \models \varphi(a_i, b_J) \iff i \in J$ .

On dit que  $\varphi(x; y)$  est NIP si elle n'a pas la propriété d'indépendance. On dit que  $T$  est NIP si toutes les formules sont NIP.

La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $q$ , celle des corps réels clos ou encore la théorie des ordres linéaires denses sans extrémités sont par exemple des théories NIP (de façon non triviale).

## 2 Déroulement du stage

Le stage s'est déroulé à la faculté de mathématique de l'Université Complutense de Madrid, de février à juin 2023, sous la direction de Daniel Palacín, professeur dans cette université, qui étudie la théorie des modèles et notamment NIP. J'ai également beaucoup interagi avec son collègue Elías Baro, qui étudie également la théorie des modèles et plus spécifiquement l'o-minimalité (qui est une autre propriété, très étudiée, et qui implique notamment le caractère NIP). J'ai aussi pu assister à un mini-cours sur les sous-groupes approchés en théorie des modèles (c'est-à-dire des parties  $A$  d'un groupe telles que  $A \cdot A$  a un cardinal inférieur à  $k$  fois celui de  $A$ , pour un  $k$  uniforme), et faire un exposé dans un séminaire d'étudiants en théorie des modèles. J'ai également assisté au cours de master d'Elías Baro, sur la géométrie complexe.

J'ai commencé le stage par la lecture de l'essentiel du livre de Pierre Simon, *A Guide to NIP theories*[7], qui constitue une introduction aux théories NIP pour un lecteur déjà un peu familier de la théorie des modèles. La suite du stage a ensuite, dans un premier temps, été centrée sur l'étude des groupes NIP, et en particulier sur la lecture et l'étude d'un article de Pierre Simon et d'Artem Chernikov paru en 2018, intitulé *Definably amenable groups in NIP theories*[2]. J'ai aussi, en parallèle, réfléchi à une version locale de NIP (c'est-à-dire que plutôt que de supposer que la théorie toute entière est NIP, on suppose simplement qu'une formule donnée est NIP), peu étudiée si ce n'est dans un article de Kyle Gannon, *Local Keisler measures and NIP formulas*[4]. Enfin, la fin du stage - sur laquelle se concentre le rapport - a été consacrée à la généralisation de certains résultats déjà connus (des types aux mesures, c'est-à-dire d'une certaine façon du discret au continu). Ces résultats portaient principalement sur la rétraction canonique, qui est évoquée à la fin de la section sur les types et à la fin de celles sur les mesures lisses. Le rapport ne peut malheureusement pas étudier en profondeur ces résultats, en raison de l'importante quantité de résultats préalables.

### 3 Rappels et généralités de théorie des modèles

On notera toujours  $L$  le langage, c'est-à-dire l'ensemble des symboles de constantes, de relations et de fonctions. On rappelle qu'une *formule*  $\varphi(x)$  est une suite syntaxiquement correcte obtenue à partir de symboles de  $L$ , d'opérations booléennes et de quantificateurs. On notera également  $\varphi(x) \in L$  pour dire que  $\varphi$  est une formule de  $L$ , et, si  $M$  est une  $L$ -structure (i.e. un ensemble muni d'interprétations pour les symboles de  $L$ ), on note  $\varphi(x) \in L(M)$  pour dire que  $\varphi(x)$  est une formule de  $L$  avec en plus d'éventuels paramètres dans  $M$  (autrement dit, on rajoute tous les points de  $M$  à  $L$  en les voyant comme des symboles de constantes). On notera toujours  $T$  une théorie (dans le langage  $L$ ).

Lorsqu'on écrit "soit  $\varphi(x; b)$  une formule", cette notation signifie que  $\varphi(x; y)$  est une formule sans paramètres, qu'on choisit de voir  $x$  comme correspondant aux variables et  $y$  comme correspondant aux paramètres, et qu'on a fixé un choix de paramètres  $b$ . On donne donc un rôle différent à la variable  $x$  et à la variable  $y$ . Cette idée sera très importante par la suite.

Par exemple, si nous sommes dans le langage des ordres, la formule  $\phi(x; b)$  peut être  $x < b$ , auquel cas la formule  $\phi(x; y)$  est  $x < y$ .

Un type partiel  $\pi(x)$  est une famille cohérente (éventuellement infinie) de formules. Une partie d'un modèle est dite type-définissable s'il s'agit de l'ensemble des points réalisant un certain type partiel. Un type (complet)  $p(x)$  est un type partiel maximal.

**Exemple.** Soit  $L$  le langage composé du seul symbole  $<$ , et soit  $T$  la théorie des ordres linéaires denses sans extrémités. Soit  $M$  un modèle de  $T$ , et soit  $A \subset M$ . Alors  $\pi(x) := \{x < a : a \in A\}$  est une famille cohérente de formules, c'est-à-dire un type partiel. En l'occurrence, on peut voir par élimination des quantificateurs qu'il s'agit même d'un type complet sur  $A$ . En revanche, si  $A$  est minoré dans  $M$ , il ne s'agit pas d'un type complet sur  $M$ . En effet, si  $b \in M$  minore  $A$  (au sens strict), alors  $x < b$  et  $x = b$  sont tous deux cohérents à  $\pi(x)$ .

Ceci montre par exemple que l'ensemble des minorants (stricts) de  $A$  est une partie type-définissable (sur  $A$ ).

L'espace  $S_x(A)$  des types en la variable  $x$  à paramètres dans  $A$  est compact lorsqu'il est muni de la topologie dont les ouverts-fermés (ferverts) de base sont ceux associés aux formules à paramètres dans  $A$ . On peut le voir comme le spectre de Zariski de l'anneau de Boole des formules à paramètres dans  $A$ . Dans cette topologie, les parties définissables sur  $A$  correspondent donc aux ferverts, et les parties type-définissables sur  $A$  aux fermés.

Pour les rappels de théorie des modèles, et en particulier le modèle monstre et les suites d'indiscernables, on pourra se référer au livre de Katrin Tent et Martin Ziegler [9], ou à celui de David Marker [6]. Pour les aspects plus spécifiques aux théories NIP, le contenu de ce texte est essentiellement issu du livre de Pierre Simon, *A Guide to NIP theories* [7]. Enfin, les questions liées aux mesures lisses sont pour la plupart traitées dans [5], et la rétraction canonique  $F_M$  dont il sera question plus loin est introduite dans [8], tandis que son analogue pour les mesures apparaît dans [3].

### 3.1 Compacité et modèle monstre

**Théorème 1** (Compacité de la logique du premier ordre). *Une famille d'énoncés est statistiquement réalisable si et seulement si toute sous-famille finie l'est.*

Ce théorème est constamment utilisé, ainsi que les théorèmes de Lowenheim-Skolem (qui permettent de construire des extensions élémentaires et des sous-modèles du cardinal que l'on veut, tant qu'on reste au-dessus du cardinal de la théorie). Il permet notamment de construire le modèle monstre. Les détails d'une définition possible (issue d'une note de Baldwin [1]) sont ci-dessous, mais on évitera de s'y attarder pour plutôt regarder leurs conséquences concrètes quelques lignes plus loin.

**Définition 2.** Soit  $T$  une théorie et soit  $\kappa$  un cardinal "très grand". Il existe un modèle  $\mathcal{U}$  de  $T$   $\kappa$ -saturé et fortement  $\kappa$ -homogène, qu'on appelle un "modèle monstre".

Dire que  $\mathcal{U}$  est  $\kappa$ -saturé signifie par définition que, pour toute partie  $A \subset \mathcal{U}$  de cardinal strictement inférieur à  $\kappa$  et tout  $p \in S_x(A)$  type d'arité finie,  $p$  est réalisé dans  $\mathcal{U}$ . Dire que  $\mathcal{U}$  est fortement  $\kappa$ -homogène signifie par définition que tout automorphisme partiel dont le domaine est de cardinal strictement inférieur à  $\kappa$  s'étend en un automorphisme global.

En demandant que  $\kappa$  soit "très grand", on demande en fait principalement que  $\kappa$  vérifie  $\lambda < \kappa \Rightarrow 2^\lambda < \kappa$  et qu'on puisse le prendre de cofinalité arbitrairement grande (et qu'on puisse prendre  $\kappa$  arbitrairement grand).

Ces hypothèses signifient notamment :

- que tout modèle  $M$  de  $T$  de cardinal strictement inférieur à  $\kappa$  peut s'injecter dans  $\mathcal{U}$  (on dit que  $M$  est un *petit modèle*)
- que, si on prend une *petite* partie  $A$  de  $\mathcal{U}$  (i.e. de cardinal strictement inférieur à  $\kappa$ ), ainsi qu'un uplet  $\bar{x}$  de petite taille et un type  $p(\bar{x}) \in S_{\bar{x}}(A)$ , alors  $p$  est réalisé dans  $\mathcal{U}$

- que, si deux petits uplets  $\bar{a}, \bar{b}$  ont le même type sur une petite partie  $A$  de  $\mathcal{U}$ , ce qu'on note  $a \equiv_A b$ , alors il existe un automorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{U}$  qui est l'identité sur  $A$  (on note  $\text{Aut}(\mathcal{U}/A)$  l'ensemble de ces automorphismes) et tel que  $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$ .

On travaillera toujours dans un modèle monstre de  $T$ .  $\mathcal{U}$  désignera un modèle monstre fixé,  $M$  sera un petit modèle (vu comme plongé dans  $\mathcal{U}$ ), et  $A$  une petite partie de  $\mathcal{U}$ . Ceci permet de ne pas sans arrêt construire des extensions de modèles et allège considérablement la rédaction. On s'autorisera de plus le fait d'écrire  $\models \phi(a; b)$  pour  $\mathcal{U} \models \phi(a; b)$ , voire même  $a \models \phi(x; b)$ .

