

Matrices Aléatoires : Un Modèle Tridiagonal

Lucas Babet

Université de Bucarest, supervisé par Ionel Popescu

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Préliminaires et Transformée de Stieltjes	2
2	Matrices aléatoires	4
2.1	Matrices de Wigner	5
2.2	Matrices tridiagonales	6
3	Vers une structure algébrique	16
3.1	Probabilités non-commutatives	16
3.2	Le cas Tridiagonal	17
	Références	20

Remerciement Je tiens à remercier Ionel pour son accueil et son soutien tout au long mon stage. Il a fait preuve d'une grande attention et été ouvert à la discussion sur de nombreux sujets, tant mathématiques qu'autres. Je remercie également les doctorants et les professeurs avec qui j'ai passé beaucoup de temps, pour leur accueil et leur amitié.

Liste des symboles

- p.s : presque sûrement
- i.i.d : indépendant.e.s identiquement distribué.e.s
- $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$
- σ_r : loi du demi-cercle sur $[-r, r]$
- γ_r : loi de l'arc sinus sur $[-r, r]$
- δ_x : Dirac en x
- S_μ : transformée de Stieltjes de μ
- **tr** : trace réduite
- $L^p := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: Matrices réelles de taille $n \times n$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: Matrices complexes de taille $n \times n$
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: Matrices symétriques réelles de taille $n \times n$
- $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$: Matrices hermitiennes complexes de taille $n \times n$

Déroulement du stage

J'ai effectué mon stage à l'Université de Bucarest sous la direction de Ionel Popescu où j'ai eu l'opportunité d'explorer divers sujets mathématiques liés aux matrices aléatoires.

Dans un premier temps j'ai étudié les propriétés de la transformée de Stieltjes, ses caractéristiques et son lien avec les représentations de certaines fonctions analytiques, les fonctions de Pick. Cet outil est étroitement lié au problème des moments que j'ai pu découvrir et en comprendre quelques subtilités.

Ensuite, j'ai pu voir comment cette transformée joue un rôle majeur dans le domaine des matrices aléatoires. Elle s'est avérée être l'un des moyens les plus rapides, sans prendre en compte les prérequis nécessaires, pour prouver les théorèmes de Wigner et Wishart. Cependant, bien que simple à manipuler, il a fallu adapter ces manipulations pour étudier les matrices tridiagonales. Cela m'a conduit vers l'étude des distances de Wasserstein pour montrer des convergences faibles.

Enfin, j'ai découvert une perspective algébrique liée aux matrices aléatoires à travers la théorie des probabilités libres. J'ai pu en particulier voir le lien entre transformée de Stieltjes et convolution additive libre. Les notions de convolutions libres permettent de bien décrire les lois jointes de matrices aléatoires. Nous avons tenté de transposer leurs constructions aux matrices tridiagonales, cependant les structures sont assez différentes.

1 Introduction

1.1 Préliminaires et Transformée de Stieltjes

Definition 1 (Transformée de Stieltjes). Soit μ une mesure finie sur \mathbb{R} . On définit sa transformée de Stieltjes, notée S_μ , par

$$\forall z \in \mathbb{C}^+ : S_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - x} d\mu(x)$$

La transformée de Stieltjes est un outil utile pour étudier les mesures définies sur \mathbb{R} . Les propriétés suivantes découlent directement de la définition.

Proposition 1.1 (Premières propriétés). Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} , alors :

- S_μ est analytique de \mathbb{C}^+ dans $-\mathbb{C}^+$.
- $\forall z \in \mathbb{C}^+ : |S_\mu(z)| \leq \frac{1}{\text{Im}(z)}$
- $\lim_{y \rightarrow \infty} iy S_\mu(iy) = \mu(\mathbb{R})$
- Si μ est à support compact sur $[-M, M]$, alors pour tout z tel que $|z| > M$:

$$S_\mu(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$$

- S_μ caractérise μ , et également sa densité si μ est a densité par rapport à Lebesgue.

Voyons quelques transformées de Stieltjes usuelles.

Exemple 1.2.

1) Dirac δ_x en un point x :

La transformée de Stieltjes de δ_x est

$$S_{\delta_x}(z) = \frac{1}{z - x}$$

2) La loi du demi-cercle σ_r sur $[-r, r]$:

Notons σ_r la loi du demi-cercle sur $[-r, r]$, définie par la densité $\mathbb{1}_{[-r,r]}(x) \frac{1}{\pi} \sqrt{r^2 - x^2}$. Sa transformée de Stieltjes est

$$S_{\sigma_r}(z) = 2 \frac{z - \sqrt{z^2 - r^2}}{r^2}$$

et est caractérisée par

$$S_{\sigma_r}(z) = \frac{1}{z - \left(\frac{r}{2}\right)^2 S_{\sigma_r}(z)}$$

3) La loi de l'arcsinus sur $[-r, r]$:

Notons γ_r la loi de l'arcsinus sur $[-r, r]$, définie par la densité $\mathbb{1}_{[-r,r]}(x) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Sa transformée de Stieltjes est

$$S_{\gamma_r}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

où la détermination de la racine sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ est $\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

En plus d'être un outil de caractérisation des mesures, la transformée de Stieltjes est aussi très pratique pour la représentation de fonction.

Theorem 1.3 (Représentation des fonctions de Pick). Si f est une fonction analytique de \mathbb{C}^+ dans $-\mathbb{C}^+$ vérifiant $\limsup_{y \rightarrow \infty} |yf(iy)| < \infty$, alors il existe μ une mesure finie sur \mathbb{R} tel que

$$f = S_\mu$$

Cette représentation de fonction permet de considérer directement les transformées en tant que fonction analytique pour prouver des convergences de mesure. Nous allons par la suite étudier des mesures aléatoires. Voyons donc le sens de convergence dans ce cas précis.

Definition 2 (Convergence de mesures). Soit (μ_n) une suite de mesures aléatoires sur \mathbb{R} . (μ_n) converge étroitement (resp. vaguement) presque sûrement (p.s) vers une mesure μ si pour toute fonction f continue bornée (resp. décroissante à l'infini) on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x)$$

Cette convergence presque sûre de mesures est caractérisée par la convergence presque sûre des transformées de Stieltjes.

