

Extension brownienne d'un théorème central limite pour la fonction zêta de Riemann

Rapport de stage

Louis Vassaux

Encadrant : Paul Bourgade
Effectué au Courant Institute of Mathematical Sciences
Du 7 avril au 1 juillet 2023

Table des matières

1	Contexte mathématique du problème	2
1.1	La fonction zêta de Riemann	2
1.2	Le théorème central limite de Selberg	3
1.3	Avancées récentes autour du TCL de Selberg	4
1.4	Résultat principal et applications	5
2	Tension et équicontinuité	6
2.1	Convergence en loi de fonctions aléatoires	6
2.2	Les intégrales de contour peuvent-elles résoudre tous les problèmes?	6
2.3	Le critère de Kolmogorov	7
3	Contrôle de la fonction ζ	8
3.1	Schéma général de la preuve	9
3.2	Comportement des séries de Dirichlet	9
3.3	Autour du lemme de Selberg	10
4	Conclusion	11
	Références	12

Ce stage s'est déroulé au Courant Institute of Mathematical Sciences (département de mathématiques de New York University) sous la direction de Paul Bourgade. Il a duré du 7 avril au 1 juillet, mais mon travail sur ce problème a commencé plus tôt (début mars) et je continue à travailler sur le problème actuellement. J'ai réussi, avec l'aide du Pr. Bourgade, à démontrer un résultat nouveau (énoncé plus loin) sur la fonction zêta, et je compte le publier : j'ai un papier en cours d'écriture.

1 Contexte mathématique du problème

1.1 La fonction zêta de Riemann

En théorie analytique des nombres, la fonction zêta de Riemann est un objet fondamental. Elle est définie, pour $\operatorname{Re} s > 1$, par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

et admet un unique prolongement méromorphe au plan complexe (avec un pôle en 1). Cette deuxième expression, le produit eulérien, permet d'établir des liens très forts entre le comportement de la fonction ζ et la distribution des nombres premiers.

Lorsque $\operatorname{Re} s > 1$, le comportement de ζ est très bien compris puisqu'on a une définition explicite très pratique sur laquelle s'appuyer. Par ailleurs, la fonction ζ vérifie une équation fonctionnelle fondamentale :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Cette équation fournit une symétrie de ζ par rapport à la droite $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, appelée **axe critique** dans le cadre de cette fonction. Ainsi, la fonction est bien comprise pour $\operatorname{Re} s < 0$, et on se ramène à la **bande critique** $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, où la fonction est beaucoup moins bien comprise.

Le problème le plus étudié dans ce cadre est la position des racines de la fonction. L'équation fonctionnelle démontre de manière immédiate l'existence de zéros, dits triviaux, en $-2k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, mais il existe aussi des racines, dites non-triviales, à l'intérieur de la bande critique. La fameuse hypothèse de Riemann affirme que toutes ces racines non-triviales sont sur l'axe critique : elle a été vérifiée pour $|\operatorname{Im} s| < 10^{12}$ mais reste à ce jour une conjecture. De manière générale, la fonction ζ a un comportement très erratique dans la bande critique et particulièrement proche de l'axe critique : les résultats les plus forts connus sur les zéros sont des résultats de densité asymptotique.

Ce comportement erratique mène assez naturellement à une approche probabiliste du problème : peut-on considérer $\zeta(\sigma + it)$ comme un processus aléatoire lorsque t est très grand ? Un résultat fondamental sur ce plan vient de Selberg [6] en 1946, qui démontre que $\log \zeta(\frac{1}{2} + it)$ se comporte comme une loi normale centrée, de variance $\frac{1}{2} \log \log t$, pour t aléatoire grand. Il y a depuis eu beaucoup d'extensions de ce théorème et d'autres résultats probabilistes sur la fonction ζ : certains de ces résultats, ainsi qu'un grand nombre de calculs numériques, ont même mis en évidence un potentiel lien entre la théorie de la fonction ζ et celle des matrices aléatoires. Ce lien ne sera cependant pas exploré ici : le sujet de ce rapport et de ce stage est une nouvelle extension brownienne du théorème central limite de Selberg.