**Proposition 1.** *Soient  $A \subset B \subset \mathcal{U}$  deux petites parties.*

1. *Soit  $D \subset \mathcal{U}$  une partie de  $\mathcal{U}$ , définissable sur  $B$  (ou, en réalité, une partie définissable d'un  $\mathcal{U}^k$ ; on ne fait pas vraiment la distinction en général). On suppose que  $D$  est invariante par  $\text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ , i.e. que, si  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ , alors  $\sigma(D) = D$ . Alors  $D$  est définissable sur  $A$ .*
2. *Soit  $X$  une partie de  $\mathcal{U}$ , type-définissable sur  $B$ . On suppose que  $X$  est invariante par  $\text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ . Alors  $X$  est type-définissable sur  $A$ .*

Nous allons à présent montrer un résultat de complétion des types partiels.

**Définition 3.** Une partie  $\mathcal{I}$  de l'ensemble des parties définissables de  $\mathcal{U}^\alpha$  est un idéal si c'est un idéal de l'algèbre de Boole des parties définissables de  $\mathcal{U}^\alpha$  (autrement dit, si elle est close par passage aux sous-ensembles définissables et par union finie, et si  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ).

Par abus de langage, on parle aussi d'idéal pour une famille de formules en une même variable  $x$  qui est close par les opérations correspondantes.

**Lemme 1.** *Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de formules en la variable  $x$ , et soit  $\pi(x)$  un type partiel n'impliquant aucune formule de  $\mathcal{I}$ . Alors il possède une complétion en un type global n'impliquant aucune formule de  $\mathcal{I}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de voir que

$$\pi(x) \cup \{\neg\phi(x) : \phi(x) \in \mathcal{I}\}$$

est cohérent. Si ce n'est pas le cas, par compacité, il existe des formules  $\phi_i(x), i = 1, \dots, n$  toutes dans  $\mathcal{I}$  telles que  $\pi(x) \cup \{\neg\phi_i(x) : i = 1, \dots, n\}$  soit incohérent. Mais alors  $\pi(x) \vdash \bigvee_{i=1}^n \phi_i(x)$ , et comme  $\mathcal{I}$  est un idéal,  $\bigvee_{i=1}^n \phi_i(x) \in \mathcal{I}$ . Contradiction.  $\square$

## 3.2 Suites d'indiscernables

Les suites d'indiscernables sont des suites de points telles que, tant qu'on ne change pas leur ordre, il n'est pas possible de les distinguer. Elles constituent un outil fondamental, en particulier dans l'étude de NIP.

**Définition 4.** Soit  $\mathcal{I}$  un ordre total infini, et  $I = (a_i)_{i \in \mathcal{I}}$  une suite dans  $\mathcal{U}$  (les  $a_i$  sont des petits uplets de  $\mathcal{U}$ , tous de la même longueur).  $I$  est une suite d'indiscernables sur  $A$  si, pour toute formule  $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \in L(A)$  et pour tous  $i_0 < \dots < i_{n-1}, j_0 < \dots < j_{n-1}$ , on a :

$$\mathcal{U} \models \varphi(a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}}) \leftrightarrow \varphi(a_{j_0}, \dots, a_{j_{n-1}})$$

Si on dit simplement "suite d'indiscernables", cela veut dire qu'on prend implicitement  $A = \emptyset$ .

**Théorème 2.** Soient  $(a_j)_{j \in \mathcal{J}}$  suite de points de  $\mathcal{U}$  ( $\mathcal{J}$  ordre total infini), et soit  $\mathcal{I}$  un ordre total (infini, de cardinal strictement inférieur à  $\kappa$ ). Alors il existe  $I = (b_i)_{i \in \mathcal{I}}$  suite d'indiscernables sur  $A$  telle que, pour  $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \in L(A)$ , si, pour tous  $j_0 < \dots < j_{n-1}$  éléments de  $\mathcal{J}$ , on a  $\mathcal{U} \models \varphi(a_{j_0}, \dots, a_{j_{n-1}})$ , alors on a aussi, pour  $i_0 < \dots < i_{n-1}$  éléments de  $\mathcal{I}$ , que  $\mathcal{U} \models \varphi(b_{i_0}, \dots, b_{i_{n-1}})$ .

Le cas  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$  est le plus simple à comprendre. Il dit simplement qu'on peut rendre indiscernable une suite en préservant les propriétés pour lesquelles elle était déjà indiscernable. On dit que la suite d'indiscernables ainsi obtenue *réalise le type d'Ehrenfeucht-Mostowski* de la suite initiale, ou plus simplement qu'elle *réalise son EM-type*.

## 4 La propriété de non-indépendance

**Définition 5.** Soit  $\varphi(x; y) \in L$ . On dit que  $\varphi$  a la propriété d'indépendance (IP) s'il existe une famille infinie  $(a_i)_{i \in I}$  (chaque  $a_i$  ayant la taille de  $x$ ) telle que, pour tout  $J \subset I$ , il existe  $b_J \in \mathcal{U}$  (de la taille de  $y$ ) tel que  $\mathcal{U} \models \varphi(a_i, b_J) \iff i \in J$ .

On dit que  $\varphi(x; y)$  est NIP si elle n'a pas la propriété d'indépendance. On dit que  $T$  est NIP si toutes les formules sont NIP.

**Proposition 2.** Soit  $\varphi(x; y)$  une formule. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $\varphi(x; y)$  a la propriété d'indépendance.
2. Pour tout  $k < \omega$ , il existe  $(a_i)_{i < k}$  telle que, pour tout  $J \subset k$ , il existe  $b_J \in \mathcal{U}$  (de la taille de  $y$ ) tel que  $\mathcal{U} \models \varphi(a_i, b_J) \iff i \in J$ .
3. Il existe  $(a_i)_{i < \omega}$  suite d'indiscernables et  $b \in \mathcal{U}$  tels que  $\mathcal{U} \models \varphi(a_i; b) \iff i$  est pair

*Démonstration.* 1  $\Rightarrow$  2 clair.

2  $\Rightarrow$  1 se fait par compacité.

1  $\Rightarrow$  3 Soit une famille infinie  $(a_i)_{i \in I}$  vérifiant 1. Sans perte de généralité,  $I = \omega$ . Soit alors  $(a'_i)_{i < \omega}$  suite d'indiscernables réalisant l'EM-type de  $(a_i)_{i < \omega}$ . Si on fixe  $I_0, I_1$  deux parties disjointes de  $\omega$ , le type partiel  $\{\varphi(a'_i; y) : i \in I_0\} \wedge \{\neg\varphi(a'_i; y) : i \in I_1\}$  est alors cohérent. En effet, par compacité, il suffit de le démontrer pour  $I_0, I_1$  finis. Mais alors le type partiel est conjonction d'un nombre fini de formules ; il s'agit donc d'une unique formule, devant laquelle on peut mettre un quantificateur existentiel, et il s'agit de montrer que cet énoncé est vrai. Mais c'est évident car il l'est en remplaçant les  $a'_i$  par les  $a_i$ , et les  $a'_i$  réalisent l'EM-type des  $a_i$ .

3  $\Rightarrow$  2 Soit  $k < \omega$ , et soit  $J \subset k$ . Il existe  $i_0 < \dots < i_{k-1} < \omega$  tels que  $j \in J \iff i_j$  est pair. De plus, par indiscernabilité,  $a_0 \dots a_{k-1}$  et  $a_{i_0} \dots a_{i_{k-1}}$  ont le même type sur le vide; il existe donc un automorphisme de  $\mathcal{U}$  qui envoie  $a_{i_0} \dots a_{i_{k-1}}$  sur  $a_0 \dots a_{k-1}$ . Soit  $b_J$  l'image de  $b$  par cet automorphisme. Alors, par construction,  $\mathcal{U} \models \varphi(a_j; b_J) \iff j \in J$ , comme souhaité.  $\square$

**Exemple.** Dans ZFC, la formule  $x \in y$  a la propriété d'indépendance (c'est immédiat via 1).

Dans  $\text{Th}(\mathbb{N})$ , la formule  $x \mid y$  a la propriété d'indépendance (on peut le voir en choisissant  $x_0, \dots, x_{k-1}$  premiers distincts et en utilisant 2).

Il est plus difficile de montrer qu'une formule est NIP, et encore plus qu'une théorie est NIP; c'est pourquoi ces preuves ne seront pas détaillées ici. On peut néanmoins montrer que certaines théories, comme les corps algébriquement clos de caractéristique fixée, les ordres linéaires denses sans extrémités ou les corps réels clos (ie les corps "qui ressemblent à  $\mathbb{R}$ ") sont NIP.

Dans la suite, la théorie  $T$  est supposée NIP (bien que certains résultats n'utilisent pas cette hypothèse).

## 4.1 Types invariants, définissables et finiment satisfaisables

**Définition 6.** Un type (global complet)  $p(x)$  est dit *invariant* sur un petit ensemble  $A$  si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

1. Pour  $\phi(x; y) \in L$ ,  $a \equiv_A b$ , on a  $p(x) \vdash \phi(x; a) \iff p(x) \vdash \phi(x; b)$ .
2. Pour  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ , on a  $\sigma(p) = p$ .

L'équivalence de ces conditions se vérifie aisément en utilisant l'homogénéité du modèle monstre (on rappelle que  $a \equiv_A b$  signifie que  $a$  et  $b$  ont le même type sur  $A$ ). Si  $p(x)$  est un type invariant sur  $A$ , il est aussi invariant sur tout ensemble  $B$  contenant  $A$ .