Proposition 1.4. Soit (μ_n) une suite de mesures aléatoires sur \mathbb{R} .

Alors (μ_n) converge vaguement p.s vers μ si et seulement si pour tout z dans \mathbb{C}^+ , $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\mu_n}(z) = S_{\mu}(z)$ p.s. Si de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$ p.s, alors la convergence est étroite p.s.

Par la suite nous nous intéressons à la convergence des distributions empiriques des valeurs propres d'une suite de matrices aléatoires, et l'étudierons par le biais de sa transformée de Stieltjes.

Definition 3 (Distribution empirique des valeurs propres). Soit A une matrice hermitienne de taille n . On définit la distribution empirique de ses valeurs propres, notée L_A , par

$$L_A = \frac{1}{n} \sum_{\lambda \in Sp(A)} \delta_{\lambda}$$

Nous en déduisons une expression très utile de la transformée de Stieltjes des distributions empiriques.

Proposition 1.5. Soit A une matrice hermitienne de taille n . Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^+$:

$$S_{L_A}(z) = \mathbf{tr}(zI_n - A)^{-1}$$

où $\mathbf{tr} = \frac{1}{n} \text{Tr}$ est la trace réduite.

Passons à présent à l'étude des distributions, ou mesures, empiriques dans le cadre des matrices aléatoires, grâce à la transformée de Stieltjes.

2 Matrices aléatoires

Un des premiers modèles étudiés en matrices aléatoires, et l'un des plus naturel, est celui de Wigner. Pour tous les détails et approfondissements on pourra se référer à [2].

2.1 Matrices de Wigner

Nous verrons ici le résultat classique d'universalité de la distribution empirique pour les matrices de Wigner.

Definition 4 (Matrices de Wigner). Soit $(Z_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On définit pour tout N entier, X_N la matrice de Wigner de taille N par

$$X_N(i, j) = \frac{1}{\sqrt{N}} Z_{i,j}$$

On appellera (X_N) un ensemble de Wigner. Si de plus les variables aléatoires sont des gaussiennes on parlera d'ensemble gaussiens, orthogonnal (GOE) si les $Z_{i,j}$ sont des gaussiennes réelles centrées réduites, unitaire (GUE) si les $Z_{i,j}$ sont des gaussiennes complexes centrées réduites (simplectique (GSE) si les gaussienne sont dans les quaternions).

Par la suite, pour tout ensemble de Wigner (X_N) on notera pour tout N , $L_N = L_{X_N}$ la distribution empirique des valeurs propres de X_N .

Theorem 2.1 (Théorème d'universalité de Wigner). Soit (X_N) un ensemble de Wigner. Supposons que les variables $(Z_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ sont centrées réduites, alors L_N converge presque sûrement vers la loi du demi-cerclce sur $[-2, 2]$.

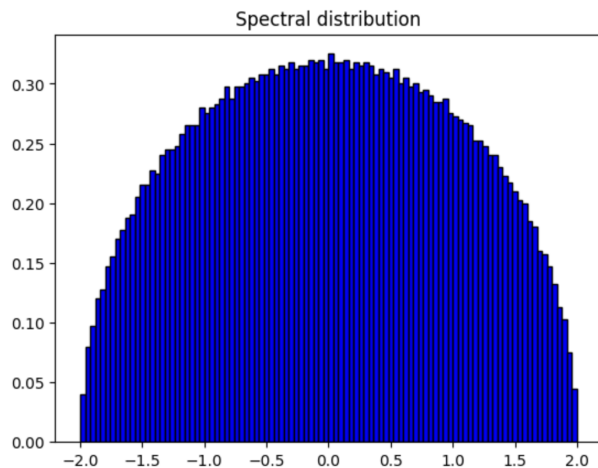


FIGURE 1 – Distribution empirique de GOE pour $N = 10^4$

Un point intéressant dans l'étude des matrices de Wigner est que le théorème précédent nécessite l'hypothèse

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}(|X_1|^k) < +\infty$$

pour être démontré de manière combinatoire avec la méthode des moments.

La relaxation de l'hypothèse d'existence de tous les moments à celle au-dessus, $\mathbb{E}(|X_1|^2) < +\infty$, nécessite l'utilisation de la transformée de Stieltjes.

Nous nous sommes donc penchés sur cette approche analytique pour démontrer le théorème principal de l'article [4], sur la convergence des mesures empiriques pour les modèles tridiagonaux, sous des hypothèses plus larges.

Dans l'étude des ensembles de Wigner, les ensembles gaussiens sont très importants, notamment pour certains modèles physiques, et une des transformations utilisées dans leur étude est la trigonalisation.

Tridiagonalisation d'ensembles gaussiens

Par la tridiagonalisation de Lanczos, les ensembles gaussiens peuvent être vus, à similitude près, comme certains β -ensembles.

Definition 5 (β -ensembles). On définit les β -ensembles, comme pour les ensembles de Wigner, par

$$X_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}(0, \beta) & \chi_{(N-1)\beta} & \cdots & 0 \\ \chi_{(N-1)\beta} & \mathcal{N}(0, \beta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \chi_\beta \\ 0 & \cdots & \chi_\beta & \mathcal{N}(0, \beta) \end{bmatrix}$$

où β est un réel positif.

Après le processus de tridiagonalisation, le GOE est représenté par $\beta = 1$ et le GUE par $\beta = 2$ (le GSE par $\beta = 4$).

Nous voyons donc que les ensembles gaussiens sont un cas particulier, à similitude près, d'un modèle plus général qu'est le modèle tridiagonal.

2.2 Matrices tridiagonales

Nous considérons à partir de maintenant directement des matrices tridiagonales et nous voulons, comme précédemment, étudier le comportement limite des valeurs propres.

