

UNIVERSITÉ DE ROME « LA SAPIENZA »
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE PARIS

RAPPORT DE STAGE

Modèles à croissance aléatoire

LOUIS VANHAELEWYN

encadré par Vittoria Silvestri



ENS



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

mars - juin 2024

Introduction

Mon stage s'est déroulé de mars à juin à l'Université de Rome « La Sapienza ». Il était encadré par Vittoria Silvestri, et avait pour thème les modèles à croissance aléatoire (*random growth models*). Le sujet du stage avait pour but d'offrir un panorama de la recherche en modèles à croissance aléatoire, depuis les modèles discrets introduits dans les années 1960 (modèle d'Eden) et 1980 (modèle de Diffusion Limited Aggregation), jusqu'à des modèles continus introduits à la fin des années 1990 et au début des années 2000 (modèle de Hastings-Levitov-Carleson-Makarov). Ce stage fut accompagné d'un cours destiné aux doctorants donné par Vittoria Silvestri et couvrant ces thèmes de manière plus académiques sur une durée de 20 heures. Dans le même temps, j'ai pu assister à la vie du laboratoire de probabilités, notamment au travers du séminaire de probabilités, et assister au cycle de conférences du *4th Italian Meeting on Probability and Mathematical Statistics*, qui regroupait un nombre important de probabilistes italiens, ainsi que certains chercheurs internationaux.

S'intéresser à un modèle à croissance aléatoire c'est s'intéresser à l'évolution d'un système initial A_0 , dans un espace E de dimension d (discret ou continu), dont l'application de règles aléatoires conduit à une évolution temporelle (elle-même être discrète ou continue). On obtient alors une famille croissante (au sens de l'inclusion) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(A_t)_{t \geq 0}$) de sous-ensembles aléatoires de E .

Pour donner un exemple de modèles à croissance aléatoire, on peut introduire ici le modèle d'Eden (introduit en 1961 par Murray Eden [Ede61]). Soit $d \in \mathbb{N}^*$, la dimension de notre espace, on définit $A_0 = 0 \subset \mathbb{Z}^d$, notre système initial. On définit alors la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ itérativement. Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on choisit uniformément un sommet X_n de \mathbb{Z}^d voisin de A_n , que l'on ajoute ensuite au système en posant $A_{n+1} = A_n \cup \{X_n\}$ (voir Figure 1).

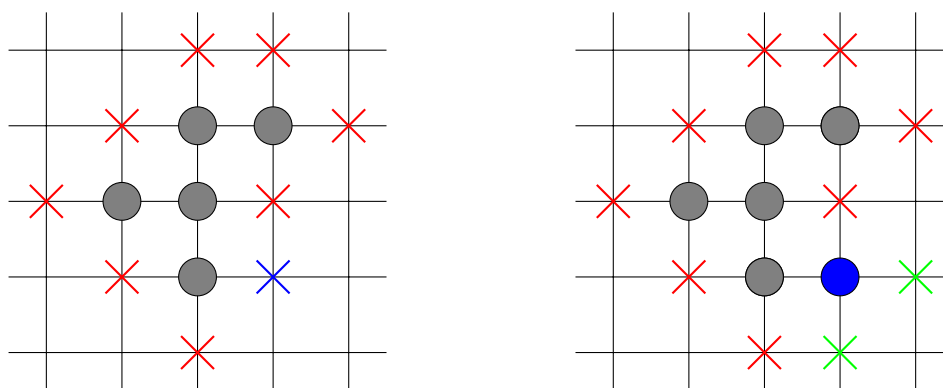


FIGURE 1 – Schéma d'ajouts successifs de particules dans le modèle d'Eden

La définition de tels systèmes entraînent de nombreuses questions et problématiques communes à tous les modèles :

- les systèmes possèdent-ils une vitesse asymptotique de croissance? est-il possible de borner la taille du modèle?
- les systèmes possèdent-ils une forme limite, après une certaine mise à l'échelle? cette forme limite est-elle déterministe ou aléatoire? est-elle fractale?

La seconde question en particulier est plus difficile que la première. Rares sont les modèles pour lesquels on peut y répondre. Le modèle d'Eden présenté plus haut possède une forme limite ([ADH15]) que l'on ne sait déterminer, le fait que cette forme n'est pas la boule euclidienne est démontré pour les dimensions $d \geq 35$, mais reste encore une conjecture pour les dimensions inférieures.

Nous nous intéresserons ici spécifiquement au modèle d'Agrégation Limitée par Diffusion (*Diffusion Limited Aggregation*), modèle basé sur l'agrégation successive de particules sur un système. La difficulté d'étude du modèle, et l'impossibilité de répondre à chacune des questions précédentes, a mené à l'introduction de nouveaux modèles (Hastings-Levitov, Carleson-Makarov). Ces derniers modélisent leurs systèmes bi-dimensionnels par des transformations conformes (issues du théorème de représentation conforme de Riemann), qu'ils modifient au cours du temps, et dont les propriétés analytiques permettent de déduire des résultats géométriques.

Au cours du rapport seront présentés plusieurs modèles dont nous proposons des images de résultats de simulations en fin de document dans la section Bestiaire.

Remerciements

Je tiens à remercier Vittoria Silvestri de m'avoir accueilli à Rome pendant quatre mois, ainsi que d'avoir pris le temps de me partager ses questions, ses recherches, ainsi que de m'avoir guidé et assisté dans la découverte du domaine et mes calculs.

Je souhaite aussi remercier Nathanaël Enriquez, mon tuteur à l'ENS, qui a pris le temps de discuter avec moi pour connaître mes goûts mathématiques et m'accompagner au mieux pour ce stage, qui fut une formidable expérience.

Table des matières

1	Diffusion Limited Aggregation (DLA)	3
1.1	Mesure harmonique	3
1.2	Description du modèle	4
1.3	Résultats	4
2	Dielectric Breakdown Model (DBM)	6
3	Une extension au modèle continu ?	9
3.1	Définitions	9
3.2	Analogie avec le cas discret	10
4	Hastings-Levitov	12
4.1	Description du modèle	13
4.2	Une tentative d'estimation de temps de doublement	16

1 Diffusion Limited Aggregation (DLA)

Le modèle d'**agrégation limitée par diffusion** (DLA) a été introduit en 1981 par Thomas Witten et Leonard Sander [WS81]. Il se conçoit informellement de la manière suivante. On place un système initial dans une solution très diluée de particules. Ces dernières se déplacent aléatoirement dans la solution et s'attachent une à une au système, le faisant grandir. Ce modèle donne lieu à de nombreuses modélisations, dans le cas discret et dans le cas continu. On s'intéresse pour le moment au cas discret. L'introduction de modèles continus pour ce phénomène viendra dans les sections suivantes.

Afin de modéliser l'arrivée de particules sur le système, en considérant cette solution peu diluée, on approxime les mouvements des particules à des marches indépendantes aléatoires simples et symétriques, qui ont lieu à des instants différents et qui proviennent de l'infini. Pour formaliser cette idée, il est nécessaire d'introduire un outil fondamental, la mesure harmonique.

1.1 Mesure harmonique

Comme on évolue dans un domaine discret, on se place naturellement dans le réseau \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$ étant la dimension du réseau. On se donne une marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ simple (les pas sont indépendants et identiquement distribués) et symétrique (aucune direction n'est privilégiée), ainsi qu'un sous-ensemble fini B de \mathbb{Z}^d .

