

Classification des groupes de Lie par la probabilité de retour des marches aléatoires

Nathan de Montgolfier

18 août 2023

Table des matières

0	Introduction	1
1	Marche aléatoires sur un groupe de Lie	2
2	Classification des groupes de Lie par les marches aléatoires	6
3	Preuve de la classification pour les groupes moyennables	12
4	Peut-on avoir un résultat plus précis sur les groupes déformants ?	20
A	Un peu de structure des groupes de Lie	21
B	Moyennabilité sur les groupes de Lie	21
C	Mesure de Haar	22
D	Quelques propriétés des groupes déformants et non-déformants au sens probabiliste	23
E	Des réductions algébriques	25
F	Simulations sur $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$	26

0 Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux marches aléatoires sur des groupes de Lie. L'étude des marches aléatoires sur des groupes a de nombreuses motivations : étude des mélanges de cartes, des phénomènes de diffusion, compréhension de la géométrie des groupes, ... Les marches aléatoires sur les groupes sont également une généralisation naturelle de l'étude des marches aléatoires sur \mathbb{R}^d . Avec cette généralisation se pose naturellement la question de la convergence des marches aléatoires : à quelle condition peut-on espérer un théorème de la limite centrale sur un groupe ? Peut-on obtenir des informations sur le comportement local des marches aléatoires ? C'est sur cette seconde question que nous nous penchons dans ce document. Plus précisément, nous cherchons à comprendre comment évolue la probabilité qu'une marche aléatoire se trouve dans un ensemble fixé au cours du temps. Sur \mathbb{R} , le théorème de la limite locale fournit une réponse précise à cette question :

Théorème 0.1. *Théorème de la limite locale sur \mathbb{R}*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, i.i.d, centrées et de variance finie σ^2 et $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On suppose que le support de X_1 n'est pas contenu dans un réseau (c'est à dire un sous groupe discret de \mathbb{R}). Pour tout $a < b$,

$$\sqrt{2\pi n} \mathbb{P}(S_n \in [a, b]) \rightarrow \frac{b-a}{\sigma}$$

quand $n \rightarrow \infty$.

On peut trouver une preuve de ce théorème dans [4] (théorème 10.17). Un cas particulier de cette question est la question de la probabilité de retour à l'origine. On retrouve ici le résultat bien connu suivant : la marche aléatoire centrée en dimension 1 a une probabilité de l'ordre de $\frac{C}{\sqrt{n}}$ d'être proche de son point de départ après n pas. En dimension plus grande, le résultat se généralise ainsi : une marche aléatoire centrée et de variance finie a une probabilité de l'ordre de $\frac{C}{n^{d/2}}$ d'être dans un voisinage de 0 après n pas.

Sur un groupe, le comportement de la probabilité de retour à l'origine dépend de la géométrie du groupe. La probabilité de retour d'une marche aléatoire sur un groupe a été très étudiée. Le livre de Woess [17] recense de nombreux résultats pour les groupes discrets. Les groupes de Lie réels sont aussi un cadre intéressant pour étudier les marches aléatoires parce qu'on dispose de nombreux outils analytiques et algébriques pour décrire leur géométrie. Dans son livre [16], Varopoulos établit une classification des groupes de Lie en fonction du comportement des marches aléatoires et en donne une interprétation géométrique au moyen d'une condition sur l'algèbre de Lie du groupe. Notre objectif est de présenter cette classification et les idées principales des preuves de cette classification. Pour ce faire, certains points de preuve sont illustrés par des exemples et d'autres sont omis. Nous ne présentons pas ici de preuve complète de la classification. Une telle preuve peut être trouvée dans le livre de Varopoulos [16] aux

chapitres 2 à 5. Les mathématiques nécessaires pour établir cette classification sont très diverses ce qui fait la richesse du sujet. D'une part la théorie des groupes de Lie est sous-jacente. Nous utilisons ainsi plusieurs résultats algébriques sur la structure des groupes de Lie réels mais aussi analytiques notamment sur la mesure de Haar du groupe où les propriétés de l'exponentielle. D'autre part, l'étude des marches aléatoires sur des espaces vectoriels joue aussi un rôle crucial. Ainsi, nous aurons besoin d'estimer la probabilité qu'une marche aléatoire reste dans un cône fixé, ce qui fait intervenir des questions d'analyse harmonique mais aussi d'étudier la probabilité qu'une marche aléatoire réelle reste à chaque pas jusqu'au temps n proche de 0 et donc des phénomènes de grandes déviations.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un stage de 5 mois à l'université d'Oxford de février à juin 2023. J'ai été encadré par Emmanuel Breuillard que je souhaite remercier chaleureusement pour son aide précieuse tout au long de ce stage. L'objectif initial du stage était de comprendre le livre récent de Varopoulos [16]. Ce mémoire porte sur la première partie de ce livre, celle sur les marches aléatoires. Cette partie du livre est une synthèse des nombreux articles plus anciens (notamment les articles de Varopoulos [12], [13], [14] et [15] ou celui d'Alexopoulos [1]) qui ont permis d'établir la classification que propose Varopoulos. Après quelques mois à travailler sur ce livre, je me suis concentré sur des questions plus quantitatives comme celle évoquée dans le théorème 3.10 ou encore celle évoquée dans la section 4. De manière surprenante, ce dernier problème est lié à des questions de recherche actuelle sur les matrices de Toeplitz et j'ai eu l'occasion d'échanger par mail avec Sergei Grudsky qui m'a aidé à comprendre et utiliser l'article [5]. Je tiens aussi à remercier Alexandra Gurieva pour ses commentaires précieux. Ce document est structuré ainsi : la première section décrit le cadre des marches aléatoires sur les groupes de Lie et quelques outils généraux nécessaires pour comprendre leur comportement. La deuxième section décrit la classification et son interprétation géométrique. La troisième section donne les idées de la preuve de Varopoulos de cette classification. Enfin, la quatrième section évoque un autre problème abordé pendant ce stage que je ne peux pas développer ici. On trouvera en annexe les énoncés de quelques résultats utiles sur les groupes de Lie. Dans tout le mémoire C, C', c et c' désignent des constantes strictement positives qui peuvent prendre des valeurs différentes à chaque apparition.

1 Marche aléatoires sur un groupe de Lie

1.1 Marche aléatoire sur un groupe

Nous présentons ici le cadre des marches aléatoires sur les groupes que nous allons utiliser. Soit G un groupe. Soit μ une mesure de probabilités sur G . On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes. On note μ_i la loi de X_i . Une marche aléatoire est simplement la suite (S_n) formée par le produit des n premiers termes de la suite :

$$S_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

Par convention, on pose $S_0 = e$, l'élément neutre du groupe.

La loi de S_n est donnée par le produit de convolution $\mu_1 * \mu_2 \cdots * \mu_n$ défini par

$$\int_G f d\mu * \nu = \int_G \int_G f(xy) d\mu(x) d\nu(y)$$

pour toute fonction test.

La plupart du temps, on supposera la marche aléatoire homogène en temps, c'est à dire que tous les μ_i égaux et on notera μ la loi d'un pas de la marche mais pour des raisons techniques il est parfois utile de considérer des marches non-homogènes.

La question à laquelle nous nous intéressons est la suivante : comment se comporte la probabilité que S_n se trouve dans un voisinage compact fixé K de 1 quand $n \rightarrow \infty$?

1.2 Hypothèses et remarques préliminaires

Désormais, G désigne un groupe de Lie réel connexe. Certains résultats que nous utilisons sur les groupes de Lie peuvent être trouvés en annexe. Le lecteur ou la lectrice peu familier.e avec les groupes de Lie peut penser à G comme un groupe de la forme $G = \mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^m$, la classification est déjà intéressante dans ce cas. Nous ferons des remarques sur les groupes de cette forme tout au long de ce mémoire. Ces groupes sont décrits dans l'exemple 2.8. Un groupe de Lie est toujours muni d'une mesure de Borel invariante à gauche qui généralise la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . C'est la mesure de Haar à gauche, on notera simplement dx cette mesure (unique à une constante multiplicative près). On notera de même dx la mesure de Haar à droite. Le lecteur non familier avec la mesure de Haar peut consulter l'annexe C qui fournit quelques informations à ce sujet.

Sur la droite réelle, l'étude locale des marches aléatoires nécessite certaines hypothèses de régularité sur les mesures de probabilités considérées. Par exemple, d'éventuels phénomènes de périodicité compliquent l'énoncé du théorème de la limite locale pour des marches aléatoires sur un réseau. Il en va de même sur un groupe de Lie en général. Ainsi nous considérerons uniquement des marches aléatoires dont la loi μ de chaque pas vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèses 1.1.

- (i) μ est à support compact
- (ii) μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar (à gauche). On note alors ϕ sa densité par rapport à la mesure de Haar à gauche, c'est à dire : $d\mu(g) = \phi(g)dg$.
- (iii) ϕ est bornée par une constante C .
- (iv) Il existe un voisinage de e dans G sur lequel $\phi > c > 0$.

Les hypothèses (i) et (iii) permettent d'éviter des complications liées à la théorie de la mesure. Les hypothèses (ii) et (iv) permettent de s'assurer que les marches aléatoires considérées respectent la structure du groupe : le support de la marche aléatoire est le groupe tout entier et il n'y a pas de phénomènes de périodicité.

Pour des marches inhomogènes, c'est à dire quand la loi du pas peut dépendre de n , nous supposons que ces hypothèses sont vérifiées uniformément, c'est à dire avec les mêmes constantes, à support dans un même compact et bornée inférieurement dans un même voisinage de e .

Remarque 1.2. Un groupe de la forme $\mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^m$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ (par la fonction identité en oubliant la structure de groupe). Dans ce cas le mesure de Haar à droite de G est simplement la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ transportée par cet homéomorphisme.

Sur un groupe de Lie, il n'y a pas de notion d'espérance et donc pas de notion intuitive de ce qu'est une marche aléatoire centrée. Une telle notion peut être définie (voir par exemple l'article d'Alexopoulos [2] à ce sujet) mais nous contournerons ce problème. L'hypothèse que nous utiliserons à la place est que les mesures sont symétriques. Cela signifie que la loi de μ et la même que la loi de μ^{-1} , i.e

$$\int_G f(x) d(\mu) = \int_G f(x^{-1}) d(\mu)$$

pour toute fonction test (i.e. à valeur réelle continue et à support compact).

Une mesure de probabilités symétrique et à support compact est bien sûr centrée lorsque cela est défini.