2.2.1 Définitions et première approche

Definition 6 (Modèle tridiagonal). On définit le modèle tridiagonal par

$$X_N^\alpha = \frac{1}{N^\alpha} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N-1} & a_N \end{bmatrix}$$

où l'exposant α est strictement positif, les (a_i) sont des variables aléatoires i.i.d, et les (b_i) sont des variables aléatoires indépendantes tel que

$$\frac{b_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\mathcal{L}} b \quad (1)$$

où la convergence est en loi vers une variable b .

Par la suite nous voulons comprendre quel sens on doit donner à l'hypothèse (1) pour assurer la convergence de la mesure empirique.

Dans l'article [4], l'auteur démontre le premier théorème de convergence suivant.

Theorem 2.2. Soit (X_N^α) un modèle tridiagonal. Sous l'hypothèse

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E} \left(\frac{b_n}{n^\alpha} \right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_k < \infty$$

où les (m_k) sont les moments d'une loi caractérisée par ses moments, et si les (a_i) admettent des moments à tout ordre, alors la mesure empirique converge p.s vers une mesure déterminée par les (m_{2k})

Voici les grandes lignes de la preuve, qui repose sur des arguments purement combinatoires.

Démonstration. Par des convergences p.s des moments, basées sur des arguments de filtration, l'étude se ramène à celle de $\left(\mathbb{E}(\mathbf{tr}((X_N^\alpha)^k)) \right)$ pour tout k .

Nous écrivons le terme à calculer comme suit

$$\mathbb{E}(\mathbf{tr}((X_N^\alpha)^k)) = \frac{1}{N^{\alpha k + 1}} \sum_{\frac{k}{2} \leq i \leq N - \frac{k}{2}} \sum_{\gamma \in \Gamma_k} \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^k b_{i+\gamma(j)} \right) + o(1)$$

où Γ_k l'ensemble des chemins cycliques de longueur k définit par

$$\Gamma_k := \{ \gamma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{Z}, \forall i < k : |\gamma(i) - \gamma(i+1)| = 1 \text{ et } \gamma(1) = \gamma(k) = 0 \}$$

Le terme négligeable fait intervenir les $\frac{k}{2}$ premiers indices et les coefficients a_i (car $\mathbb{E} \left(\frac{a_n^k}{n^{k\alpha}} \right) \rightarrow 0$).

Par indépendance des (b_i) , l'espérance du produit dépend du nombre de fois ou chaque b_j est compté à i et γ fixés. Pour γ un chemin et $i \in \text{Im}(\gamma) + \frac{1}{2}$, on définit

$$c_i = \#\{j \in \text{Im}(\gamma), i \in [\gamma(j), \gamma(j+1)] \cup [\gamma(j+1), \gamma(j)]\}$$

Pour chaque $\frac{k}{2} \leq i \leq N - \frac{k}{2}$:

$$\mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^k b_{i+\gamma(j)} \right) = \prod_{j \in \text{Im}(\gamma)} \mathbb{E}(b_{i+j}^{c_j+1/2})$$

Par convergence des moments on en déduit

$$\prod_{j \in \text{Im}(\gamma)} \mathbb{E}(b_{i+j}^{c_{j+1/2}}) \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} i^\alpha \prod_{j \in \text{Im}(\gamma)} m_{c_{j+1/2}}$$

Finalement en sommant on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\text{tr}((X_N^\alpha)^k)) = \frac{1}{\alpha k + 1} \sum_{\gamma \in \Gamma_k} \prod_{i \in \text{Im}(\gamma) + \frac{1}{2}} m_{c_i}$$

□

Nous ne nous attardons pas sur la notion de chemins ici, que nous détaillerons dans l'étude des lois jointes.

Nous remarquons une dépendance simple en α des moments de la loi limite. Plus précisément, cette dernière est totalement décrite par la loi limite lorsque " $\alpha = 0$ " (le modèle n'est défini que pour $\alpha > 0$) et est modifiée par le biais de ses moments. Nous allons maintenant voir l'importance du cas $\alpha = 0$ dans notre étude.

Definition 7 (Cas $\alpha = 0$). Pour $\alpha = 0$ nous définissons le modèle tridiagonal par

$$X_N = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Le théorème (2.2) et les expressions des moments sont alors toujours valides pour le cas $\alpha = 0$.

Lemma 2.3 (Reduction au cas $\alpha = 0$). Sous les hypothèses du théorème (2.2), la distribution empirique de X_N^α converge vers la loi de $U^\alpha X$ où U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de X , et X suit la loi limite de la distribution empirique de X_N , modèle tridiagonal avec pour entrées $\left(\frac{b_i}{i^\alpha}\right)$.

Démonstration. Ce lemme est une conséquence directe de la caractérisation des moments de la loi limite. En effet pour tout k :

$$\mathbb{E}((U^\alpha X)^k) = \frac{1}{\alpha k + 1} \mathbb{E}(X^k)$$

qui est exactement la limite du moment d'ordre k de la mesure empirique de X_N^α . □

L'étude du modèle tridiagonal est pour l'instant menée uniquement par le biais d'outils combinatoires, qui nécessite l'existence de tous les moments de nos variables. Voyons comment l'approche analytique, comme dans le cadre des matrices de Wigner, permet de relaxer les hypothèses.

2.2.2 Approche analytique

Grâce à cette approche, nous allons peu à peu simplifier le modèle jusqu'au modèle (2), sur lequel nous travaillerons ensuite.

Remarquons déjà que la diagonale ne joue aucun rôle dans la description de la loi limite dans la preuve combinatoire, il semble naturel d'essayer de la supprimer.

Les lemmes suivantes sont cruciaux pour nous permettre d'effectuer toutes les simplifications voulues.

Lemma 2.4 (Hoffman-Wieland). Soit A et B deux matrices hermitiennes de taille N et $\lambda_1^A \leq \dots \leq \lambda_N^A$, $\lambda_1^B \leq \dots \leq \lambda_N^B$ leurs valeurs propres. Alors

$$\sum_{i=1}^N |\lambda_i^A - \lambda_i^B|^2 \leq \|A - B\|^2$$

Lemma 2.5 (Inégalité de Burkholder). Soit (X_n) une martingale dans L^p . On note $Y_i = X_i - X_{i-1}$. Alors il existe deux constantes c_p et C_p tel que

$$c_p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n |Y_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n Y_i \right|^p \right) \leq C_p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n |Y_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

L'inégalité de Burkholder permet de ramener l'étude de $S_N(z)$ à celle de $\mathbb{E}(S_N(z))$. Pour cela il est nécessaire de comparer la matrice à ses matrices où l'on supprime une ligne et une colonne.