Définition 1. Mesure harmonique

La **mesure harmonique** $H_B(x, y)$ de $y \in \mathbb{Z}^d$ relativement à B à partir de $x \in \mathbb{Z}^d$ désigne la probabilité de toucher l'ensemble B au point y , conditionnellement au fait de toucher B . Formellement,

$$H_B(x, y) = \mathbb{P}_x(S_{T_B} = y \mid T_B < \infty),$$

où $T_B = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n \in B\}$ désigne le **temps d'atteinte** de l'ensemble B par la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

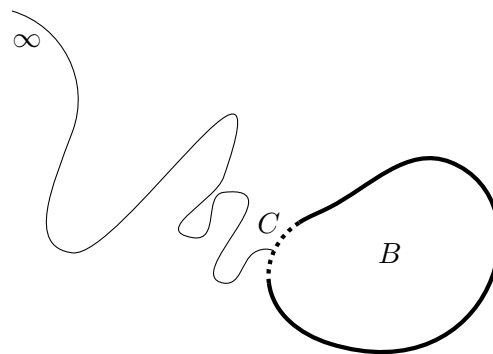


FIGURE 2 – Schéma d'une marche aléatoire atteignant un ensemble B en un sous-ensemble C

La mesure $H_B(x, \cdot)$ définit une mesure de probabilité sur B . Cependant ce qui nous intéresse ici, c'est le comportement de ces quantités lorsque le point de départ est envoyé à l'infini. La propriété suivante (dont une démonstration peut être trouvée dans le livre de Frank Spitzer [Spi64]) nous fournit une approche mathématique à cette envie.

où $R(A) = \sup |x|$, $x \in A$ désigne le rayon de l'ensemble A .

Ce théorème a par la suite été raffiné par Harry Kesten lui-même, puis par Gregory Lawler sans grande avancée.

Afin d'estimer la vitesse de croissance du système, Kesten s'intéresse au temps de doublement du système (« doubling time »). La probabilité d'augmenter le rayon est alors liée à la probabilité qu'une particule atteigne une branche du système. Pour cela, la preuve de ce théorème repose sur une estimée courante pour un mouvement brownien l'**estimée de Beurling**. La version discrète que Kesten démontre est la suivante,

Propriété 4. Estimée de Beurling discrète

Soit $A \subset \mathbb{Z}^2$ connexe, fini, il existe $K > 0$, telle que,

$$\forall y \in \partial A, \quad \mu_{\partial A}(y) \leq \frac{K}{\sqrt{R(A)}}.$$

Malheureusement ce théorème montre une limite en cela qu'il ne permet pas de rendre compte des phénomènes de formations de « bras » observés sur des simulations. En effet un « bras » du système a plus de chances d'être touché par une particule, et donc aura tendance à grandir plus vite.

2 Dielectric Breakdown Model (DBM)

Tant d'un point de vue physique que d'un point de vue mathématique, il peut être intéressant de généraliser le modèle de DLA en introduisant un paramètre permettant de faire varier l'influence de la forme du système sur la position de la nouvelle particule.

Soit $\eta \in \mathbb{R}$. On note $\text{DBM}(\eta)$ le modèle de **Dielectric Breakdown** (littéralement « modèle de claquage diélectrique »), défini de la manière suivante, on choisit un système $A_0 \subset \mathbb{Z}^d$ fini initial que l'on fait évoluer similairement au modèle DLA,

$$A_{n+1} = A_n \cup \{Y_n\},$$

où Y_n est choisi selon la mesure $\frac{\mu_{\partial A_n}^\eta}{\sum_{z \in \partial A_n} \mu_{\partial A_n}^\eta(z)}$.

En faisant varier le paramètre η , on obtient alors une large gamme de modèles, allant du modèle d'Eden ($\eta = 0$) au modèle DLA ($\eta = 1$).

Dans un article de 2023, Ilya Losev et Stanislav Smirnov [LS23], présentent un résultat proche de celui de Kesten pour le DBM, qui présenterait la particularité de ne pas utiliser l'estimée de Beurling dans sa démonstration.

Leurs résultats se divisent en deux parties. D'une part en dimension 2,

Théorème 5. Losev-Smirnov

Soit $0 \leq \eta < 2$, et $(A_n)_{n \geq 1}$ un modèle $\text{DBM}(\eta)$ sur \mathbb{Z}^2 . Alors il existe une constante $\alpha > 0$ (indépendante de η) et une constante $C = C(\eta) > 0$ telles que, presque sûrement,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \quad \mathbb{R}(A_n) < C n^{\frac{2}{4-\eta}} (\log n)^{\alpha \frac{|\eta-1|}{4-\eta}}.$$

De même en dimension 3,

Théorème 6. Losev-Smirnov

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ un modèle $\text{DBM}(\eta)$ sur \mathbb{Z}^3 .

— si $\eta \geq 1$, il existe $C = C(\eta) > 0$, telle que presque sûrement,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \quad \mathbb{R}(A_n) < C n^{\frac{\eta}{1+\eta}} (\log n)^{\frac{\eta}{2(\eta+1)}},$$

— si $\eta < 1$, il existe $C = C(\eta) > 0$, telle que presque sûrement,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \quad \mathbb{R}(A_n) < C \sqrt{n} (\log n)^{1/4}.$$

Ce résultat constitue le premier résultat pour le modèle de DBM. Pour le modèle DLA (dans le cas $\eta = 1$), on retrouve exactement le résultat de Harry Kesten (dans sa version de 1990 [Kes90]), justifié en 2013 par Gregory Lawler).

Losev et Smirnov reprennent l'idée d'estimer le temps de doublement introduite par Kesten. Nous présentons cette idée en omettant volontairement quelques détails. On se place dans la suite en dimension 2. En fixant un temps N , et en considérant un temps M plus éloigné, on peut estimer la probabilité $\mathbb{P}(\mathbb{R}(A_M) > 2\mathbb{R}(A_N))$. Pour doubler la taille, il faut en effet qu'un chemin de taille plus grande que R , ait été formé entre les instants N et M .

$$\mathbb{P}(R(A_M) > 2R(A_N)) \leq \sum_{L=R}^{M-N} \left(\begin{array}{c} \text{choix de } L \text{ instants} \\ \text{parmi } M-N \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{nombre de chemins} \\ \text{de taille } L \end{array} \right) \mathbb{P} \left(\begin{array}{c} \text{un tel chemin est} \\ \text{rempli à certains moments} \end{array} \right). \quad (1)$$

On en vient à majorer la quantité, après avoir utilisé des conditionnements successifs,

$$\mathbb{P}(R(A_M) > 2R) \leq \sum_{L=R}^{M-N} \sum_{N \leq k_1 < \dots < k_L \leq M} (100R) 3^L \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^L \frac{\omega_{\partial A_{k_j}}^\eta(x_{k_j})}{\sum_{y \in \partial A_{k_j}} \omega_{\partial A_{k_j}}^\eta(y)} \right],$$

où pour tout $1 \leq i \leq M$, x_i désigne le point ajouté à l'instant i .

Dans le cas du modèle de DLA, pour lequel $\eta = 1$, la quantité à majorer est,

$$\prod_{j=1}^L \omega_{\partial A_{k_j}}(x_{k_j}). \quad (2)$$

Pour cela, les deux auteurs utilisent des propriétés issues de l'approche harmonique de l'étude des marches aléatoires, proche de la théorie des potentiels de la théorie de la mesure. Ces objets sont introduits en particulier dans le livre de Lawler et Limic [LL10].

