

Table des matières

1	Définitions, résultats préliminaires (état des connaissances)	3
1.1	Définitions	3
1.2	Modèle homogène	4
1.3	Interprétations de l'énergie libre et de la transition de phase	6
1.4	Introduction du désordre	6
1.5	Influence du désordre sur la transition	8
2	Éléments d'amélioration de la borne inférieur de F^q	8
2.1	Heuristique et inspirations de la preuve	9
2.2	Éléments de preuve	9
2.2.1	Terme de saut	10
2.2.2	Le terme en U et Z	12
2.2.3	Approche de la minoration	12
2.2.4	Éléments de conclusion	14

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Hubert Lacoïn pour m'avoir encadré pendant ce stage, pour son écoute et ses précieux conseils. Je tiens également à remercier Quentin Berger pour sa grande aide et sa patience dans mes recherches de stage.

Introduction et contexte

J'ai eu la chance de réaliser mon stage à l'Institut de mathématiques pures et appliquées (IMPA) à Rio de Janeiro sous la supervision de Hubert Lacoïn, chercheur français en probabilités. Durant les quatre mois de ce stage, j'ai eu l'occasion de m'initier au domaine de recherche actuel des polymères aléatoires à travers notamment certains livres ([1] ou [2]) pour une approche générale puis à travers l'étude de divers articles. J'ai par ailleurs pu assister à de nombreux séminaires sur divers sujets de probabilités ainsi qu'un cours de percolation.

Les polymères aléatoires font partie de la grande famille des modèles discrets de la mécanique statistique. Inspirés par des considérations chimiques, à savoir la formation de longues molécules par addition d'une ou plusieurs unités, leur étude a largement dépassé ce cadre. Une approche intuitive de ces modèles est la suivante : on considère une marche aléatoire en dimension d que l'on peut modifier afin de modéliser les éventuelles interactions avec un milieu extérieur pour en étudier les comportements typiques. La classe de modèles sur laquelle se portera principalement notre attention dans la suite est celle des modèles dits de *pinning*. Il s'agit de modèles pour lesquels l'interaction est concentrée au niveau de l'origine : il est possible d'interpréter cette interaction comme une "récompense" (ou "punition") lorsque la marche en question atteint l'origine, en définissant une nouvelle mesure associée. Plus précisément, on s'intéressera au cas où cette récompense est rendue aléatoire. En introduisant un paramètre de température, on observe que ces classes de systèmes subissent des transitions de phase, qui se manifeste par l'augmentation de la proportion totale de retour en zéro.

1 Définitions, résultats préliminaires (état des connaissances)

1.1 Définitions

Nous venons de voir comment modéliser intuitivement la formation aléatoire d'un polymère à l'aide d'une marche aléatoire. Nous pouvons ici élargir le modèle en ne considérant plus uniquement une telle marche mais plutôt une chaîne de Markov. De plus,

dans le cas des modèles de *pinning*, seuls les retours en 0 nous importent car ils sont les seuls endroits où le polymère interagit avec son environnement, donc il est possible de s'affranchir des trajectoires pour ne conserver que ces temps (les trajectoires peuvent éclairer la compréhension, c'est pour cela qu'on les conservera dans certaines représentations). En effet ; ceux-ci sont i.i.d. par propriété de Markov et réciproquement, il est possible de créer une chaîne de Markov dont les temps de retour en zéros suivent la même loi qu'une suite i.i.d. donnée. Plus précisément, on considère la suite de variables i.i.d. suivante :

$$(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ i.i.d. telles que } P(\tau_1 = n) \sim \frac{K(n)}{n^{1+\alpha}} \quad (1)$$

où K est une fonction à variation lente et α est un entier strictement positif. Ce choix fait sens notamment car on peut retrouver la marche aléatoire pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