Proposition 2.6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

où A et D sont inversibles. Alors M est inversible et

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

Grâce à cette proposition, et avec quelques manipulations développées dans le cours [5], on constate que pour tout N et tout k :

$$|\text{Tr}(zI_N - X_N) - \text{Tr}(zI_{N-1} - X_N^k)| \leq \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

où X_N^k est la matrice X_N où l'on supprime la k -ème ligne et colonne.

Nous pouvons maintenant nous ramener à $\mathbb{E}(S_N(z))$.

Lemma 2.7. Soit $z \in \mathbb{C}^+$. Avec les notations précédentes, si $\mathbb{E}(S_N(z))$ converge alors $S_N(z)$ converge p.s.

Démonstration. En effet posons \mathcal{F}_N la filtration canonique associée aux (b_i) et pour tout i, N entiers et $z \in \mathbb{C}^+$ posons $\alpha_i = N (\mathbb{E}(S_N(z) | \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(S_N(z) | \mathcal{F}_{i-1}))$. Par le lemme précédent

$$|S_N(z) - \mathbb{E}(S_N(z))|^4 \leq C_2 \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \alpha_i^2 \right)^2$$

Fixons i . Posons maintenant \tilde{X}_N la matrice X_N où la i -ème ligne et colonne sont remplacées par 0. Par découpage par bloc on remarque alors que $\tilde{S}_N(z) = \mathbf{tr}((zI_N - \tilde{X}_N)^{-1})$ vérifie

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_N(z) | \mathcal{F}_i) = \mathbb{E}(\tilde{S}_N(z) | \mathcal{F}_{i-1})$$

on a finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \alpha_i &= \mathbb{E}(S_N(z) | \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(\tilde{S}_N(z) | \mathcal{F}_{i-1}) - (\mathbb{E}(S_N(z) | \mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(\tilde{S}_N(z) | \mathcal{F}_{i-1})) \\ &= \mathbb{E}(S_N(z) - \tilde{S}_N(z) | \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(S_N(z) - \tilde{S}_N(z) | \mathcal{F}_{i-1}) \end{aligned}$$

De plus par la proposition précédente,

$$|Tr((zI_{N-1} - X_N^i)^{-1}) - Tr((zI_N - \tilde{X}_N)^{-1})| \leq \frac{1}{Im(z)}$$

On en déduit donc que

$$\alpha_i \leq \frac{2}{Im(z)}$$

et

$$\mathbb{E}(|S_N(z) - \mathbb{E}(S_N(z))|^4) \leq \frac{C}{N^2}$$

où C est une constante ne dépendant que de $Im(z)$. Le résultat en découle par le lemme de Borel-Cantelli. \square

Ces manipulations sur la transformée de Stieltjes permettent des simplifications élémentaires.

Lemma 2.8. Soit (X_N^α) un modèle tridiagonal tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E} \left(\frac{b_n}{n^\alpha} \right)^k = x_n + \epsilon_n$$

où les (x_i) sont i.i.d et les (ϵ_i) tendent vers 0 dans L^2 . On suppose de plus, si $\alpha > 0$, que les (a_i) sont bornées dans L^2 . Si le modèle tridiagonal associé aux $(i^\alpha x_i)$ et de diagonale nulle admet une distribution empirique limite p.s, alors (X_N^α) admet la même p.s.

Démonstration. Posons Y_N^α le modèle tridiagonal avec une diagonale nulle et les coefficients extradiagonaux sont les $i^\alpha x_i$. Le calcul de la norme est direct :

$$\|Y_N^\alpha - X_N^\alpha\|^2 = \frac{1}{N^{2\alpha}} \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2 + i^{2\alpha} \epsilon_i^2 \right)$$

On en déduit alors que pour tout $z \in \mathbb{C}^+$:

$$|\mathbf{tr}((zI_N - Y_N^\alpha)^{-1}) - \mathbf{tr}((zI_N - X_N^\alpha)^{-1})|^2 \leq \frac{1}{N^{2\alpha+1} \text{Im}(z)^2} \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2 + i^{2\alpha} \epsilon_i^2 \right)$$

Et enfin $\left| \mathbb{E}(S_{L_{X_N^\alpha}}(z)) - \mathbb{E}(S_{L_{Y_N^\alpha}}(z)) \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement si $\mathbb{E}(S_{L_{Y_N^\alpha}}(z))$ converge par inégalité de Burkholder on en déduit la convergence de la mesure empirique de X_N^α . \square

Nous pouvons maintenant restreindre l'étude au modèle simplifié

$$X_N^\alpha = \frac{1}{N^\alpha} \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & 0 & 2^\alpha b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^\alpha b_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (N-1)^\alpha b_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & (N-1)^\alpha b_{N-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

où $\alpha \geq 0$ et les (b_i) sont des variables aléatoires i.i.d de même loi qu'une variable b .

Comme pour les matrices de Wigner, il semble que l'hypothèse $\mathbb{E}(b^2)$ est suffisante, mais ici l'étude est un peu plus délicate. Commençons par décomposer $S_N(z)$.

Par l'équation matricielle (2.6) et une décomposition par bloc développée dans [2], on peut écrire

$$\begin{aligned} S_N(z) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - X_N(i, i) - x_i^T \cdot (zI_{N-1} - X_N^i) \cdot x_i} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - i^{2\alpha} b_i^2 \tilde{S}_{i-1}(i-1, i-1) + (i+1)^{2\alpha} b_{i+1}^2 \tilde{S}_{n-i}(1, 1)} \end{aligned}$$

où ici pour tout i , \tilde{S}_{i-1} et \tilde{S}_{n-i} sont des copies indépendantes entre elles de $S_{i-1}(z)$ et $S_{n-i}(z)$.