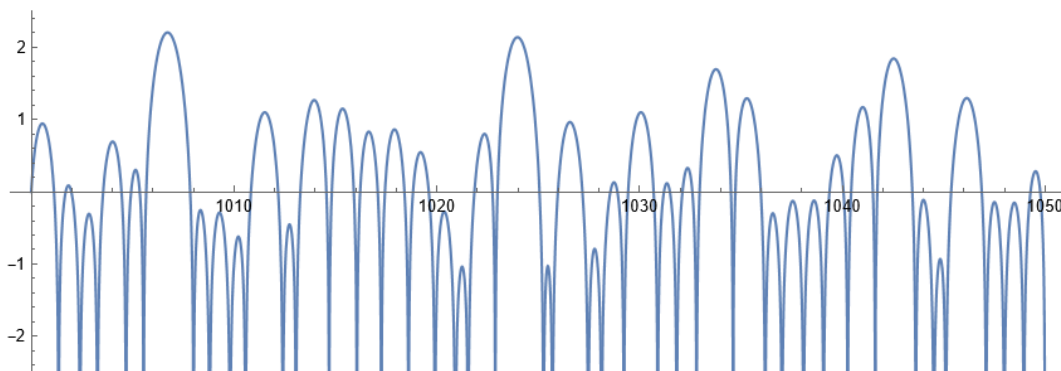


FIGURE 1 $1 - \log |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ pour $1000 \leq t \leq 1050$.

1.2 Le théorème central limite de Selberg

Ici et dans la suite du rapport, on définit $\log \zeta$ sur le domaine $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{\rho} \{\rho + \mathbb{R}_-\}$, où ρ parcourt tous les zéros de la fonction ζ , et la valeur 1. En imposant que $\log \zeta \in \mathbb{R}$ sur $]1, +\infty[$, la fonction est ainsi bien définie sur ce domaine, et est presque sûrement bien définie dans tous les contextes probabilistes à suivre.

Théorème 1 (Selberg, 1946). *Pour $T > 0$, soit $Z_T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \log \zeta(\frac{1}{2} + i\tau)$, où τ est une variable aléatoire uniforme sur $[T, 2T]$. Alors, Z_T converge en loi vers une loi normale centrée réduite sur \mathbb{C} .*

Ce théorème n'est en réalité pas surprenant : voyons pourquoi. Il est connu [4] que, si $s = \sigma + it$ avec $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq t} \frac{1}{n^s} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

et, de la même manière, on pourrait espérer que

$$\zeta(s) \approx \prod_{p \leq t \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \text{ et donc } \log \zeta(s) \approx \sum_{p \leq t} \frac{1}{p^s}$$

Si c'était le cas, alors en considérant les $p^{-i\tau}$ comme étant indépendents et suivant une loi uniforme sur le cercle unité, on en arrive au résultat souhaité. Le point difficile, cependant, est de lier $\log \zeta$ et cette somme sur les nombres premiers ; proche de l'axe critique, les racines de ζ affectent la valeur de $\log \zeta$ d'une manière qui est difficile à contrôler.

La formule suivante, due à Landau, est valable pour tout $x > 1$:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{\rho-s} + \frac{x^{1-s}}{1-s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s} \quad (1)$$

Ici, $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^k$; $\Lambda(n) = 0$ sinon. Cette formule est prometteuse, mais la somme sur les zéros ne converge pas absolument, rendant les choses difficiles. Une des idées importantes de Selberg dans sa démonstration a été de modifier cette formule pour la rendre plus exploitable :

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = & - \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s} + \frac{1}{\log^2 x} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}(1-x^{\rho-s})^2}{(s-\rho)^3} \\ & + \frac{1}{\log^2 x} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{-2n-s}(1-x^{-2n-s})^2}{(2n+s)^3} + \frac{x^{1-s}(1-x^{1-s})^2}{(1-s)^2 \log^2 x} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{où, cette fois, } \Lambda_x(n) = \begin{cases} \Lambda(n) & \text{si } n \leq x \\ \Lambda(n) \frac{\log^2 \frac{x^3}{n} - 2 \log^2 \frac{x^2}{n}}{\log^2 n} & \text{si } x \leq n \leq x^2 \\ \Lambda(n) \frac{\log^2 \frac{x^3}{n}}{\log^2 n} & \text{si } x^2 \leq n \leq x^3 \end{cases}$$

Avec du travail, cette formule mollifiée permet de quantifier l'impact des zéros sur $\log \zeta$ proche de l'axe critique et de démontrer le théorème central limite.