On peut donc calculer la probabilité pour un polymère d'une longueur donnée N de rencontrer l'origine à des rangs connus P . On définit donc une nouvelle mesure de probabilité qui tient compte des passages en zéros de la manière suivante :

$$\frac{dP_{N,\beta}^f}{dP}(\tau) = \frac{1}{Z_{N,\beta}^f} \exp\left(\beta \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{n \in \tau}\right) \quad (2)$$

où f signifie *free* car on n'a imposé aucune contrainte supplémentaire. Cela peut être utile dans différents contextes et nous utiliserons notamment la mesure dite *constrained*, en ajoutant $\mathbb{1}_{N \in \tau}$ à la définition. De plus, la constante de normalisation $Z_{N,\beta}^f$ qu'on appelle *fonction de partition* est donc définie de la manière suivante :

$$Z_{N,\beta}^f = \mathbb{E} \left[\exp\left(\beta \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{n \in \tau}\right) \right] \quad (3)$$

Nous venons ici de définir le modèle dit *homogène* qui ne dépend que du paramètre β qui correspond à la *récompense*. Ses propriétés sont globalement connues et rappelées par exemple dans [1] et [2]. Nous allons énoncer ici les plus importantes d'entre elles.

1.2 Modèle homogène

Avant d'entamer l'étude du modèle *désordonné* ou *inhomogène*, on peut s'intéresser aux principaux résultats à propos de la transition de phase du modèle homogène et à certains éléments de preuve qui nous seront utiles dans la suite.

Théorème - Définition 1.1 *La suite $\{\frac{1}{N} Z_{N,\beta}^c\}$ converge vers une limite $F(\beta)$ que l'on nomme énergie libre et qui est positive, croissante, convexe car elle vérifie la relation suivante :*

$$\sum_n K(n) \exp(-F(\beta)n) = \exp(-\beta) \quad (4)$$

Cette relation est obtenue en développant la fonction de partition selon les retours en zéro puis, après avoir introduit un nouveau temps de premier retour en zéro \tilde{K} , en utilisant le théorème de renouvellement des chaînes de Markov. La connaissance de cette limite nous permet d'aboutir à la notion déjà évoquée de *transition de phase*. En effet, grâce aux propriétés de F , on introduit le point critique β_c défini comme le supremum des β tels que $F(\beta) = 0$.

La démonstration fournit également une égalité utile dans la suite. On a en effet, en notant $L_N(S) := \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{n \in \tau}$ et en décomposant sur tous les chemins possibles pour faire apparaître les probabilités de sauts K :

$$Z_{N,h}^c = \mathbb{E}(\exp(hL_N(S)), S_N = 0) = \sum_{n=1}^N \exp(hn) P(S_N = 0, L_N(S) = n) \quad (5)$$

$$= \sum_{n=1}^N \exp(hn) \sum_{l \in \mathbb{N}^n: |l|=N} P(\tau_1 = l_1, \tau_2 - \tau_1 = l_2, \dots, \tau_n - \tau_{n-1} = l_n) \quad (6)$$

$$= \sum_{n=1}^N \exp(hn) \sum_{l \in \mathbb{N}^n: |l|=N} \prod_{j=1}^n K(l_j) = \sum_{n=1}^N \sum_{l \in \mathbb{N}^n: |l|=N} \prod_{j=1}^n \exp(h) K(l_j) \quad (7)$$

Cette dernière expression motive l'introduction du nouveau processus $\tilde{\tau}$ de taux $\tilde{K}_h(n) := \exp(-F(h)n + h)K(n)$ (avec les précautions nécessaires. On a donc l'expression finale :

$$Z_{N,h}^c = \exp F(h)N \sum_{n=1}^N \sum_{l \in \mathbb{N}^n: |l|=N} \prod_{j=1}^n \tilde{K}(l_j) \quad (8)$$

$$= \exp(F(h)N) P(N \in \tilde{\tau}) \quad (9)$$

Et c'est l'égalité (9) que l'on utilisera notamment grâce au théorème de renouvellement. On voit par ailleurs qu'on a une bonne échelle de convergence si la probabilité converge.