Plaçons nous pour le moment dans le cas $\alpha = 0$, le cas $\alpha > 0$ sera traité juste après avec le même argument qu'au lemme (2.3).

Dans l'article [8] les coefficients d'inverse de matrices tridiagonales sont étudiés et amènent à une première identification de loi.

Lemma 2.9. Avec les notations précédentes $\tilde{S}_i(i, i)$ et $\tilde{S}_i(1, 1)$ ont même loi et converge en loi vers une variable s pour $\text{Im}(z)^2 > \mathbb{E}(b^2)$.

Démonstration. La loi similaire découle du fait qu'après écriture les deux termes ont la même loi que s_i , variable définie par récurrence par $s_0 = 1$ et

$$\forall i > 0 : s_i = \frac{1}{z - b_i s_{i-1}}$$

Notons \mathbb{P}_n la loi de s_n et \mathbb{W} la distance de Wasserstein 1. Soit f une fonction 1-lipschitzienne et n un entier, par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(s_{n+1})) - \mathbb{E}(f(s_n)) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left(f \left(\frac{1}{z - x^2 s_n} \right) \right) - \mathbb{E} \left(f \left(\frac{1}{z - x^2 s_{n-1}} \right) \right) d\mu_b(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(f \circ g_x(s_n)) - \mathbb{E}(f \circ g_x(s_{n-1})) d\mu_b(x)\end{aligned}$$

où pour tout x , $f \circ g_x$ est $\frac{x^2}{\text{Im}(z)^2}$ -lipschitzienne. On en déduit que

$$\mathbb{E}(f(s_{n+1})) - \mathbb{E}(f(s_n)) \leq \frac{\mathbb{E}(b^2)}{\text{Im}(z)^2} \mathbb{W}(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n-1})$$

et donc

$$\mathbb{W}(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n+1}) \leq \frac{\mathbb{E}(b^2)}{\text{Im}(z)^2} \mathbb{W}(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n-1})$$

Ainsi (\mathbb{P}_n) est de Cauchy dans l'espace de Wasserstein 1 pour $\text{Im}(z)^2 > \mathbb{E}(b^2)$ et donc s_n converge en loi vers une variable s . Par la suite on notera $s(z)$ la variable précédente à z fixé. \square

Ajoutons que la loi de s est caractérisée, pour $\text{Im}(z)$ assez grand, par

$$s \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{z - b^2 s}$$

où b est indépendant de s et l'égalité est vraie en terme de distribution.

Nous venons maintenant au cas général et à la relaxation majeure du théorème (2.2).

Theorem 2.10. Soit X_N un modèle tridiagonal tel que b_i sont des variables i.i.d de même loi que b et admettant un moment d'ordre 2. Alors la distribution empirique des valeurs propres de X_N converge p.s vers une mesure ne dépendant que de la loi de b^2 .

Démonstration. On pose, pour $\text{Im}(z)^2 > \mathbb{E}(b^2)$,

$$S_b(z) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{z - b_1^2 s_1(z) - b_2^2 s_2(z)} \right)$$

où $s_1(z)$, $s_2(z)$ sont deux copies indépendantes de $s(z)$ et indépendantes de b_1 et b_2 . Controlons $\mathbb{E}(S_N(z)) - S_b(z)$, ce qui revient à contrôler

$$\varepsilon_i = \mathbb{E} \left(\frac{1}{z - b_i^2 s_{i-1}(z) - b_{i+1}^2 \tilde{s}_{N-i}(z)} - \frac{1}{z - b_1^2 s_1(z) - b_2^2 s_2(z)} \right)$$

Commençons par majorer

$$\varepsilon_{i,1} = \mathbb{E} \left(\frac{1}{z - b_i^2 s_{i-1}(z) - b_{i+1}^2 \tilde{s}_{N-i}(z)} - \frac{1}{z - b_i^2 s_{i-1}(z) - b_2^2 s_2(z)} \right)$$

Fixons un $\delta > 0$. En controlant partie réelle et partie imaginaire grâce à la distance de Wasserstein, on obtient pour i assez grand :

$$|\varepsilon_{i,1}| \leq 2\delta \frac{\mathbb{E}(b^2)}{\text{Im}(z)^2}$$

De même

$$|\varepsilon_{i,2}| = \left| \mathbb{E} \left(\frac{1}{z - b_i^2 s_{i-1}(z) - b_2^2 s_2(z)} - \frac{1}{z - b_1^2 s_1(z) - b_2^2 s_2(z)} \right) \right| \leq 2\delta \frac{\mathbb{E}(b^2)}{\text{Im}(z)^2}$$

et finalement pour tout $\delta > 0$ et N assez grand on a

$$|\mathbb{E}(S_N(z)) - S_b(z)| \leq 4\delta \frac{\mathbb{E}(b^2) + 1}{\text{Im}(z)^2}$$

Ce qui assure la convergence de S_N vers S_b p.s pour tout z . □

Ce théorème assure l'existence de distributions limites pour un cadre plus général que précédemment.

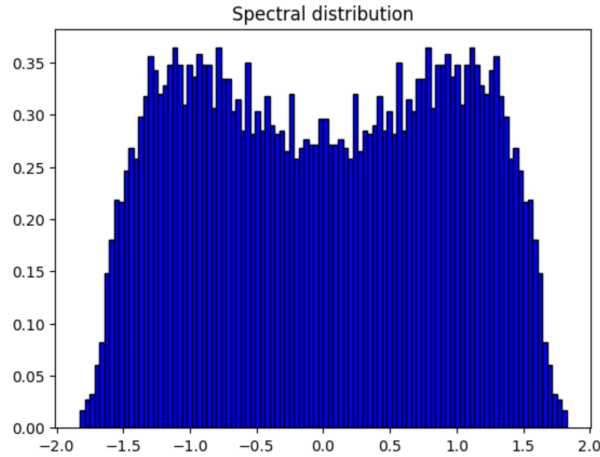


FIGURE 2 – Distribution empirique limite pour des entrées Pareto 4 ($N = 10^4$)

Sous l'hypothèse du théorème (2.2), le cas $\alpha = 0$ caractérise entièrement la distribution empirique limite de X_N^α .

