

COURANT INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES

RAPPORT DE STAGE

---

Extrema de la fonction zêta de Riemann sur  
des intervalles mésoscopiques aléatoires de  
l'axe critique

---

*Auteur :*  
Roman LEMONDE

*Encadrant :*  
Paul BOURGADE



Janvier - Juin 2024

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Déroulement du stage . . . . .	2
1.2	Introduction mathématique . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Contexte mathématique</b>	<b>3</b>
2.1	La fonction zêta de Riemann . . . . .	3
2.2	L'hypothèse de Riemann . . . . .	3
2.3	Lien avec les matrices aléatoires . . . . .	4
2.4	Objectif du stage . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Contrôle des zéros hors de l'axe critique</b>	<b>6</b>
3.1	Répartition des zéros . . . . .	6
3.2	Zéros loins de l'axe critique . . . . .	6
3.3	Estimation de sommes de Dirichlet . . . . .	10
3.4	Zéros proches de l'axe critique . . . . .	13

# 1 Introduction

## 1.1 Déroulement du stage

J'ai réalisé mon stage au Courant Institute of Mathematical Sciences, le département de mathématiques de l'Université de New York, sous la direction de Paul Bourgade. J'ai eu accès au catalogue de cours de l'université, dont j'ai suivi deux cours, ainsi qu'aux séminaires de probabilités (en collaboration avec l'université de Columbia) et d'analyse.

Je tiens à remercier Paul Bourgade pour son accueil et son accompagnement tout le long du stage. Il était disponible, réactif et à l'écoute. Je tiens aussi à remercier toutes les personnes que j'ai fréquentées pendant mes mois au Courant Institute, notamment Giacomo Spriano, sans qui ces mois auraient été beaucoup moins faciles. Finalement, je remercie Djalil Chafai. Son aide m'a permis d'obtenir ce stage très rapidement.

## 1.2 Introduction mathématique

La fonction zêta de Riemann, notée  $\zeta(s)$ , occupe une place centrale en théorie des nombres. Cette fonction est définie par une série convergente pour tout nombre complexe  $s$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , puis est prolongée en une fonction méromorphe à tout le reste du plan complexe. Bien que sa définition initiale semble purement analytique, la fonction zêta a révélé des liens profonds avec les propriétés arithmétiques des nombres entiers, en particulier à travers la distribution des nombres premiers. Un exemple de cette connection est l'équivalence entre le théorème des nombres premiers et le fait que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta(1 + it) \neq 0$ .

L'un des résultats les plus importants liés à la fonction zêta est l'hypothèse de Riemann, selon laquelle toutes les racines non triviales de  $\zeta$  ont une partie réelle égale à  $1/2$ . Cette conjecture, encore non résolue, est l'un des problèmes ouverts les plus importants en mathématiques. Sa véracité fournirait des informations précises sur leur comportement à grande échelle. L'estimation du terme d'erreur intervenant dans le théorème des nombres premiers serait bien meilleure, par exemple.

L'approche probabiliste de la fonction zêta de Riemann offre une perspective innovante et pertinente en théorie des nombres.  $\zeta$  ayant un comportement très erratique autour de l'axe critique (la droite  $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ ), ne pouvons nous pas étudier sa valeur comme une variable aléatoire? Ce point de vue fut notamment poussé par Atle Selberg, qui démontra notamment que  $\log \zeta(\frac{1}{2} + i\tau)$  se comporte comme une loi normale centrée sur  $\mathbb{C}$  de variance  $\log \log t$ , pour  $\tau$  suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[t, 2t]$ .

Cette étude probabiliste de la fonction zêta a mené à des résultats encore plus surprenant, comme en témoigne le lien inattendu avec les matrices aléatoires. Les zéros de la fonction zêta auraient la même fonction de corrélation paire que les matrices hermitiennes aléatoires du GUE (Gaussian Unitary Ensemble) : les zéros de  $\zeta$  se comporteraient donc comme les valeurs propres aléatoires de matrices hermitiennes. Cette conjecture s'appuie sur certains résultats, ainsi que beaucoup d'analyses numériques.

La comparaison entre  $\log |\zeta|$  et le logarithme des polynômes caractéristiques des éléments du CUE (Circular Unitary Ensemble) a mené à des conjectures sur le comportement de  $\log |\zeta|$  sur des intervalles aléatoires de longueur fixe, formulées par Fyodorov, Hiary et Keating. Nous allons ici étudier les extrema de  $\log \zeta$  sur des intervalles aléatoires de taille fixe, notamment pour la partie imaginaire.

## 2 Contexte mathématique

### 2.1 La fonction zêta de Riemann

Un problème important en théorie des nombres est le comportement de la fonction  $\zeta$  de Riemann aux alentours de l'axe critique. En posant la variable complexe  $s = \sigma + it$ , la fonction  $\zeta(s)$  est définie, pour  $\sigma > 1$ , par sa série de Dirichlet ou son produit eulérien :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

où le produit parcourt l'ensemble des nombres premiers. Cette expression admet un unique prolongement méromorphe au plan complexe, dont le seul pôle est situé en 1. De plus, la fonction  $\zeta$  vérifie l'équation suivante :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

où  $\Gamma(z)$  est définie pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$  par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

et prolongée au plan complexe en une fonction méromorphe.

Une symétrie naturelle par rapport à la droite  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$  se dessine. La fonction possédant un développement en série de Dirichlet pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , le comportement de  $\zeta$  est donc aussi bien compris pour  $\operatorname{Re}(s) < 0$ , l'équation précédente indiquant en particulier la présence de zéros (dits triviaux) aux entiers négatifs pairs. Ceci nous ramène donc à l'étude de la bande dite critique :  $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ .

La fonction  $\log \zeta$  est encore plus complexe que  $\zeta$ . On le définit de la manière usuelle : Pour tout  $s = \sigma + it$ ,  $\log \zeta$  est la valeur obtenue en prolongeant continuellement la fonction depuis sa valeur en  $s = 2$  sur les lignes droites joignant  $2$ ,  $2 + it$  et  $s$ . Si  $t$  est la partie imaginaire d'un zéro de  $\zeta$ , on définit  $\log \zeta(s) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{\log \zeta(\sigma + i(t + \varepsilon)) + \log \zeta(\sigma + i(t - \varepsilon))\}$ .

### 2.2 L'hypothèse de Riemann

C'est dans la bande critique que l'étude de la fonction  $\zeta$  comporte le plus grand intérêt arithmétique : la répartition des zéros donne par exemple de précieuses informations sur la répartition des nombres premiers. C'est le problème principal étudié. Une hypothèse très célèbre liée à ce problème est l'hypothèse de Riemann. Celle-ci énonce que toutes les racines non triviales de la fonction  $\zeta$  sont sur l'axe critique. Elle demeure toutefois à ce jour une conjecture, témoignant du caractère instable de la fonction autour de cet axe critique.

Un autre problème important concerne les maxima de la fonction  $\zeta$  de Riemann sur l'axe critique. Plusieurs hypothèses, souvent conséquences de l'hypothèse de Riemann, ont été émises, comme l'hypothèse de Lindelöf, selon laquelle  $|\zeta(\frac{1}{2} + it)| \ll |t|^\varepsilon$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ . Une conséquence arithmétique de cette hypothèse est l'existence de nombres premiers dans presque tous les intervalles de la forme  $[x, x + x^\varepsilon]$ . Toutefois, le meilleur résultat prouvé indique que l'hypothèse de Lindelöf est vérifiée pour tout  $\varepsilon > 13/84$ . Des bornes inférieures ont également été obtenues pour ce maximum global, l'une des plus précises étant due à Bondarenko et Seip [1] : pour tout  $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$|\zeta(\frac{1}{2} + it)| \geq e^{(c \sqrt{\frac{\log t \log \log \log t}{\log \log t}})},$$

pour des valeurs de  $t$  arbitrairement grandes.

### 2.3 Lien avec les matrices aléatoires

En 1973, Montgomery [8] propose une généralisation d'un théorème qu'il a démontré, sur la relation entre les zéros de la fonction zêta sur l'axe critique :

**Conjecture 2.1.** *Supposons l'hypothèse de Riemann. Si  $\alpha \leq \beta$  sont des entiers fixés, alors :*

$$\# \left\{ (\gamma, \gamma') : 0 < \gamma, \gamma' \leq T \text{ et } \frac{2\pi\alpha}{\log T} \leq \gamma - \gamma' \leq \frac{2\pi\beta}{\log T} \right\} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{T \log T}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[ 1 - \left( \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right)^2 \right] du,$$

où  $\gamma$  et  $\gamma'$  parcourent l'ensemble des parties imaginaires des zéros non triviaux de  $\zeta$ .

Une extension de cette conjecture à  $k$  points a une conséquence étonnante : la distribution des écarts entre les zéros de la fonction zêta coïncide avec celle de la distance entre les valeurs propres des éléments du GUE (Gaussian Unitary Ensemble), défini ci-dessous :

**Définition 2.2.** Une variable aléatoire appartient au  $\text{GUE}(n)$  si elle est décrite par la mesure gaussienne de densité :

$$\frac{1}{Z} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} H^2},$$

sur l'ensemble des matrices hermitiennes  $H$  de taille  $n \times n$ ,  $Z$  étant une constante de normalisation.

En particulier, cette analogie couplée à l'utilisation d'outils issus de la mécanique statistique a mené Fyodorov, Hiary et Keating à émettre des conjectures couplées :

**Conjecture 2.3.** *Soit  $U_N$  une matrice unitaire aléatoire de taille  $N \times N$  uniformément distribuée (selon la mesure de Haar). Soit  $X_N$  son polynôme caractéristique. Alors :*

$$\max_{|z|=1} \log |X_N(z)| - \left( \log N - \frac{3}{4} \log \log N \right)$$

converge en distribution lorsque  $N$  tend vers l'infini.

La conjecture complète décrit cette distribution limite, mais elle n'est pas importante ici.

Le résultat analogue pour la fonction zêta prédit son comportement sur des intervalles mésoscopiques. Notons aussi qu'il n'est pas clair si la distribution limite est la même que dans le cas des matrices aléatoires.

**Conjecture 2.4.** *Soit  $U$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et  $\tau = UT$ . Alors :*

$$\log \max_{|h| \leq 1} \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + i\tau + ih \right) \right| - \left( \log \log T - \frac{3}{4} \log \log \log T \right)$$

converge en distribution.

Jusqu'ici, nous avons surtout parlé de l'ordre maximal de magnitude de la fonction  $\zeta$ . Cette conjecture donne des informations au niveau mésoscopique. Prouver cette conjecture semble beaucoup plus difficile que pour les matrices aléatoires. Toutefois des résultats sur le terme principal  $\log \log T$  ont déjà été prouvés.