Opérateurs de convolution et moyennabilité Si, μ est une mesure de probabilités vérifiant 1.1 sur G , alors μ peut être vu comme un opérateur de convolution T_μ sur $L^2(G, d^r(x))$ défini par

$$T_\mu(f)(x) = (f * \mu) = \int_G f(xy^{-1}) d\mu(y) \tag{1.3}$$

Deux remarques simples mais cruciales sur cet opérateur qui expliquent le choix de l'espace sur lequel T_μ est défini :

- T_μ commute avec l'opérateur de translation à gauche.
- μ est symétrique si et seulement si T_μ est auto-adjointe sur $L^2(G, d^r(g))$ (c'est faux avec $L^2(G, dg)$, il faudrait convoler à gauche)

Notons

$$\lambda = \lambda(\mu) = -\log\left(\|T_\mu\|_{\text{sp}}\right)$$

où $\|\cdot\|_{sp}$ désigne le rayon spectral de l'opérateur, c'est à dire $\|T\|_{sp} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$. Quand T_μ est symétrique, $\|T_\mu\|_{sp}$ est aussi la norme d'opérateur de T_μ .

Un groupe G est dit moyennable s'il existe une mesure de probabilités μ vérifiant les hypothèses 1.1 avec $\lambda(\mu) = 0$. Dans ce cas, on a $\lambda(\mu) = 0$ pour toute mesure sur G (sans hypothèses sur les mesures). Dans le cas contraire, $\lambda(\mu) > 0$ pour toute mesure vérifiant les hypothèses 1.1. La moyennabilité des groupes est une propriété portant sur la taille des groupes. Le livre de Pier [8] est une référence à ce sujet. La définition donnée ci-dessus n'est pas la première ni la plus directe. L'annexe B fournit quelques propriétés de la moyennabilité pour les groupes de Lie. Les groupes de la forme $\mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^m$ sont toujours moyennables. Dans ce document, nous nous intéressons surtout aux groupes moyennables. En particulier, la section 3 se place dans le cadre des groupes moyennables.

Pour les groupes non-moyennables, on peut facilement avoir une estimation haute de l'asymptotique de $\mathbb{P}(S_n \in K)$.

En effet pour une mesure symétrique :

$$\mathbb{P}(S_n \in K) = (T_\mu)^n(\mathbb{1}_K) \leq \exp(-\lambda n) \|\mathbb{1}_K\|_{L^2(G, d^\mu(G))}$$

pour une constante $C > 0$.

Ainsi sur un groupe non moyennable, la probabilité de retour à l'origine décroît bien plus vite que sur les espaces vectoriels.

1.3 Inégalités d'Harnack

Ce paragraphe présente un outil permettant d'étudier analytiquement les marches aléatoires sur un groupe de Lie : les inégalités d'Harnack.

Théorème 1.4. *Inégalité d'Harnack* Soit $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux suites de mesures de probabilités sur un groupe G . On suppose que les μ_i et les ν_i vérifient les hypothèses 1.1 de manière uniforme. On note ϕ_i (resp. ψ_i) la densité de μ_i (resp. ν_i) par rapport à la mesure de Haar à gauche de G . On suppose donc qu'il existe un voisinage Ω de e telle que $\phi_i(x) > c$ et $\psi_i(x) > c$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \Omega$.

Soit K un compact de G . Alors, pour tout entier k assez grand

$$(\phi_1 * \phi_2 * \cdots * \phi_n)(gx) \leq C(\phi_1 * \cdots * \phi_n * \psi_1 * \psi_2 * \cdots * \psi_k)(g)$$

et ce uniformément en $n \in \mathbb{N}$, $x \in K$ et $g \in G$.

Pour prouver ce résultat, il suffit de remarquer que

$$(\psi_1 * \psi_2 * \cdots * \psi_k)(x) > c > 0$$

pour tout x de K . On trouvera une preuve un peu plus détaillée de ce résultat et de nombreuses variantes au début des chapitres 2 et 4 du livre de Varopoulos [16].

Soit $\phi^{(n)}$ la densité de $\mu^{*n} := \mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n$. Ce résultat technique a la conséquence suivante, cruciale pour nous :

Pour tout voisinage de e compact K de G ,

$$C\phi^{(n-k)}(e) \leq \mathbb{P}(S_n \in K) \leq C'\phi^{(n+k)}(e) \quad (1.5)$$

pour un certain entier k et C, C' peuvent dépendre de K et k .

En particulier, pour connaître l'asymptotique de $\mathbb{P}(S_n \in K)$ à une constante multiplicative près, il faut connaître celle de $\phi^{(n)}(e)$ et réciproquement. Ainsi le problème d'estimer la probabilité de retour d'une marche aléatoire dans un voisinage de e peut être reformulé comme un problème d'estimation de la densité de la loi de la marche aléatoire en $e : \phi^{(n)}(e)$.

2 Classification des groupes de Lie par les marches aléatoires

Nous pouvons maintenant présenter la classification de Varopoulos. Nous commençons par expliquer les différents comportements possibles des marches aléatoires puis nous expliquons dans quel cas cela se produit.

2.1 La classification de Varopoulos

La classification de Varopoulos distingue deux classes de groupes qui sont présentées ici d'abord à travers le comportement de la probabilité de retour des marches aléatoires sur ces groupes.

Définition 2.1. *Groupe non-déformant d'un point de vue probabiliste*

Un groupe de Lie connexe G est dit **non-déformant** si pour toute marche aléatoire homogène dont la loi des pas est symétrique et vérifie les hypothèses 1.1, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout K voisinage de 1 compact, il existe $C > 0$ tel que :

$$\phi^{(n)}(e) \geq \exp(-\lambda n) \frac{C}{n^c} \quad (2.1)$$

où $\lambda = -\log\left(\|T_\mu\|_{sp}\right)$.

Définition 2.2. *Groupe déformant d'un point de vue probabiliste*

Un groupe de Lie connexe G est **déformant** si pour si pour toute marche aléatoire homogène dont la loi des pas vérifie les hypothèses 1.1, il existe $c > 0$ tel que pour tout K voisinage

compact de 1, il existe $C > 0$ tel que

$$\phi^{(n)}(e) \leq C \exp\left(-\lambda n - cn^{\frac{1}{3}}\right) \quad (2.2)$$

où $\lambda = -\log\left(\|T_\mu\|_{sp}\right)$

Remarque 2.3. On ne suppose pas nécessairement les mesures symétriques pour la définition des groupes déformants.

Ces conditions sont clairement mutuellement exclusives, la classification de Varopoulos assurent que ce sont les deux seuls cas possibles.

Théorème 2.4. *Classification des marches aléatoires*

Tout groupe de Lie connexe est soit déformant soit non déformant.

D'abord ces résultats sont précis au sens suivant : pour les groupes non déformants comme pour les groupes déformants, on peut obtenir l'inégalité inverse en changeant C et c .

Le cas des groupes de Lie moyennables ($\lambda = 0$) est particulièrement intéressant pour plusieurs raisons. D'abord, le sens géométrique de la classification déformant non-déformant est plus simple à comprendre sur un groupe de Lie moyennable. Ensuite, la classification sur les groupes de Lie moyennables constitue une étape préliminaire à la preuve de la classification générale. Pour les groupes moyennables, la décroissance que l'on obtient pour les groupes non-déformants est celle dont on a l'habitude pour les espaces vectoriels. Pour les groupes déformants, le terme $\exp(-cn^{1/3})$ peut paraître surprenant. On le comprendra dans la section 3.2. On peut montrer que $\phi^{(n)}(e) \geq \exp(-cn^{1/3})$ sur tous les groupes à croissance exponentielle, la première preuve pour les groupes polycycliques est due à Alexopoulos dans [1]. Les groupes déformants sont toujours à croissance exponentielle mais certains groupes non-déformants le sont aussi.

Remarque 2.5. Nous évoquons parfois la notion de groupes à croissance polynomiale ou exponentielle mais ne nous en servons pas. L'article de synthèse de Saloff-Coste et Pittet [11] analyse les liens entre marche aléatoires sur les groupes et croissance des groupes.

La terminologie *déformant* – *non-déformant* que nous utilisons est propre à ce document. Varopoulos appelle :

- les groupes déformants des groupes B.
- les groupes non-déformants des groupes NB.
- les groupes déformants et moyennables des groupes C.
- les groupes non-déformants et moyennables des groupes NC.

Varopoulos explique que la terminologie B-NB est arbitraire et calque la terminologie C-NC qui a été étudiée dans d'autres contextes. Nous avons essayé de trouver une terminologie plus facile à retenir. Le sens de cette terminologie apparaîtra plus clairement dans la section suivante.

2.2 Sens géométrique de la classification

Dans ce paragraphe, on décrit une caractérisation géométrique de la distinction déformant-non déformant. Cette section repose beaucoup sur la décomposition de Lévi dans un groupe de Lie qui est décrite en annexe A.

Si G est un groupe de Lie, on notera en minuscule et en gothique son algèbre de Lie \mathfrak{g} et $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie de \mathfrak{g} .

2.2.1 Groupes moyennables

La description est plus simple pour les groupes moyennables. Cette section utilise la notion de représentation adjointe d'un groupe de Lie, l'annexe A en fournit une définition. Soit G un groupe de Lie réel moyennable et connexe. Soit \mathfrak{g} son algèbre de Lie et soit \mathfrak{r} son radical résoluble, c'est à dire le plus grand idéal résoluble de \mathfrak{g} .

Soit \mathfrak{n} le nilradical de \mathfrak{r} , c'est à dire le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{r} . L'algèbre $\mathfrak{l} := \mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ agit sur $V := \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ par la représentation adjointe. Comme, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{n}$, la famille des $(\text{ad}(x))_{x \in \mathfrak{l}}$ commutent deux à deux. Ainsi les $\text{ad}(\mathfrak{l})$ sont simultanément trigonalisables sur \mathbb{C} . On écrit ainsi

$$V \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} V_i$$

où les $V_i = \text{Ker}(\text{ad}(x) - l_i(x)\text{Id})$ sont les sous espaces caractéristiques associés à l'action de \mathfrak{l} . On obtient donc k formes linéaires complexes sur $\mathfrak{l} \otimes \mathbb{C}$, l_1, l_2, \dots, l_k avec $l_i : \mathfrak{l} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où $l_i(x)$ est l'unique valeur propre de $\text{ad}(x)|_{V_i}$.

Notons L_1, \dots, L_d les parties réelles de ces valeurs propres deux à deux distinctes.