**Définition 7.** Un type (éventuellement partiel)  $p(x)$  est dit *finiment satisfaisable* dans  $A$  si, pour toute formule  $\phi(x)$  telle que  $p(x) \vdash \phi(x)$ , il existe  $a \in A$  tel que  $\models \phi(a)$ .

**Proposition 3.** 1. Un type (éventuellement partiel) sur un modèle  $M$  est finiment satisfaisable dans  $M$ .

2. Un type partiel finiment satisfaisable dans  $A$  admet une complétion en un type complet finiment satisfaisable dans  $A$ . Une telle complétion est appelée un *cohéritier* du type partiel de départ sur  $A$ .
3. En particulier, tout type dans  $S_x(M)$  admet un cohéritier.
4. Un type complet finiment satisfaisable dans  $A$  est invariant sur  $A$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $p(x)$  un type (éventuellement partiel) sur  $M$ , et soit  $\phi(x)$  une formule telle que  $p(x) \vdash \phi(x)$ . Il existe  $\psi(x) \in L(M)$  telle que  $\psi(x) \in p(x)$  et  $\psi(x) \vdash \phi(x)$  (par compacité). On a, par cohérence de  $p(x)$ , que  $\mathcal{U} \models \exists x, \psi(x)$ . Donc, par élémentarité, on a encore  $M \models \exists x, \psi(x)$ , comme souhaité.

2. Il suffit de constater que l'ensemble des formules non finiment satisfaisables dans  $M$  est un idéal, ce qui est évident.
3. Clair.
4. Soit  $p(x)$  un tel type. Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas invariant sur  $A$ , il existe alors une formule  $\phi(x; y) \in L$  et  $b_1 \equiv_A b_2$  tels que  $p(x) \vdash \phi(x; b_1)$  et  $p(x) \vdash \neg\phi(x; b_2)$ . Alors il existe  $a \in A$  tel que  $\models \phi(a; b_1) \wedge \neg\phi(a; b_2)$  (car  $p(x) \vdash \phi(x; b_1) \wedge \neg\phi(x; b_2)$ ), absurde.

□

**Définition 8.** Un type  $p(x)$  est dit *définissable* sur  $A$  si, pour tout  $\phi(x; y) \in L$ , il existe  $d_p\phi(y) \in L(A)$  telle que pour tout  $b$ ,  $p \vdash \phi(x; b) \iff b \models d_p\phi(y)$ .

**Proposition 4.** *Un type définissable sur  $A$  est invariant sur  $A$ .*

*Démonstration.* Soient  $\phi(x; y) \in L$ , ainsi que  $b_1 \equiv_A b_2$ . Alors  $b_1 \models d_p\phi(y) \iff b_2 \models d_p\phi(y)$ , donc  $p \vdash \phi(x; b_1) \iff p \vdash \phi(x; b_2)$ . □

## 4.2 Types héritiers

La notion de type héritier est une forme de notion duale de celle de cohéritier.

**Définition 9.** Un type  $p(x)$  est dit *héritier* sur  $A$  si, pour toute formule  $\phi(x; y) \in L(A)$  et pour tout  $b \in \mathcal{U}$ , si on a  $p \vdash \phi(x; b)$ , alors il existe  $d \in A$  tel que  $p \vdash \phi(x; d)$ .

On dit aussi que  $p$  est un héritier de  $p|_A$ .

Ceci entraîne notamment les quelques propriétés suivantes :

**Proposition 5.** *Soit  $p$  un type global héritier sur  $A$ , et soit  $b \in \mathcal{U}$ .*

1. *Soit  $a \models p|_{Ab}$ . Alors  $tp(b/Aa)$  est cohéritier sur  $A$ .*
2. *Soit  $\psi(y) \in L(A)$  tel que  $\models \psi(b)$ , et soit  $\phi(x; y) \in L(A)$ . Alors il existe  $d \in A$  tel que  $\models \psi(d)$  et  $p \vdash \phi(x; d)$ .*

*Démonstration.* 1. Soit  $\phi(x; y) \in L$  telle que  $tp(b/Aa) \vdash \phi(a; y)$ . On a alors  $\models \phi(a; b)$ , donc  $p \vdash \phi(x; b)$ . Soit  $d \in A$  tel que  $p \vdash \phi(x; d)$ . Alors on a  $\models \phi(a; d)$ , comme souhaité.

2. Il suffit d'appliquer la définition à  $\phi(x; y) \wedge \psi(y) \in L(A)$ .

□

On a les propriétés d'existence et d'extension suivantes :

**Proposition 6.** 1. *Soient  $A \subset B \subset C$ , et soit  $p$  un type sur  $C$ . Si  $p$  est héritier sur  $B$  et  $p|_B$  héritier sur  $A$ , alors  $p$  est héritier sur  $A$ .*

2. *Soit  $p$  un type sur  $B$ , héritier sur  $M \subset B$ . Il s'étend en un type global héritier sur  $M$ .*

*Démonstration.* 1. Clair.

2. Il s'agit de montrer que le type partiel

$$\pi(x) = p(x) \cup \{\phi(x; c) : c \in \mathcal{U}, \phi(x; y) \in L(M) \text{ tels que } \forall d \in M, p(x) \vdash \phi(x; d)\}$$

est cohérent, puisque toute complétion de ce type partiel convient. S'il ne l'est pas, par compacité, cela signifie qu'il existe des formules  $\psi(x; b) \in p(x)$  et  $\phi_i(x; c_i) \in L(\mathcal{U}), i = 1, \dots, n$ , avec  $p(x) \vdash \phi_i(x; d)$  pour tout  $d \in M$ , dont la conjonction est inconsistante. On a donc  $b \models \exists z_1, \dots, z_n, \forall x, \neg\psi(x; y) \bigwedge_{i=1}^n \phi_i(x; z_i)$ . Cette formule est à paramètres dans  $M$ ; soit donc  $d \in M$  qui la satisfait encore et tel que  $p \vdash \psi(x; d)$ . Soient ensuite  $c'_1, \dots, c'_n \in M$  donnés par la formule. Alors la conjonction des  $\psi(x; d), \phi_1(x; c'_1), \dots, \phi_n(x; c'_n)$  est inconsistante. Mais c'est absurde car toutes ces formules sont dans  $M$ . □

Les types héritiers sont liés aux types définissables :

**Proposition 7.** *Soit  $p$  un type sur  $M$ . Il est définissable (sur  $M$ ) si et seulement s'il possède un unique héritier (sur  $M$ ), qui est alors son unique extension définissable sur  $M$ .*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord  $p$  définissable. Il possède bien sûr un héritier; notons-le  $q$ . Soit  $\phi(x; y) \in L$ , et soit  $d_p\phi(y) \in L(M)$  telle que  $p(x) \vdash \phi(x; b) \iff \models d_p\phi(b)$ , pour tout  $b \in M$ . Soit  $b \in \mathcal{U}$  tel que  $q \vdash \phi(x; b)$ . Il existe  $d \in M$  tel que  $q \vdash \phi(x; d)$  et tel que  $d_p\phi(d)$  ait la même valeur de vérité que  $d_p\phi(b)$ . Alors on a  $p \vdash \phi(x; d)$ , donc  $\models d_p\phi(d)$ , donc  $\models d_p\phi(b)$ . Donc  $q$  est en fait l'unique extension définissable de  $p$ . Donc  $p$  n'a qu'un seul héritier.

On ne traite pas la réciproque (elle sera en fait démontrée plus tard, dans le contexte plus général des mesures héritières). □

### 4.3 Produit de types

Soient  $p$  et  $q$  deux types. On suppose que  $p$  est invariant sur  $M$ . Soient  $M \subset C \subset \mathcal{U}, b \models q|_C, a \models p|_C$ . On définit le *produit* de  $p$  et  $q$  comme étant l'unique type global  $(p \otimes q)(x, y)$  tel que  $(p \otimes q)|_C = \text{tp}((a, b)/C)$  (pour tout choix de  $C$ ). On peut facilement voir que ceci ne dépend pas du choix de  $a$  et  $b$ , et que c'est bien défini. On note parfois  $p_x \otimes q_y$  au lieu de  $p \otimes q$  afin de bien préciser quels sont les noms des variables.

Voici un certain nombre de propriétés de base de cet objet.

**Proposition 8.** *Soient  $p$  et  $q$  deux types globaux.*

1. *Si  $p$  et  $q$  sont  $M$ -invariants (resp. finiment satisfaisables dans  $M$ , définissables sur  $M$ ), alors  $p \otimes q$  aussi.*
2. *Si  $p$  est  $M$ -définissable et  $q$  est finiment satisfaisable dans  $M$ , alors  $p_x \otimes q_y = q_y \otimes p_x$ .*
3. *Si  $p$  est  $M$ -invariant et  $q_1, q_2$  sont deux types ayant même restriction à  $M$ , alors  $p \otimes q_1$  et  $p \otimes q_2$  ont même restriction à  $M$ .*

Le deuxième point admet en fait une réciproque :

**Proposition 9.** *Soit  $p$  un type  $M$ -invariant. Il est définissable si et seulement si pour tout  $q$  finiment satisfaisable dans  $M$  on a  $(p \otimes q)|_M = (q \otimes p)|_M$ .*

*Démonstration.* On a déjà vu l'une des deux implications. Réciproquement, supposons que pour tout  $q$  finiment satisfaisable dans  $M$  on a  $(p \otimes q)|_M = (q \otimes p)|_M$ . Soit  $p'$  un héritier global de  $p|_M$ . Soit  $b \in \mathcal{U}$ . Soit  $a$  une réalisation de  $p'|_{Mb}$ . Alors  $\text{tp}(b/Ma)$  est finiment satisfaisable dans  $M$  (car  $p'$  est héritier sur  $M$ ). Donc il existe  $q(y)$  un type global finiment satisfaisable dans  $M$  étendant  $\text{tp}(b/Ma)$ . Mais alors  $a \models p'|_M = p|_M$  et  $b \models q|_{Ma}$ , donc  $(a, b) \models (q \otimes p)|_M = (p \otimes q)|_M$ . Autrement dit,  $a \models p|_{Mb}$ . Mais on sait que  $a \models p'|_{Mb}$ , donc  $p|_{Mb} = p'|_{Mb}$ . Ceci vaut pour tout  $b \in \mathcal{U}$ , et donc  $p' = p$ . Ainsi  $p$  est l'unique héritier global de  $p|_M$ , i.e.  $p$  est  $M$ -définissable.  $\square$

Intéressons-nous à présent aux suites de Morley.