## 2.4 Objectif du stage

P. Bourgade et al. [5] ont obtenu des résultats confirmant le premier ordre dans la conjecture 2.3 :

**Théorème 2.5.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , lorsque  $T \rightarrow \infty$  :*

$$(1 - \varepsilon) \log \log T < \max_{|t-u| \leq 1} \log \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + iu \right) \right| < (1 + \varepsilon) \log \log T$$

J. Najdunel [6] a lui obtenu un résultat analogue, mais pour la partie imaginaire de  $\log \zeta$ , et sans réussir à s'affranchir de l'hypothèse de Riemann :

**Théorème 2.6.** *Supposons l'hypothèse de Riemann. Soit  $U$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Si  $h > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , et  $T > 3$ , alors :*

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [UT-h, UT+h]} \operatorname{Im} \left( \log \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right) \in [(1 - \varepsilon) \log \log \log T, (1 + \varepsilon) \log \log \log T] \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1,$$

$$\mathbb{P} \left( \inf_{t \in [UT-h, UT+h]} \operatorname{Im} \left( \log \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right) \in [-(1 + \varepsilon) \log \log \log T, -(1 - \varepsilon) \log \log \log T] \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1.$$

Réussir à démontrer ce résultat sans l'hypothèse de Riemann est plus compliqué que pour la partie réelle ( $\log |\zeta|$ ), car la partie imaginaire est plus intrinsèquement liée aux zéros de  $\zeta$ . Nous en parlerons plus en détail dans un prochain paragraphe. L'objectif du stage était donc d'essayer de s'affranchir de cette hypothèse, et de s'approcher du résultat suivant :

**Conjecture 2.7.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , lorsque  $T \rightarrow \infty$ , on observe :*

$$\frac{1}{T} \operatorname{mes} \left\{ 0 \leq t \leq T : (1 - \varepsilon) \log \log T < \max_{|t-u| \leq 1} \left| \operatorname{Im} \left( \log \zeta \left( \frac{1}{2} + iu \right) \right) \right| < (1 + \varepsilon) \log \log T \right\} \rightarrow 1.$$

Nous n'avons pas atteint cet objectif, mais avons obtenu le résultat suivant :

**Proposition 2.8.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $U$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et si l'on pose  $t = UT$ , il existe  $T_\varepsilon$  tel que pour tout  $T > T_\varepsilon$ ,*

$$\mathbb{P} \left( \max_{|t-u| \leq 1} \left| \operatorname{Im} \left( \log \zeta \left( \frac{1}{2} + iu \right) \right) - \operatorname{Im} (\log \zeta (1 + iu)) \right| < C \log \log T \right) > 1 - \varepsilon.$$

Notons que l'on peut facilement s'affranchir du  $\operatorname{Im} (\log \zeta (1 + iu))$ , en intégrant jusqu'à  $2 + iu$  à la place. Ceci n'a toutefois que peu d'importance.

### 3 Contrôle des zéros hors de l'axe critique

La partie imaginaire de  $\log \zeta$  est étroitement liée à la distribution des zéros de  $\zeta$ . En effet, intuitivement, le fait de passer d'un côté à l'autre d'un zéro devrait rejouter un facteur  $\pi$  : c'est justement ce lien qui rend ce résultat moins évident que pour la partie réelle.

Par exemple, si l'on pose  $N(T)$  le nombre de zéros  $\rho$  de la fonction zêta de Riemann tels que  $0 < \operatorname{Re}(\rho) \leq 1$  et  $0 < \operatorname{Im}(\rho) < T$ , une formule due à Von Mangoldt lie  $N(T)$  à la partie imaginaire de  $\log \zeta$  :

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left( \log \zeta \left( \frac{1}{2} + iT \right) \right) + \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi e} \right) + \frac{7}{8} + O \left( \frac{1}{T} \right).$$

Avant tout, nous avons besoin de résultats sur la répartition horizontale de ces zéros.

#### 3.1 Répartition des zéros

Même sans l'hypothèse de Riemann, il existe plusieurs résultats sur la répartition des zéros dans la bande critique, en particulier horizontalement : la majorité des zéros sont proches de l'axe critique, comme en témoigne le résultat de densité suivant, dû à Selberg [2] :

Posons  $N(\sigma, T)$  le nombre de zéros  $\rho$  de la fonction zêta de Riemann  $\zeta(s)$  tels que  $\operatorname{Re}(\rho) \geq \sigma$  et  $0 < \operatorname{Im}(\rho) < T$ . Formellement, nous pouvons écrire :

$$N(\sigma, T) = |\{\rho = \beta + i\gamma : \zeta(\rho) = 0, \beta \geq \sigma, 0 < \gamma < T\}|.$$

**Théorème 3.1.** *Uniformément en  $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,*

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O} \left( T^{1 - \frac{1}{4}(\sigma - \frac{1}{2})} \log T \right)$$

Notons que, suffisamment loin de l'axe critique, une meilleure borne, due à A.E. Ingham [3] existe. Toujours uniformément en  $\sigma$  :

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O} \left( T^{1 - \sigma(2\sigma - 1)} \log^5 T \right).$$

La première formule est plus précise proche de l'axe critique, i.e. pour  $\sigma - \frac{1}{2} < C \frac{\log \log T}{\log T}$ ,  $C$  une constante.

Afin d'estimer  $\operatorname{Im}(\log \zeta)$  sur l'axe critique, nous allons intégrer la dérivée logarithmique entre  $1 + i\tau$  et  $\frac{1}{2} + i\tau$ . Toutefois, loin de l'axe critique ( $\sigma - \frac{1}{2} > C \frac{\log \log T}{\log T}$ ), les zéros sont plutôt rares. C'est donc le terme principal (somme de Dirichlet) qui prédomine. Néanmoins, lorsque l'on s'approche de l'axe critique, les résidus dûs aux zéros seront dominants.

Le fait de scinder en deux le traitement des zéros émerge donc naturellement.