Chacun des espaces

$$\tilde{W}_j = \bigoplus_{\text{Re}(l_i)=L_j} V_i$$

pour $1 \leq j \leq d$ provient d'un espace vectoriel réel W_j tel que $\tilde{W}_j = W_j \otimes \mathbb{C}$. En effet, \tilde{W}_j est stable par conjugaison complexe.

Soit \mathcal{L} le sous ensemble des formes linéaires sur \mathfrak{l} formé des L_i non nulles.

Théorème 2.6. *classification géométrique pour les groupes moyennables*

Si l'enveloppe convexe de \mathcal{L} contient la forme linéaire nulle alors G est déformant. Dans le cas contraire, G est non-déformant.

On peut désormais expliquer la terminologie déformant/ non-déformant. Soit $x \in \mathfrak{g}$. L'identité (vraie sur tout groupe de Lie) $\text{Ad}(\exp(x)) = \exp(\text{ad}(x))$ permet de relier les L_i à l'action par conjugaison du groupe sur son algèbre de Lie. Ainsi $\exp(L_i)(x)$ est la valeur absolue du déterminant de $\text{Ad}(\exp(x))$ sur W_i . En particulier $\text{Ad}(\exp(x))$ a un déterminant de module plus grand que 1 si et seulement si $L_i(x) \geq 0$.

Si G est non déformant il existe $x \in V \setminus \{0\}$ tel que $L_i(x) \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Ainsi dans ce cas, au moins certains éléments de G dilatent l'algèbre de Lie dans toutes les directions : il y a des éléments non triviaux de G tel que $Ad(g)$ n'a que des valeurs propres de modules plus grand que 1. Intuitivement, cela signifie que au moins certains éléments du groupe préservent la "forme" du groupe.

Si G est déformant, alors pour tout x de G , au moins un des L_i vérifie $L_i(x) < 0$ et un $L_i(x) > 0$. Autrement dit $Ad(g)$ a des valeurs propres de modules > 1 pour tout $g \in G$ et des valeurs propres de modules < 1 . Ainsi, certaines directions sont contractées et d'autres sont dilatées par l'action de n'importe quel élément du groupe.

Exemple 2.7. $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$

Considérons $\xi : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ un groupe à un paramètre de $GL_2(\mathbb{R})$ donné par une matrice diagonale $\text{Diag}(\exp(L_+), \exp(L_-))$ avec L_+ et L_- deux nombres réels. Soit $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ où l'action de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^2 est donnée par ξ . Ainsi la multiplication est donnée par

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + \exp(L_+(z))x', y + \exp(L_-(z))y', z + z') .$$

G est non-déformant si L_+ et L_- sont de même signes : dans ce cas, l'action de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^2 dilate ou contracte les deux directions en même temps. En particulier, il y a tout un "demi-espace" qui contracte le groupe par multiplication. G est déformant quand $L_+L_- < 0$, dans ce cas, l'action de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^2 dilate une direction quand elle contracte l'autre.

On peut déjà comprendre qualitativement la différence de nature entre le comportement des marches aléatoires dans le cas déformant et non déformant. Dans le cas non-déformant, si chaque pas est tiré parmi les éléments qui contractent le groupe, la marche va toujours rester plutôt proche de son point de départ. En revanche, sur un groupe non-déformant, à chaque pas, au moins une direction est dilatée exponentiellement en la taille de la coordonnée qui agit. Il est donc très difficile de rester proche de 0. L'annexe F contient des images de trajectoire typique de la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ dans les deux cas.

Exemple 2.8. $G = \mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^m$.

Le groupe $\mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^m$ fournit un exemple typique : il peut être déformant ou non-déformant selon l'action de \mathbb{R}^m choisie. Notons $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow GL_d(\mathbb{R})$ l'action de \mathbb{R}^m sur \mathbb{R}^d . Notons (x, y) les points de G avec $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^m$. La multiplication de deux éléments de G est donnée par $(x, y) \cdot (x', y') = (x + \xi(y)x', y + y')$.

Le crochet sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^m$ de G où le produit semi-direct est ici un produit semi-direct d'algèbre de Lie donné par :

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = (d\xi(y_2)x_1 - d\xi(y_1)x_2, 0)$$

où $d(\xi)$ désigne la différentielle de ξ .

L'algèbre \mathfrak{g} est résoluble et le nilradical \mathfrak{n} de \mathfrak{g} est \mathbb{R}^d qui est une algèbre de Lie abélienne. Ainsi, $\mathfrak{g}/\mathfrak{n} = \mathbb{R}^m$ agit sur $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n} = \mathbb{R}^d$ par $-d\xi$. Quand G est un groupe non déformant,

on définit \mathcal{C} le cône de \mathbb{R}^m où tous les $L_i(x)$ sont positifs ou nuls et \mathcal{C}_G l'ensemble des points de G dont la deuxième coordonnée est dans \mathcal{C} . Si $g \in \mathcal{C}_G$, la multiplication à gauche par g "dilata" le groupe dans toutes les directions. A nouveau quand le groupe est non-déformant, on comprend que si à chaque pas la marche reste dans le cône de \mathbb{R}^m qui contracte le groupe, alors la marche va peu s'éloigner de 0 alors que dans le cas déformant, il y'aura toujours une direction dans laquelle la marche a de grandes chances de s'éloigner.

Exemple 2.9. Matrices triangulaires supérieures

Soit $T_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles triangulaires supérieures. C'est un groupe résoluble. Le nilradical de son algèbre de Lie est $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des zéros dans la diagonale. L'algèbre de Lie commutative $\mathfrak{d}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{t}_n(\mathbb{R})/\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ s'identifie aux matrices diagonales et $V = \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})/[\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})]$. L'action de \mathfrak{d}_n sur V est diagonale dans la base de V donnée par les classe des matrices

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

où le 1 est sur la i ème ligne, $(i + 1)$ ème colonne pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Les valeurs propres de l'action sont donc $L_i : \mathfrak{d}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ données par $L_i(D) = D_{ii} - D_{(i+1)(i+1)}$ pour toute matrice diagonale D et $1 \leq i \leq n - 1$. Aucune combinaison convexe des L_i ne peut être nulle. En effet, le terme D_{11} n'apparaît que dans L_1 , donc une combinaison convexe non triviale nulle ne fait pas intervenir L_1 . On conclut par récurrence.

$T_n(\mathbb{R})$ est donc un groupe moyennable non-déformant.

2.2.2 Groupes non-moyennables

Soit G un groupe de Lie non-moyennable. Son algèbre de Lie \mathfrak{g} admet une (non-unique) décomposition de Lévi $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{s}$ où \mathfrak{r} est le radicale résoluble de \mathfrak{g} et \mathfrak{s} est une algèbre de Lie semi-simple. De plus on peut écrire $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_c \oplus \mathfrak{s}_{nc}$. où \mathfrak{s}_c est une algèbre de Lie semi-simple compacte : c'est à dire qu'il existe un groupe de Lie compacte dont c'est l'algèbre de Lie. La notion d'algèbre de Lie semi-simple compacte a bien un sens : tout groupe de Lie tangent à cette algèbre de Lie est aussi compact. L'algèbre \mathfrak{s}_{nc} est une algèbre de Lie semi-simple non-compact : tout groupe de Lie qui lui est tangent est non-compact. On peut alors écrire une décomposition d'Iwasawa de \mathfrak{s}_{nc} .

$$\mathfrak{s}_{nc} = \mathfrak{n}_{nc} + \mathfrak{a} + \mathfrak{k}$$

où \mathfrak{n} est nilpotente, \mathfrak{a} est abélienne, \mathfrak{k} est l'algèbre de Lie d'un groupe compact ou abélien et $[\mathfrak{n}_{nc}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{n}_{nc}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{m} = \mathfrak{r} + \mathfrak{n}_{nc} + \mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe moyennable. On l'appelle radical d'Iwasawa de G . Un tel radical n'est pas unique mais on peut voir que deux radicaux d'Iwasawa d'un groupe de Lie G sont conjugués par un automorphisme intérieur de l'algèbre de Lie ([16] 4.1).

Théorème 2.10. *Classification probabiliste dans le cas non-moyennable*
 G est déformant, si et seulement si \mathfrak{m} est l'algèbre de Lie d'un groupe déformant.

Exemple 2.11. $GL_n(\mathbb{R})$

L'algèbre de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n : $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Le radical de n $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices scalaires $\text{Vect}(\text{Id})$. Une décomposition de Lévi est donnée par :

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(\text{Id}) \rtimes \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) .$$

L'ensemble des matrices de trace nulle $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie simple. Une décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) + \mathfrak{d}_n(\mathbb{R}) + \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$$

où $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices triangulaire supérieures avec des 0 sur la diagonale, $\mathfrak{d}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices diagonales de trace nulle et $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Ainsi un radical d'Iwasawa de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est donné par $\mathfrak{m} = \text{Vect}(\text{Id}) + \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R}) + \mathfrak{d}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures qui est l'algèbre de Lie du groupe des matrices inversibles triangulaire supérieur qui est un groupe non-déformant d'après l'exemple 2.9.

Ainsi, $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe non-moyennable non-déformant.

Exemples 2.12. (i) Tout groupe compact est non-déformant.

(ii) Les groupes moyennables à croissance polynomiale sont non-déformants.

(iii) Le revêtement universel du groupe des isométries affines du plan est un groupe non-déformant à croissance exponentielle.

(iv) Tout groupe de Lie connexe moyennable unimodulaire et à croissance exponentielle est déformant.

Pour le dernier point, la fonction modulaire de $g \in G$ est $\Delta(g) = |\det(\text{Ad}(g))|^{-1}$. Si G est unimodulaire on doit donc avoir $\det(\text{Ad}(g))^{-1} = 1$ pour tout g dans G par connexité. En différentiant cette identité, on obtient une combinaison linéaire à coefficients positifs des l_i et donc des L_i qui est non triviale si au moins l'un des est non nulle, c'est à dire si G est à croissance exponentielle.

2.3 D'autres interprétations

Il existe d'autres caractérisation de la notion de groupes déformants. Par exemple, les groupes résolubles simplement-connexes sont non-déformants si ils sont "polynomialement contractiles". Nous ne développons pas cela ici, c'est l'objet des chapitres 7 à 9 du livre de Varopoulos [16].