1.3 Avancées récentes autour du TCL de Selberg

Une autre approche qu'on pourrait envisager serait de prendre l'approximation de ζ par des sommes partielles, et de directement en déduire une approximation de $\log \zeta$. C'est exactement ce qu'ont fait Radziwill et Soundararajan dans un papier récent [5] pour trouver une preuve plus élémentaire du théorème de Selberg. Cependant, le papier ne démontre le théorème que pour $\text{Re} \log \zeta$, puisqu'ils n'arrivent à cerner $\text{Im} \log \zeta$ qu'à $2ik\pi$ près. Ce papier a été assez important - les techniques employées ont été réutilisées depuis dans d'autres études de ζ - et le projet initial dans ce stage était d'adapter ces techniques à une extension brownienne du théorème. Cependant, les outils originaux de Selberg, très puissants, se sont révélés plus utiles (et à même de traiter $\text{Im} \log \zeta$).

Un autre résultat important démontré récemment vient de Paul Bourgade [1], qui a donné une extension multidimensionnelle du théorème de Selberg en s'écartant légèrement de l'axe critique. Si l'on regarde le comportement de $\zeta(\sigma + it)$, il y a deux régimes différents qui émergent : le régime $\sigma = \frac{1}{2}$, où le théorème central limite de Selberg s'applique, et le régime $\sigma > \frac{1}{2}$, où la fonction ζ reste typiquement $O(1)$. Le théorème suivant décrit la transition entre ces deux régimes.

Théorème 2 (Bourgade, 2009). *Soient $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 1$. Considérons le vecteur aléatoire*

$$Z_T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \left(\log \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log T)^{\alpha_1}} + i\tau\right), \dots, \log \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log T)^{\alpha_n}} + i\tau\right) \right)$$

où τ suit une loi uniforme sur $[T, 2T]$. Alors, Z_T converge en loi vers un vecteur gaussien (Y_1, \dots, Y_n) centré, vérifiant $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \alpha_i$ pour tout $i \leq j$.

Notons que pour $\alpha > 1$, il n'y a pas vraiment besoin d'étudier la question : dans cette région, la dérivée de $\log \zeta$ est (plus ou moins) bornée par $\log T$ et donc ses variations sont négligeables.

On peut constater que les covariances en question ressemblent étrangement à celles du mouvement brownien. La question suivante se pose alors : si l'on considère la fonction aléatoire

$$\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \log \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log T)^\alpha} + i\tau\right)$$

est-ce qu'elle converge en loi vers le mouvement brownien complexe ? L'objectif du stage a été de répondre à cette question.

1.4 Résultat principal et applications

Théorème 3. *Si $T > 0$, soit $\tau \in [T, 2T]$ une variable aléatoire uniforme. Alors, la fonction aléatoire*

$$Z^{(T)} : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \log \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log T)^\alpha} + i\tau\right) \end{array}$$

converge en loi vers un mouvement brownien, dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$.

Comme on le verra dans les sections suivantes, ce théorème est plus fort que la simple convergence des lois fini-dimensionnelles : il requiert une certaine forme d'équicontinuité des $Z^{(T)}$. Il a aussi un certain nombre de conséquences sur le comportement de ζ à cette échelle.

Corollaire 1 (Loi de l'arcsinus). *Soit $T > 0$: on définit, sur $[\frac{1}{\log T}, 1]$, la mesure μ_T par*

$$d\mu_T(\sigma) = \frac{1}{\sigma \log \log T} d\lambda(\sigma)$$

Alors, si $\tau \in [T, 2T]$ est une variable aléatoire uniforme, la variable aléatoire

$$M_T = \mu_T\left\{x \in \left[\frac{1}{\log T}, 1\right], \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + x + i\tau\right)\right| \geq 1\right\}$$

tend vers une loi de l'arcsinus ie. $\mathbb{P}(M_T \leq y) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{y}$.