#### 3.2 Zéros loins de l'axe critique

Une formule, due à Selberg, permet d'approcher  $\operatorname{Im}(\log \zeta)$  par une somme de Dirichlet :

**Lemme 3.2.** *Soit  $x > 1$ ,  $s \neq 1$ ,  $s \neq \rho$ ,  $s \neq -2k$ . Alors*

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= - \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s} + \frac{x^{2(1-s)} - x^{1-s}}{(1-s)^2 \log x} + \frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s} - x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\log x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s} - x^{-2(2n+s)}}{(2n+s)^2}, \end{aligned}$$

où :

$$\Lambda_x(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{pour } 1 \leq n \leq x, \\ \Lambda(n) \frac{\log \frac{x^2}{n}}{\log n}, & \text{pour } x \leq n \leq x^2, \end{cases}$$

$\rho$  parcourant les zéros de  $\zeta$  et  $\Lambda$  étant la fonction de von Mangoldt, définie par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^m, p \text{ premier, } m \geq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les termes en plus de la somme de Dirichlet sont des résidus correspondant aux zéros triviaux ou non de  $\zeta$ . Ceux dûs aux zéros triviaux sont faciles à borner (c'est fait plus tard). Les termes dûs aux zéros sont moins faciles à borner. Toutefois, en restant assez loin de l'axe critique, cela ne pose pas de problème puisque la densité de zéros y est faible, comme en témoigne le résultat suivant :

**Proposition 3.3.** *Soit  $C > 100$  une constante,  $T > 2$ ,  $x = T^{\frac{1}{16}}$ ,  $U$  suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $\tau = UT$ ,  $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{C \log \log T}{\log T}$ , et  $s = \sigma_0 + i\tau$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$  :*

$$\frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{2(\rho-s)} - x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} = \mathcal{O}(\log \log T),$$

où  $\rho$  parcourt les zéros de la fonction zéta non triviaux, la constante du grand  $O$  ne dépendant ni de  $\varepsilon$ , ni de  $y$ .

Notons que c'est ce résultat qu'il convient d'améliorer pour atteindre la conjecture exacte. En effet, le fait de se rapprocher à distance  $\sigma_0 - 1/2 = \varepsilon \frac{\log \log T}{\log T}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  permettrait de conclure. Pour ce faire, il faudrait néanmoins sûrement améliorer les théorèmes de répartition horizontale des zéros

*Démonstration.* La preuve repose sur la faible concentration de zéros à la droite de notre point : on peut donc construire des rectangles dans lesquels il n'y a presque sûrement pas de zéros de  $\zeta$ , de manière à minorer chaque terme de la somme.

Plus précisément, posons  $\delta = \sigma_0 - 1/2$ , et pour  $l \in \{0, \dots, \lfloor -\log_2 \delta \rfloor\}$ ,  $\sigma_l = 1/2 + 2^l \delta$ . Posons également :

$$p_l = \mathbb{P} \left( \text{il existe un zéro } \rho = \beta + i\gamma \text{ de } \zeta \text{ tel que } \beta > \sigma_l \text{ et } |\gamma - \tau| < \frac{T^{2^{l-2}\delta}}{\log^2 T} \right)$$

On obtient, à partir de l'expression de  $N(\sigma, T)$ ,  $p_l = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\log T} \right)$ .

En sommant sur  $l$ , on trouve :

$$\sum_{0 \leq l \leq -\log_2 \delta} p_l = \mathcal{O} \left( \frac{\log \delta}{\log T} \right).$$

Un premier objectif est de choisir  $\delta$  de manière à ce que cette somme tende vers 0. C'est le cas si  $\frac{1}{T} = o(\delta)$ . Choisissons  $\delta = \frac{C \log \log T}{\log T}$ , pour  $C > 100$ . Par ce qui précède, l'événement  $A = \bigcup_l \left\{ \text{il existe un zéro } \rho = \beta + i\gamma \text{ de } \zeta \text{ tel que } \beta > \sigma_l \text{ et } |\gamma - \tau| < \frac{T^{2^{l-2}\delta}}{\log^2 T} \right\}$  a une probabilité qui tend vers 0 lorsque  $T \rightarrow \infty$ .

Fixons donc  $\varepsilon > 0$ , et  $T_0$  tel que pour tout  $T > T_0$ ,  $\mathbb{P}(A) < \varepsilon$ , et mettons nous maintenant sous l'événement  $\bar{A}$ . Soit  $\rho = \beta + i\gamma$  un zéro tel que  $2^l \delta \leq \beta \leq 2^{l+1} \delta$ . Étant sous  $\bar{A}$ ,  $|\gamma - \tau| > \frac{T^{2^{l-2}\delta}}{\log^2 T}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2} \right| &\leq \frac{x^{2^{l+2}\delta}}{T^{2^{l-1}\delta}} \log^4 T \\ &\leq T^{-2^{l-2}\delta + \frac{4 \log \log T}{\log T}} \\ &\leq \log^{4-2^{l-2}C} T \end{aligned}$$

Posons maintenant  $k \geq 1$  un entier et un zéro  $\rho_k = \beta_k + i\gamma_k$  de  $\zeta$  tel que  $|\gamma_k - \tau| \in [kT^{2^{l-2}\delta} \log^{-1} T, (k+1)T^{2^{l-2}\delta} \log^{-1} T[$  et  $2^l \delta \leq \beta_k \leq 2^{l+1} \delta$ .

Comme ci-dessus, on trouve :

$$\left| \frac{x^{2(\rho_k-s)}}{(\rho_k-s)^2} \right| \leq \frac{\log^{2-2^{l-2}C} T}{k^2}$$

Sommons sur tous les zéros dont la partie réelle est dans  $[2^l \delta, 2^{l+1} \delta[$ . Commençons par noter, pour  $k \geq 0$  :

$$F_{k,l} = \left| \left\{ \rho = \beta + i\gamma : \frac{1}{2} + 2^l \delta \leq \beta \leq \frac{1}{2} + 2^{l+1} \delta, |\gamma_k - \tau| \in [kT^{2^{l-2}\delta} \log^{-1} T, (k+1)T^{2^{l-2}\delta} \log^{-1} T \right\} \right|$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Re(\rho) \geq \sigma_0} \frac{x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2} \right| &\leq \sum_l F_{0,l} \log^{4-2^{l-2}C} T + \sum_l \sum_{k \geq 1} F_{k,l} \frac{\log^{2-2^{l-2}C} T}{k^2} \\ &\leq \sum_l F_{0,l} \log^{4-C/4} T + \sum_l \sum_{k \geq 1} F_{k,l} \frac{\log^{2-C/4} T}{k^2}, \end{aligned}$$