**Définition 10.** Soit  $p$  un type  $M$ -invariant, et soit  $(a_i)_{i < \omega}$  une suite telle que  $a_n \models p_{Ma_0 \dots a_{n-1}}$ . On dit que  $(a_i)_{i < \omega}$  est une suite de Morley de  $p$  sur  $M$ . Cette suite est alors indiscernable sur  $M$ .

*Démonstration.* On veut voir que, pour  $i_0 < \dots < i_n$ , on a  $a_{i_0} \dots a_{i_n} \equiv_M a_0 \dots a_n$ . Or  $a_0 \dots a_n \models (p(x_n) \otimes \dots \otimes p(x_0))|_M$ , donc il s'agit en fait de voir que  $a_{i_0} \dots a_{i_n}$  réalise aussi ce type. Raisonnons par récurrence sur  $n$ . Il suffit alors de voir que  $a_{i_n}$  réalise  $p|_{Ma_{i_0} \dots a_{i_{n-1}}}$ , ce qui est clair. D'où le résultat.  $\square$

## 4.4 La rétraction canonique

Soit  $M$  un petit modèle, et soit  $M \prec^+ M'$  (ce qui signifie : " $M'$  est une extension  $(|M| + |T|)^+$ -saturée de  $M$ ). On ajoute un prédicat unaire  $P$  à  $L$ , ce qui donne un langage  $L_P$ , et on étend  $M'$  en une  $L_P$ -structure via  $P(M') = M$ ; on note  $(M', M)$  cette  $L_P$ -structure. Soit  $(M', M) \prec^+ (N', N)$ .

Soit  $p$  un  $L$ -type global  $M$ -invariant. Montrons que  $p|_N \cup \{P(x)\}$  entraîne un  $L$ -type complet sur  $M'$ . Sinon, il existe  $\phi(x; b) \in L(M')$  tel que  $p|_N \cup \{P(x)\} \cup \{\phi(x; b)\}$  et  $p|_N \cup \{P(x)\} \cup \{\neg\phi(x; b)\}$  sont tous deux cohérents. Soit alors  $(a_i)_{i < \omega}$  construite comme suit :  $a_{2i} \models p|_{Ma_{<2i}} \cup \{P(x)\} \cup \phi(x; b)$  et  $a_{2i+1} \models p|_{Ma_{<2i+1}} \cup \{P(x)\} \cup \neg\phi(x; b)$ . On choisit à chaque étape  $a_i$  dans  $N'$ , ce qui est possible par saturation. Puis, comme on a  $P(a_i)$ , on a en fait  $a_i \in N$ . Ceci permet de poursuivre la construction. Mais alors  $(a_i)_{i < \omega}$  est une suite de Morley de  $p$  sur  $M$ , et est donc indiscernable. Mais on a  $\models \phi(a_i; b) \iff i$  est pair. Contradiction.

On peut alors définir  $F_M(p)$  en disant que c'est l'unique extension  $M$ -invariante de  $q$ , où  $q$  est le type complet sur  $M'$  entraîné par  $p|_N \cup \{P(x)\}$ . Ceci définit un type complet finiment satisfaisable dans  $M$ , canoniquement associé à  $p$ .

**Proposition 10.** 1.  $F_M$  est continue.

2. Si  $p$  est finiment satisfaisable dans  $M$ , alors  $F_M(p) = p$ .

On a de plus :

**Théorème 3.** *Soit  $p$  un type  $M$ -invariant. Il est définissable  $M$  si et seulement s'il commute avec  $F_M(p)$ .*

## 5 Mesures de Keisler

**Définition 11.** Soit  $A \subset \mathcal{U}$ . Une mesure de Keisler  $\mu$  sur  $A$  en la variable  $x$  est une mesure de probabilité finiment additive sur l'algèbre de Boole des parties  $A$ -définissables de  $\mathcal{U}^{|x|}$ .

Autrement dit, c'est une application qui à toute formule  $\varphi(x)$  à paramètres dans  $A$  associe un réel entre 0 et 1, de sorte que  $\mu(x \neq x) = 0$ ,  $\mu(x = x) = 1$ , et si  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  sont telles que  $\varphi(x) \wedge \psi(x)$  est inconsistant, alors on a  $\mu(\varphi(x) \vee \psi(x)) = \mu(\varphi(x)) + \mu(\psi(x))$ . On demande également que, si  $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$ , alors  $\mu(\varphi(x)) = \mu(\psi(x))$ .

En fait, les mesures de Keisler sont en bijection canonique avec les mesures de probabilité ( $\sigma$ -additives) régulières sur  $S_x(M)$ . La régularité implique notamment que la mesure d'un fermé  $\pi(x)$  de  $S_x(A)$  est l'infimum des mesures des parties  $A$ -définissables contenant  $\pi(x)$ .

**Proposition 11.** *Soit  $\phi(x; y) \in L$ , et soit  $(b_i)_{i < \omega}$  suite d'indiscernables de  $\mathcal{U}$  ( $|b_i| = |y|$ ). Soit également  $\mu(x)$  mesure de Keisler. On suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que, pour tout  $i < \omega$ ,  $\mu(\phi(x; b_i)) > r$ . Alors le type partiel  $\{\phi(x; b_i) : i < \omega\}$  est cohérent.*

*Démonstration.* Traitons pour commencer le cas où  $(b_i)_{i < \omega}$  est une suite  $\mu$ -indiscernable, c'est-à-dire que  $\mu(\phi(x; b_{\bar{i}})) = \mu(\phi(x; b_{\bar{j}}))$  pour toute formule  $\phi(x; y) \in L$  et tous uplets de  $\omega$   $\bar{i}, \bar{j}$  ayant la même structure d'ordre.

Dans ce cas, soit  $N$  maximal tel que  $\mu(\bigwedge_{i < N} \phi(x; b_i)) > 0$  (un tel  $N$  existe, puisque la conjonction est vide pour  $N$  grand), et notons  $\rho = \mu(\bigwedge_{i < N} \phi(x; b_i))$ . On a  $N > 0$  par hypothèse. Posons  $\psi_k(x) = \bigwedge_{(k-1)N \leq i < kN} \phi(x; b_i)$ . Alors  $\mu(\psi_k(x)) = \rho$  et, pour  $k \neq k'$ ,  $\mu(\psi_k(x) \wedge \psi_{k'}(x)) = 0$ . Donc  $\mu(\bigvee_{k < K} \psi_k(x)) = K\rho$  pour tout  $K < \omega$ . Absurde car  $\mu$  est de probabilité.

Pour se ramener à ce cas, on voudrait utiliser le théorème 2. Pour cela, il faut tout d'abord coder la mesure  $\mu$  dans le langage. Notons désormais  $M$  (plutôt que  $\mathcal{U}$ ) le modèle ambiant. On peut identifier la mesure  $\mu$  à une famille de fonctions  $f_{\varphi(x; y)} : b \in \mathcal{U}^{|y|} \mapsto \mu(\varphi(x; b)) \in [0, 1]$ . Ajoutons donc à la  $L$ -structure  $M$  une nouvelle sorte pour l'intervalle  $[0, 1]$ , ainsi que des symboles de fonctions  $f_{\varphi(x; y)} : \mathcal{U}^{|y|} \rightarrow [0, 1]$  pour chaque formule  $\varphi(x; y) \in L$ , et munissons également  $[0, 1]$  de  $+$  et de  $<$ . On obtient alors une nouvelle structure, notée  $\tilde{M}_\mu$ . En prenant une extension suffisamment saturée de  $\tilde{M}_\mu$ , on obtient une nouvelle structure et dans celle-ci une suite d'indiscernables  $(b'_i)_{i < \omega}$  réalisant l'EM-type de  $(b_i)_{i < \omega}$ , que nous noterons  $\tilde{N}_\nu$ . Celle-ci possède deux sortes : une qui correspond à une  $L$ -structure  $N$ , qui est une extension élémentaire de  $M$  ; et une autre, notée  $[0, 1]^*$ , qui est une extension élémentaire de  $[0, 1]$ . On a cependant une projection canonique  $[0, 1]^* \rightarrow [0, 1]$ , en utilisant les coupures de Dedekind (c'est-à-dire en regardant l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à chaque point de  $[0, 1]^*$  ; cela définit un unique réel de  $[0, 1]$ ). En composant avec cette projection, on obtient