Corollaire 2 (Principe de réflexion). *On définit, pour $t \geq 1$,*

$$S_t = \sup_{\sigma \geq \frac{1}{2}} |\zeta(\sigma + it)|$$

Alors, si $\tau \in [T, 2T]$ est une variable aléatoire uniforme, $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \log S_\tau$ tend vers la valeur absolue d'une gaussienne centrée réduite.

Ces deux corollaires suivent des théorèmes du même nom sur le mouvement brownien. De cette manière, on voit bien que le théorème n'affirme pas juste que la fonction zêta se comporte de manière volatile dans la région examinée : la convergence vers le mouvement brownien a de réelles conséquences pour la structure statistique des variations de ζ . On pourrait lister d'innombrables autres corollaires du même type pour ce théorème, venant de théorèmes similaires sur le mouvement brownien.

2 Tension et équicontinuité

2.1 Convergence en loi de fonctions aléatoires

Soit B un mouvement brownien. Pour démontrer que $Z^{(T)}$ converge bien en loi vers B , il suffit de montrer que :

- si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$, $(Z^{(T)}(\alpha_1), \dots, Z^{(T)}(\alpha_n))$ converge en loi vers $(B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n})$;
- la suite $(Z^{(T)})$ est tendue.

Le premier résultat est déjà connu : c'est le second qui nous intéresse ici. En appliquant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut ainsi voir que l'assertion principale à démontrer est la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists \eta > 0, \forall T > 0,$$

$$\mathbb{P}(\forall \alpha, \alpha' \in [0, 1], |\alpha - \alpha'| \leq \eta \implies |Z^{(T)}(\alpha) - Z^{(T)}(\alpha')| \leq \delta) \geq 1 - \varepsilon$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, on veut isoler $X_\varepsilon^{(T)} \subseteq [T, 2T]$ de mesure au plus εT tel que la famille $\{Z^{(T)} \mathbb{1}_{\tau \notin X_\varepsilon^{(T)}} | T > 0, \tau \in [T, 2T]\}$ est équicontinue.

Le point difficile ici est l'uniformité en α : on a de la marge pour jeter certaines valeurs de τ , mais le contrôle des variations de $Z^{(T)}$ doit se faire de manière uniforme sur tout $[0, 1]$. Le but des outils suivants était donc de simplifier le problème en trouvant des manières de traiter les différentes variables séparément.

2.2 Les intégrales de contour peuvent-elles résoudre tous les problèmes ?

Malheureusement, non.

La première méthode envisagée pour démontrer la tension consistait à ramener le problème au comportement de $\log \zeta(\frac{1}{2} + it)$ via une intégrale de contour. Cette méthode s'inspire du traitement de certains « Ω -théorèmes » [3] où des intégrales de type $\int f(t) \arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ sont estimées ; ce type d'intégrales apparaît naturellement dans l'étude de notre problème (cf. la formule (3) plus loin).

On se fixe $\tau \in [T, 2T]$, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$, et on note $\sigma_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\log T)^{\alpha_i}}$. Pour établir la tension, on veut borner $|\log \zeta(\frac{1}{2} + \sigma_1 + i\tau) - \log \zeta(\frac{1}{2} + \sigma_2 + i\tau)|$. Pour cela, notons que

$$\log \zeta(s) - \log \zeta(s') = \int_{\mathcal{R}} \log \zeta(z) \left(\frac{1}{z-s} - \frac{1}{z-s'} \right) dz$$

où \mathcal{R} est un rectangle¹ de sommets $\frac{1}{2} + i(\tau \pm A)$ et $\frac{3}{2} + i(\tau \pm A)$, pour un certain A grand. Si on considère les intégrales sur les quatre bords, trois d'entre eux sont négligeables et on en vient à étudier

$$\int_{-A}^A \log \zeta\left(\frac{1}{2} + i(\tau + t)\right) \left(\frac{1}{\sigma_1 + it} - \frac{1}{\sigma_2 + it} \right) dt = -i \int_{-A}^A \eta_1(t + \tau) \left(\frac{1}{(\sigma_1 + it)^2} - \frac{1}{(\sigma_2 + it)^2} \right) dt$$

$$\text{où } \eta_1(u) = \int_0^u \log \zeta\left(\frac{1}{2} + iv\right) dv.$$

L'introduction de η_1 permet d'amortir les oscillations de $\log \zeta$: en particulier, la différence entre η_1 et sa série de Dirichlet associée est beaucoup plus facile à contrôler que pour $\log \zeta$ (au sens L^p), et a par exemple été étudiée dans [2]. En appliquant ensuite une inégalité de Hölder, on peut borner l'intégrale en question.