Définissons l'événement  $B_l = \{F_{l,0} \geq \log T\}$ . Par choix des intervalles,  $\mathbb{E}(F_{l,0}) = \mathcal{O}(1)$ , donc  $\mathbb{P}(B_l) = \mathcal{O}(\log^{-1} T)$ . D'où  $\mathbb{P}(\bigcup_l B_l) = \mathcal{O}(\log(1/\delta) \log^{-1} T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ . On peut alors définir  $T_1 \geq T_0$  tel que pour tout  $T \geq T_1$ ,  $\mathbb{P}(\bigcup_l B_l) < \varepsilon$ . Restreignons nous alors à  $\overline{\bigcup_l B_l}$ .

De même,

$$\mathbb{E} \left( \sum_{k \geq 1} F_{k,l} \frac{\log^{2-C/4} T}{k^2} \right) = \mathcal{O} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{\log^{2-C/4} T}{k^2} \right) = \mathcal{O}(\log^{2-C/4} T)$$

Si l'on note  $C_l = \left\{ \sum_{k \geq 1} F_{k,l} \frac{\log^{2-C/4} T}{k^2} > \log^{3-C/4} T \right\}$ , alors :

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_l C_l \right) = \mathcal{O}(\log(1/\delta) \log^{-1} T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

On peut alors définir  $T_1 \geq T_0$  tel que pour tout  $T \geq T_1$ ,  $\mathbb{P}(\bigcup_l B_l \cup C_l) < \varepsilon$ . Restreignons nous alors à  $\overline{\bigcup_l B_l \cup C_l}$ .

On trouve :

$$\left| \sum_{\Re(\rho) \geq \sigma_0} \frac{x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2} \right| \leq \sum_l F_{0,l} \log^{4-2^{l-2}C} T + \sum_l \sum_{k \geq 1} F_{k,l} \frac{\log^{2-2^{l-2}C} T}{k^2} = o(1)$$

On a donc prouvé que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{\Re(\rho) \geq \sigma_0} \frac{x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2} = o(1)$  avec probabilité au moins  $1 - \varepsilon$ , le petit  $o$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$ . On trouve le même résultat pour  $\sum_{\Re(\rho) \geq \sigma_0} \frac{x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2}$ .

Reste à borner le terme correspondant aux zéros  $\rho$  tels que  $\Re(\rho) < \sigma_0$ .

Notons que par choix de  $\delta$ , comme précédemment, on peut supposer qu'il n'y a pas de zéros trop proches de  $s$  :

$$p_{-1} := \mathbb{P} \left( \text{il existe un zéro } \rho = \beta + i\gamma \text{ de } \zeta \text{ tel que } \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} < \beta < \frac{1}{2} + \delta \text{ et } |\gamma - \tau| < 1 \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

Plaçons-nous alors dans le complémentaire de cet événement, i.e. pour tout zéro  $\rho = \beta + i\gamma$  tel que  $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} < \beta < \frac{1}{2} + \delta$ ,  $|\gamma - \tau| \geq 1$ . Posons, pour tout  $k \geq 0$  :

$$b_k = \left| \left\{ \rho = \beta + i\gamma : \frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2} + \delta, |\gamma_k - \tau| \in [k, k+1[ \right\} \right|.$$

Alors :

$$\left| \sum_{\Re(\rho) < \sigma_0} \frac{x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} \right| \leq b_0 \frac{4 \log^{2-\frac{C}{32}} T}{C^2 \log \log^2 T} + \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{k^2}$$

Comme précédemment, en notant que  $\mathbb{E}(b_k) = \mathcal{O}(\log T + \log k)$ , on arrive à la conclusion que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un événement de probabilité au moins  $1 - \varepsilon$  tel que sous cet événement,

$$\left| \sum_{\Re(\rho) < \sigma_0} \frac{x^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} \right| = \mathcal{O}(\log T \log \log \log T),$$

la constante du grand  $O$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$ . En procédant de même pour  $\sum_{\Re(\rho) < \sigma_0} \frac{x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2}$ , on obtient, en sommant les deux inégalités, le résultat énoncé.  $\square$

En modifiant un peu la preuve, on obtient un résultat plus fort :

**Proposition 3.4.** *Soit  $C > 100$  une constante,  $T > 2$ ,  $x = T^{\frac{1}{16}}$ ,  $U$  suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $\tau = UT$ ,  $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{C \log \log T}{\log T}$ , et  $s = \sigma_0 + i\tau$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ , pour tout  $y$  tel que  $\text{Re}(y) \in [\sigma_0, 1]$  et  $|\text{Im}(y) - \tau| < 1$  :*

$$\frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{2(\rho-y)} - x^{\rho-y}}{(\rho-y)^2} = \mathcal{O}(\log \log T),$$

où  $\rho$  parcourt les zéros de la fonction zéta non triviaux, la constante du grand  $O$  ne dépendant ni de  $\varepsilon$ , ni de  $y$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que les rectangles construits pour tous ces points différents sont très proches : on peut donc travailler avec leur union.  $\square$

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 3.5.** *Reprenons les notations de la proposition 2.1. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T_1$  tel que pour tout  $T > T_1$ , avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ , pour tout  $y \in [s, 1 + i\tau]$  :*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(y) = - \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^y} + O(\log \log T),$$

la constante du  $\mathcal{O}$  ne dépendant ni de  $\varepsilon$ , ni de  $y$ .