à partir des  $f_{\varphi(x;y)}$  de  $\tilde{N}_\nu$  une mesure de Keisler sur  $N$ , notée  $\nu$ . La suite  $(b'_i)_{i < \omega}$  est  $\nu$ -indiscernable par hypothèse. De plus,  $\mu(\phi(x; b_i)) > r$  pour tout  $i < \omega$ , i.e.  $f_{\phi(x;y)}(b_i) > r$ . Donc on a encore  $f_{\phi(x;y)}(b'_i) > r$ , donc  $\nu(\phi(x; b'_i)) > r$ . Le cas précédent montre alors que  $\{\phi(x; b'_i) : i < \omega\}$  est cohérent. Mais les  $(b'_i)_{i < \omega}$  ont le même  $L$ -type que les  $(b_i)_{i < \omega}$ , car ceux-ci sont indiscernables dans le langage  $L$ . Donc  $\{\phi(x; b_i) : i < \omega\}$  est cohérent.  $\square$

En voyant une mesure sur  $A$  comme une fonction de  $L_x(A)$ , l'ensemble des parties  $A$ -définissables de  $\mathcal{U}$ , vers  $[0, 1]$ , on munit naturellement  $\mathcal{M}_x(A)$  d'une structure d'espace topologique : en effet, il est ainsi inclus dans  $[0, 1]^{L_x(A)}$ , qui d'après le théorème de Tychonoff est un espace topologique compact. De plus,  $\mathcal{M}_x(A)$  y est clairement fermé (car défini par un certain nombre d'équations algébriques devant être satisfaites par les coordonnées). Ainsi, l'espace des mesures sur  $A$  est naturellement un espace topologique compact.

Définissons aussi la notion de support d'une mesure.

**Définition 12.** Le *support* d'une mesure  $\mu \in \mathcal{M}_x(A)$  est l'ensemble des  $p(x) \in S_x(A)$  tels que, pour toute formule  $\phi(x) \in L(A)$ , on a  $p(x) \vdash \phi(x) \Rightarrow \mu(\phi(x)) > 0$ . Autrement dit, c'est le complémentaire de l'union des ouverts de mesure nulle.

On a en particulier, vu la remarque sur la régularité des mesures de Keisler, que  $\mu(S(\mu)) = 1$ . Notamment,  $S(\mu) \neq \emptyset$ .

Montrons à présent quelques résultats d'extension des mesures.

**Proposition 12.** Soit  $\mathcal{B}$  une sous-algèbre de Boole de l'algèbre de Boole des parties définissables en la variable  $x$ . Soit  $\mu_0(x)$  une mesure (de probabilité finiment additive) sur  $\mathcal{B}$ . Il existe une mesure de Keisler  $\mu(x)$  qui étend  $\mu_0$ .

*Démonstration.* Soient  $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x) \in L(\mathcal{U})$  des formules. Montrons qu'il existe une mesure de probabilité finiment additive sur l'algèbre de Boole  $\mathcal{C}$  engendrée par les  $\psi_i(x)$  qui coïncide avec  $\mu_0$  là où elles sont toutes deux définies. Sans perte de généralité, on peut supposer que les  $\psi_i(x)$  sont les atomes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $\phi_1(x), \dots, \phi_m(x)$  les atomes de  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ , et soit pour tout  $i = 1, \dots, m$  un indice  $1 \leq j_i \leq n$  tel que  $\psi_{j_i}(x) \rightarrow \phi_i(x)$ . On peut alors poser  $f(\psi_{j_i}(x)) = \mu_0(\phi_i(x))$ , et  $f(\psi_j(x)) = 0$  sinon, qui convient.

Regardons à présent le fermé  $F := \{\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{U}) : \mu|_{\mathcal{B}} = \mu_0\}$ .  $F$  s'écrit comme l'intersection des  $F_{\mathcal{C}}$  pour  $\mathcal{C}$  sous-algèbre de Boole finie de  $\mathcal{L}_x(\mathcal{U})$ , où  $F_{\mathcal{C}} := \{f \in [0, 1]^{\mathcal{L}_x(\mathcal{U})} : f|_{\mathcal{C}} \text{ est finiment additive et } f|_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = (\mu_0)|_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}}\}$ . Or chacun des  $F_{\mathcal{C}}$  est non vide par ce qui précède. Donc  $F$  est non vide (par compacité de  $[0, 1]^{\mathcal{L}_x(\mathcal{U})}$ ), comme souhaité.  $\square$

**Proposition 13.** Soit  $\mu \in \mathcal{M}_x(M)$  une mesure, et soit  $\phi(x; b) \in L(\mathcal{U})$ . Soient  $r_1 = \sup\{\mu(\psi(x)) : \psi(x) \in L(M), \psi(x) \rightarrow \phi(x; b)\}$  et  $r_2 = \inf\{\mu(\psi(x)) : \psi(x) \in L(M), \phi(x; b) \rightarrow \psi(x)\}$ . Alors, pour tout  $r \in [r_1, r_2]$ , il existe  $\nu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{U})$  étendant  $\mu$  et telle que  $\nu(\phi(x; b)) = r$ .

*Démonstration.* Il suffit de trouver  $\nu_1, \nu_2$  satisfaisant le résultat respectivement pour  $r = r_1, r_2$  (on peut ensuite prendre une combinaison convexe). Puis il suffit de le faire pour  $r = r_2$ , quitte à ensuite changer  $\phi(x; b)$  en  $\neg\phi(x; b)$  pour obtenir le cas  $r = r_1$ . Soit  $\Omega$  l'algèbre de Boole engendrée par  $L(M)$  et  $\phi(x; b)$ ; la proposition 12 assure qu'il suffit de définir  $\nu$  sur  $\Omega$ .

Supposons tout d'abord  $r_2 = 0$ . Dans ce cas, toute extension globale de  $\mu$  convient clairement. Supposons ensuite  $r_2 = 1$ , et définissons  $\nu$  en posant  $\nu(\theta(x)) = \mu(\theta(x))$  si  $\theta(x) \in L(M)$ , et  $\nu(\phi(x; b)) = 1$ . Il est clair que  $\nu$  s'étend bien en une unique mesure sur  $\Omega$ , qui convient.

À présent, soit  $C = \bigwedge_{\phi(x; b) \rightarrow \psi(x)} \psi(x)$ , qui est un fermé. En voyant  $\mu$  comme une mesure régulière sur  $S_x(M)$ , définissons respectivement  $\mu'$  et  $\mu''$  comme étant  $\mu$  conditionnée à  $C$  et  $\mu$  conditionnée au complémentaire de  $C$ . On a alors  $\mu(C) = r_2$ , donc  $\mu = r_2\mu' + (1 - r_2)\mu''$ . De plus, il existe par ce qui précède  $\nu', \nu''$  étendant respectivement  $\mu', \mu''$  avec  $\nu'(\phi(x; b)) = 1, \nu''(\phi(x; b)) = 0$ . On peut alors prendre  $\nu = r_2\nu' + (1 - r_2)\nu''$ , qui convient.  $\square$

## 5.1 Mesures invariantes, définissables et finiment satisfaisables

On peut définir une mesure invariante de la même façon que pour les types :

**Définition 13.** Soit  $\mu(x)$  une mesure globale, et soit  $A \subset \mathcal{U}$  un petit ensemble de paramètres. On dit que  $\mu$  est *invariante* sur  $A$  si, pour  $\phi(x; y) \in L$  et  $a \equiv_A b$ , on a  $\mu(\phi(x; a)) = \mu(\phi(x; b))$ .

**Définition 14.** Une mesure  $\mu(x)$  est dite *finiment satisfaisable* dans  $A$  si, pour toute formule  $\phi(x)$  telle que  $\mu(\phi(x)) > 0$ , il existe  $a \in A$  tel que  $\models \phi(a)$ .

**Proposition 14.** 1. Une mesure sur un modèle  $M$  est finiment satisfaisable dans  $M$ .

2. Une mesure (sur  $M$ ) finiment satisfaisable dans  $A$  admet une extension en une mesure globale finiment satisfaisable dans  $A$ . Une telle extension est appelée une *cohéritière* de la mesure de départ sur  $A$ .
3. En particulier, toute mesure sur  $M$  admet une cohéritière.
4. Une mesure finiment satisfaisable dans  $M$  est invariante sur  $M$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $\mu(x)$  une mesure sur  $M$ , et soit  $\phi(x)$  une formule telle que  $\mu(\phi(x)) > 0$ . On a alors que  $\mathcal{U} \models \exists x, \psi(x)$ . Donc, par élémentarité, on a encore  $M \models \exists x, \psi(x)$ , comme souhaité.

2. Soit  $\mathcal{B}$  l'algèbre de Boole engendrée par  $\mathcal{L}_x(M)$  et les  $\psi(x) \in L(\mathcal{U})$  non satisfaisables dans  $A$ . Soit  $\nu$  la mesure sur  $\mathcal{B}$  obtenue en posant  $\nu(\psi(x)) = 0$  pour  $\psi(x) \in L(\mathcal{U})$  non satisfaisable dans  $A$  et  $\nu(\phi(x)) = \mu(\phi(x))$  pour  $\phi(x) \in \mathcal{L}_x(M)$ , qui est bien définie. Alors toute extension de  $\nu$  convient.
3. Clair.
4. Soit  $\mu(x)$  une telle mesure. Soient  $\phi(x; y) \in L$  et  $b_1 \equiv_A b_2$ . Clairement il n'existe pas  $a \in A$  tel que  $\models \phi(a; b_1) \Delta \phi(a; b_2)$ . Donc  $\mu(\phi(x; b_1) \Delta \phi(x; b_2)) = 0$ , et en particulier  $\mu(\phi(x; b_1)) = \mu(\phi(x; b_2))$ .  $\square$

Soit  $\mu(x)$  une mesure invariante sur  $A$ , et soit  $\phi(x; y) \in L$ . Alors, pour  $q \in S_y(A)$  et  $b \in \mathcal{U}$  réalisant  $q$ , la valeur de  $\mu(\phi(x; b))$  ne dépend pas du choix de  $b$ . Ceci donne une application  $f_{\phi(x; y)} : S_y(A) \rightarrow [0, 1]$ .