Malheureusement, la borne obtenue explose dès que $\sigma_1 - \frac{1}{2} \leq \frac{\log \log T}{\log T}$: on arrive seulement à montrer que $Z^{(T)}$ converge vers un mouvement brownien sur les fermés de $[0, 1[$. Aussi proche de l'axe critique, on ne peut pas espérer simplement ignorer la contribution des racines de ζ : il faut la contrôler de façon sensiblement plus fine.

2.3 Le critère de Kolmogorov

Finalement, la méthode adaptée pour démontrer la tension de cette suite de fonctions s'est trouvée être le critère suivant :

Théorème 4 (Critère de Kolmogorov généralisé). *Soient $(f_t)_{t>0} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions aléatoires continues telles que $(f_t(\alpha_0))_t$ est bornée pour un certain α_0 . On se fixe $A > 0, B > 1$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, et $t > 0$ assez grand, il existe un événement $X_{\varepsilon, t}$ de probabilité au moins $1 - \varepsilon$ tel que*

$$\forall x, y \in [0, 1], \mathbb{E}[|f_t(x) - f_t(y)|^A \mathbb{1}_{X_{\varepsilon, t}}] \ll_{\varepsilon} |x - y|^B$$

Alors, la suite (f_t) est tendue dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

Ce critère est particulièrement utile ici : il élimine la dépendance en τ d'une manière très pratique, puisque si on se fixe une abscisse les moments d'ordre A de $\log \zeta$ sont assez bien compris.

Démonstration. On se fixe $\varepsilon > 0$: il s'agit de démontrer que f_t reste dans un compact de \mathcal{C}^0 avec probabilité $1 - \varepsilon$. Quitte à changer ε en 2ε et f_t en $f_t \mathbb{1}_{X_{\varepsilon, t}}$, on peut donc supposer que

$$\forall x, y \in [0, 1], \mathbb{E}[|f_t(x) - f_t(y)|^A] \leq C|x - y|^B$$

On va chercher à contrôler la norme γ -Hölderienne de f_t :

$$\|\varphi\|_{\gamma} = |\varphi(\alpha_0)| + \sup_{0 \leq x, y \leq 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{\gamma}}$$

Pour cela, on va se ramener à contrôler sa restriction aux dyadiques

1. Il faut en fait modifier \mathcal{R} pour contourner les racines de ζ , sinon le logarithme n'est pas bien défini.

$$\|\varphi\|_\gamma^{\mathcal{D}} = |\varphi(\alpha_0)| + \sup_{\substack{n \geq 1 \\ 0 \leq k \leq 2^n - 1}} \frac{|\varphi(\frac{k+1}{2^n}) - \varphi(\frac{k}{2^n})|}{(\frac{1}{2^n})^\gamma}$$

puisque $\|\varphi\|_\gamma \leq 2(1 - 2^{-\gamma})\|\varphi\|_\gamma^{\mathcal{D}}$. Ainsi, si l'on se fixe $n > 0$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$, et $t, M > 0$, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|f_t(\frac{k+1}{2^n}) - f_t(\frac{k}{2^n})| > \frac{M}{2^{\gamma n}}) &\leq \frac{2^{A\gamma n}}{M^A} \mathbb{E}[|f_t(\frac{k+1}{2^n}) - f_t(\frac{k}{2^n})|^A] \\ &\leq \frac{1}{M^A} 2^{(A\gamma - B)n} \end{aligned}$$

Soit M' majorant les $f_t(\alpha_0)$. Si $\gamma < \frac{B-1}{A}$, on peut alors sommer sur les dyadiques :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|f_t\|_\gamma^{\mathcal{D}} \leq M + M') &\leq \sum_{k,n} \mathbb{P}(|f_t(\frac{k+1}{2^n}) - f_t(\frac{k}{2^n})| > \frac{M}{2^{\gamma n}}) \\ &\leq \frac{1}{M^A} \frac{2^{1+A\gamma-B}}{1 - 2^{1+A\gamma-B}} \end{aligned}$$