La relation (4) nous permet enfin, à l'aide notamment de théorèmes *taubériens*, d'obtenir le développement asymptotique de l'énergie libre autour du point critique qui permet justement de caractériser la transition de phase. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1 *Il existe une fonction à variation lente \hat{L} telle que :*

$$F(\beta + \delta) = \delta^{\min(1, \frac{1}{\alpha})} \widehat{L}\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (10)$$

où α est l'exposant de la probabilité de retour en zéro vu plus tôt.

Le paramètre le plus important d'une transition de phase est son *ordre*, qui correspond à la première dérivée discontinue de l'énergie libre. Ce théorème nous permet donc de le connaître dans le cas homogène, à savoir 1 si $\alpha > 1$ puis 2 pour $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ et ainsi de suite.

1.3 Interprétations de l'énergie libre et de la transition de phase

L'énergie libre F est introduite car elle renferme de très nombreuses informations sur le système. Nous venons de voir l'ordre de la transition définie par la discontinuité d'une dérivée, nous allons voir ici deux paramètres dérivant de F qu'il est possible d'interpréter d'un point de vu plus *physique*. Premièrement, l'égalité (4) nous fournit donc une échelle caractéristique pour le système avec le terme en $\exp(NF(h))$. On introduit donc la *longueur de corrélation* du système que l'on note :

$$\kappa(h) := \frac{1}{F(h)} \quad (11)$$

Il existe plusieurs définitions et interprétations de cette longueur notamment, intuitivement la distance typique à laquelle deux sites peuvent influencer l'un sur l'autre. Elle permet également intuitivement de distinguer entre les échelles "petites" et "grandes". Elle sera donc une référence dans la seconde partie.

Deuxièmement, en dérivant une fois l'énergie libre, on obtient, grâce au théorème 1.1, l'égalité suivante :

$$F'(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{d}{dh} \log(Z_{N,h}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_{N,h}(L_N(S)) \quad (12)$$

Cette dernière égalité nous permet donc de donner une interprétation de $F'(h)$: il s'agit de la limite de la fraction moyenne de contacts sous la nouvelle mesure de probabilités. En particulier, on a donc une nouvelle interprétation de la transition de phase puisqu'elle sépare la zone où cette fraction a pour limite 0 de celle où la limite est strictement positive.

1.4 Introduction du désordre

Dans ce rapport, on s'intéresse plus particulièrement aux modèles de polymères désordonnés. En mécanique statistique, il existe plusieurs méthodes pour intégrer du désordre à un système ; dans notre cas, on va créer un aléa sur la récompense. On munit donc l'axe d'une suite de variables aléatoires $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. centrées réduites de loi \mathbb{P} et on

remplace le terme en $\beta \mathbb{1}_{n \in \tau}$ par $h + \beta \mathbb{1}_{n \in \tau}$. On introduit en conséquences, par analogie, deux nouvelles notions d'énergie libre : les énergies libres *quenched* et *annealed*.

$$Z_N^{\beta, h, \omega^c} = Z_{N, \omega}^c := \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{n=1}^N (h + \beta \omega_n) \mathbb{1}_{n \in \tau} \right) \mathbb{1}_{N \in \tau} \right] \quad (13)$$

$$F^q(\beta, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_N^{\beta, h, \omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N^{\beta, h, \omega} \quad (14)$$

$$F^a(\beta, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_N^{\beta, h, \omega} \quad (15)$$

L'énergie libre *quenched* est la notion la plus naturelle car analogue de la définition homogène et c'est celle qu'on étudiera principalement dans la suite. Cependant, son existence n'est pas forcément évidente à première vue tout comme la seconde égalité dans 14. Ces résultats d'existence presque sûre sont détaillés dans [1]. On démontre en effet la convergence de la première suite par un argument de suradditivité dans la cas *constrained*. Puis on démontre par un argument de découpage en blocs la seconde égalité de 14, à nouveau dans le cas *constrained*. Enfin on peut montrer que l'égalité reste vraie même si on considère la fonction de partition *free* ([1]).