Cette théorie introduit deux fonctions importantes desquelles découlent des quantités utiles, d'une part le **noyau potentiel** a ,

$$a(x) = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{1}_{\{S_n=0\}} - \mathbb{1}_{\{S_n=x\}}) \right],$$

et d'autre part la fonction g_A ^(a) définie par,

$$g_A(x) = a(x) - \mathbb{E}_x [a(S_{T_A})],$$

il s'agit de la seule fonction nulle sur A , harmonique sur $\mathbb{Z}^2 \setminus A$ et telle que $g_A(x) \sim C \log |x|$. Ces deux fonctions permettent particulier d'introduire la **capacité** Cap d'un ensemble, qui peut être liée à sa taille et définie par,

$$\text{Cap}(A) = \lim_{|y| \rightarrow +\infty} [a(y) - g_A(y)].$$

La propriété suivante justifie le lien entre la capacité et la taille d'un système.

Propriété 7.

Soit $A \subset \mathbb{Z}^2$ connexe, alors

$$\left| \text{Cap}(A) - \frac{2}{\pi} \log R(A) \right| \lesssim 1. \quad (b)$$

De plus on peut contrôler la croissance de la capacité à l'aide la mesure harmonique,

Propriété 8.

Soient $A \subset \mathbb{Z}^2$ connexe, et $B = A \cup \{x\}$, où $x \in \bar{A} = \{y \in \mathbb{Z}^2, d(y, A) = 1\}$, alors,

$$\text{Cap}(\bar{B}) = \text{Cap}(\bar{A}) + \sum_{j=1}^k \omega_{\bar{B}}(x_j) g_{\bar{A}}(x_j),$$

où x_1, \dots, x_k désignent les voisins de x dans \bar{B} qui ne sont pas dans A .

(a). la fonction g_A peut-être vue comme la limite en fonction d'une variable de la fonction de Green associée à l'ensemble ${}^c A$.

On en déduit avec d'autres estimées de la fonction g_A , et en reprenant les notations de la propriété,

$$\text{Cap}(\overline{B}) - \text{Cap}(\overline{A}) \asymp \omega_{\overline{B}}(x)^2 \text{ (a)}$$

Ces études nous permettent d'obtenir une borne satisfaisante pour (2),

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^L \omega_{\partial A_{k_j}}(x_{k_j}) \right)^{1/m} &\leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \omega_{A_{k_j}}(x_{k_j})^2 \asymp \sum_{j=1}^m (\text{Cap}(A_{k_{j+1}}) - \text{Cap}(A_{k_j})) \\ &\lesssim \text{Cap}(A_{k_{m+1}}) - \text{Cap}(A_N) \lesssim \log(2R) - \log(R) \lesssim 1. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet enfin d'obtenir après d'autres calculs et majorations élémentaires :

$$\mathbb{P}(R(A_M) > 2R(A_N)) < 2^{-R(A_N)},$$

et de conclure par le lemme de Borel-Cantelli.

Si ces calculs semblent anecdotiques, ils permettent cependant d'introduire de nombreux outils dans l'étude du modèle de DLA, et d'en proposer une nouvelle approche. En particulier, ces nombreux outils existent aussi dans le cadre continu, et présentent des similarités surprenantes avec le cas discret. Ce qui laisse espérer la possibilité d'étendre la méthode de Losev et Smirnov à des modèles continus tels que le modèle de Hastings-Levitov.

(a). Deux fonctions f et g sont telles que $f \asymp g$ si $f \lesssim g$ et $g \lesssim f$.

3 Une extension au modèle continu ?

Dans une première tentative d'étendre ce résultat au domaine continu, on peut s'intéresser aux outils déjà développés dans le domaine de la théorie du potentiel. Cette théorie a été développée à partir de deux points de vue distincts, d'une part par des analystes ([GM05]) et d'autre part des probabilistes ([PS78; MP01]). Chacun de ces points de vue contribue à développer une approche de la théorie du potentiel.

3.1 Définitions

Les objets que nous allons introduire sont très proches de ceux utilisés dans la section précédente. On se place ici en deux dimensions et on considère dans toute cette section $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien dans \mathbb{R}^2 . Si E est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , on note $\tau_E = \inf\{t > 0, B_t \in E\}$, le temps d'atteinte de E .

De manière analogue à la Définition 1, on peut donner une définition de la mesure harmonique dans le cas continu. Cependant il est nécessaire de demander légèrement plus à l'ensemble E atteint. Celui-ci doit être **non polaire**, c'est à dire que la probabilité $\mathbb{P}(\tau_E < \infty)$ est strictement supérieure à 0.

Définition 9. Mesure harmonique continue

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien d -dimensionnel. Soit E un ensemble fermé non polaire, et $C \subset E$ un borélien. On définit la **mesure harmonique continue** $H_E(x, C)$ de C relativement à E partant de x , comme étant,

$$H_E(x, C) = \mathbb{P}_x(B_{\tau_E} \in C \mid \tau_E < \infty).$$

De même que dans le cas discret, cette mesure converge lorsque le point de départ est envoyé à l'infini et que l'ensemble atteint est compact.

Propriété 10. Existence de la mesure harmonique depuis l'infini

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien d -dimensionnel. Soit A un ensemble compact non polaire, et $C \subset E$ un borélien. Alors il existe une mesure de probabilité μ_E sur E définie par,

$$\mu_A(C) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_A(x, C).$$

Cette propriété est démontrée par Mörters et Peres dans le Théorème 3.46 de [MP01].

De la même manière, on peut introduire des fonctions a et g_E analogues à celles introduites dans le cas discret et qui nous fournissent des quantités similaires.

On note $\mathfrak{p}_E(t, x, y)$ la densité de $\mathbb{P}_x(B_t \in dy, t \leq \tau_E)$. On définit alors g_E comme étant la fonction définie par,

$$g_E(x, y) = \int_0^\infty \mathfrak{p}_E(t, x, y) dt.$$

On pose ensuite $a : x \mapsto \frac{1}{\pi} \log |x|$.

Plaçons-nous dans un cas plus simple. L'ensemble E est un ensemble relativement compact, non polaire. g_E vérifie alors certaines propriétés utiles, démontrées dans le livre de Port et Stone [PS78],

Propriété 11.

— $\lim_{|y| \rightarrow \infty} g_E(x, y)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on la notera $g_B(x)$,

- $0 \leq g_E(x, y) < \infty, x \neq y,$
- $g_E(x, y)$ est symétrique,
- pour tout $x \in \mathbb{R}^d, y \mapsto g_E(x, y) + a(y - x)$ est harmonique sur ${}^c(\overline{B}),$
- $\lim_{y \rightarrow y_0} g_B(x, y) = g_B(x, y_0) = 0,$ si y_0 est un point régulier de $B,$ à savoir si $\mathbb{P}_{y_0}(\tau_E = 0),$
- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g_B(x) - a(x)$ existe et est notée $k(B),$ on la nomme **constante de Robin.**

3.2 Analogie avec le cas discret

En suivant l'idée de Gregory Lawler et Vlada Limic[LL10] et de Losev et Smirnov[LS23], qui établissent ce résultat dans le cas discret, on présente ici une tentative (infructueuse) de relier la mesure harmonique et la différence de constantes de deux ensembles, $A \subset B.$ On choisit A et B compacts et non polaires. On parvient alors au résultat suivant,

Propriété 12.

Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ compacts et non polaires, alors

$$k(A) - k(B) = \int_{\partial B \setminus \partial A} g_A(z) \mu_B(dz).$$

Démonstration.

Par définition de la constante de Robin,

$$k(A) - k(B) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} g_A(x) - g_B(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \lim_{|y| \rightarrow \infty} g_A(x, y) - g_B(x, y).$$

Mais pour tout $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B, x \mapsto g_A(x, y) - g_B(x, y) = (g_A(x, y) + a(x)) - (a(x) + g_B(x, y)),$ qui est donc harmonique sur ${}^c(\overline{B})$ (Propriété 11).