*Démonstration.* Notons que  $\mathbb{P}(\tau < T^{\frac{1}{2}}) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ . Supposons donc que  $\tau \geq T^{\frac{1}{2}}$ . Soit  $y \in [s, 1 + i\tau]$ .

On obtient, étant donné que  $\Re(1 - y) \leq \frac{1}{2}$  et  $|1 - y| \geq T^{\frac{1}{2}}$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{2(1-y)} - x^{1-y}}{(1-y)^2 \log x} \right| &= \mathcal{O}\left(T^{-\frac{15}{16}}\right) \\ &= o(\log \log T) \end{aligned}$$

Sous les mêmes hypothèses,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\log x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-y} - x^{-2(2n+y)}}{(2n+y)^2} \right| &\leq \frac{1}{\log x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^2} \\ &= o(\log \log T) \end{aligned}$$

En combinant ces résultats à la proposition précédente, on obtient le résultat énoncé.  $\square$

En intégrant cette formule entre  $s$  et  $1 + i\tau$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \log \zeta(1 + i\tau) - \log \zeta(s) &= \int_s^{1+i\tau} \frac{\zeta'}{\zeta}(y) dy \\ &= - \sum_{n \leq x^2} \int_s^{1+i\tau} \frac{\Lambda_x(n)}{n^y} dy + O(\log \log T) \\ &= \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s \log n} - \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{1+i\tau} \log n} + O(\log \log T) \end{aligned}$$

L'estimation de cette somme de Dirichlet paraît donc centrale dans l'estimation de  $\log \zeta(s)$ .

### 3.3 Estimation de sommes de Dirichlet

**Proposition 3.6.** *Notons, pour  $T > 1$ ,  $x = T^{\frac{1}{16}}$ ,  $U$  suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $\tau = UT$ ,  $\delta \in [\frac{C \log \log T}{\log T}, \frac{1}{2}]$ ,  $\sigma = \frac{1}{2} + \delta$  et  $y = \sigma + i\tau$ . Alors lorsque  $T$  tend vers  $\infty$ ,*

$$\mathbb{E} \left( \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^y \log n} \right|^2 \right) \ll \log \log T$$

*Démonstration.* Commençons par noter que pour tout  $n \leq x^2$ ,  $\Lambda_x(n) \leq \Lambda(n)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma \log n} \right|^2 \right) &\ll \sum_{\substack{p, q \leq x^2 \\ p, q \text{ premiers}}} \frac{1}{(pq)^\sigma} \mathbb{E} \left( e^{-i\tau(\log p - \log q)} \right) \\ &\ll \sum_{\substack{p \leq x^2 \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p^{2\sigma}} + \frac{1}{T} \sum_{\substack{p, q \leq x^2 \\ p > q \text{ premiers}}} \frac{1}{(pq)^\sigma (\log p - \log q)} \end{aligned}$$

Mais si  $p > q$  sont premiers,  $\log p - \log q > \frac{1}{10q}$ , donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{\substack{p, q \leq x^2 \\ p > q \text{ premiers}}} \frac{1}{(pq)^\sigma (\log p - \log q)} &\ll \frac{1}{T} \sum_{\substack{p, q \leq x^2 \\ p > q \text{ premiers}}} \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{(pq)^\delta} \\ &\ll \frac{1}{T} \sum_{\substack{p, q \leq x^2 \\ p > q \text{ premiers}}} \frac{1}{p^\delta} \quad \text{car } q < p. \\ &\ll 1. \end{aligned}$$

Pour justifier le fait de ne considérer que les termes premiers de la somme, calculons les autres sommes. Pour les carrés de nombres premiers :

$$\sum_{\substack{p, q \leq x^2 \\ p, q \text{ premiers}}} \frac{1}{(pq)^{2\sigma}} \mathbb{E} \left( e^{-i2\tau(\log p - \log q)} \right) \ll \sum_{\substack{p \leq x^2 \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p^{2\sigma}}$$

On fait de même pour les cubes, et l'on regroupe toutes les autres puissances ensemble :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 4} \sum_{\substack{p, q \leq x^2 \\ p, q \text{ premiers}}} \frac{1}{(pq)^{2\sigma}} \mathbb{E} \left( e^{-i2\tau(\log p - \log q)} \right) &\ll \sum_{k \geq 4} \sum_{\substack{p \leq x^2 \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p^{2k\sigma}} \\ &\ll \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Reste la somme principale. Commençons par définir la fonction de compte des nombres premiers :

$$\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}|$$

On remarque alors, l'intégrale étant définie au sens de Stieljes :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x^2 \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p^{2\sigma}} &= \int_2^{x^2} \frac{1}{u^{2\sigma}} d\pi(u) \\ &= \left[ \frac{1}{u^{2\sigma}} \pi(u) \right]_2^{x^2} + \int_2^{x^2} \frac{2\sigma}{u^{1+2\sigma}} \pi(u) du \\ &\ll \frac{1}{x^{4\sigma}} \pi(x^2) + \int_2^{x^2} \frac{\pi(u)}{u^{1+2\sigma}} du. \end{aligned}$$

Or  $\pi(u) \ll \frac{u}{\log u}$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_2^{x^2} \frac{\pi(u)}{u^{1+2\sigma}} du &\ll \int_2^{x^2} \frac{1}{u^{2\sigma} \log u} du \\ &\ll \int_2^{x^2} \frac{1}{u \log u} du \\ &\ll \log \log x, \end{aligned}$$

et :

$$\frac{1}{x^{4\sigma}} \pi(x^2) \ll \frac{1}{x^{4\delta} \log x}$$

Comme  $x = T^{\frac{1}{16}}$  et  $\delta \geq \frac{C \log \log T}{\log T}$ , on obtient :

$$\sum_{\substack{p \leq x^2 \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p^{2\sigma}} \ll \log \log T,$$

et donc :

$$\mathbb{E} \left( \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^y \log n} \right|^2 \right) \ll \log \log T.$$

□

On en déduit que, pour tout  $y$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^y \log n} \right| \geq \log \log T \right) &= \mathbb{P} \left( \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^y \log n} \right|^2 \geq (\log \log T)^2 \right) \\ &\ll \frac{1}{\log \log T} \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Notons toutefois que ce résultat est ponctuel. Reste à se ramener à un intervalle de taille 1. Le lemme suivant permet de faire cela.