3 Preuve de la classification pour les groupes moyennables

Nous donnons ici les idées principales de la preuve de Varopoulos dans [16] de la classification dans le cas des groupes moyennables. Dans toute cette section, G désigne un groupe de Lie réel moyennable. La stratégie générale de la preuve est la suivante. On part des définitions géométriques des groupes déformants et non-déformants pour obtenir les inégalités sur le comportement de la probabilité de retour de la section 2.1. Ainsi dans cette section déformant signifie ayant la condition géométrique sur l'algèbre de Lie équivalente à être déformant. En un sens, nous avons présenté les résultats à l'envers, on déduit le comportement probabiliste de la classification géométrique et non l'inverse. Cependant, les résultats probabilistes étant plus simples, nous avons choisi de les énoncer d'abord. Pour les groupes déformants et non-déformants, on commence par faire diverses réductions sur le groupe G pour se ramener à une situation plus simple où l'on dispose d'une suite exacte $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 1$ où H et G/H sont des groupes abéliens ou au moins nilpotents. Une fois cette réduction effectuée, on montre que le problème peut être reformulé comme un problème de marche aléatoire sur G/H . Notre objectif est surtout d'illustrer les aspects probabilistes de la preuve et nous mentionnons simplement les résultats algébriques nécessaires. Toutes les preuves peuvent être trouvées dans le livre de Varopoulos [16], chapitre 2 pour les groupes déformants, chapitre 3 pour les groupes non-déformants. Voici un résumé des points algébriques que nous utilisons :

- Pour les groupes déformants, il suffit d'estimer la probabilité de retour pour les groupes G dans une suite exacte, pas forcément scindée de la forme

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow V \times S \rightarrow 1$$

où H et V sont des espaces euclidiens, S est un groupe de Lie semi-simple compact. On peut décomposer

$$H = \bigoplus_i 1^n H_i$$

et l'action Ψ_i de V sur \mathfrak{h} stabilise les \mathfrak{h}_i . On note $L_i = \log(|\det(\Psi_i)|)$ qui est une forme linéaire réelle sur V . Le fait que G soit déformant se traduit par le fait qu'il y ait une combinaison convexe non triviale des L_i égale à 0.

- Pour les groupes non déformants, on peut supposer G de la forme $N \rtimes (H \oplus S)$ où N et H sont des groupes nilpotents et S est un groupe semi-simple compact. On peut de plus supposer N , H et S simplement connexes.

Par ailleurs, l'exemple de $G = \mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}^m$ constitue une situation suffisante pour comprendre les outils probabilistes en jeu et on peut penser à ce cas. Dans ce cas, quand G est déformant, on a $H = \mathbb{R}^d$ et $V = \mathbb{R}^m$ et quand G est non déformant, on a $N = \mathbb{R}^d$, $H = \mathbb{R}^m$. Dans les deux cas $S = \{0\}$.

On pourra trouver de plus amples explications sur ces réductions algébriques en lisant les annexes D et E.

3.1 Structure des marches aléatoires dans une suite exacte

On suppose que G se place dans une suite exacte $1 \rightarrow H \rightarrow G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1$ et que K agit par conjugaison sur H soit parce que l'action par conjugaison de G sur H passe au quotient dans K ce qui se produit en particulier quand H est abélien, soit parce qu'on dispose d'une section privilégiée $\sigma : K \rightarrow G$ qui permet de définir l'action par conjugaison par $h^k = \sigma(k)^{-1}h\sigma(k)$ pour tout h dans H et k dans K . Nous noterons h^k l'image de $h \in H$ par l'action par conjugaison d'un élément $k \in K$ dans les deux cas. On explique ici une méthode pour conditionner les variables aléatoires sur G à leur valeurs dans K . Cette méthode est très semblable à la construction d'une loi conditionnelle pour un couple de variables réelles à densité sur \mathbb{R}^2 . Si X est une variable aléatoire sur G admettant une densité ϕ par rapport à la mesure de Haar à gauche sur G , on peut définir la loi de X conditionnellement à l'événement " $\pi(X) = \dot{g}$ " pour un certain \dot{g} dans K . Pour ce faire, on peut considérer la loi $\mu(\bullet|\dot{g})$ sur gH définie pour toute fonction test f , par :

$$\int_{gh \in gH} f(gh) d\mu(gh|\dot{g}) = \int_H f(gh) \phi(gh|\dot{g}) d_H(h)$$

où

$$\phi(gh|\dot{g}) = \frac{f(gh)}{\int_{h \in H} f(gh) d_H(h)}$$

si le dénominateur est non nul et $\mu(\bullet|\dot{g})$ est une loi de probabilités arbitraire si ce dénominateur est nul. Ici, d_H désigne la mesure de Haar à gauche de H et $g \in G$ est un représentant quelconque de $\dot{g} \in K$ dont la définition de la loi ne dépend pas.

Notons que pour toute fonction test f :

$$\int_G f d\mu = \int_K \int_H f(gh) \phi(h|\dot{g}) d_H(h) d\pi(\mu)(\dot{g}) .$$

Ceci découle de la structure de la mesure de Haar dans une suite exacte, l'annexe C explique cela dans le cas où la suite exacte est scindée.

Fixons une section mesurable arbitraire de π notée $\sigma : K \rightarrow G$. Quand la suite exacte est scindée

on supposera que σ est un morphisme de groupe et scinde la suite. Cela simplifie beaucoup ce qu'il se passe intuitivement mais ne change pas vraiment le raisonnement.

Si $S_n = X_1 \dots X_n$ est une marche aléatoire sur G et que X_i est de loi μ_i , on peut écrire pour une fonction test f :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S_n)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_1 \dots X_n) | \pi(X_1), \dots, \pi(X_n))) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_H \dots \int_H f(\sigma(\dot{g}_1)h_1 \dots \sigma(\dot{g}_n)h_n) \mu_1(\sigma(\dot{g}_1)h_1 | \dot{g}_1) \dots \mu_n(\sigma(\dot{g}_n)h_n | \dot{g}_n) d_H(h_1) \dots d_H(h_n)\right) \end{aligned}$$

où la dernière espérance est prise sur les \dot{g}_i , variables aléatoires ayant la loi de $\pi(X_i)$.

Une fois σ fixée, à $\dot{g} \in K$ fixée, on peut translater à gauche la mesure $\mu(\bullet | \dot{g})$ par $\sigma(\dot{g})$. La mesure ainsi obtenue sera notée $\mu(\bullet | \dot{g})_{\sigma(\dot{g})}$.

Ainsi pour toute fonction test :

$$\int_H f(h) d\mu(h | \dot{g})_{\sigma(\dot{g})} = \int_{u \in \dot{g}H} f(g^{-1}u) d\mu(u | \dot{g}) .$$

De manière plus pragmatique,

$$\int_H f(h) d\mu(h | \dot{g})_{\sigma(\dot{g})} = \int_H f(h) \phi(\sigma(\dot{g})h | \dot{g}) d_H(h) .$$

Notons que

$$g_1 h_1 \dots g_n h_n = h_1^{g_1} h_2^{g_1 g_2} h_3^{g_1 g_2 g_3} \dots h_n^{g_1 \dots g_n} g_1 \dots g_n . \quad (3.1)$$

Ici, on a noté $g_i = \sigma(\dot{g}_i)$.

Notons $\dot{s}_n = \pi(S_n) \in K$ et $s_n = g_1 \dots g_n$. Il est possible que $s_n \neq \sigma(\dot{s}_n)$ lorsque la suite exacte n'est pas scindée.

Quoi qu'il en soit, on peut donc écrire $S_n = g_1 h_1 \dots g_n h_n = h_1^{\dot{s}_1} \dots h_n^{\dot{s}_n} s_n$.

Ainsi, on peut réécrire :

$$\mathbb{E}(f(S_n) | \dot{g}_1, \dots, \dot{g}_n) = \mathbb{E}(f(h_1^{\dot{s}_1} \dots h_n^{\dot{s}_n} s_n)) \quad (3.2)$$

où dans la dernière espérance, h_1 est de loi $\mu_i(\bullet | \dot{s}_i)_{s_i}$. En particulier, la loi de $h_1^{\dot{s}_1} \dots h_n^{\dot{s}_n}$ est

$$(\mu_1(\bullet | \dot{g}_1)_{s_1})^{\dot{s}_1} * \dots * (\mu_n(\bullet | \dot{g}_n)_{s_n})^{\dot{s}_n}$$

où μ^g est l'image par la conjugaison par g de la mesure μ . C'est la loi d'une marche aléatoire (inhomogène) sur H à g_1, \dots, g_n fixés !

En dépit de ces lourdeurs de notations, on a réussi en un certain sens à conditionner la marche

aléatoire sur G à sa trajectoire sur K et à réécrire la marche aléatoire conditionnée comme une marche aléatoire sur H multipliée par une marche aléatoire ne dépendant que du conditionnement.

3.2 Groupes déformants

C'est surtout pour le cas non-déformant que le travail de la section 3.1 va nous servir. En effet, on a vu dans la section E, que pour établir la borne supérieure sur les probabilités de retour du théorème 2.4. pour les groupes déformants, il suffit de le prouver pour des groupes G dans des suites exactes avec $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow V \times S \rightarrow 1$ où H est un espace vectoriel. Soit $S_n = X_1 \dots X_n$ une marche aléatoire sur G . On note comme dans la section précédente \hat{s}_n la projection de S_n sur K . On fixe une section borélienne de la projection sur K et on note $g_i = \sigma(\pi(X_i))$ et $h_i \in H$ tel que $g_i h_i = X_i$. Comme dans la section précédente, notons $s_n = g_1 \dots g_n$. Notons $H = \bigoplus_{i=1}^p H_i$, la décompositions de H en sous espaces stables par K et $L_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ les formes linéaires associées comme en section E.

Notons que le jacobien de la conjugaison par $\dot{g} \in V \times S$ vu comme une application linéaire sur H_i a pour valeur absolue $\exp(L_i(g))$.

La clé de la preuve est le résultat suivant : il existe un voisinage de $e - \Omega$ et une constante $C > 0$ tel que $P(g_i \in \Omega) > 0$ et

$$\nu_1(g_1) * \dots * \nu_n(g_n) \leq C m_1 \dots m_p \tag{3.3}$$

pour tout $g_1 \dots g_n \in \Omega$, où

$$m_j = \min_{1 \leq i \leq n} \exp(-L_j(s_i)) .$$

Le lemme s'obtient en écrivant l'intégrale définissant la convolution de ces fonctions et en intégrant successivement sur chacun des H_j . On peut alors exploiter le fait que la loi des pas de la marche aléatoire conditionnée à g_1, \dots, g_n fait intervenir des mesures conjuguées par les s_1, \dots, s_n et faire un changement de variables approprié.

La preuve est assez longue et nous nous proposons d'illustrer les idées de cette preuve par un exemple.