**Définition 15.** Une mesure  $\mu(x)$  est dit *définissable* sur  $A$  si elle est  $A$ -invariante et, pour tout  $\phi(x; y) \in L$ , l'application  $f_{\phi(x; y)} : S_y(A) \rightarrow [0, 1]$  est continue.

On peut voir que, encore une fois, cette définition étend celle qui avait été donnée pour les types.

## 5.2 Produit de mesures

**Proposition 15.** Soit  $\mu$  une mesure invariante sur  $M$ , et soit  $\phi(x; y) \in L$ . Alors l'application  $f_{\phi(x; y)} : S_y(M) \rightarrow [0, 1]$  est mesurable (pour la tribu borélienne).

**Définition 16.** Soient  $\mu_x$  une mesure invariante sur  $M$ , et soit  $\nu_y$  une mesure globale quelconque. On définit la mesure produit  $\mu \otimes \nu$  en posant, pour  $\phi(x, y; b) \in L(\mathcal{U})$  :

$$(\mu \otimes \nu)(\phi(x, y; b)) = \int_{S_y(N)} f_{\phi(x, y; b)}(q) d\nu|_N(q)$$

où  $N$  est un petit modèle contenant  $M$  et  $b$ .

On peut assez facilement vérifier que ceci définit bien une mesure de Keisler, aux propriétés analogues à celles du produit de deux types. En particulier :

**Proposition 16.** Soient  $\mu$  une mesure définissable et  $\nu$  une mesure finiment satisfaisable (dans un petit modèle). Alors  $\mu \otimes \nu = \nu \otimes \mu$ .

## 5.3 Mesures héritières

La généralisation de la notion de type héritier aux mesures pose le problème de la définition : plusieurs possibilités existent, et selon les cas il semble que l'une ou l'autre est plus ou moins adaptée. Néanmoins, celle qui revient le plus souvent (et qui sera pertinente ici) est la suivante :

**Définition 17.** Soit  $\mu_x$  une mesure sur  $B$ , et soit  $M \subset B$ . On dit que  $\mu$  est héritière sur  $M$  si pour tous  $n < \omega, \varepsilon > 0, b_i \in B^y, \phi_i(x; y) \in L(M)$  ( $i < n$ ), il existe  $d \in M$  tel que, pour tout  $i < n$ , on ait  $|\mu(\phi_i(x; b)) - \mu(\phi_i(x; d))| < \varepsilon$ .

On note bien sûr que, dans le cas où  $\mu$  est en fait un type, cette définition coïncide avec la précédente. La propriété d'extension (pour  $A \subset B \subset C$ , si  $\mu$  une mesure sur  $C$  est héritière sur  $B$  et  $\mu|_B$  héritière sur  $A$ , alors  $\mu$  est héritière sur  $A$ ) est valide. Le résultat suivant constitue l'outil clé pour la construction de mesures héritières :

**Proposition 17.** Soit  $\mu$  une mesure sur  $M$ , et soit  $\tilde{M}_\mu \prec \tilde{N}_\nu$ . Alors  $\nu$  est héritière de  $\mu$ .

*Démonstration.* Soient  $\phi_i(x; y) \in L(M)$  et  $b \in N, \varepsilon > 0$ . Soit  $r_i = \nu(\phi_i(x; b)), i < n$ . Alors  $\tilde{N}_\nu \models (\exists y) \bigwedge_{i < n} (r_i - \varepsilon < f_{\phi_i}(y) < r_i + \varepsilon)$ . Par élémentarité,  $\tilde{M}_\mu$  vérifie aussi cette formule, ce qui donne l'existence du  $d$  désiré.  $\square$

Par extension, ce résultat entraîne aussi que, si  $\mu$  une mesure sur  $M$  est héritière sur  $A$ , elle possède une extension globale qui est toujours héritière sur  $A$ .

**Proposition 18.** *Soit  $\mu$  une mesure sur  $M$ . Elle est définissable si et seulement si elle possède une unique héritière globale, qui est alors son unique extension définissable sur  $M$ .*

*Démonstration.* Supposons pour commencer que  $\mu$  est définissable. Soit  $\nu$  une héritière globale de  $\mu$  sur  $M$ . Soit  $\phi(x; y) \in L(M)$ , et soit  $b \in \mathcal{U}^y$ . Notons  $\lambda$  l'unique extension globale de  $\mu$  définissable sur  $M$ . On suppose, quitte à changer  $\phi(x; y)$  en  $\neg\phi(x; y)$ , que  $\nu(\phi(x; y)) > 0$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, \nu(\phi(x; b))]$ . Par définissabilité de  $\lambda$ , il existe  $D$  un ensemble  $M$ -définissable tel que  $b \in D$  et tel que, pour  $c \in D$ , on ait  $|\lambda(\phi(x; c)) - \lambda(\phi(x; b))| < \varepsilon$  (on peut prendre  $D$  ouvert par continuité, puis utiliser le fait qu'un ouvert est union des ferverts qu'il contient). Soit  $d \in M$  tel que  $d \in D$  et  $|\nu(\phi(x; b)) - \nu(\phi(x; d))| < \varepsilon$ , qui existe. Alors  $|\nu(\phi(x; b)) - \lambda(\phi(x; b))| < 2\varepsilon$ . D'où  $\nu = \lambda$ .

Passons à la réciproque. Dans un premier temps, on ne suppose rien sur  $\mu$ . Soient  $\phi(x; y) \in L(M)$ ,  $b \in \mathcal{U}^y$  et  $r \in [0, 1]$ . On suppose que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $D$   $M$ -définissable tel que  $b \in D$ , il existe  $d \in M \cap D$  tel que  $|\mu(\phi(x; d)) - r| < \varepsilon$ . Montrons qu'il existe  $\nu$  héritière globale de  $\mu$  telle que  $\nu(\phi(x; b)) = r$ . Pour cela, ajoutons un symbole de constante  $c$  au langage et intéressons-nous à la théorie  $\tilde{M}_\mu \cup \{c \models \text{tp}(b/M)\} \cup \{|\phi_\phi(c) - r| < \varepsilon : \varepsilon > 0\}$ . Les hypothèses précédentes disent exactement que cette théorie est finiment satisfaisable, donc satisfaisable, donc qu'on peut en prendre  $\tilde{N}_\nu$  un (petit) modèle. Celui-ci est alors une extension élémentaire de  $\tilde{M}_\mu$ ; en particulier,  $\nu$  prolonge  $\mu$ . De plus, par construction, on a  $\nu(\phi(x; c)) = r$ , et  $c \equiv_M b$ .  $N$  est un petit modèle,  $\nu$  est héritière sur  $M$ , donc  $\nu$  s'étend en une mesure globale héritière sur  $M$ , que l'on note encore  $\nu$ . Soit  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/M)$  tel que  $\sigma(c) = b$ . Alors  $\sigma_*\nu$  la mesure image de  $\nu$  par  $\sigma$  est héritière de  $\mu$  sur  $M$ , et on a  $\sigma_*\nu(\phi(x; b)) = \nu(\sigma^{-1}(\phi(x; b))) = \nu(\phi(x; c)) = r$ , comme souhaité.

Supposons maintenant que  $\mu$  possède une unique héritière globale, qu'on note encore  $\mu$ . Soient  $\phi(x; y) \in L(M)$ ,  $b \in \mathcal{U}^y$  et  $r \in [0, 1]$  avec  $r \neq \mu(\phi(x; b))$ . D'après ce qui précède, par unicité de l'héritier de  $\mu$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et  $D$   $M$ -définissable tels que  $b \in D$  et, pour tout  $d \in M \cap D$ , on a  $|\mu(\phi(x; d)) - r| > \varepsilon$ . Soit  $\delta > 0$ . Les intervalles de la forme  $]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$  recouvrent  $[0, 1] \setminus ]\mu(\phi(x; b)) - \delta, \mu(\phi(x; b)) + \delta[$  compact; il suffit donc d'un nombre fini d'entre eux. Notons-les  $(r_i, \varepsilon_i, D_i)$ ,  $i < n$ , et posons  $D = \bigcap_{i < n} D_i$ .  $D$  est  $M$ -définissable,  $b \in D$ , et, pour  $d \in M \cap D$ , on a nécessairement  $\mu(\phi(x; d)) \in ]\mu(\phi(x; b)) - \delta, \mu(\phi(x; b)) + \delta[$ , soit  $|\mu(\phi(x; d)) - \mu(\phi(x; b))| < \delta$ .