Ainsi, avec probabilité $1 - \varepsilon$, f_t est bornée par un certain M_ε pour $\|\cdot\|_\gamma$. La boule unité pour cette norme est compacte dans \mathcal{C}^0 , ce qui conclut. \square

Essentiellement, ce critère utilise le comportement « $\frac{B}{A}$ -Hölderien » (en un sens probabiliste assez faible) des f_t pour contrôler leurs variations uniformément et établir leur tension. Dans le contexte de $\log \zeta$, comme on souhaite établir une convergence vers le mouvement brownien qui n'est γ -Hölderien pour aucun $\gamma \geq \frac{1}{2}$, on ne peut pas espérer prendre $\frac{B}{A} > \frac{1}{2}$: on prendra ainsi $A = 4, B = 2$ dans la suite.

Le critère de Kolmogorov originel ne fait pas intervenir d'évènement $X_{\varepsilon,t}$: il a fallu le rajouter pour traiter le cas de ζ . Son rôle exact sera expliqué dans la suite.

3 Contrôle de la fonction ζ

Dans cette section, on se fixe $T > 0$: on souhaite montrer que, si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$,

$$\mathbb{E}[|Z^{(T)}(\alpha_1) - Z^{(T)}(\alpha_2)|^4 \mathbb{1}_{X_{\varepsilon,T}}] \ll_\varepsilon (\alpha_2 - \alpha_1)^2$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où $X_{\varepsilon,T}$ est à définir. Autrement dit, on doit montrer que si $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log T} \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq \frac{3}{2}$,

$$\mathbb{E}[|\log \zeta(\sigma_2 + it) - \log \zeta(\sigma_1 + it)|^4 \mathbb{1}_{X_{\varepsilon,T}}] \ll_\varepsilon (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\log \log T)^2$$

où $\sigma_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\log T)^{\alpha_i}}$. L'espérance ici est prise pour $t \in [T, 2T]$ uniforme.

3.1 Schéma général de la preuve

Comme déjà mentionné, la preuve ici est inspirée de l'approche originelle de Selberg pour démontrer son théorème central limite. Dans le domaine qui nous intéresse, la fonction $\log \zeta$ est la somme de deux composantes : une somme sur les nombres premiers qu'on contrôle relativement bien, et une erreur liée aux racines de la fonction ζ .

La formule qu'on utilise principalement ici est un lemme clé de Selberg, qu'il utilise dans la démonstration de son théorème central limite :

Lemme 1. *Soit $t \geq 2$, et fixons $2 \leq x \leq t^2$. On pose*

$$\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2 \max_{\rho} \left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{2}{\log x} \right)$$

où ρ parcourt l'ensemble des racines $\beta + i\gamma$ de la fonction ζ tels que $|t - \gamma| \leq \frac{x^{3|\beta - \frac{1}{2}|}}{\log x}$.

Alors, si $\sigma \geq \sigma_{x,t}$,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = - \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma+it}} + x^{\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}} O \left(\left| \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}+it}} \right| + \log t \right)$$

Pour des raisons qu'on donnera plus loin, on fixe dans la suite $x = T^{\frac{1}{13}}$.

Idéalement, on voudrait appliquer ce lemme pour $\sigma \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\log T}$: c'est le domaine sur lequel on a besoin de contrôler $\log \zeta$. Malheureusement, $\sigma_{x,t}$ peut a priori être très grand, ce qui limite fortement le domaine d'application du lemme. Pour éviter ce problème, on va simplement se débarrasser de certaines valeurs de t où $\sigma_{x,t}$ est trop grand.

Lemme 2. *On définit, pour $\varepsilon > 0$,*

$$Y_{\varepsilon} = \bigcup_{\rho} \left[\gamma - \varepsilon \frac{x^{4\beta}}{\log T}, \gamma + \varepsilon \frac{x^{4\beta}}{\log T} \right]$$

où $\rho = \beta + i\gamma$ parcourt toutes les racines non-triviales de ζ . Alors :

- la mesure de $Y_{\varepsilon} \cap [T, 2T]$ est $O(\varepsilon T)$;*
- si $t \in [T, 2T] \setminus Y_{\varepsilon}$, alors $\sigma_{x,t} \leq \frac{C_{\varepsilon}}{\log T}$ pour un certain C_{ε} indépendant de T .*

Ce lemme suit de la définition de $\sigma_{x,t}$, et d'un résultat de densité sur les racines de ζ dû à Selberg.