Exemple 3.4. $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ Considérons une marche aléatoire $S_n = X_1 \dots X_n$ sur $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ comme dans l'exemple 2.7 et avec les mêmes notations. On suppose que $L_+ \geq 0$ et $L_- \leq 0$. On suppose la marche homogène en temps et vérifiant les hypothèses 1.1. Ainsi on note $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ Posons $s_i = z_1 + \dots + z_i$ et $s_0 = 0$. Notons

$$\underline{s}_j^{(\Omega)} = \min_{\substack{i=0 \\ z_i \in \Omega}}^{j-1} s_i$$

et

$$\underline{s}_j^{(\Omega)} = \max_{\substack{i=0 \\ z_i \in \Omega}}^{j-1} s_i$$

où Ω désigne un ouvert de \mathbb{R} .

L'inégalité correspondant à 3.3 se réécrit ainsi : il existe un ouvert Ω de \mathbb{R} avec $\mathbb{P}(z_i \in \Omega) > 0$ tel que

$$\phi^n(0) \leq C \mathbb{E} \exp(-L_+ \bar{s}_n^{(\Omega)} - L_- \underline{s}_n^{(\Omega)}) \quad (3.5)$$

D'après le paragraphe 1.3,

On peut trouver un compact K de G tel que, pour tout n ,

$$\phi^{(n)}(0) \leq CP(S_n \in K)$$

Nous allons donc calculer $\mathbb{P}(S_n \in K | z_1, \dots, z_n)$ à Z_1, \dots, z_n fixés.

Notons $\phi(x, y | z)$ la densité conditionnelle de (x, y) la projection de $X = (x, y, z)$ sur \mathbb{R}^2 à z fixé. A l'aide de l'expression de la multiplication sur G , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \in K | z_1, \dots, z_n) = & \int_{\substack{x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \\ y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}}} \mathbb{1}_K \left(\begin{array}{l} x_1 + e^{L+s_1} x_2 + \dots + e^{L+S_{n-1}} x_n, \\ y_1 + e^{L-s_1} y_2 + \dots + e^{L-s_{n-1}} y_n \end{array} \right) \\ & \phi_1(x_1, y_1 | z_1) \dots \phi_1(x_n, y_n | z_n) dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n \end{aligned} \quad (3.6)$$

La clé de la preuve est d'effectuer 2 changements de variables dans cette intégrale (un sur le sous espace associé à L_+ , un pour le sous-espace associé à L_-).

Soit i_0 tel que $S_{i_0-1} = \bar{s}_n^{(\Omega)}$ et j_0 tel que $S_{j_0-1} = \underline{s}_n^{(\Omega)}$. Le changement de variables que l'on effectue pour faire apparaître les bonnes quantités est le suivant : $u = e^{L+\bar{s}_n^{(\Omega)}} x_{i_0}$ et $v = y_{j_0} e^{L-\underline{s}_n^{(\Omega)}}$.

En effet, le jacobien de ce changement de variables est : $\exp(-L_+ \bar{s}_n^{(\Omega)} - L_- \underline{s}_n^{(\Omega)})$. Ici, il suffit de choisir Ω un ouvert sur lequel pour tout $z \in \omega$, on peut majorer $\phi(x, y | z)$ par une constante indépendant de x et y . Ceci ne peut pas être fait pour tout $z \in \mathbb{R}$ en général mais peut être fait sur n'importe quel compact Ω sur lequel on contrôle par en-dessous la densité de X (c.f. 1.1). En exploitant le fait que $\phi(x, y | z)$ est bornée pour $z \in \Omega$, l'équation 3.6 se réécrit :

$$\mathbb{P}(S_n \in K | z_1, \dots, z_n) \leq C \exp(-L_+ \bar{s}_n^{(\Omega)} - L_- \underline{s}_n^{(\Omega)}) . \quad (3.7)$$

L'inégalité souhaitée se déduit en passant à l'espérance.

Le fait que G soit un groupe *déformant* implique que $m_1 \dots m_p \leq \exp(-\min_{1 \leq i \leq n} \|s_n\|_W)$ pour

une certaine norme euclidienne $\|\bullet\|_W$ sur un quotient non trivial de V . En effet,

$$m_1 \dots m_p = \exp\left(-\sum_{j=1}^p \min_{1 \leq i \leq n} L_j(s_i)\right).$$

Or

$$\sum_{j=1}^p \min_{1 \leq i \leq n} L_j(s_i) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p L_j(s_i).$$

Comme G est un groupe *déformant*, $\sum_{j=1}^p (L_j(x)) \geq \|x\|_W$ pour un certain quotient W de V . En effet, comme il existe un cône de V sur lequel $L_i(x) > 0$, $|\sum_{j=1}^p (L_j(x))|$ définit une norme sur n'importe quelle droite vectorielle intersectant l'intérieur du cône. Ainsi on peut prendre W de dimension 1.

Ainsi on a montré que pour les groupes déformants,

$$\phi^{(n)}(e) \leq C \mathbb{E} \left(-c \exp\left(\max_{i=1, x_i \in \Omega}^{n-1} |s_i|\right) \right)$$

où $s_n = x_1 + \dots + x_n$ est une marche aléatoire sur un espace vectoriel de dimension 1. Grâce aux hypothèses, 1.1, on peut supposer que x_i admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et que celle-ci ne s'annule pas au voisinage de 0. Nous arrivons à la dernière étape de la preuve où le mystérieux $\exp(-cn^{1/3})$ apparaît enfin. Nous avons réduit le problème à l'étude d'une marche aléatoire sur \mathbb{R} . Cependant pour calculer cette quantité il faut bien connaître la loi de $\max_{i=1}^n |s_i|$ non pas autour de sa valeur moyenne (typiquement de l'ordre (grossièrement) de \sqrt{n} , si la marche est centrée, beaucoup plus grand si elle ne l'est pas) mais au voisinage de 0. Or, la probabilité que une marche aléatoire reste très proche de 0 en temps n décroît extrêmement vite. Ainsi, l'étude du comportement local des marches aléatoires sur un groupe déformant fait intervenir un phénomène de grandes déviations. On peut montrer que la fonction de répartition de $\max_{i=1}^n |s_i|$ se comporte environ comme $\exp(-cn/M^2)$ pour $M \ll n$. Plus précisément nous avons l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(\forall i \leq n |s_i| \leq M) \leq C \exp\left(-c \frac{n}{M^2}\right)$$

pour tout $M \geq 1$ et pour tout n assez grand.

En écrivant,

$$\mathbb{E} \left(\exp\left(-c \max_{i=1}^n |S_n|\right) \right) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-cM) \mathbb{P}(\forall i \leq n, |s_i| \leq M) dM ,$$

et en remplaçant la probabilité par la borne ci-dessus, on obtient l'inégalité en $\exp(-cn^{1/3})$ souhaitée.

3.3 Groupe non-déformants

La démarche pour obtenir le théorème de classification pour les groupes non-déformants moyennables est plus élémentaire que pour la borne supérieure. Dans cette section, nous expliquons les idées principales pour établir ce résultat.

Le point de départ est l'inégalité suivante. Soit G un groupe de Lie connexe et $S_n = X_1 \dots X_n$ une marche aléatoire homogène en temps dont la loi des pas est **symétrique** sur G . Alors,

$$\phi^{(2n)}(e) \geq \frac{\mathbb{P}(S_n \in A)^2}{|A|} \quad (3.8)$$

où $|A|$ désigne la mesure de Haar à gauche de G . L'inégalité est aussi valable pour la mesure de Haar à droite de G (car on suppose la marche aléatoire symétrique). Cette inégalité est une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

L'idée de la preuve du théorème est la suivante : trouver une suite d'ensembles A_n tel que $\mu(A_n) \leq n^c$ et $\mathbb{P}(S_n \in A_n) \geq n^d$ pour deux constantes c et d .

Comme G est un groupe non-déformant, il y a un cône de l'algèbre de Lie de ce groupe dans lequel tous les L_i sont négatifs. L'image par l'exponentielle de ce groupe fournit un ensemble (de mesure de Haar infini en général). La probabilité que la marche aléatoire reste jusqu'au temps n dans cet ensemble décroît polynomialement, c'est-à-dire en $\frac{1}{n^c}$. Ainsi l'intersection de tels ensembles avec des compact de volume polynomial en n fournit une telle suite. Dans la suite, nous expliquons un peu plus en détail comment trouver une telle suite.

Marche aléatoire sur un cône Ce paragraphe décrit le comportement des marche aléatoire sur des cônes de \mathbb{R}^d . Soit $S_n = X_1 + \dots X_n$ une marche aléatoire symétrique et homogène sur \mathbb{R}^d . On suppose que X_1 admet un moment d'ordre 2 et est symétrique. Soit \mathcal{C} un cône convexe d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d . On suppose que le bord du cône peut s'exprimer localement comme une fonction analytique réelle.

Alors il existe une fonction V harmonique pour la marche aléatoire sur le cône \mathcal{C} , c'est à dire $\mathbb{E}(V(x + X_1)) = V(x)$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Cette fonction est strictement positive sur \mathcal{C} et nulle en dehors. Elle est unique à constante multiplicative près.

Soit

$$\tau_x = \inf_{n \in \mathbb{N}} x + S_n \notin \mathcal{C} .$$

Alors le comportement de la probabilité de rester dans le cône jusqu'au temps n est le suivant :

$$\mathbb{P}(\tau_x > n)n^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha V(x) \quad (3.9)$$

où p est une constante qui ne dépend que du cône et de la matrice de covariance de la loi de X_1 et α est une constante.

Ce résultat est le théorème 1 de l'article de Denisov et Watchel sur les marches aléatoires sur les cônes [6]. La théorie des marches aléatoires sur les cônes est riche et fait intervenir des questions d'analyse harmonique et d'approximation par le mouvement brownien. L'article de Raschel et Parrago paru dans la gazette de la SMF de janvier 2023 [9] présente le sujet.

Un théorème de la limite locale plus précis pour les groupes déformants Ce résultat si précis (il nous suffirait d'avoir un résultat comme $\mathbb{P}(\tau_x > n) \geq \frac{1}{n^c}$ pour avoir la borne inférieure pour les groupes non déformants) permet d'obtenir un résultat plus précis sur les groupes de Lie simplement-connexes non-déformants qui s'apparente à un "vrai" théorème de la limite locale sur les groupes non déformants.