**Lemme 3.7.** *Soit  $f$  une fonction continuellement différentiable sur  $[-1, 1]$ . Alors :*

$$\max_{u \in [-1, 1]} |f(u)|^2 \leq \frac{|f(1)|^2 + |f(-1)|^2}{2} + \int_{-1}^1 |f'(v)f(v)| dv.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Sobolev suivante. Pour tout  $u \in [-1, 1]$  :

$$f(u)^2 = \frac{f(1)^2 + f(-1)^2}{2} + \int_{-1}^u f'(v)f(v) dv - \int_u^1 f'(v)f(v) dv,$$

□

En appliquant le lemme à  $f(u) = \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma+i(\tau+u)} \log n}$ , on obtient assez rapidement, en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, pour tout  $y$  comme ci dessus :

$$\mathbb{P} \left( \max_{u \in [-1,1]} \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{y+iu} \log n} \right| \geq \log \log T \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

Notons qu'il existe des résultats beaucoup plus précis sur les sommes de Dirichlet, comme le lemme suivant, dû à K. Soundararajan [7]. Toutefois, les approximations dues aux zéros de la fonction zéta hors de l'axe critique étant moins précises, il n'est pas nécessaire d'être très précis ici.

**Lemme 3.8.** *Soit  $T$  assez grand, et  $2 \leq x \leq T$ . Soit  $k$  un entier naturel tel que  $x^k \leq T/\log T$ . Soit  $\tau$  suivant une loi uniforme sur  $[T, 2T]$ . Pour tous nombres complexes  $a(p)$  ( $p$  nombre premier), on a :*

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{p \leq x} \frac{a(p)}{p^{1/2+it}} \right|^{2k} dt \ll Tk! \left( \sum_{p \leq x} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^k.$$

Regroupons tous les résultats que nous avons obtenu :

**Proposition 3.9.** *Reprenons les notations de la dernière proposition. Soit  $C \geq 200$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ , avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ ,*

$$\max_{u \in [-1,1]} |\log \zeta(s + iu)| \leq \max_{u \in [-1,1]} |\log \zeta(1 + i(\tau + u))| + C \log \log T.$$

Reste à traiter les zéros proches de l'axe critique. C'est là que l'extrême majorité des zéros de  $\zeta$  se trouvent.

### 3.4 Zéros proches de l'axe critique

Pour atteindre l'axe, nous allons utiliser une autre approximation de  $\frac{\zeta'}{\zeta}$  [2] :

**Lemme 3.10.** *Si  $s = \sigma + it$  n'est pas un zéro de  $\zeta$ , et que  $t \geq 2$ , alors uniformément en  $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$  :*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) + \mathcal{O}(\log t)$$

Cette approximation témoigne bien de la domination des zéros de  $\zeta$  près de l'axe. Nous allons intégrer cette formule pour se ramener à l'axe.

Posons, pour tout  $T > 0$ ,  $U$  suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $\tau = UT$ ,  $C$  assez grand,  $\delta = C \frac{\log \log T}{\log T}$ ,  $\sigma = \frac{1}{2} + \delta$ ,  $s = \sigma + i\tau$ ,  $r = \frac{1}{2} + i\tau$

**Proposition 3.11.** *Il existe  $C_0$  assez grand tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T_0 > 2$  tel que pour tout  $T > T_0$ ,*

$$\max_{|u| \leq 1} |\operatorname{Im}(\log \zeta(r + iu)) - \operatorname{Im}(\log \zeta(s + iu))| \leq C_0 \log \log T$$

avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . L'événement  $\tau \leq 2$  a une probabilité tendant vers zéro lorsque  $T \rightarrow \infty$ . On peut donc se placer dans son complémentaire. De même, on peut supposer que  $[r, s]$  ne rencontre pas l'ensemble des zéros de  $\zeta$ . Sous cette hypothèse, on applique le lemme précédent : pour tout  $y \in [r, s]$ ,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(y) = \sum_{\rho} \left( \frac{1}{y-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + \mathcal{O}(\log T).$$

En intégrant entre  $r$  et  $s$  :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(\log \zeta(r)) - \operatorname{Im}(\log \zeta(s))| &= \left| \int_s^r \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(y) \right) dy \right| \\ &= \left| \int_s^r \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(y) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) dy \right| + \left| \delta \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \right| \\ &\leq \left| \int_s^r \sum_{\rho} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\rho-s} - \frac{1}{\rho-y} \right) dy \right| + \left| \delta \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \right| + \mathcal{O}(\delta \log T) \end{aligned}$$

Coupons maintenant cette somme. Soit  $k \geq 1$  un entier, et  $\rho_k$  un zéro tel que  $\min |\rho_k - y| \in [k\delta, (k+1)\delta[$ ,  $y$  parcourant  $[x, s]$ . Alors pour tout  $y \in [r, s]$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\rho_k - s} - \frac{1}{\rho_k - y} \right| &= \left| \frac{s-y}{(\rho_k - s)(\rho_k - y)} \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta k^2} \end{aligned}$$