En particulier pour $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ fixé, $h_y : x \mapsto g_A(x, y) - g_B(x, y)$ est une fonction harmonique réelle et donc par le théorème d'arrêt, comme $(h(B_t))_{t \geq 0}$ est une martingale bornée.

$$h_y(x) = \mathbb{E}_x [h_y(X_{\tau_B})].$$

Puisque $g_A(x, \cdot)$ est nulle sur les points réguliers de $A,$ et que par définition X_{τ_B} est un point régulier,

$$g_A(x, y) - g_B(x, y) = \mathbb{E}_y [g_A(x, X_{\tau_B})] = \int_{\partial B} g_A(x, z) \mu_B(dz).$$

En prenant la limite quand y tend vers l'infini, on obtient,

$$g_A(x) - g_B(x) = \int_{\partial B \setminus \partial A} g_A(x, z) \mu_B(dz), \tag{3}$$

et en faisant tendre x vers l'infini,

$$k(A) - k(B) = \int_{\partial B \setminus \partial A} g_A(z) \mu_B(dz).$$

□

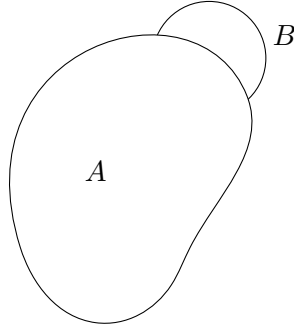


FIGURE 4 – Cas de figure possible
L'ensemble B est constitué de l'ensemble A et d'une particule.

Cette formule relie comme voulu la différence de la constante de Robin de deux ensembles à une expression faisant intervenir la mesure harmonique de l'ensemble B . Cependant g_A n'étant *a priori* pas minoré sur $\partial B \setminus \partial A$, en particulier si $A \cap B$ est non vide. Il est donc difficile de relier $k(A) - k(B)$ à $\mu_B(\partial B \setminus \partial A)$ comme dans le cas discret.

Une piste possible est la formule dite de **dernière sortie**, présentée Mörters et Peres [MP01], qui s'applique à certains mouvements browniens *transients*. Dans leur cas, la transience du mouvement brownien provient soit de la dimension de l'espace (si la dimension est supérieure à 3), ou en arrêtant le mouvement brownien à un temps d'arrêt T correspondant au temps de sortie d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 borné. Considérons $D \subset \mathbb{R}^2$, le domaine dans lequel évolue le mouvement brownien.

Soit $\mathfrak{p}^*(t, x, y)$ la densité de $\mathbb{P}_x(B_t \in dy, t \leq T_D)$, et soit G la fonction de Green associée,

$$G_D(x, y) = \int_0^\infty \mathfrak{p}^*(t, x, y) dt.$$

Théorème 13. Formule de dernière sortie (Last exit formula)

Soit $(B(t))_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien, $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble compact.

Soit $\gamma = \sup\{t \in]0, T], X_t \in \Lambda\}$ le temps de dernière sortie de Λ , on pose alors $\gamma = 0$ si le mouvement n'atteint pas Λ .

Alors il existe une mesure $\nu_{D, \Lambda}$ finie sur Λ nommée **mesure d'équilibre**, telle que, pour tout ensemble borélien $A \subset \Lambda$, $x \in D$,

$$\mathbb{P}_x(B_\gamma \in A, 0 < \gamma \leq T) = \int_A G_D(x, y) d\nu_{D, \Lambda}(y).$$

Certains ouvrages ([PS78 ; GM05]) traitent de la mesure d'équilibre d'un ensemble et présentent des liens importants avec sa mesure harmonique, mais cela nécessiterait plus de travail.

L'analogie que nous venons de poser nous montre d'une part que l'argument de Losev et Smirnov semble s'entendre au cas continu assez naturellement, mais aussi que la mesure harmonique est un outil difficile à manipuler et à estimer. C'est pourquoi une autre piste d'extension à un cadre continu pourrait se trouver dans le modèle de Hastings-Levitov.

4 Hastings-Levitov

Commençons cette section par une remarque simple. Par invariance par rotation du disque dans le plan, la mesure harmonique depuis l'infini du disque, à savoir la distribution du point d'impact d'un mouvement brownien partant « de l'infini » est la distribution uniforme sur le cercle. Ainsi pour le disque, choisir le premier point d'impact d'une particule est chose simple.

Le modèle de Hastings-Levitov, introduit en 1998 par Matthew Hastings et Leonid Levitov[HL96], profite de la propriété **d'invariance conforme** du mouvement brownien par une application conforme pour construire un modèle exploitant la mesure harmonique sur le disque. En voici un énoncé,

Théorème 14. Invariance conforme du mouvement brownien

Soient,

- $D \subset \mathbb{C}$ non vide, connexe,
- $\varphi : D \rightarrow D'$ une application conforme
- $z \in D$, et $z' = \varphi(z)$,
- $(B_t)_{t \geq 0}$ et $(B'_t)_{t \geq 0}$ deux mouvements browniens complexes, conditionnés à commencer en z et z' respectivement,
- $T = \inf\{t \geq 0, B_t \notin D\}$ le temps de sortie de D de (B_t) ,
- $T' = \inf\{t \geq 0, B'_t \notin D'\}$ le temps de sortie de (B'_t) de D' ,

On pose $\tilde{T} = \int_0^T |\varphi'(B_t)|^2 dt$, et pour tout $t < \tilde{T}$, $\tau(t) = \inf\left\{s \geq 0, \int_0^s |\varphi'(B_t)|^2 dt \leq s\right\}$.

On pose enfin, $\tilde{B}_t = \varphi(B_{\tau(t)})$.

Alors, $(\tilde{B}_t)_{t < \tilde{T}}$ a la même loi que $(B'_t)_{t < T'}$

D'où l'on déduit ce corollaire qui nous sera plus utile,

Corollaire 15.

En reprenant les notations du théorème précédent. Si $E \subset \partial D$, et $E' = \varphi(E)$, alors

$$\mathbb{P}_z(B_T \in E) = \mathbb{P}_{z'}(B'_{T'} \in E').$$

En effet cette propriété nous permet de relier les probabilités de certains points d'impacts directement. De l'invariance conforme (et du Corollaire 15 précédent), on peut en déduire une expression agréable de la densité de la mesure harmonique relativement à certains ensembles.

Soit E un domaine simplement connexe de \mathbb{C} , dont le bord est une courbe de Jordan, alors $(\mathbb{C} \setminus E) \cup \{\infty\}$ est connexe dans la sphère de Riemann. En particulier, en notant $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$, le plan privé du disque fermé, d'après le théorème de représentation conforme de Riemann, il existe une application conforme $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, telle que $\varphi(\Delta) = E$, $\varphi(\infty) = \infty$, et $\varphi'(\infty) \in \mathbb{R}_+^*$, par un théorème de Carathéodory, celle-ci s'étend de manière continue au bord de E .

Propriété 16.

Soit E un domaine simplement connexe, dont le bord est une courbe de Jordan, φ une application conforme définie sur Δ telle que $\varphi(\Delta) = \mathbb{C} \setminus E$ et qui s'étend de manière continue sur le bord de Δ .

$$\mu_{\partial E}(C) = \int_C \frac{1}{2\pi|\varphi'(x)|} dx.$$

Démonstration.