De plus, si on suppose l'hypothèse de finitude de tous les moments exponentiels des variables ω_n ($\lambda(b) := \log \mathbb{E}(\exp \beta \omega_1)$), on peut calculer explicitement la valeur de $F^a(\beta, h)$ en fonction de F qui est mieux connue. On a, en intervertissant les espérances et par indépendance des ω_n :

$$\mathbb{E} Z_N^{\beta, h, \omega} = Z_N^{h + \lambda(\beta)} \quad (16)$$

donc :

$$F^a(\beta, h) = F(h + \lambda(\beta)) \quad (17)$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Jensen, on peut comparer les énergies libres *quenched* et *annealed*, on obtient alors :

$$F^q(\beta, h) \leq F^a(\beta, h) \quad (18)$$

et en particulier :

$$h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta) := h_c - \lambda(\beta) \quad (19)$$

où $h_c(\beta)$ est le point critique du modèle avec désordre qui existe presque sûrement.

1.5 Influence du désordre sur la transition

Dans la littérature, on retrouve de nombreux résultats à propos de l'influence du désordre sur la transition, notamment pour savoir si celui-ci modifie le point critique ou la valeur de l'exposant critique. Il s'agit notamment fréquemment de démontrer ou infirmer des conjectures issues de la physique et notamment le *critère de Harris*, très utilisé en mécanique statistique, qui stipule dans notre cas que le désordre est *relevant* lorsque l'exposant α appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$, c'est à dire qu'il modifie l'ordre de la transition de phase, et *irrelevant* dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$. Plus précisément, il est démontré dans [2] que pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$, le point critique *quenched* $h_c(\beta)$ est différent de celui *annealed* (et donc homogène) $h_c^a(\beta)$ pour tout β . Pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, on peut montrer que ni la valeur du point critique, ni l'exposant critique ne sont modifiés : c'est le cas dans [2], basé sur les travaux de Lacoïn [3]. Une version faible de ce résultat d'*irrelevance* peut être résumée de la façon suivante :

Théorème 1.2 *Pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour tout $\beta \in]0, \beta_0[$, on a :*

$$\lim_{h \rightarrow h_c^a(\beta)^+} \frac{\log F(\beta, h)}{\log (h - h_c^a(\beta)^+)} = \frac{1}{\alpha} \quad (20)$$

en particulier, on a $h_c(\beta) = h_c^a(\beta)$.

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat et celle intuitive présentée dans [3] repose sur l'étude de la convergence d'une martingale liée à la fonction de partition. De plus, en ajoutant l'hypothèse de gaussianité des variables ω_n , on peut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, pour un β suffisamment petit, on a l'encadrement suivant pour l'énergie libre *quenched* :

$$1 - \epsilon \leq \frac{F^q(\beta, h)}{F^a(\beta, h)} \leq 1 \quad (21)$$

où la deuxième inégalité a déjà été vue plus tôt. Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat (comme dans [4], [5]) qui utilisent plus ou moins le caractère gaussien du désordre.

2 Éléments d'amélioration de la borne inférieure de F^q

Le résultat précédent d'*irrelevance* du désordre vu précédemment est limité par plusieurs aspects : soit la précision est faible comme dans le théorème, soit l'encadrement ne tient que pour les plus petites valeurs de β . Notre objectif est donc d'essayer de généraliser la borne inférieure de l'énergie libre *quenched* pour des β de plus en plus grand, comme c'est déjà le cas dans la version "faible", notamment en atteignant dans un premier temps le point β_2 jusqu'auquel la famille des fonctions de partition à l'équilibre est bornée dans \mathbb{L}^2 .

2.1 Heuristique et inspirations de la preuve

De nombreuses preuves de la théorie des polymères aléatoires utilisent une technique de découpage en blocs de la fonction de partition. C'est le cas par exemple dans la démonstration de sa convergence dans l'optique d'utiliser un argument de sur-additivité, ou dans plusieurs preuves de bornes supérieures de l'énergie libre. Elle est particulièrement utile dans notre cas de recherche d'une inégalité "fine" car elle permet de "sélectionner" avec précision les contributions à $Z_{N,\omega}$ qui nous intéressent et, intuitivement, d'éliminer celles qui, à l'inverse, pénalisent beaucoup. Une méthode de ce type est utilisée par Alexander [6] dans le cas du modèle de polymère dirigé : en découpant le plan en blocs et définissant une notion de "bon" blocs, c'est à dire ceux qui ont une contribution suffisante à $Z_{n,\omega}$, il réussit à obtenir une minoration aussi proche que nécessaire de F^a .