La transformation décrite dans le lemme (2.3) se traduit en terme de transformées de Stieltjes par

$$S_{\mu_X^\alpha}(z) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - t^\alpha x} d\mu(x) dt = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} S_{\mu_X} \left(\frac{z}{t^\alpha} \right) dt$$

où μ_X est la distribution empirique limite de X_N et μ_X^α celle de X_N^α avec le modèle simplifié (2). Nous voyons en effet que cette "déformation" de μ_X tient toujours pour le cas général.

Lemma 2.11 (Déformation α). Soit X_N un modèle tridiagonal défini par (2) de distribution empirique limite μ_X . Alors pour tout $\alpha > 0$, la distribution empirique limite μ_X^α de X_N^α est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C}^+ : S_{\mu_X^\alpha}(z) = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} S_{\mu_X} \left(\frac{z}{t^\alpha} \right) dt$$

Démonstration. On effectue une troncature dans un premier temps. En notant $Y_{N,C}^\alpha$ le modèle tridiagonal dont les coefficients sont $(b_i \mathbb{1}_{|b_i| \leq i^\alpha C})$. En appliquant le lemme (2.3) à $Y_{N,C}^\alpha$ on en déduit que

$$S_{L_{Y_{N,C}^\alpha}}(z) = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} S_{L_{Y_{N,C}}} \left(\frac{z}{t^\alpha} \right) dt$$

Par théorème de convergence dominée, et par lemme de Hoeffman-Wieland, on en déduit le résultat en faisant tendre \mathbb{C} vers $+\infty$. \square

Le théorème (2.10) fournit une généralisation du théorème (2.2) et sa preuve nous donne une construction de la transformée de Stieltjes de la distribution limite. Appliquons cela à quelques exemples de modèle tridiagonaux.

2.2.3 Exemples

1) Cas constant

Pour le cas où nos variables aléatoires sont des constantes, le résultat est connu et la distribution empirique de X_N tend vers une loi de l'arcsinus. Cependant voyons comment la méthode fournie par le théorème (2.10) s'applique.

Proposition 2.12. Si $\frac{b_i}{i^\alpha} = 1$, alors la distribution empirique de X_N^α tend vers la loi de Ullmann's de paramètre α , soit la loi de $T^\alpha X$ où T suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et X une loi de l'arcsinus sur $[-2, 2]$, T et X indépendants.

Démonstration. L'approche classique résulte de l'étude des racines du polynôme caractéristique de X_N en reconnaissant une matrice de Toeplitz.

Les racines de X_N sont $\{\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \mid k \in \{0, \dots, N\}\}$, ensuite par changement de variables on en déduit la convergence de la mesure empirique vers la loi de l'arcsinus.

Appliquons la méthode du théorème (2.10). On doit résoudre, pour $Im(z) > 1$, $s = \frac{1}{z-s}$ ce qui nous donne exactement

$$s = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

Finalement, la transformée de Stieltjes de la mesure empirique converge vers

$$S(z) = \frac{1}{z - 2s} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4}} = S_{\gamma_2}(z)$$

ce qui conclut. \square

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas où les (b_i) suivent une loi de Bernoulli. Nous n'avons que tardivement essayé d'appliquer la méthode analytique, nous n'avons donc pas abouti à une expression claire, du moins plus claire que celle proposée ci-dessous.

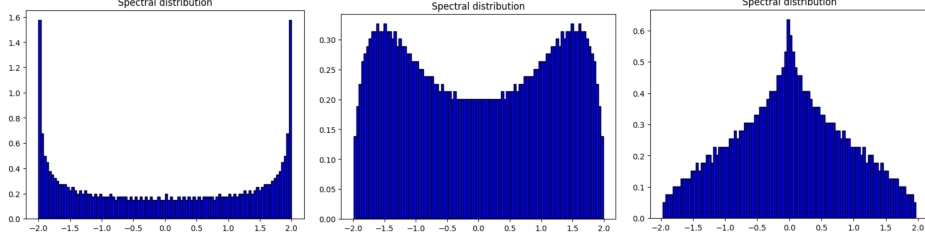


FIGURE 3 – Distribution empirique pour $\alpha = 0$, $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.8$ et $N = 10^4$

2) Cas Bernoulli

L'étude du cas où les coefficients sont des variables de Bernoulli repose essentiellement sur celle du cas constant.

Proposition 2.13. Soit X_N un modèle tridiagonal où les variables b_i sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors la distribution empirique de X_N converge vers

$$\mu_{B_p} = q^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k p^{k-1}$$

où μ_k est la distribution empirique de la matrice tridiagonale de taille k où les coefficients extra-diagonaux sont des 1.

Démonstration. Toute la démonstration repose sur le découpage par blocs de la matrice X_N . En effet cette dernière se découpe en blocs, chaque bloc étant une matrice étudiée au cas constant, et tous séparés par les b_i nuls. On obtient donc l'expression suivante du polynôme caractéristique de X_N :

$$\chi_{X_N} = \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq N < \tau_{n+1}\}} P_{N-\tau_n} \cdot \prod_{i=1}^k P_{\Delta_i}$$

où τ_i, Δ_i et P_i sont définis comme suit :

- $\tau_0 = 0$, $\forall i > 0 : \tau_i = \min\{k > \tau_{i-1} \mid b_i = 0\}$
- $\forall i \geq 0 : \Delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$
- Pour tout i , P_i est le polynôme caractéristique de la matrice issue du cas constant de taille $i \times i$.