En notant $D = \varphi(\Delta)$, il existe deux manière de paramétrer le bord de D . En premier lieu en reportant la paramétrisation du cercle,

$$\partial D = \{\varphi(e^{i\theta}), \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

En second lieu, à partir de la longueur de l'arc,

$$t: \begin{cases} [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \theta & \mapsto \int_0^\theta |\varphi'(e^{iu})| du \end{cases} ,$$

on peut construire une fonction $z: \mathbb{R}_+ \rightarrow \partial D$, telle que $z(t_1) = \varphi(e^{it^{-1}(t_1)})$. On note h_D la densité de la mesure harmonique paramétrée par z .

Soit $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$, soit t_1, t_2 tels que $z(t_1) = \varphi(e^{i\theta_1})$, et $z(t_2) = \varphi(e^{i\theta_2})$. Par définition,

$$\mathbb{P}_\infty \left(B_{T_D} \in \left[\varphi(e^{i\theta_1}), \varphi(e^{i\theta_2}) \right] \right) = \mathbb{P}_\infty \left(B_{T_D} \in [z(t_1), z(t_2)] \right),$$

où par abus de notations, les intervalles désignent les sous-ensembles de ∂D obtenus par paramétrisation. Par invariance conforme, le membre de gauche est la probabilité que l'arc $[\theta_1, \theta_2]$ soit atteint sur le disque unité, on obtient donc,

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \int_{t_1}^{t_2} h_D(t) dt.$$

Il en vient une égalité de mesures,

$$\frac{1}{2\pi} d\theta = h_D(t) dt.$$

Par changement de variable,

$$h_D(t) dt = h_D(t(\theta)) t'(\theta) dt = h_D(t(\theta)) |\varphi'(e^{i\theta})| dt = \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

Finalement, en posant $\tilde{h}_D(\theta) = h_D(t(\theta))$,

$$\tilde{h}_D(\theta) = \frac{1}{2\pi |\varphi'(e^{i\theta})|}.$$

□

Ce résultat nous invite ainsi à considérer les applications conformes comme un outil intéressant pour l'étude de modèles à croissance aléatoire basés sur la mesure harmonique.

4.1 Description du modèle

L'idée du modèle est de considérer que l'attachement de particules se fait par une composition de fonctions. Soit $\varphi: \Delta \rightarrow \Delta$ une application conforme, celle-ci peut être vue comme le fait d'ajouter une particule au disque unité.

On définit alors le système comme étant $A = \mathbb{C} \setminus \varphi(\Delta)$, on dira alors que φ représente le système A .

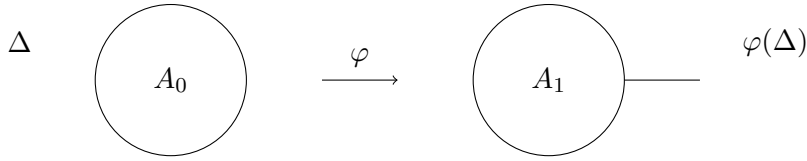


FIGURE 5 – Schéma d'une application φ qui ajoute une particule en forme de fente

Par invariance conforme, si le système A est représenté par une application F , pour attacher une particule sur A suivant la mesure harmonique sur A , il suffit de choisir un point uniformément sur le cercle, d'attacher la nouvelle particule en composant par une fonction φ , et de composer par F .

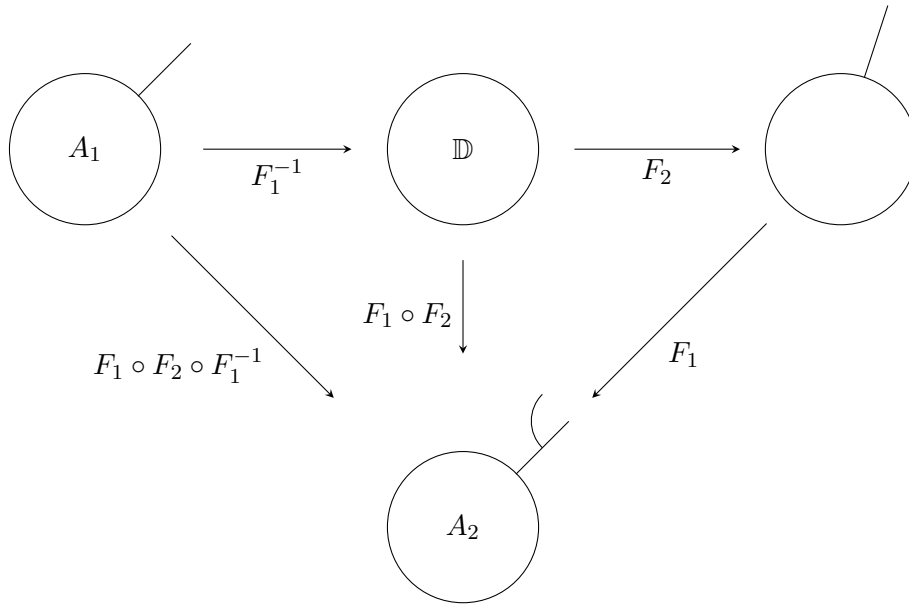


FIGURE 6 – Schéma de la composition de deux fonctions pour obtenir un système à deux particules

À partir d'une fonction φ qui modélise l'impact d'une particule au point $1 = e^{i \times 0}$, on peut construire une famille de fonctions $(\varphi_\theta)_{\theta \in [0, 2\pi[}$ qui ajoutent chacune une particule en position θ , en conjugant φ par la fonction de rotation $R_\theta : z \mapsto ze^{i\theta}$. Alors, $\varphi_\theta = R_\theta \circ \varphi \circ R_\theta^{-1}$.

On définit le modèle de la manière suivante,

$$\begin{cases} \Phi_0 = \text{Id}, & A_0 = \mathbb{D} \\ \Phi_n = \varphi_{\Theta_1} \circ \varphi_{\Theta_2} \circ \dots \circ \varphi_{\Theta_n}, & A_n = {}^c(\Phi_n(\Delta)) \end{cases},$$

où $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.

Un problème survient cependant, les transformations conformes conservent les angles mais ne conservent pas les longueurs. **Quelle est la taille des particules ajoutées ?**

On peut lire sur la transformation conforme une quantité que l'on peut rapprocher de la taille de la particule ajoutée : **la capacité logarithmique**^(a).

(a). Il est intéressant de noter que pour un ensemble A où la capacité logarithmique et la constante de Robin peuvent être définies, on $\text{Cap}(A) = -k(A)$

Définition 17. Capacité logarithmique

Soit $F: \Delta \cup \{\infty\} \rightarrow \Delta \cup \{\infty\}$ une transformation conforme telle que $F(\infty) = \infty$, et $F'(\infty) \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction F admet alors un développement à l'infini, $F(z) \underset{z \rightarrow \infty}{=} e^c z + \sum_{k \leq 0} a_k z^k$.

La **capacité logarithmique** de F est l'exposant c , apparaissant dans le développement, on la notera $\text{Cap}(F)$.

En particulier, $c = \lim_{z \rightarrow \infty} \log \left(\frac{F(z)}{z} \right)$.

Remarque : Soit $A \subset \mathbb{C}$ fermé simplement connexe, par l'application du théorème de représentation conforme de Riemann, il existe une unique application $F: \Delta \cup \{\infty\} \rightarrow \Delta \cup \{\infty\}$ telle que $F(\Delta) = {}^c A$, $F(\infty) = \infty$ et $F'(\infty) > 0$. Cela justifie alors la définition de la capacité logarithmique de A , que nous noterons $\text{Cap}(A)$.