Ainsi, on prendra ici $X_{\varepsilon,T} = \{t \notin Y_{\varepsilon}\}$: le lemme 1 permet ainsi de contrôler $\log \zeta$ jusqu'à $\frac{C_{\varepsilon}}{\log T}$. Avec un peu plus de travail, on peut montrer que $\frac{\zeta'}{\zeta}$ ne dévie pas trop (en moyenne) entre $\frac{C_{\varepsilon}}{\log T}$ et $\frac{1}{\log T}$, permettant d'étendre le contrôle jusqu'à $\frac{1}{\log T}$.

3.2 Comportement des séries de Dirichlet

Plus tôt, on a justifié le théorème central limite en supposant que les p^{it} se comportaient comme des variables aléatoires indépendantes uniformes sur le cercle unité. Bien que cette

affirmation soit intuitive, il n'est pas évident de savoir comment on en ferait un argument formel (en particulier pour l'indépendance) et en réalité ce n'est pas exactement l'argument utilisé pour étudier $\sum_p p^{-\frac{1}{2}-it}$. L'application du lemme 1 ici pose le même type de problème, à savoir le contrôle (bien que plus précis) d'une série de Dirichlet similaire.

La façon la plus simple de contourner ce souci est par un calcul de moments, qui se déroule particulièrement bien comme on va le voir. L'utilisation du critère de Kolmogorov devient ainsi d'autant plus pertinente : ce genre de calculs de moments efface la forte volatilité en t de $\log \zeta(\sigma + it)$.

Illustrons cette méthode. On va estimer

$$\mathbb{E}[|S(t)|^{2k}], \text{ où } k > 0 \text{ et } S(t) = \sum_{p \leq t^\varepsilon} \frac{1}{p^{\frac{1}{2}+it}}$$

Dans ce genre de situations, ε est typiquement soit une constante très faible, soit une fonction de T (typiquement de l'ordre de $\frac{1}{\log \log \log T}$). Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|S(t)|^{2k}] &= \sum_{p_1, \dots, p_k, p'_1, \dots, p'_k \leq t^\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(\prod_i p_i)(\prod_i p'_i)}} \mathbb{E} \left[\left(\frac{p'_1 \dots p'_k}{p_1 \dots p_k} \right)^{it} \right] \\ &= \sum_{\prod_i p_i = \prod_i p'_i} \frac{1}{\prod_i p_i} + \frac{O(1)}{T} \sum_{\prod_i p_i \neq \prod_i p'_i} \frac{1}{\sqrt{(\prod_i p_i)(\prod_i p'_i)}} \left(\log \frac{p'_1 \dots p'_k}{p_1 \dots p_k} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Si $\varepsilon \leq \frac{1}{2k}$, le second terme est négligeable et on montre que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|S(t)|^{2k}] &= k! \sum_{p_1, \dots, p_k \leq t^\varepsilon} \frac{1}{\prod_i p_i} + O_k((\log \log T)^{k-1}) \\ &\sim k!(\log \log T)^k \end{aligned}$$

correspondant bien aux moments d'une gaussienne (complexe).

Dans le cadre d'application ici, où on veut vérifier l'hypothèse du critère de Kolmogorov, k est fixé (égal à 2) mais l'argument est tout de même nettement plus compliqué. Il y a une étape supplémentaire assez délicate pour traiter les termes résiduels, puisqu'on doit montrer qu'ils sont $O_\varepsilon((\alpha_2 - \alpha_1)(\log \log T)^2)$ même lorsque $\alpha_2 - \alpha_1$ est très faible.

3.3 Autour du lemme de Selberg

En réalité, le lemme de Selberg énoncé plus haut contient toutes les informations nécessaires pour établir le lien entre $\log \zeta$ et les séries de Dirichlet associées : il est donc pertinent de s'attarder dessus.