Ainsi, pour tous  $\delta > 0$ ,  $\phi(x; y) \in L(M)$ ,  $b \in \mathcal{U}^y$ , il existe  $D$   $M$ -définissable contenant  $b$  tel que pour tout  $d \in M \cap D$ , on ait  $|\mu(\phi(x; b)) - \mu(\phi(x; d))| < \delta$ . Soit à présent  $c \in D$ , et soit  $\varepsilon > 0$ . En lui appliquant le résultat précédent, on obtient  $D'$   $M$ -définissable contenant  $c$  tel que, pour  $d \in D' \cap M$ , on ait  $|\mu(\phi(x; d)) - \mu(\phi(x; c))| < \varepsilon$ . Soit  $d \in M \cap D \cap D'$  (qui est non vide, car  $D \cap D'$  est  $M$ -définissable et non vide (il contient  $c$ )). Alors :

$$|\mu(\phi(x; b)) - \mu(\phi(x; c))| \leq |\mu(\phi(x; d)) - \mu(\phi(x; c))| + |\mu(\phi(x; b)) - \mu(\phi(x; d))| < \delta + \varepsilon$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on trouve que  $|\mu(\phi(x; b)) - \mu(\phi(x; c))| < \delta$  pour tout  $c \in D$ . Cela revient exactement à dire que  $\mu$  est  $M$ -définissable.  $\square$

Notons qu'on peut déduire de ceci le résultat analogue sur les types. En effet, si  $p$  est un type possédant un unique héritier global, soit  $\delta_p$  la mesure associée. On a  $\tilde{M}_{\delta_p} \models (\forall y)f_{\phi(x;y)}(y) = 0$  ou 1, donc la preuve précédente s'adapte sans problème au cas des types (la difficulté étant que, si  $p$  possède bien un unique héritier, il n'est pas clair que ce soit le cas de  $\delta_p$  - mais l'argument précédent permet de contourner le problème).

## 5.4 Mesures lisses

L'un des principaux inconvénients lors de la manipulation des mesures par rapport à celle des types est qu'on ne dispose pas d'une notion aussi agréable que "soit  $a$  réalisant le type  $p$ ". Néanmoins, dans une théorie NIP, les mesures lisses fournissent un analogue tout à fait satisfaisant.

**Définition 18.** Soit  $\mu$  une mesure sur  $A$ . On dit qu'elle est *lisse* si elle possède une unique extension globale. Si  $B \subset A$  et  $\mu|_B$  est lisse, on dit aussi que  $\mu$  est lisse sur  $B$ .

**Proposition 19.** Soit  $\mu$  une mesure sur  $A$ . Elle est lisse si et seulement si pour tous  $\phi(x; y) \in L$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe des formules  $\psi_i(y), \theta_i^-(x), \theta_i^+(x) \in L(A), i < n$ , telles que :

1. Les  $\psi_i(y)$  forment une partition.
2. Pour  $i < n$ , on a  $\models \psi(y) \rightarrow (\theta_i^-(x) \rightarrow \phi(x; y) \rightarrow \theta_i^+(x))$
3. Pour  $i < n$ , on a  $\mu(\theta_i^+(x)) - \mu(\theta_i^-(x)) < \varepsilon$ .

*Démonstration.* Soient  $\phi(x; y) \in L, \varepsilon > 0$ . Soit  $b \in \mathcal{U}$ . D'après le caractère lisse de  $\mu$  et 13, il existe  $\theta_b^-(x), \theta_b^+(x) \in L(A)$  tels que  $\theta_b^-(x) \rightarrow \phi(x; b) \rightarrow \theta_b^+(x)$  et  $\mu(\theta_b^+(x)) - \mu(\theta_b^-(x)) < \varepsilon$ . Soit  $\psi_b(y) \in L(A)$  la formule  $(\forall x)\theta_b^-(x) \rightarrow \phi(x; y) \rightarrow \theta_b^+(x)$ . Alors les  $\psi_b(y)$  recouvrent l'espace ; par compacité, il existe des  $b_i, i < n$  tels que pour tout  $b \in \mathcal{U}$ ,  $b$  satisfait l'un des  $\psi_{b_i}(y)$ . Quitte à réduire un peu les  $\psi_{b_i}(y)$ , on peut supposer qu'ils forment une partition. Alors les  $\psi_{b_i}(y), \theta_{b_i}^-(x), \theta_{b_i}^+(x)$  conviennent.  $\square$

**Corollaire 1.** Si  $\mu$  est lisse sur  $B$ , il existe  $A \subset B$  de cardinal au plus  $|T|$  tel que  $\mu$  soit lisse sur  $A$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition précédente à tous les  $\phi(x; y) \in L$  et  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$  pour  $n > 0$ , et de prendre pour  $A$  l'ensemble de tous les paramètres qui apparaissent.  $\square$

**Proposition 20.** Si  $T$  est NIP, toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_x(M)$  possède une extension qui est lisse.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Posons  $\mu_0 = \mu$  et  $M_0 = M$ , puis construisons par récurrence une suite de mesures et de modèles. Pour  $\alpha < |T|^+$ , si  $\mu_\alpha$  est construite, soient  $\mu_\alpha^+$  et  $\mu_\alpha^-$  deux extensions distinctes de  $\mu_\alpha$ . Soient  $b_\alpha \in \mathcal{U}, n_\alpha \in \mathbb{N}^*, \phi_\alpha(x; y) \in L$  tels que  $|\mu_\alpha^+(\phi_\alpha(x; b)) - \mu_\alpha^-(\phi_\alpha(x; b))| \geq \frac{1}{n_\alpha}$ . Soit enfin  $\mu_{\alpha+1} = \frac{1}{2}(\mu_\alpha^+ + \mu_\alpha^-)$ , et soit  $M_{\alpha+1}$  un petit modèle contenant  $M_\alpha$  et  $b_\alpha$ . Pour achever la construction, on définit le passage des limites de la façon naturelle. On obtient finalement une mesure  $\mu_{|T|^+} =: \nu$ , qu'on étend en une mesure globale.

Par principe des tiroirs, on peut supposer que  $n_\alpha = n$  ne dépend pas de  $\alpha$  (on notera désormais  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ), et que  $\phi_\alpha(x; y) = \phi(x; y)$  ne dépend pas non plus de  $\alpha$ . Soit  $\alpha < |T|^+$ , et soit  $c \in M_\alpha$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\nu(\phi(x; c)\Delta\phi(x; b_\alpha)) &= \frac{1}{2}(\mu_\alpha^+(\phi(x; c)\Delta\phi(x; b_\alpha)) + \mu_\alpha^-(\phi(x; c)\Delta\phi(x; b_\alpha))) \\
&\geq \frac{1}{2}(|\mu_\alpha^+(\phi(x; c)) - \mu_\alpha^+(\phi(x; b_\alpha))| + |\mu_\alpha^-(\phi(x; c)) - \mu_\alpha^-(\phi(x; b_\alpha))|) \\
&= \frac{1}{2}(|\mu_\alpha(\phi(x; c)) - \mu_\alpha^+(\phi(x; b_\alpha))| + |\mu_\alpha^-(\phi(x; b_\alpha)) - \mu_\alpha(\phi(x; c))|) \\
&\geq \frac{1}{2}|\mu_\alpha^+(\phi(x; b_\alpha)) - \mu_\alpha^-(\phi(x; b_\alpha))| \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

En particulier  $\nu(\phi(x; b_\alpha)\Delta\phi(x; b_\beta)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tous  $\alpha, \beta < |T|^+$  distincts. En se plaçant dans  $\tilde{\mathcal{U}}_\nu$ , on trouve qu'il existe un modèle  $N_\lambda$  dans lequel se trouve une suite d'indiscernables  $(c_n)_{n < \omega}$  telle que  $\lambda(\phi(x; c_n)\Delta\phi(x; c_m)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tous  $m, n < \omega$  distincts. La proposition 11 assure alors que  $\{\phi(x; c_{2k})\Delta\phi(x; c_{2k+1}) : k < \omega\}$  est cohérent, ce qui contredit NIP.  $\square$

**Définition 19.** Si  $\mu_x, \nu_y$  et  $\omega_{xy}$  sont des mesures globales, on dit que  $\omega$  est un *amalgame séparé* de  $\mu$  et  $\nu$  si, pour toutes  $\phi(x), \chi(y) \in L(M)$ , on a  $\omega(\phi(x) \wedge \chi(y)) = \mu(\phi(x))\nu(\chi(y))$ .

**Proposition 21.** 1. Deux mesures quelconques possèdent toujours un amalgame séparé.  
2. Si  $\mu$  est lisse et  $\nu$  est quelconque,  $\mu$  et  $\nu$  possèdent un unique amalgame séparé. On le note  $\mu \times \nu$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $\Omega$  l'algèbre de Boole engendrée par les  $\mathcal{L}_x(\mathcal{U})$  et les  $\mathcal{L}_y(\mathcal{U})$ . Soit  $\omega$  mesure sur  $\Omega$  définie par  $\omega(\phi(x) \wedge \psi(y)) = \mu(\phi(x))\nu(\psi(y))$ . Alors toute extension de  $\omega$  en une mesure sur  $\mathcal{U}$  convient.