En posant, pour  $k \geq 0$   $a_k = |\{\rho, \min |\rho - y| \in [k\delta, (k+1)\delta[, \zeta(\rho) = 0\}|$ ,

$$\sum_{\rho} \left( \frac{1}{\rho-s} - \frac{1}{\rho-y} \right) = \sum_{\min |\rho-y| \in [0, \delta[} \left( \frac{1}{\rho-s} - \frac{1}{\rho-y} \right) + \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{\delta k^2},$$

sous réserve de la convergence de la somme. Or  $a_k = \mathcal{O}(\log \log T + \log k)$  en moyenne, donc la somme converge p.s. lorsque  $T \rightarrow \infty$ , et en intégrant entre  $r$  et  $s$ , on a en moyenne :

$$\left| \int_s^r \sum_{\rho} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\rho-s} - \frac{1}{\rho-y} \right) dy \right| \leq \sum_{\min |\rho-y| \in [0, \delta[} \int_s^r \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\rho-s} - \frac{1}{\rho-y} \right) dy + \mathcal{O}(\log \log T).$$

Occupons-nous maintenant des zéros près de  $s$ . Par choix de  $C$  (il a été choisit assez grand dans la partie précédente),  $\mathbb{P} \left( \text{il existe un zéro } \rho \text{ tel que } |\rho - s| < \frac{C \log \log T}{2 \log T} \right) \rightarrow 0$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ . On peut donc se placer dans le complémentaire de cet événement. De plus,  $a_0 = 2C \log \log T$  en moyenne. On trouve alors en moyenne :

$$\left| \sum_{\min |\rho-y| \in [0, \delta[} \int_s^r \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\rho-s} \right) dy \right| \leq C \log \log T,$$

et, toujours en moyenne :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\min |\rho-y| \in [0, \delta[} \int_s^r \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\rho-y} \right) dy \right| &\leq \sum_{\min |\rho-y| \in [0, \delta[} \pi \\ &\leq 2\pi C \log \log T. \end{aligned}$$

En sommant, toujours en moyenne :

$$|\operatorname{Im}(\log \zeta(r)) - \operatorname{Im}(\log \zeta(s))| = \left| \delta \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \right| + \mathcal{O}(\log \log T).$$

Pour passer d'un résultat en moyenne à un résultat à forte probabilité, il faut obtenir des informations sur la répartition verticales des zéros de  $\zeta$  : si cette répartition est assez uniforme, on ne devrait pas avoir de problèmes.

Notons que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) &= \frac{1}{\delta} \sum_{\rho=\beta+i\gamma} \frac{(\sigma-\beta)^2}{|\sigma-\beta|^2 + |\tau-\gamma|^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\log T}{\delta} \right) \\ &\geq \frac{1}{\delta} \sum_{|\gamma-\tau| \leq \delta} \frac{1}{1 + \left| \frac{\tau-\gamma}{\sigma-\beta} \right|^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\log T}{\delta} \right) \end{aligned}$$

En utilisant le moment d'ordre 4 de  $\operatorname{Re} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right)$  (les résultats sur la partie réelle ayant déjà été obtenus), on peut donc majorer le nombre de zéros dans chaque carré de côté  $\delta$  collé à l'axe critique. On peut ainsi montrer que le nombre de zéros dans un carré est majoré par  $K \log \log T$  ( $K$  une constante assez grande) presque partout (cela est également valable pour un nombre suffisamment grand de carrés autour de  $r$ ). Ainsi, le calcul précédent en moyenne devient vrai avec grande probabilité.

Pour se ramener à un résultat sur un intervalle, il suffit de remarquer que les carrés construits diffèrent très peu en fonction du point considéré sur un intervalle de taille fixe.

Reste à nous occuper du terme  $\left| \delta \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \right|$ . En suivant le même raisonnement que précédemment sur les sommes de Dirichlet, on obtient :

$$\mathbb{P} \left( \max_{|\tau-u| \leq 1} \delta \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma+iu}} \right| \geq \log \log T \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, il existe une constante  $A$  telle que

$$\mathbb{P} \left( \max_{|\tau-u| \leq 1} \delta \left| \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iu) \right) \right| \geq A \log \log T \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

$$|\operatorname{Im}(\log \zeta(r)) - \operatorname{Im}(\log \zeta(s))| = \mathcal{O}(\log \log T).$$

□

En combinant les deux résultats, et en utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve bien le résultat annoncé :

**Proposition 3.12.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $U$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et si l'on pose  $t = UT$ , il existe  $T_\varepsilon$  tel que pour tout  $T > T_\varepsilon$ ,*

$$\mathbb{P} \left( \max_{|t-u| \leq 1} \left| \operatorname{Im} \left( \log \zeta \left( \frac{1}{2} + iu \right) \right) - \operatorname{Im}(\log \zeta(1 + iu)) \right| < C \log \log T \right) > 1 - \varepsilon.$$

## Références

- [1] A. Bondarenko, K. Seip *Large greatest common divisor sums and extreme values of the Riemann zeta function.*, Duke Math. J. 166 (9) 1685 - 1701, 15 June 2017. <https://doi.org/10.1215/00127094-0000005X>
- [2] Atle Selberg, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function*, Archiv for Matematik og Naturvidenskab B.48, No. 5, 89-155, 1946.
- [3] A. E. Ingham, *On the difference between consecutive primes*, Quart Journal of Math., 8, 255-266, 1937.
- [4] Kannan Soundararajan, *Moments of the Riemann zeta function*, Annals of Mathematics, Second series, Vol. 170, 981-993 , 2009.
- [5] L.-P. ARGUIN et al., *Maximum of the Riemann Zeta function on a short interval of the critical line*, 2017.
- [6] J. Najdunel, *On the extreme values of the Riemann zeta function on random intervals of the critical line*, 2018, <https://arxiv.org/pdf/1611.05562>.
- [7] K. Soundararajan, *Moments of the Riemann zeta function*, Ann. of Math. (2) 170 (2009), no. 2, 981–993.
- [8] Hugh L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, 1972), 1973, pp. 181–193.