Selberg se base sur l'équation (2), mais pour illustrer on va utiliser la formule suivante², un peu plus simple mais très similaire :

2. Λ_x est ici défini de manière légèrement différente.

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s} + \frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s} - x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2} + \frac{1}{\log x} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n-s} - x^{2(2n-s)}}{(2n+s)^2} + \frac{x^{2(1-s)} - x^{1-s}}{(1-s)^2 \log x}$$

Les deux derniers termes sont négligeables dans ce cadre et on doit ainsi contrôler le second terme. Cependant, estimer cette somme est difficile, même si on suppose l'hypothèse de Riemann ! Une approche naturelle serait d'utiliser la formule suivante donnant la position des racines :

$$\mathcal{N}(t) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi e} + \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) + O(1) \quad (3)$$

où $\mathcal{N}(t) = \#\{\rho \text{ racine de } \zeta, 0 < \text{Im } \rho \leq t\}$. Si les racines sont distribuées de manière raisonnable, on peut contrôler cette série sans problème : malheureusement, la présence de $\arg \zeta$ mène à un raisonnement circulaire.

Une autre manière de comprendre ce qui se passe est en notant que

$$\left| \frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s} - x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2} \right| \approx \frac{x^{-\sigma}}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{\beta}}{(\gamma-t)^2 + (\beta-\sigma)^2}$$

où $\rho = \beta + i\gamma$ et $s = \sigma + it$. L'espérance en t de cette somme se contrôle très bien, mais les moments d'ordres supérieurs peuvent être très grands si les zéros sont trop proches les uns des autres. (Notons que même sous cette approche, il faudrait introduire l'ensemble Y_{ε} pour éviter des singularités liées aux racines en dehors de l'axe critique.)

L'idée principale de Selberg est de remarquer que cette somme peut être reliée à $\frac{\zeta'}{\zeta}$, par la formule

$$\text{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \frac{(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + (\gamma - t)^2} + O(\log t)$$

On pourrait craindre un nouvel argument circulaire, mais si $x^{-\sigma}$ est assez faible il n'y a pas de compensations. Sous l'hypothèse de Riemann, l'argument est essentiellement terminé ; sans celle-ci, il faut introduire $\sigma_{x,t}$ et l'argument requiert un grand nombre de modifications techniques pour tenir.

4 Conclusion

Ainsi, la fonction $\log \zeta$ a bien un comportement brownien dans la zone de transition étudiée, comme suggéré par les résultats récents de distributions fini-dimensionnelles sur $\log \zeta$. On a ainsi toujours plus d'informations sur le comportement statistique de cette fonction, et certains corollaires de ce nouveau théorème donnent des informations immédiatement exploitables sur $\log \zeta$ (ie. la loi de l'arcsinus). Comme mentionné précédemment, je compte publier ce résultat bientôt.

J'aimerais remercier Paul Bourgade pour son aide sur ce problème - sans lui, je n'aurais jamais pu arriver au résultat que j'ai obtenu, et il m'a aidé à de multiples reprises pour faire remarquer des erreurs ou suggérer des pistes de preuve. Je remercie également le CIMS pour m'avoir accueilli pour la durée de ce stage.

Références

- [1] Paul BOURGADE. « Mesoscopic fluctuations of the zeta zeros ». In : *Probability Theory and Related Fields* 148 (2010), p. 479-500. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00440-009-0237-3>.
- [2] Shōta INOUE. *On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals*. 2019. arXiv : 1909.03643 [math.NT].
- [3] Anatolii KARATSUBA et M. KOROLEV. « The argument of the Riemann zeta function ». In : *Russian Mathematical Surveys* 60 (2005), p. 433-488. DOI : 10.1070/RM2005v060n03ABEH000848.
- [4] Konrad KNOPP. In : *The Theory of Functions pt II*. Dover Publications, 1945, p. 51-55.
- [5] Maksym RADZIWIŁŁ et Kannan SOUNDARARAJAN. *Selberg's central limit theorem for $\log |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$* . 2015. arXiv : 1509.06827 [math.NT].
- [6] Atle SELBERG. « Contributions to the theory of the Riemann zeta-function ». In : *Arkiv for Matematik og Naturvidenskab* 48.5 (1946), p. 89-155.