Propriété 18. Additivité de la capacité logarithmique

Soit $f, g: \Delta \cup \{\infty\} \rightarrow \Delta \cup \{\infty\}$ deux transformations conformes de capacités logarithmiques respectives c_f et c_g , alors la capacité logarithmique de $f \circ g$ est

$$c_f + c_g$$

Démonstration.

En développant $f \circ g$ à l'infini, on obtient directement le résultat voulu. □

La propriété suivante justifie le lien entre la capacité logarithmique et la taille de la particule ajoutée.

Propriété 19.

En reprenant les notations de la définition précédente, si F s'étend de manière continue au cercle unité,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbb{E}_z [\log |F(B_T)|] = c,$$

où $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien, et T est le temps d'atteinte du cercle unité.

Démonstration.

La fonction $z \mapsto \log \left(\frac{F(z)}{z} \right)$ est holomorphe, en particulier, sa partie réelle est harmonique,

$$u: z \mapsto \text{Re} \left(\log \left(\frac{F(z)}{z} \right) \right) = \log \left| \frac{F(z)}{z} \right|.$$

On en déduit que $(u(B_t))_{t \in \mathbb{R}}$ est une martingale. Par le théorème d'arrêt, et par convergence dominée (en exploitant le caractère borné de $u(B_T)$),

$$\mathbb{E}_z[u(B_T)] = u(B_z) = \log \left| \frac{F(z)}{z} \right| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} c$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}_z[u(B_T)] = \mathbb{E}_z[\log |F(B_T)| - \log |B_T|] = \mathbb{E}_z[\log |F(B_T)|].$$

Ce qui conclut. □

Remarque : Si d désigne le diamètre de la particule initiale, $c \asymp d^2$.

Estimons grossièrement la croissance en un point du système, on note P_{n+1} la particule ajoutée à l'étape n , à savoir $P_{n+1} = \Phi_n(\Delta) \setminus \Phi_{n+1}(\Delta) = A_{n+1} - A_n$.

$$\begin{aligned}
\text{croissance en } \Phi_n(e^{i\theta}) &\approx \text{taux d'arrivée} \times \text{taille de la particule} \\
&\approx \tilde{h}_n(\theta) \times \text{diam}(P_{n+1})^2 \\
&\approx \frac{1}{|\Phi'_n(e^{i\theta})|} \times \left(\int_{e^{i\theta}}^{e^{i\theta(d+1)}} |\Phi'_n(u)| \, du \right)^2 \\
&\approx \frac{1}{|\Phi'(e^{i\theta})|} \times \left(d \cdot |\Phi'_n(e^{i\theta})| \right)^2 \\
&\approx c |\Phi'(e^{i\theta})| \approx \frac{c}{\tilde{h}_n(\theta)}
\end{aligned}$$

Cependant pour s'approcher du modèle de DLA, on souhaiterait avoir une croissance proportionnelle à $\tilde{h}_n(\theta)$. Pour cela, on peut modifier la capacité de l'application qui ajoute la particule en fonction du point d'impact choisi.

On se donne une famille $(\varphi_{\theta,c})_{\theta \in [0, 2\pi[}$ d'applications conformes de Δ dans Δ , telles que, $\varphi_{\theta,c}$ ajoute une particule au point θ et $\varphi_{\theta,c}(\infty) = \infty$ et $\varphi'_{\theta,c}(\infty) = e^c$.

En modifiant la taille de la capacité au cours du temps, on contrôle la taille des particules et la vitesse de croissance attendue en un point. On pose donc,

$$c_{n+1} = \frac{c}{|\Phi'_n(e^{i\Theta_{n+1}})|^\alpha}.$$

Le **modèle de Hastings-Levitov** HL(α) est défini par la suite de systèmes,

$$\begin{cases} \Phi_0 = \text{Id}, & A_0 = \mathbb{D} \\ \Phi_n = \varphi_{\Theta_1, c_1} \circ \varphi_{\Theta_2, c_2} \circ \dots \circ \varphi_{\Theta_n, c_n}, & A_n = {}^c(\Phi_n(\Delta)) \end{cases},$$

où $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.

4.2 Une tentative d'estimation de temps de doublement

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de systèmes du modèle de Hastings-Levitov HL(α). On peut essayer d'estimer le temps de doublement du système. Si $A \subset \mathbb{R}^2$, on note $R(A) = \sup\{|z|, z \in A\}$. Essayons de borner la quantité

$$\mathbb{P}(R(A_M) > 2R(A_N))$$

pour un certain $M > N$ à fixer. Le système est formé de particules $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $A_n = \mathbb{D} \cup \bigcup_{i=1}^n I_i$, et chaque particule I_n est attachée au point $x_n \in A_{n-1}$.

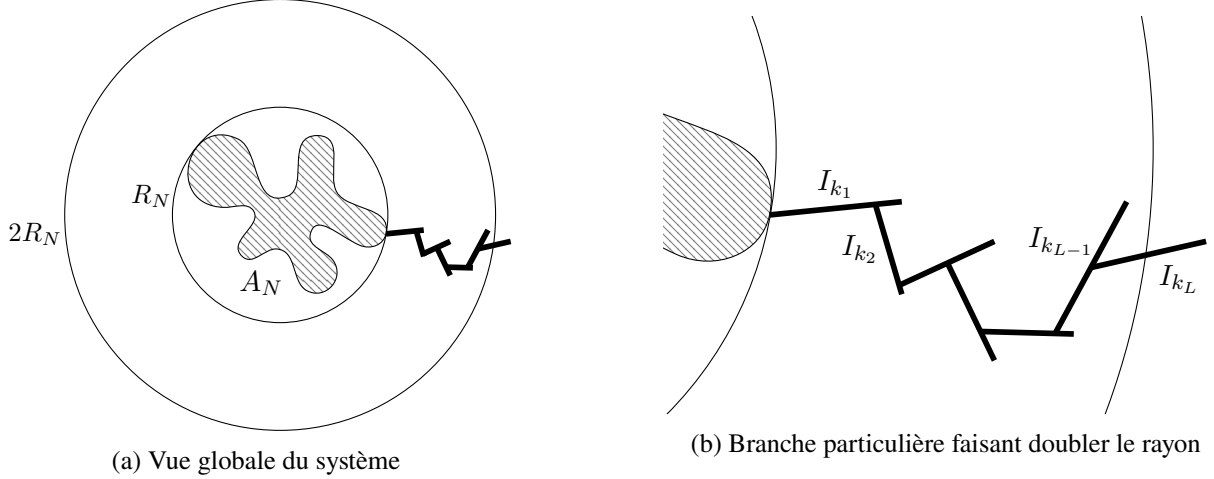


FIGURE 7 – Schéma d'un système dont le rayon double entre les temps N et M .

Plaçons-nous dans l'évènement où le rayon a doublé entre les instants N et M . Alors il existe une branche partant d'un point de rayon inférieur ou égal à R_N , et atteignant un point de rayon supérieur ou égal à $2R_N$ et formée de particules $(I_{k_i})_{1 \leq i \leq L}$ arrivant aux instants k_1, \dots, k_L , au niveau des points $(x_{k_i})_{1 \leq i \leq L}$.