Théorème 3.10. *Il existe une constante $\nu \geq 0$ dépendant du groupe mais aussi de la loi des pas de la marche aléatoire telle que*

$$cn^{-\nu} \leq \phi^n(e) \leq Cn^{-\nu} .$$

Il n'existe à notre connaissance pas de preuves complète de ce théorème qui ai été entièrement rédigée. Varopoulos affirme à plusieurs reprises que ce théorème est vrai même sans hypothèse de simple-connexité dans son livre [16] (par exemple au chapitre 3). En adaptant les méthodes de l'article [14] qui démontre le même résultat pour le noyau de la chaleur sur les groupes déformants et moyennables), on peut obtenir une preuve de ce résultat pour les groupes simplement-connexes et probablement aussi pour tous les groupes. Par prudence, nous l'énonçons uniquement pour les groupes simplement connexes.

Le fait que l'exposant ν dépende de la loi des pas de la marche aléatoire peut paraître très surprenant. En effet, ce n'est pas le cas sur \mathbb{R}^d , l'exposant ν vaut simplement $d/2$. De manière générale sur les groupes à croissance polynomiale, cet exposant est toujours un demi-entier et ne dépend pas de la loi de la marche aléatoire. En revanche, une fois qu'on comprend le lien avec les marches aléatoires sur les cônes, cette dépendance en la marche aléatoire s'explique. De manière informelle, pour rester proche de zéro sur les groupes non-déformants à croissance exponentielle (les groupes non déformants à croissance polynomiale sont les groupes où tous les L_i sont nuls), chaque pas de la marche aléatoire doit rester dans le "cône" du groupe qui ne déforme pas trop le groupe. Mais la probabilité qu'une marche aléatoire reste dans un cône dépend de "l'angle d'ouverture" du cône mais aussi de la loi des pas. Cela s'explique bien intuitivement, l'ouverture du cône "vu" par la marche aléatoire sur un espace vectoriel dépend de sa matrice de covariance. Imaginons par exemple une marche aléatoire sur \mathbb{R}^2 qui fait des pas nettement plus grand dans la direction des abscisses que dans la direction des ordonnées, i.e la variance est beaucoup plus grande dans la direction des abscisses. Une telle marche aura l'impression qu'un cône de petit angle centré autour de l'axe des abscisses est plus large qu'un

cône du même angle autour de l'axe des ordonnées puisque qu'elle aura moins de chance d'en sortir.

4 Peut-on avoir un résultat plus précis sur les groupes déformants ?

En utilisant la même stratégie que pour la borne inférieure sur la probabilité de retour pour les groupes non-déformants, on peut montrer pour les marches aléatoires symétriques vérifiant les hypothèses 1.1 sur un groupe **déformant**, on peut montrer

$$\phi^{(n)}(e) \geq \exp(-cn^{1/3}) .$$

pour une certaine constante $c > 0$

Ainsi, nous avons l'estimation suivante :

$$\exp(-c'n^{1/3}) \leq \phi^{(n)}(e) \leq \exp(-cn^{1/3}) .$$

On peut alors se demander si on peut obtenir un résultat plus précis. Est-il par exemple possible de montrer la convergence de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/3}} \log \phi^{(n)}(e)$$

et quelle est la limite ?

C'est une question ouverte qui m'a intéressé pendant mon stage. Pour la résoudre, il faudrait réussir à obtenir des résultats très précis sur la probabilité qu'une marche aléatoire sur un espace vectoriel reste à chaque pas jusqu'au temps n dans une boule de rayon fixé.

Sur les groupes déformants de la forme $\mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{Z}$ (qui ne rentrent pas tout à fait dans le cadre des groupes de Lie connexes utilisé dans ce mémoire mais pour lesquels la notion de groupe déformant a quand même un sens), je parviens à montrer que la limite existe et à la calculer grâce à un résultat sur les marches aléatoires sur \mathbb{Z} que l'on peut obtenir en utilisant des résultats asymptotiques sur les matrices de Toeplitz. A l'instar, de l'exposant ν dans le théorème 3.10, la limite dépend du groupe et de la loi des pas.¹

1. Je suis en train d'écrire un article sur le calcul de cette limite mais il n'est malheureusement pas complètement finalisé au moment où je termine ce mémoire.

Annexe A Un peu de structure des groupes de Lie

A.1 Algèbres de Lie

Nous énonçons quelques fait de base sur les groupes de Lie et leurs algèbres de Lie. Ces faits peuvent être trouvé au chapitre 1 du livre de Onischik et Vinberg [7]. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G est un espace vectoriel associé à chaque groupe de Lie qui peut être vu comme l'espace tangent en l'identité. La différentielle de la fonction $C_g : x \mapsto gxg^{-1}$ pour $x \in G$ et $g \in G$ définit une action de G sur son algèbre de Lie. Cette action est appelée représentation adjointe et est noté $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$. La différentielle de cette action est notée $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$. Le crochet de deux éléments sur une algèbre de Lie est défini par $[x, y] = \text{ad}(x)(y)$ pour $x, y \in \mathfrak{g}$.

Notons que le revêtement universel d'un groupe de Lie est un groupe de Lie et que deux groupes de Lie ont la même algèbre de Lie si et seulement si ils ont le même revêtement universel.

Un idéal \mathfrak{i} d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est une sous-algèbre (c'est à dire un sous-espace vectoriel sur lequel le crochet est bien défini) tel que pour tout $x \in \mathfrak{i}$ et pour tout $y \in \mathfrak{g}$, $[x, y] \in \mathfrak{i}$.

L'algèbre de Lie dérivée d'une algèbre de Lie est l'algèbre de Lie engendrée par les éléments qui s'écrivent comme des crochets de deux éléments. Une algèbre de Lie est dite résoluble si la suite des algèbres de Lie obtenues en prenant successivement l'algèbre dérivée de l'algèbre précédente et en commençant avec \mathfrak{g} termine sur l'algèbre de Lie triviale. Un groupe de Lie est dit résoluble si son algèbre de Lie l'est.

A.2 Décomposition de Lévi

La décomposition de Lévi est expliquée en détail et établit au chapitre 6 du livre d'Onischik et Vinberg [7] Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie.

Alors \mathfrak{g} admet un unique idéal résoluble et maximal pour cette propriété appelé radical de G , Il est tangent à un sous-groupe de Lie R de G . On peut alors écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$ où \mathfrak{s} est une algèbre de Lie semi-simple, c'est-à-dire sans idéal abélien non trivial. Une telle décomposition s'appelle décomposition de Lévi de \mathfrak{g} et n'est pas unique.

Annexe B Moyennabilité sur les groupes de Lie

En plus de la condition sur les mesures de probabilités décrites en dans la section 2.1, nous utilisons une autre caractérisation de la moyennabilité sur le groupe de Lie. D'abord, si un groupe de Lie est moyennable alors tous ses revêtements le sont et si un groupe de Lie est non-moyennable tous ses revêtement le sont. Ainsi, la moyennabilité est une propriété qui ne dépend que de l'algèbre de Lie du groupe (c.f. annexe A. Lorsque qu'on écrit la décomposition de Lévi d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$ comme dans la section A, G est moyennable si et seulement si

\mathfrak{s} est l'algèbre de Lie d'un groupe semi-simple non-compact (la compacité est aussi déterminée par l'algèbre de Lie). Toute algèbre de Lie semi-simple contient une sous algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Ainsi tout sous groupe de Lie simplement connexe non-moyennable G contient un sous groupe de Lie virtuel isomorphe au revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$. Réciproquement, si le revêtement universel d'un groupe de Lie contient un sous groupe de Lie virtuel isomorphe au au revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$ alors G est non-moyennable. Le chapitre 8 du livre de Reiter [10] contient les preuves de nos affirmations.

Annexe C Mesure de Haar

Tout groupe localement compact G (en particulier de Lie) est muni d'une mesure de Borel λ quasi-régulière invariante à gauche par l'action du groupe. Une telle mesure est unique à un facteur multiplicatif près et on l'appelle mesure de Haar à gauche de G . Sur un groupe de Lie, la construction est explicite cette mesure est donnée par l'unique n -forme différentielle invariante à gauche que l'on obtient en considérant la n -forme alternée sur \mathfrak{g} que l'on transporte en l'espace tangent en tout point g par la multiplication à gauche par g . On dispose également de la mesure de Haar à droite λ_r vérifiant les mêmes propriétés que la mesure de Haar à gauche mais invariante par la multiplication à droite and le groupe.

Pour $g \in G$, le translaté à droite de λ par g $\lambda_{(g)}$ défini par $\lambda_{(g)}(A) = \lambda(Ag)$ est aussi une mesure de Haar à gauche pour G . Ainsi par unicité, il existe un réel positif $\Delta(g)$ tel que $\lambda_{(g)} = \Delta(g)\lambda$. $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est appelée fonction modulaire de G . On vérifie immédiatement que c'est un morphisme de groupe. Δ est continue (et lisse sur un groupe de Lie).

Quand $\Delta = 1$, G est dit unimodulaire. Les groupes compact sont unimodulaires ainsi que les groupes nilpotents. Plus généralement, les groupes à croissance polynomiale sont unimodulaires.

Exemple C.1. $GL_n(\mathbb{R})$

La mesure de Haar (des deux cotés) de $GL_n(\mathbb{R})$ est $\frac{dx}{\det(x)^n}$ où dx désigne la mesure de Lebesgue sur les coordonnées de la matrice $GL_n(\mathbb{R})$ est donc unimodulaire.

Les mesures de Haar à droite et à gauche sont liées : la mesure $\Delta(g)dg$ est une mesure de Haar à droite pour G . Symboliquement, $d^r g = \Delta(g)dg$. On choisit toujours les mesures de Haar à droite et à gauche de manière à ce que cette relation soit vérifiée.

Structure de la mesure de Haar Ici, nous décrivons comment la mesure de Haar d'un groupe est reliée à la mesure de Haar de ses sous-groupes.

Soit G un groupe connexe et localement compact et H et K deux sous-groupes fermés de G tel que $G = HK$ et $H \cap K = 1$. Notons dg , dh et dk les mesures de Haar (à gauche) sur G , H et K respectivement. Notons Δ_G , Δ_H et Δ_K les fonctions modulaires de G , H et K respectivement.

Proposition C.2. Structure de la mesure de Haar

Soit f une fonction test sur G .

Alors,

$$\int_{g \in G} f(g) dg = \int f(hk) \frac{\Delta_G(k)}{\Delta_K(k)} dh dk .$$

Il existe une relation similaire reliant les mesures de Haar à droite : =

$$\int_{g \in G} f(g) d^r g = \int f(hk) \frac{\Delta_H(k)}{\Delta_G(k)} d^r h d^r k .$$

Cette proposition est le corollaire de la proposition 13 du paragraphe 9 du numéro 2 du chapitre de 7 de Bourbaki intégration [3]. Nous utilisons aussi une proposition similaire pour les groupes quotients qui peut être trouvé au paragraphe 7 du numéro 2 du même livre (proposition 10).