Nous pouvons donc exprimer la transformée de Stieltjes de la mesure empirique :

$$S_N(z) = \frac{1}{N} \frac{\chi'_{X_N}(z)}{\chi_{X_N}(z)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq N < \tau_{n+1}\}} \left(\frac{P'_{N-\tau_n}(z)}{P_{N-\tau_n}} + \sum_{i=1}^n \frac{P'_{\Delta_i}(z)}{P_{\Delta_i}} \right)$$

Après calculs, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\mathbb{P}(\Delta_i = k, \tau_n \leq N < \tau_{n+1}) = q^n p^{N-n} \binom{N-k}{n-1}$$

Finalement après quelques calculs de binômes négatifs on obtient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_N(z)) = q^2 \sum_{k=1}^{\infty} S_{\mu_k} p^{k-1}$$

□

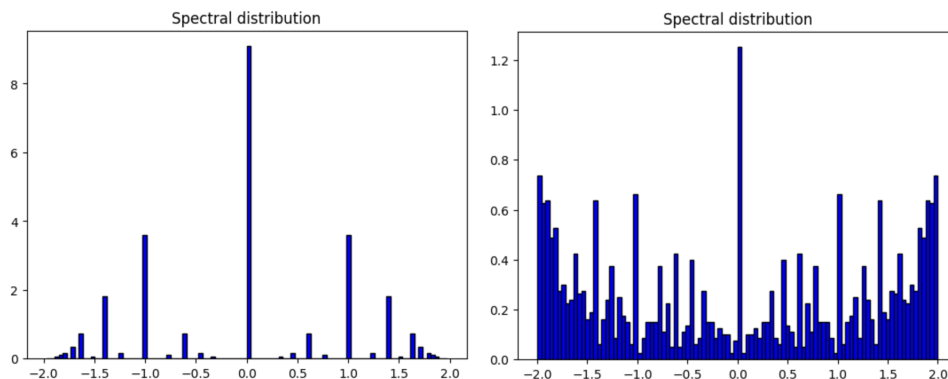


FIGURE 4 – Distribution empirique pour $p=0.5$, $p=0.9$ et $N = 10^4$

Ces exemples, bien que simples, montrent la complexité des modèles tridiagonaux généraux. Contrairement au cas des matrices de Wigner, il n’y a pas d’universalité de la distribution limite, ni même de comportement clair sur la nature discrète ou continue du spectre. Une des questions que nous nous sommes posées est l’impact de la déformation $\alpha > 0$ dans le modèle sur la distribution limite μ_X du cas $\alpha = 0$. Il semble que ce paramètre a tendance à centrer la mesure autour de 0, nous n’avons cependant pas poussé l’étude plus loin. Nous nous sommes plutôt intéressés à la description des lois jointes.

3 Vers une structure algébrique

Nous sommes ici dans un contexte de probabilité non-commutative, dû à la structure de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

3.1 Probabilités non-commutatives

Les probabilités non-commutatives introduites par Voiculescu sont un outil important pour décrire la loi jointe limite de deux ensembles Gaussiens. Commençons par introduire ces notions.

Definition 8 (Espace de probabilité non-commutative). Un espace de probabilité non-commutative est une paire (\mathcal{A}, Φ) où \mathcal{A} est une algèbre unitaire et Φ une forme linéaire sur \mathcal{A} . On dit que Φ est un état si $\Phi(1) = 1$. Une variable non commutative est un élément de \mathcal{A} .

Par la suite nous nous restreindrons au cas où \mathcal{A} est une \mathbb{C}^* -algèbre.

Definition 9 (\mathbb{C}^* -algèbre). Une \mathbb{C}^* -algèbre est une algèbre de Banach involutive vérifiant

$$\forall a \in \mathcal{A} : \|a^*a\| = \|a\|^2$$

Definition 10 (Liberté). Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-algèbres de \mathcal{A} . Elles sont dites libres si pour tout $i_1, \dots, i_n \in I$ vérifiant $\forall k : i_k \neq i_{k+1}$ et $\Phi(a_{i_k}) = 0$ alors $\Phi(a_{i_1} \dots a_{i_n}) = 0$.

En particulier, deux variables non-commutatives a et b sont libres si quelque soient $P_1 \dots P_n, Q_1, \dots, Q_n$ des polynômes on a

$$\Phi [(P_1(a) - \Phi(P_1(a)))(Q_1(b) - \Phi(Q_1(b))) \dots (Q_n(b) - \Phi(Q_n(b)))] = 0$$

Dans le cadre des matrices aléatoires la notion de liberté asymptotique est la plus adaptée, mais est sensiblement la même que précédemment.

Definition 11 (Liberté asymptotique). Soient (a_1^N, \dots, a_k^N) une famille de variables non-commutative dans (\mathcal{A}_N, Φ_N) . Elles sont dites asymptotiquement libres si elles admettent une loi limite $\mu : \mathbb{C}\langle X_i, 1 \leq i \leq k \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\langle X_i, 1 \leq i \leq k \rangle$ sont libres dans $(\mathbb{C}\langle X_i, 1 \leq i \leq k \rangle, \mu)$.

Dans le cadre des matrices aléatoires plusieurs résultats de liberté asymptotique ont été démontrés, en particulier pour des ensembles gaussiens. La famille d'espace de probabilités non-commutatives associée est $(\mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \Phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ où, pour tout N ,

$$\Phi_N(\cdot) := \mathbb{E}(\text{tr}(\cdot))$$

Theorem 3.1. Soit (X_N) et (Y_N) deux ensembles gaussiens. Alors X_N et Y_N sont asymptotiquement libres.

Nous voulons transposer et adapter cette notion de liberté au cas tridiagonal, vu le lien étroit entre ensembles gaussiens et β -ensembles.

3.2 Le cas Tridiagonal

Dans toute cette partie nous nous plaçons dans le cas $\alpha = 0$ et dans les mêmes espaces de probabilité non-commutative que pour ensembles gaussiens, en considérant la famille $(\mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \Phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$.

Commençons par rappeler que nous avons défini l'ensemble des chemins cycliques de taille n par

$$\Gamma_n = \{\gamma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}, \forall i < n : |\gamma(i) - \gamma(i+1)| = 1 \text{ et } \gamma(1) = \gamma(n) = 0\}$$

Comme vu précédemment la mesure empirique d'un modèle tridiagonal dépend uniquement de la loi des coefficients. L'idée derrière cette notion de chemin est de voir

à la limite un modèle tridiagonal (X_N) comme $X = U + U^T$ en tant qu'opérateur sur $l^2(\mathbb{N})$:

$$U = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & \boxed{0} & b_{-1} & 0 & \cdots & \\ \cdots & 0 & \boxed{0} & b_0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \boxed{0} & b_1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \leftarrow 0$$

l'entrée d'indice 0 est indiquée par la flèche et la diagonale est encadrée.