En particulier $\{R_M > 2R_N\} \subset \left\{ \bigcup_{L=1}^{M-N} \bigcup_{N \leq k_1 < \dots < k_L \leq M} \begin{array}{l} I_{k_{i+1}} \text{ est attachée sur } I_{k_i} \\ |x_{k_1}| < R_N, |x_{k_L}| \leq 2R_N, |x_{k_{L+1}}| > 2R_N \end{array} \right\}$, ce qui nous donne la majoration,

$$\mathbb{P}(R(A_M) > 2R(A_N)) \leq \sum_{L=1}^{M-N} \sum_{N \leq k_1 < \dots < k_L \leq M} \mathbb{P} \left(\begin{array}{l} I_{k_{i+1}} \text{ est attachée sur } I_{k_i} \\ |x_{k_1}| < R_N, |x_{k_L}| < 2R_N, |x_{k_{L-1}}| > 2R_N \end{array} \right).$$

Par le même argument qu'en Section 2, en s'arrêtant à

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{l} I_{k_{i+1}} \text{ est attachée sur } I_{k_i} \\ |x_{k_1}| < R_N, |x_{k_L}| > 2R_N \end{array} \right) \leq \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{L-1} \mu_{A_{k_i}}(I_{k_i}) \right].$$

Le modèle de Hastings-Levitov nous permet d'estimer la mesure harmonique à l'aide de la capacité logarithmique, rappelons en effet que,

$$\Phi_n = \varphi_{\Theta_1, c_1} \circ \dots \circ \varphi_{\Theta_n, c_n}.$$

La capacité logarithmique de Φ_n est ainsi la somme des capacités logarithmiques des φ_{Θ_i, c_i} , donc

$$\text{Cap}(A_{k+1}) - \text{Cap}(A_k) = c_k = c |\Phi'_k(e^{i\Theta_k})|^{-\alpha},$$

et en passant à l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_k = \sigma(A_1, \dots, A_k)$,

$$\mathbb{E}[\text{Cap}(A_{k+1}) - \text{Cap}(A_k) \mid \mathcal{F}_k] = \int_0^{2\pi} |\Phi'_k(e^{i\theta})|^{-\alpha} d\theta = 2\pi \int_{A_k} \mu_{A_k}(z)^\alpha dz.$$

On peut maintenant estimer la mesure harmonique de I_k relativement à A_k , en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\mu_{A_k}(I_k) &= \int_{I_k} \mu_{A_k}(z) \, dz \\ &\leq \left(\int_{I_k} \mu_{A_k}(z)^\alpha \, dz \right)^{1/\alpha} \left(\int_{I_k} 1 \, dz \right)^{1-1/\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/\alpha} \mathbb{E}[\text{Cap}(A_{k+1}) - \text{Cap}(A_k) \mid \mathcal{F}_k]^{1/\alpha} |I_k|^{1-1/\alpha}.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, et l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{L-1} \mu_{A_{k_i}}(I_{k_i}) &\leq \left(\prod_{i=1}^L |I_{k_i}| \right)^{1-1/\alpha} \times \left(\prod_{i=1}^{L-1} \mathbb{E}[\text{Cap}(A_{k_{i+1}}) - \text{Cap}(A_{k_i}) \mid \mathcal{F}_{k_i}] \right)^{1/\alpha} \times \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{(L-1)/\alpha} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{L-1} |I_{k_i}| \right)^{1-1/\alpha} \times \left(\frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^{L-1} \mathbb{E}[\text{Cap}(A_{k_{i+1}}) - \text{Cap}(A_{k_i}) \mid \mathcal{F}_{k_i}] \right)^{(L-1)/\alpha} \times \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{(L-1)/\alpha} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{L-1} |I_{k_i}| \right)^{1-1/\alpha} \times \left(\frac{1}{L-1} \mathbb{E}[\text{Cap}(A_{k_{L-1+1}}) - \text{Cap}(A_N) \mid \mathcal{F}_M] \right)^{(L-1)/\alpha} \times \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{(L-1)/\alpha}.\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de trouver une bonne approximation de la capacité logarithmique. La propriété suivante résume une borne inférieure et une borne supérieure dont nous avons besoin,

Propriété 20.

Soit $A \subset \mathbb{C}$, simplement connexe borné,

— Soient $R > 0$, $x \in A$, tel que A soit inclus dans la boule de centre x et de rayon R , alors,

$$\text{Cap}(A) \leq \log(R).$$

— Soit $A^* = \{|z|, z \in A\}$ la projection circulaire de A , alors,

$$\text{Cap}(A) \geq \text{Cap}(A^*) \geq \log\left(\frac{|A^*|}{4}\right),$$

où $|A^*|$ désigne la taille de A^* .

Démonstration.

Le premier point découle de la croissance de la capacité logarithmique : si $A \subset B$, alors $\text{Cap}(A) \leq \text{Cap}(B)$. Le second point provient de la décroissance par contraction de la capacité logarithmique et est détaillé dans [GM05, p.86]. \square

Comme d'une part $k_{L-1} + 1 \leq k_L$, il vient que le rayon de $A_{k_{L-1+1}}$ est inférieur à celui de A_{k_L} qui est plus petit que $2R$ par hypothèse. On obtient que

$$\text{Cap}(A_{k_{L-1+1}}) \leq \log(2R),$$

puis d'autre part, comme par définition, $R(A_N) = R$, alors $|A^*| \geq R$, et en particulier,

$$\text{Cap}(A_N) \geq \frac{R}{4}.$$

On en conclut tout d'abord,

$$\prod_{i=1}^{L-1} \mu_{A_{k_i}}(I_{k_i}) \leq \left(\prod_{i=1}^{L-1} |I_{k_i}| \right)^{1-1/\alpha} \left(\frac{3 \log(2)}{2\pi(L-1)} \right)^{(L-1)/\alpha}$$

Et finalement,

$$\mathbb{P}(\mathbf{R}(A_M) > 2\mathbf{R}(A_N)) \leq \sum_{L=1}^{M-N} \sum_{N \leq k_1 < \dots < k_L \leq M} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=1}^{L-1} |I_{k_i}| \right)^{1-1/\alpha} \right] \left(\frac{3 \log(2)}{2\pi(L-1)} \right)^{(L-1)/\alpha}. \quad (4)$$

La principale différence avec le Dielectric Breakdown Model est que les particules ajoutées sont de tailles distinctes. Ce qui cause deux problèmes dans l'équation (4) :

- le terme $\left(\prod_{i=1}^{L-1} |I_{k_i}| \right)^{1-1/\alpha}$ est difficile à estimer, en choisissant $\alpha = 1$, on pourrait poursuivre l'étude sans se soucier de ce terme ;
- comme il n'existe pas de taille maximum de particule, nous ne pouvons minorer le nombre de particules nécessaires pour doubler le rayon du système comme le faisaient Losev et Smirnov en commençant leur somme à $L = R$. En conséquence, la somme elle-même est minorée par son premier terme et ne peut donc pas tendre vers 0, ce qui rend pour le moment impossible d'utiliser le lemme de Borel-Cantelli.

Conclusion

Si aucune des tentatives précédentes n'a fonctionné, le travail effectué permet de montrer que l'idée développée par Losev et Smirnov peut effectivement être adaptée à un modèle continu et servir de base à de possibles résultats dans le modèle de Hastings et Levitov.

Bestiaire

Dans cette section se trouve une sélection de résultats de simulations des modèles d'Eden, de DLA et de Hastings-Levitov, implémentées durant le stage.