Exemple C.3. Produit semi-direct

La mesure de Haar à droite sur $H \rtimes K$ est donnée par $dh \otimes dk$. Mais la mesure de Haar à gauche n'est pas nécessairement aussi simple.

Annexe D Quelques propriétés des groupes déformants et non-déformants au sens probabiliste

Cette section décrit comment la définition probabiliste de groupes déformants se comporte par passage à des sous groupes, des quotients et des extensions dans le cas moyennable. Elle est utile pour comprendre les réductions algébriques faites dans la section E. Dans cette section déformant est donc à étendre uniquement au sens du comportement des marches aléatoires, cette section est une étape de la preuve et n'utilise pas la caractérisation géométrique (sauf mention contraire). Dans cette section G est un groupe de Lie moyennable.

Proposition D.1. *quotients de groupe déformants*

- (i) Si G a un quotient déformant alors G est déformant.
- (ii) Un quotient d'un groupe non-déformant est non-déformant.

Démonstration. Soit G un groupe de Lie moyennable et H un sous groupe fermé de G . Soit $\pi : G \rightarrow G/H$ Soit μ une mesure de probabilités sur G vérifiant les hypothèses 1.1 alors $\hat{\mu} := \pi(\mu)$ vérifie les mêmes hypothèses. D'abord,

- (i) Le support de $\hat{\mu}$ est contenu dans $\pi(\text{Supp } \mu)$ et est donc compact
- (ii) $\hat{\mu}$ admet une densité explicite $\hat{\phi}$ par rapport à la mesure de Haar de G/H : Si ϕ est la densité de μ par rapport à la mesure de Haar à droite de G , alors pour $\dot{g} \in G/H$, on peut

écrire

$$\hat{\phi}(\dot{g}) = \int_H f(gh) d_H^r(h)$$

où g est un représentant arbitraire de \dot{g} dans G . Pour comprendre cela, on pourra se référer à l'annexe C.

(iii) Le point (i) implique que $\hat{\phi}$ est bornée

(iv) : Soit Ω un voisinage de 0 sur lequel $\phi > c > 0$. Alors $\hat{\phi}(\dot{g}) \geq c\lambda^r(H \cap \Omega')$ pour H tout $g \in \Omega'$ où $\pi(\Omega')$ est un ouvert tel que $\Omega'^2 \subseteq \Omega$.

Notons que $\pi(\mu * \nu) = \pi(\nu) * \pi(\mu)$ pour toute mesures μ et ν sur G .

Si K est un voisinage compact de 1 dans G/H alors $\pi^{-1}(K)$ contient un voisinage compact de G , le premier point en découle car

$$\mu^n(K) \leq \mu^n(\pi^{-1} \circ \pi(K)) = \hat{\mu}^n(\pi(K)) \leq \exp(-cn^{1/3}) .$$

Le deuxième point demande plus de travail. On peut trouver une preuve directe du résultat au §3.3.2 de [16] mais la preuve repose sur une affirmation que nous n'avons pas réussi à prouver et pour laquelle nous n'avons pas pu trouver de référence. Nous en donnons donc une preuve différente ici.

Soit ν une mesure symétrique vérifiant les hypothèses 1.1 sur G/H . Il suffit de trouver une mesure de probabilités μ sur G symétrique et vérifiant les hypothèses tel que $\pi(\mu) = \nu$. En effet, si K est un voisinage compact de 1 dans G/H , $\pi^{-1}(K)$ contient un voisinage compact Q de 1 dans G . On a alors

$$\hat{\mu}^n(K) \geq \mu^n(Q) \geq C \frac{c}{n^c} .$$

Soit f une fonction continue sur G vérifiant :

- $\int_H f(gh) d^r(h) = 1$ pour tout $g \in G$
- Le support de f a une intersection compact avec le saturé $\pi^{-1} \circ \pi(K)$ de tout compact K .

Une telle fonction existe (Bourbaki [3] (chap 7 §2 n°4 proposition 8)).

Soit ϕ la densité de ν . Notons $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi$. Alors $f\tilde{\phi}$ est telle que $\pi(\nu) = \mu$. μ vérifie les hypothèses mais n'est pas nécessairement symétrique. En remplaçant μ par $\frac{1}{2}(\mu + \mu^{-1})$ on obtient une mesure symétrique qui convient □

Sous-groupes La définition géométrique des groupes non-déformants qu'un sous-groupe d'un groupe non-déformant est non-déformant.

Dans le cas non moyennable, un sous groupe cocompact d'un groupe non-moyennable peut tout à fait être moyennable. Par exemple : $SL_2(\mathbb{R}) = T_2(\mathbb{R}) SO_2(\mathbb{R})$ où $T_2(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices triangulaires supérieures de déterminant 1. $SO_2(\mathbb{R})$ est compact mais $SL_2(\mathbb{R})$ n'est pas moyennable alors que $T_2(\mathbb{R})$ l'est.

Annexe E Des réductions algébriques

Nous détaillons un petit peu les deux affirmations algébriques du paragraphe introductif de la section 3. Toutes les affirmations ainsi que les preuves manquantes de cette section peuvent être trouvées aux chapitres 2 et 3 du livre de Varopoulos [16].

Groupes déformants D'après l'annexe D, pour les groupes déformants, il suffit d'obtenir l'inégalité sur la probabilité de retour de la section 2.1 pour un quotient de G . Soit G un groupe déformant moyennable et N son nilradical. G contient un tore $T \cong \mathbb{S}_1^d$ central et fermé tel que le nilradical N/T de G/T est simplement connexe. De plus, G/T est déformant. Ainsi on peut supposer que le nilradical de G est simplement connexe. On peut alors quotienter par N_2 le sous groupe (fermé et normal), tangent à $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, et on peut supposer que le nilradical de G est abélien. Par la classification des groupes de Lie abéliens, c'est donc un espace vectoriel. K agit naturellement sur H par conjugaison. En effet, G agit sur H par conjugaison car H est distingué. Comme H est abélien, l'action passe au quotient par H . L'action par ad de \mathfrak{k} sur \mathfrak{h} est diagonalisable sur \mathbb{C} car \mathfrak{h} . On peut en effet montrer que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Comme dans le paragraphe 2.2, on écrit

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^d \mathfrak{h}_i$$

où \mathfrak{h}_i est la somme directe des espaces propres de l'action de K sur $\mathfrak{h}_i \otimes \mathbb{C}$ et notons Ψ_i , l'action de K sur \mathfrak{h}_i . Ainsi, on peut supposer que G est dans une suite exacte de la forme $0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ où H est un espace vectoriel. On peut alors supposer que $K = V \times S$ où S est un groupe de Lie semi-simple compact et V est un espace vectoriel. En effet, K admet un revêtement \tilde{K} d'indice fini tel que $\tilde{K} = V \times S$. On obtient donc des actions $\tilde{\Psi}_i$ de V sur \mathfrak{h}_i . Le groupe V agit donc sur H_i via l'inclusion $V \hookrightarrow V \times S$ et on note aussi Ψ_i les actions obtenus de V sur \mathfrak{h}_i . Alors, si on écrit $|\det(\Psi_i(x))| = \exp(L_i(x))$ pour x dans V , le fait que G soit déformant nous indique ici que les L_i forment une famille de formes linéaires ayant 0 dans leur enveloppe convexe.

Cas non-déformant Il suffit de prouver l'inégalité sur la probabilité de retour dans un groupe dont G est quotient. Nous allons montrer que G est quotient d'un groupe non-déformant de la forme $N \rtimes (H \oplus S)$ où N et H sont des groupes nilpotents et S est un groupe semi-simple compacts. On peut de plus supposer N , H et S simplement connexes.

La décomposition de Lévi, d'une algèbre de Lie s'écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \rtimes \mathfrak{s}$ où \mathfrak{q} est le radical résoluble de \mathfrak{g} et \mathfrak{s} est une algèbre de Lie semi-simple (compacte car G est moyennable). Soit \mathfrak{n} le nilradical de \mathfrak{g} . La théorie des algèbres de Cartan affirme qu'on peut trouver une algèbre nilpotente \mathfrak{h} dans \mathfrak{q} telle que $\mathfrak{q} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{s}] = 0$. Ainsi on a un morphisme surjectif de $\mathfrak{n} \rtimes (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s})$ dans \mathfrak{g} . En notant N , H et S les groupes simplement connexes associés à \mathfrak{n} , \mathfrak{h} et \mathfrak{s} respectivement, on a le résultat souhaité.

Annexe F Simulations sur $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$

Cette section contient quelques images issues de simulations de marches aléatoires sur $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ où \mathbb{R} agit sur \mathbb{R}^2 par une matrice diagonale comme dans l'exemple 2.7. Le code de la simulation en Python (sur un Jupyter notebook) peut être trouvé sur mon github github.com/oulitan/marches_al-atoires_groupes_de_lie. On peut aussi y trouver une version html du Jupyter notebook que l'on peut ouvrir avec n'importe quel navigateur web et qui permet de voir plus d'illustrations (mais pas d'exécuter le code une nouvelle fois).

Sur les deux figures, les $N = 500$ premiers pas d'une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ sont représentés. Chaque pas est tiré uniformément sur le cube $[-1, 1]^3$. Cela ne correspond pas toujours à une loi symétrique selon les valeurs de L_+ et L_- choisies. En revanche, il s'agit toujours d'une loi centrée au sens où son image dans l'abélianisée est centrée. Seule la projection sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ est visible. Le code couleur correspond au signe de la troisième coordonnée (rouge pour positif, bleu pour négatif). Cette troisième coordonnée suit simplement une marche aléatoire réelle ou chaque pas est tiré uniformément sur l'intervalle $[-1, 1]$ et sa visualisation ne nous apprend pas grand chose de plus.

La figure 1 correspond au cas non-déformant. Les valeurs L_+ et L_- de l'exemple 2.7 ont toute deux été fixées à 1. La trajectoire ressemble à celle d'une marche aléatoire simple avec de grands sauts mais cette impression est trompeuse : la plupart du temps, la marche bouge très peu à l'échelle de ses fluctuations maximales. En effet la formule de la première coordonnée de S_n est : $S_n = X_1 + \exp(L_+ Z_1) X_2 + \exp(L_+(Z_1 + Z_2)) + \dots + \exp(L_+(Z_1 + \dots + Z_{n-1})) X_n$ où on note (X_i, Y_i, Z_i) la variable aléatoire du i -ème pas.