2.2 Éléments de preuve

Comme nous nous plaçons dans le cas L^2 , nous avons à notre disposition des outils comme l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Nous aurons donc besoin de calculer les deux premiers moments de la fonction de partition avec désordre. Prendre l'espérance pour la mesure du désordre revient, comme on l'a vu précédemment, à *décaler* de $\lambda(\beta)$ le paramètre h . Pour le calcul de l'espérance, en nous inspirant de plusieurs travaux réalisés dans le cas du modèle continu, nous allons donc réaliser un découpage de la fonction de partition en m blocs de taille L .

On note $U(n) := P(n \in \tau^{(h+\lambda)})$ et $\tilde{U}(n) := P(n \in \tilde{\tau}^{(h+\lambda)})$

On a donc :

$$\begin{aligned}
Z_{mL,h} &\geq \sum_{d_1, f_1 \in B_{i_1}} \sum_{d_2, f_2 \in B_{i_2}} \cdots \sum_{d_l \in B_{i_l}, f_l = mN} K((i_1 - 1) + d_1) U(L - f_1 - d_1) Z_{d_1, f_1} \\
&K((i_2 - i_1 - 1) + d_2 + f_1) U(L - f_2 - d_2) Z_{d_2, f_2} \cdots K((i_l - i_{l-1} - 1) + d_l + f_{l-1}) U(L - f_l - d_l) Z_{d_l, f_l} \\
&\geq \sum_{d_1, f_1 \in B_{i_1}} \sum_{d_2, f_2 \in B_{i_2}} \cdots \sum_{d_l \in B_{i_l}, f_l = mN} \prod_{j=1}^l K((i_{k+1} - i_k - 1) L + d_{k+1} + f_k) U(L - f_j - d_j) Z_{d_j, f_j}
\end{aligned} \tag{22}$$

Où les Z_{d_j, f_j} sont les fonctions de partitions pour un système de taille $L - d_j - f_j$, avec le désordre correspondant à son emplacement *réel*.

Parmi les m blocs préexistants, on a éventuellement restreints à certains "bons" blocs qui doivent être choisis *a posteriori* selon leur contribution possible comme vu plus tôt.

On note l leur nombre et I la liste des indices :

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_l) \quad (23)$$

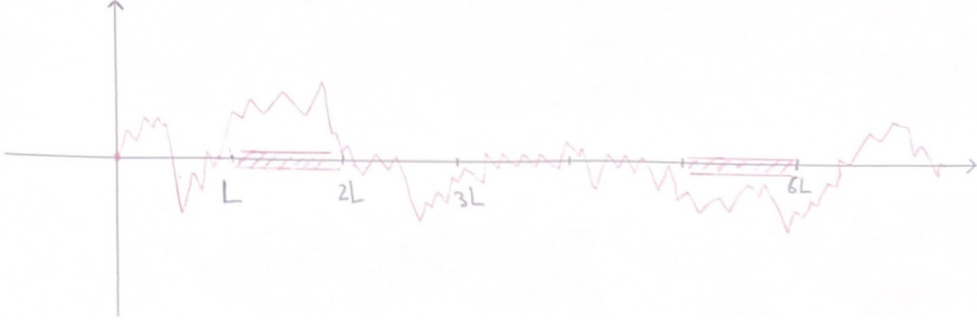


FIGURE 1 – Exemple de courbe dans le cas d'une marche aléatoire pour $I = (0, 2, 3, 4, 6, \dots)$