2. Soit  $\omega$  un amalgame séparé de  $\mu$  et  $\nu$ . Soient  $\phi(x, y; z) \in L, c \in \mathcal{U}, \varepsilon > 0$ . Soient  $\psi_i(y, z), \theta_i^-(x), \theta_i^+(x) \in L(\mathcal{U})$  comme dans la proposition 19. On a alors :

$$\bigvee_{i < n} \psi_i(y; c) \wedge \theta_i^-(x) \rightarrow \phi(x, y; c) \rightarrow \bigvee_{i < n} \psi_i(y; c) \wedge \theta_i^+(x)$$

donc

$$\omega(\bigvee_{i < n} \psi_i(y; c) \wedge \theta_i^-(x)) \leq \omega(\phi(x, y; c)) \leq \omega(\bigvee_{i < n} \psi_i(y; c) \wedge \theta_i^+(x))$$

Mais

$$\begin{aligned}
\omega(\bigvee_{i < n} \psi_i(y; c) \wedge \theta_i^-(x)) &= \sum_{i < n} \mu(\theta_i^-(x))\nu(\psi_i(y; c)) \\
\omega(\bigvee_{i < n} \psi_i(y; c) \wedge \theta_i^+(x)) &= \sum_{i < n} \mu(\theta_i^+(x))\nu(\psi_i(y; c)) \\
&\leq \sum_{i < n} (\mu(\theta_i^-(x)) + \varepsilon)\nu(\psi_i(y; c)) \\
&= \sum_{i < n} \mu(\theta_i^-(x))\nu(\psi_i(y; c)) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi  $\omega(\phi(x, y; c)) \in [\sum_{i < n} \mu(\theta_i^-(x))\nu(\psi_i(y; c)), \sum_{i < n} \mu(\theta_i^-(x))\nu(\psi_i(y; c)) + \varepsilon]$ , d'où l'unicité.  $\square$

**Définition 20.** Soient  $\mu$  une mesure lisse,  $A$  une petite partie de  $\mathcal{U}$  et  $\nu$  une mesure globale. On dit que la mesure  $\nu'$  réalise  $\nu$  sur  $A\mu$  si  $\nu'$  est une extension lisse de  $\nu|_A$  et si de plus  $(\nu' \times \mu)|_A = (\nu \times \mu)|_A$ .

**Proposition 22.** *Il existe  $\nu'$  réalisant  $\nu$  sur  $M\mu$ .*

*Démonstration.* Soit  $B$  contenant  $A$  une petite partie sur laquelle  $\mu$  est lisse, et soit  $\nu'$  extension lisse de  $\nu|_B$ . Elle convient.  $\square$

**Proposition 23.** *Soit  $\mu$  une mesure héréditaire sur  $M$ . Soit  $b \in \mathcal{U}$ , et soit  $\mu'$  extension lisse de  $\mu|_{Mb}$ . Alors il existe  $q$  un type finiment satisfaisable dans  $M$  tel que  $b$  réalise  $q$  sur  $M\mu'$ .*

*Démonstration.* Soient  $\phi_i(x) \in L(\mathcal{U}), \psi_j(x, y) \in L(M), \chi_l(y) \in L(\mathcal{U})$  trois partitions finies. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $d \in M$  tel que, pour tout  $j$ , on ait  $|\mu(\psi_j(x; d)) - \mu(\psi_j(x; b))| < \varepsilon$ . Posons alors  $\omega(\phi_i(x) \wedge \psi_j(x, y) \wedge \chi_l(y)) = \mu'(\phi_i(x) \wedge \psi_j(x; d) \wedge \chi_l(d))$ . Ceci définit une mesure (sur  $\Omega$  l'algèbre de Boole engendrée par les  $\phi(x), \psi_j(x, y), \chi_l(y)$ ). En effet, il suffit de vérifier que la somme de ces valeurs vaut 1, ce qui est clair, et que, si  $\phi_i(x) \wedge \psi_j(x, y) \wedge \chi_l(y) = \emptyset$ , alors  $\mu'(\phi_i(x) \wedge \psi_j(x, d) \wedge \chi_l(d)) = 0$ , ce qui est clair aussi. Cette mesure vérifie de plus, pour tous  $i, j, l$  :

1.  $\omega(\chi_l(y))$  vaut 0 ou 1. Si  $\chi_l(M) = \emptyset$ , alors cela vaut 0.
2.  $\omega(\phi_i(x)) = \mu'(\phi_i(x))$
3.  $\omega(\psi_j(x, y)) = \mu'(\psi_j(x; d)) = \mu(\psi_j(x; d)) \approx^\varepsilon \mu(\psi_j(x; b)) = \mu'(\psi_j(x; b))$

Par compacité (de l'espace des mesures sur  $\Omega$ ), en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on peut obtenir  $\omega$  qui vérifie les deux premières propriétés, avec en plus  $\omega(\psi_j(x, y)) = \mu'(\psi_j(x; b))$ .

Puis, de nouveau par compacité (de l'espace des mesures globales), on peut obtenir une mesure  $\omega$  qui vérifie ces propriétés pour tous les  $\phi(x) \in L(\mathcal{U}), \psi(x, y) \in L(M), \chi(y) \in L(\mathcal{U})$ . Notons  $q = \omega_y$ . C'est un type (ie une mesure ne prenant pour valeurs que 0 et 1) finiment satisfaisable dans  $M$ . Soit  $\phi(x), \chi(y) \in L(\mathcal{U})$ . Si  $q(\chi(y)) = 0$ , on a  $\omega(\phi(x) \wedge \chi(y)) = 0 = q(\chi(y))\mu'(\phi(x))$ . Si  $q(\chi(y)) = 1$ , on a de même  $\omega(\phi(x) \wedge \chi(y)) = \omega(\phi(x)) = q(\chi(y))\mu'(\phi(x))$ . Donc  $\omega = q \times \mu'$ . De plus,  $\omega|_M = (b \times \mu')|_M$  par construction. Donc  $(q \times \mu')|_M = (b \times \mu')|_M$ . Autrement dit,  $b$  réalise  $q$  sur  $M\mu'$ .  $\square$

**Corollaire 2.** *Soit  $\mu$  une mesure  $M$ -invariante telle que, pour tout  $q$  finiment satisfaisable dans  $M$ , on a  $(\mu \otimes q)|_M = (q \otimes \mu)|_M$ . Alors  $\mu|_M$  est définissable.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver qu'elle a un unique héritier. Soient par l'absurde  $\mu_1, \mu_2$  deux héritiers distincts de  $\mu|_M$ . Soient  $\phi(x; y) \in L(M)$  et  $b \in \mathcal{U}$  tels que  $\mu_1(\phi(x; b)) \neq \mu_2(\phi(x; b))$ . Soient  $\mu'_1, \mu'_2$  extensions lisses respectives de  $\mu_1, \mu_2$  sur  $Mb$ . Soient  $q_1, q_2$  types finiment satisfaisables dans  $M$  tels que  $b$  réalise  $q_1$  sur  $M\mu'_1$  et  $q_2$  sur  $M\mu'_2$ .

Alors :  $(q_1 \times \mu'_1)(\phi(x; y)) = (b \times \mu'_1)(\phi(x; y)) = \mu'_1(\phi(x; b)) = \mu_1(\phi(x; b))$ . Mais d'autre part  $q_1 \times \mu'_1 = q_1 \otimes \mu'_1$ . Comme  $q_1$  est  $M$ -invariant et que  $\mu'_1|_M = \mu$ , on a  $(q_1 \otimes \mu'_1)|_M = (q_1 \otimes \mu)|_M = (\mu \otimes q_1)|_M$ . Ainsi  $(\mu \otimes q_1)|_M(\phi(x; y)) \neq (\mu \otimes q_2)|_M(\phi(x; y))$ . Mais  $q_1|_M = q_2|_M = \text{tp}(b/M)$ . Absurde.  $\square$

## 5.5 La rétraction canonique pour les mesures

Nous avons défini plus haut une rétraction canonique de l'espace des types invariants (sur  $M$ ) vers l'espace des types finiment satisfaisables (dans  $M$ ). Cette rétraction canonique peut en fait aussi être définie pour les mesures. Pour cela, deux pistes sont envisageables. La première, qui pourrait sembler plus naturelle au vu de ce qui précède où les résultats sur les mesures étaient essentiellement des traductions de résultats sur les types, serait d'imiter la construction. Cependant, cette approche est ici difficile - bien qu'elle fonctionne - et nous allons donc nous en tenir à la seconde méthode. Celle-ci consiste simplement à pousser en avant la rétraction canonique, en posant :

**Définition 21.** Soit  $\mu$  une mesure globale  $M$ -invariante. On pose  $F_M(\mu) := (F_M)_*\mu$ .

On peut alors vérifier que de nombreuses propriétés de la rétraction canonique qui étaient vérifiées pour les types restent vraies : la continuité, le fait d'être une rétraction de l'espace des mesures invariantes vers celui des mesures finiment satisfaisables... Et aussi :

**Théorème 4.** *Soit  $\mu$  une mesure  $M$ -invariante. Elle est définissable si et seulement si  $\mu \otimes F_M(\mu) = F_M(\mu) \otimes \mu$ .*

## Références

- [1] John BALDWIN. *The Monster Model*. 2010. URL : <https://homepages.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/monster.pdf>.
- [2] A. CHERNIKOV et P. SIMON. « Definably amenable NIP groups ». In : *Journal of the American Mathematical Society* (2018). URL : <https://arxiv.org/abs/1502.04365>.
- [3] Artem CHERNIKOV, Anand PILLAY et Pierre SIMON. « External definability and groups in NIP theories ». In : *Journal of the London Mathematical Society* 90.1 (juin 2014), p. 213-240. DOI : 10.1112/jlms/jdu019.
- [4] Kyle GANNON. « Local Keisler measures and NIP formulas ». In : *The Journal of Symbolic Logic* 84.3 (juin 2019), p. 1279-1292. DOI : 10.1017/jsl.2019.34.
- [5] E. HRUSHOVSKI, A. PILLAY et P. SIMON. « Generically stable and smooth measures in NIP theories ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 365 (fév. 2010). DOI : 10.1090/S0002-9947-2012-05626-1.
- [6] David MARKER. *Model Theory : An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. 2002.
- [7] Pierre SIMON. *A Guide to NIP Theories*. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2015. DOI : 10.1017/CB09781107415133.
- [8] Pierre SIMON. « Invariant types in NIP theories ». In : *Journal of Mathematical Logic* 15.02 (déc. 2015), p. 1550006. DOI : 10.1142/s0219061315500063.
- [9] K. TENT et M. ZIEGLER. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic. 2012.