Ainsi cette quantité va surtout varier quand $Z_1 + \dots + Z_{n-1}$ est très proche de son maximum global pour $n \leq N$. Cela explique aussi pourquoi on a l'impression que il n'y a que des points rouges sur l'image : quand $Z_1 + \dots + Z_{n-1}$ est négatif, la marche aléatoire ne bouge presque pas.

La deuxième figure illustre le cas déformant. Ici, $L_+ = 1$ et $L_- = -1$. Cette forme de croix s'explique très bien et est ce qu'on observe typiquement. Lorsque $Z_1 + \dots + Z_{i-1}$ est positif, la marche se déplace de manière significative uniquement sur l'axe des abscisses. Quand $Z_1 + \dots + Z_{i-1}$ est négatif, on observe presque uniquement des mouvements sur l'axe des ordonnées car L_- est négatif et le terme devant Y_n est $\exp(L_-(Z_1 + \dots + Z_{n-1}))$ dans la deuxième coordonnée de S_n . Pour la même raison que dans le cas non-déformant, les fluctuations sont non négligeables uniquement lorsque $Z_1 + \dots + Z_{n-1}$ est très proche de son maximum (minimum pour l'axe des ordonnées) sur $\{0, \dots, N\}$. Notons aussi que les échelles en abscisse et en ordonnée sont très différentes. Cela s'explique par le fait que le maximum et le minimum de $Z_1 + \dots + Z_{n-1}$ ont pris des valeurs différentes.

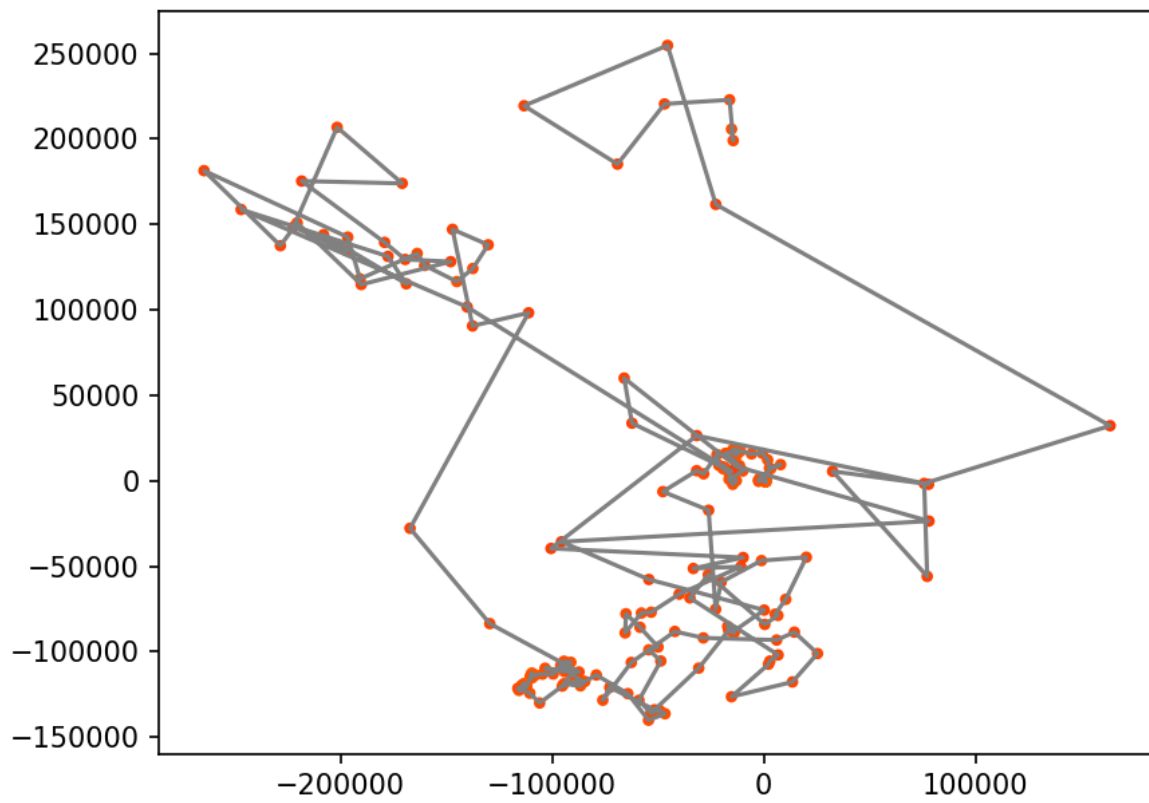


FIGURE 1 – Marche aléatoire sur $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ cas non-déformant

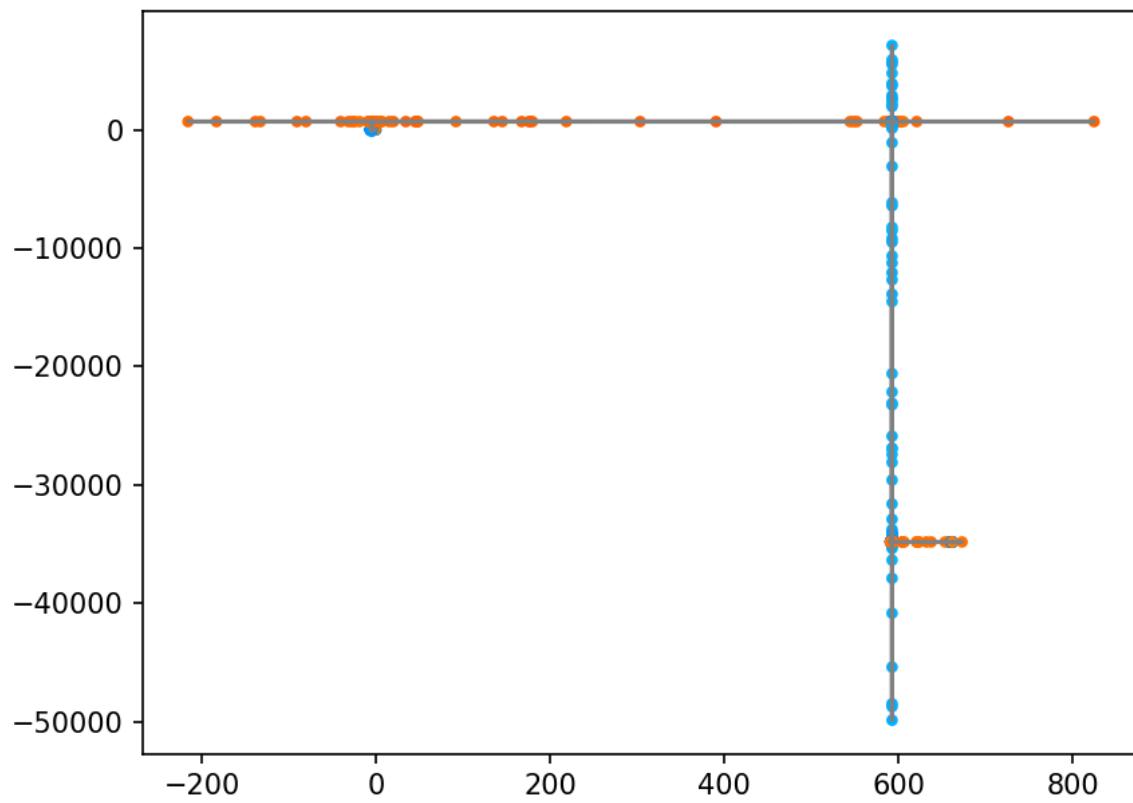


FIGURE 2 – Marche aléatoire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$: cas déformant

Références

- [1] G. Alexopoulos. A lower estimate for central probabilities on polycyclic groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 44(5) :897–910, 1992.
- [2] Georgios K. Alexopoulos. Centered densities on Lie groups of polynomial volume growth. *Probability Theory and Related Fields*, 124(1) :112–150, September 2002.
- [3] Nicolas Bourbaki. Mesure de Haar. In N. Bourbaki, editor, *Intégration : Chapitres 7 et 8*, pages 7–119. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [4] Leo Breiman. 10. The Renewal Theorem and Local Limit Theorem. In *Probability, Classics in Applied Mathematics*, pages 216–232. Society for Industrial and Applied Mathematics, January 1992.
- [5] Albrecht Böttcher, Sergei M. Grudsky, and Egor A. Maksimenko. On the Structure of the Eigenvectors of Large Hermitian Toeplitz Band Matrices. In Roland Duduchava, Israel Gohberg, Sergei M. Grudsky, and Vladimir Rabinovich, editors, *Recent Trends in Toeplitz and Pseudodifferential Operators : The Nikolai Vasilevskii Anniversary Volume*, Operator Theory : Advances and Applications, pages 15–36. Springer, Basel, 2010.
- [6] Denis Denisov and Vitali Wachtel. Random walks in cones. *The Annals of Probability*, 43(3) :992 – 1044, 2015.
- [7] Arkadij L. Onishchik and Ernest B. Vinberg. *Lie Groups and Algebraic Groups*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [8] Jean-Paul Pier. Amenable locally compact groups, 1984. Published : Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. New York etc. : John Wiley & Sons. X, 418 p. £ 49.80 (1984).
- [9] Tarrago, P Raschel, K. . Marches aléatoires dans un cône et fonctions harmoniques discrètes. *la Gazette de la SMF*, pages 35 – 48, Janvier 2023.
- [10] Hans Reiter and Jan D. Stegeman. *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*. London Mathematical Society Monographs. Oxford University Press, Oxford, New York, second edition, second edition edition, November 2000.
- [11] Pittet, Ch. Saloff-Coste, L. A survey on the relationships between volume growth, isoperimetry and the behavior of simple random walk on cayley graphs, with examples. *unpublished, (I have the pdf, please email if needed)*, 2000.
- [12] N. Th Varopoulos. Diffusion on Lie Groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 46(2) :438–448, April 1994. Publisher : Cambridge University Press.
- [13] N. Th Varopoulos. Diffusion on Lie Groups II. *Canadian Journal of Mathematics*, 46(5) :1073–1092, October 1994. Publisher : Cambridge University Press.
- [14] N. Th Varopoulos. Diffusion on Lie Groups (III). *Canadian Journal of Mathematics*, 48(3) :641–672, June 1996. Publisher : Cambridge University Press.

-
- [15] N. Th Varopoulos. Geometric and Potential Theoretic Results on Lie Groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 52(2) :412–437, April 2000. Publisher : Cambridge University Press.
- [16] N. Th. Varopoulos. *Potential Theory and Geometry on Lie Groups*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [17] Wolfgang Woess. *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.