On détermine les moments limites en fonction de b_x , variable de même loi que les coefficients. Nous pouvons considérer tout polynôme en X comme un polynôme en U et U^T . Une multiplication par U dans un produit correspond à un pas vers le haut et une multiplication par U^T un pas vers le bas.

Il suffira de compter le nombre de passage en un point pour calculer, à la limite, la valeur de $\Phi(P(U, U^T))$.

Par exemple le polynôme P_γ associé au chemin γ ci-dessous a pour état

$$\Phi(P_\gamma(U, U^T)) = \mathbb{E}(b_x^2)^2$$

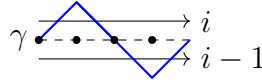


FIGURE 5 – Chemin cyclique de taille 4

Nous rajoutons aux chemins la notion de couleur pour décrire les lois jointes.

Definition 12 (Chemin k -coloré). Soit k couleurs et $c = (c_1, \dots, c_n)$ un n -tuple dont chacun des éléments représente une des couleurs. Soit γ un chemin cyclique de taille n . γ est un chemin k -coloré selon c si de plus on attribue la couleur c_1 à la première arrête $(\gamma(1), \gamma(2))$, la couleur c_2 à la deuxième deuxième arrête et ainsi de suite. On notera ${}_k\Gamma_c$ l'ensemble des chemins k -coloré selon c .

Theorem 3.2 (Distribution jointe). Soient $(X_{1,N}), \dots, (X_{k,N})$ k modèles tridiagonaux indépendants. Alors la distribution jointe limite des $X_{1,N}, \dots, X_{k,N}$ est donnée par

$$P_c(X_{1,N}, \dots, X_{k,N}) = \sum_{\gamma \in {}_k\Gamma_c} \prod_{j \in \text{Im}(\gamma) + \frac{1}{2}, d \text{ couleur}} \mathbb{E}(b_{X_d}^{c(j,d)})$$

où $P_c(X_1, \dots, X_N) = X_{c_1} \cdot X_{c_2} \dots X_{c_n}$ et pour tout $j \in \text{Im}(\gamma)$ et d une couleur

$$c(j, d) = \# \left\{ i \mid \begin{array}{l} \bullet j \in [\gamma(i), \gamma(i+1)] \cup [\gamma(i+1), \gamma(i)] \\ \bullet (\gamma(i), \gamma(i+1)) \text{ de couleur } d \end{array} \right\}$$

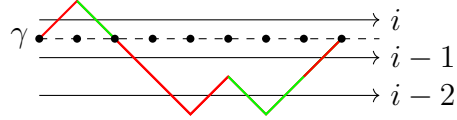


FIGURE 6 – Chemin 2-coloré

Sur la figure ci-dessus, en notant $X_N = U + U^T$ et $Y_N = V + V^T$, tous deux modèles tridiagonaux dont les coefficients extradiagonaux sont respectivement des copies de b_x et b_y , à la limite on obtient

$$P_\gamma(U, V, U^T, V^T) = \mathbb{E}(b_x)\mathbb{E}(b_y)\mathbb{E}(b_x^2)^2\mathbb{E}(b_y^2)$$

Il est important de remarquer que les lois jointes sont alors exprimées grâce aux moments (cette fois-ci ceux impairs également) des lois de b_x et b_y . Nous ne pouvons pas espérer prouver la liberté pour deux modèles tridiagonal généraux (éventuellement pour des variables symétriques).

Plaçons nous dans ce cadre limite. Notons $\mu_{(\cdot)}$ l'application qui à un opérateur limite de modèle tridiagonal X lui associe la distribution limite du modèle associé.

En notant T l'opérateur shift classique, les lois de (X, T) et (Y, T) décrivent entièrement la loi de (X, Y) . Nous avons ici la nécessité d'ajouter de l'information, grâce au shift, pour connaître les lois jointes à partir de lois marginales.

La prise en compte de l'opérateur shift permet de décrire entièrement les lois jointes de modèle tridiagonaux. Nous voulons construire une opération de convolution " tridiagonale " additive, noté \otimes , tel que pour tout k le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^k & \xrightarrow{+} & \mathcal{A} \\ \mu_{(\cdot, T)} \downarrow & & \downarrow \mu_{(\cdot)} \\ \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)^k & \xrightarrow{\otimes^k} & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Comme pour la notion de liberté, les lois jointes de modèle tridiagonaux sont totalement décrites par les lois marginales jointes avec le shift.

Nous avons abordé cette approche que tardivement, la piste reste ouverte et nous cherchons toujours à décrire analytiquement cette convolution tridiagonale.

Références

- [1] Serban Teodor Belinschi, *Complex Analysis Methods in Noncommutative Probability*,
- [2] Greg W. Anderson, Alice Guionnet, Ofer Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*,
- [3] A.I.Akhiezer, *The classical moment problem*
- [4] Ionel Popescu, *General tridiagonal random matrix models, limiting distributions and fluctuations*
- [5] M. Capitaine, *Introduction aux grandes matrices aléatoires cours M2R*
- [6] Arup Bose, Sanchayan Sen, *Finite Diagonal Random Matrices*
- [7] D.V.Voiculescu, K.J.Dykema, A.Nica, *Free Random Variables*
- [8] C.M. da Fonseca, J. Petronilho, *Explicit inverses of some tridiagonal matrices*
- [9] Arup Bose, Priyanka Sen, *XX^T Matrices with independent entries*
- [10] Justin Salez, *Every totally real algebraic integer is a tree eigenvalue*
- [11] William Arveson, *William Arveson, An Invitation to \mathbb{C}^* -Algebras, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 39, Springer.*
- [12] Roland Speicher, *Free calculus*