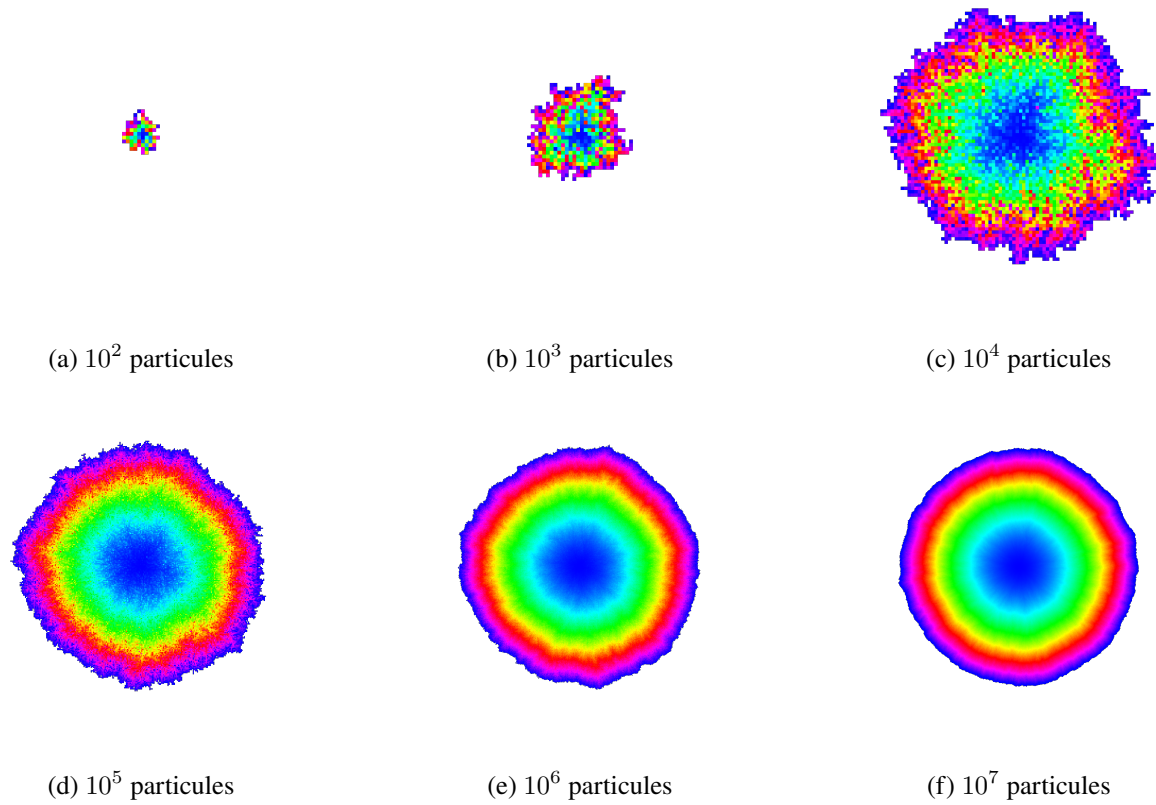
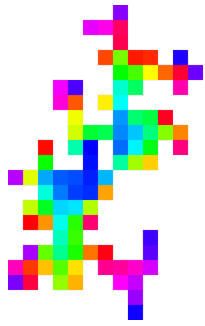
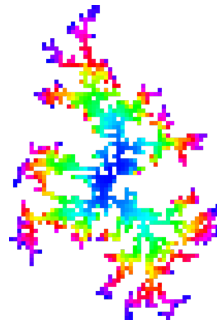


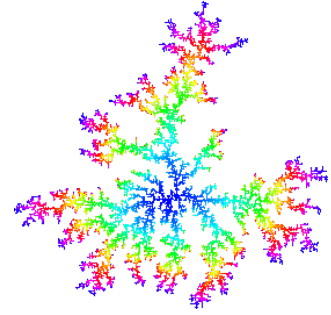
FIGURE 8 – Simulations du modèle d'Eden



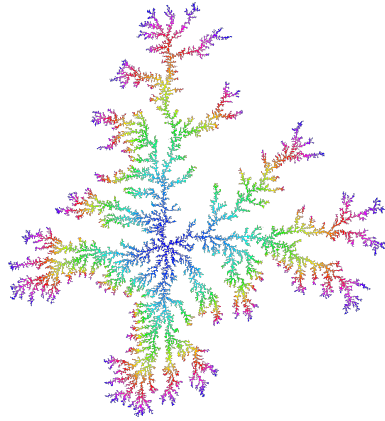
(a) 10^2 particules



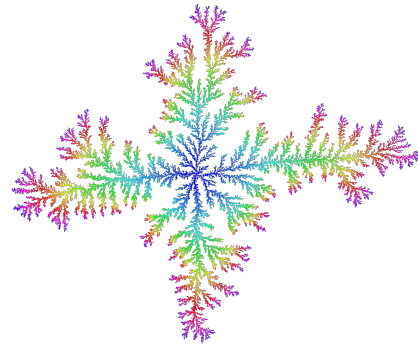
(b) 10^3 particules



(c) 10^4 particules



(d) 10^5 particules



(e) 3×10^6 particules

FIGURE 9 – Simulations du modèle DLA

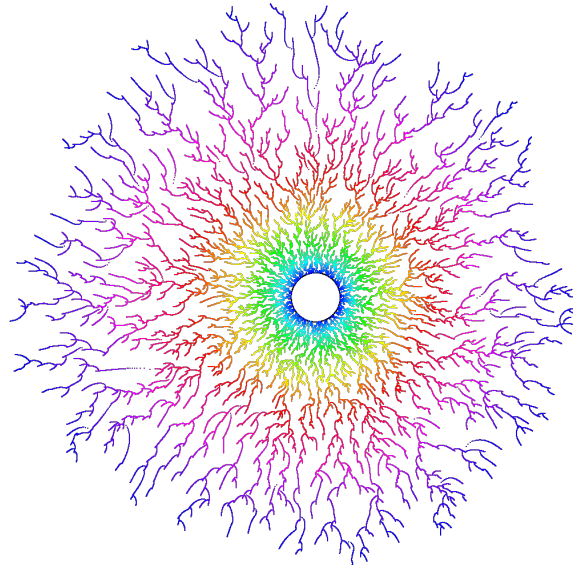


FIGURE 10 – Simulation du modèle de Hastings-Levitov, avec $\alpha = 0$

Références

- [ADH15] A. AUFFINGER, M. DAMRON et J. HANSON. “50 years of first passage percolation”. In : *An updated version of this paper is published as AMS University Lecture Series, Vol. 68, 2017* (nov. 2015).
- [Ede61] M. EDEN. “A Two-dimensional Growth Process”. In : *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. T. 4. 4. 1961.
- [GM05] J. B. GARNETT et D. E. MARSHALL. *Harmonic Measure*. Cambridge University Press, avr. 2005.
- [HL96] M. B. HASTINGS et L. S. LEVITOV. “Laplacian growth as one-dimensional turbulence”. In : *Physica D 116, 244 (1998)* 116.1–2 (3 juill. 1996), p. 244-252.
- [Kes87] H. KESTEN. “Hitting probabilities of random walks on \mathbb{Z}^d ”. In : *Stochastic Processes and their Applications* 25 (1987), p. 165-184.
- [Kes90] H. KESTEN. “Upper bounds for the growth rate of DLA”. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 168.1 (sept. 1990), p. 529-535.
- [LL10] G. F. LAWLER et V. LIMIC. *Random Walk : A Modern Introduction*. Cambridge University Press, juin 2010.
- [LS23] I. LOSEV et S. SMIRNOV. “How long are the arms in DBM?” In : (juill. 2023).
- [MP01] P. MÖRTERS et Y. PERES. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, jan. 2001.
- [PS78] S. PORT et C. STONE. *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Elsevier, 1978.
- [Spi64] F. SPITZER. *Principles of Random Walk*. Springer New York, 1964.
- [WS81] T. A. WITTEN et L. M. SANDER. “Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon”. In : *Physical Review Letters* 47.19 (nov. 1981), p. 1400-1403.