Les B_{i_1}, B_{i_2} etc. correspondent aux "zones" que l'on souhaite conserver lors du découpage (car on cherche une borne inférieure). Ici, *a priori*, on souhaite conserver les zones proches des intersections pour des raisons que nous détaillerons plus tard. On pourra donc modifier la taille de cette "zone acceptable" selon les échelles en jeu. On appelle d_{max} la taille de la zone en question (telle que $\forall i \leq l, d_i, f_i \leq d_{max}$

La justification du découpage précédent repose sur une décomposition selon différents types de trajectoires. Intuitivement, on distingue donc selon la taille des sauts entre chaque bloc choisis. On utilise ensuite la propriété de Markov appliquée avec la loi initiale P de la chaîne d'origine. Les termes en K correspondent aux termes de saut et ceux en U sont issus de la normalisation pour faire apparaître les fonctions de partition intermédiaires Z_{d_i, f_i} .

La preuve consiste donc à minorer les différents termes du découpage et éventuellement ajuster les différents paramètres introduits afin d'atteindre la borne souhaitée.

2.2.1 Terme de saut

On s'intéresse d'abord aux termes de la forme $K(n)$ que l'on peut minorer afin notamment d'éventuellement factoriser certains termes. On présente ici deux stratégies envisageables pour appréhender ces termes.

Premièrement, on peut distinguer les minoration selon que le saut passe directement

d'un bloc au suivant ou ne traverse pas au moins un bloc

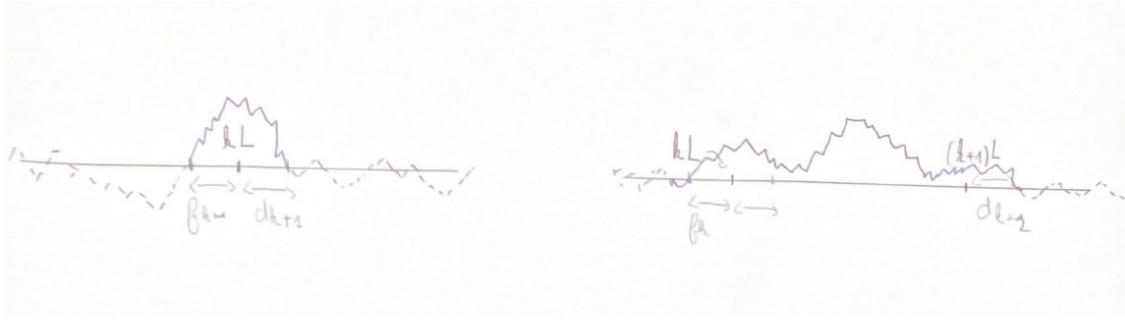


FIGURE 2 – Deux types de sauts possible dans le cas d'une marche aléatoire)

on a donc, par décroissance de K :

$$K((i_{k+1} - i_k - 1)L + d_{k+1} + f_k) \geq \begin{cases} K(2d_{\max}) & \text{si on ne saute pas de blocs} \\ K((i_{k+1} - i_k - 1)L + 2d_{\max}) & \text{si on en saute} \end{cases} \quad (24)$$

La disjonction paraît arbitraire mais reflète que deux échelles différentes ressortent : soit d_{\max} soit L (on a *a priori* $d_{\max} \ll L$. Comme on le verra dans la suite, le terme en (d_{\max}) joue un rôle important pour tenter de compenser d'autres termes dans la suite. Cette méthode possède cependant l'inconvénient de devoir quantifier ces différents types de saut, en gardant à l'esprit que dans l'heuristique de preuve, on a *environ* m bons blocs et $o(m)$ mauvais et donc une proportion similaire de "petits" et "grands" sauts.

La seconde possibilité que j'ai moins eu l'occasion de développer est d'adapter un lemme issu d'un article non publié de Berger et Lacoïn pour le modèle continu au modèle discret que l'on peut formuler de la manière suivante (sans définir le modèle avec en prenant toutes les analogies naturelles) :

Lemme 2.1 (Modèle continu) "Il existe $c > 0$ (dépendant uniquement de α) tel que, pour tous s_j pris dans chaque blocs :

$$\prod_{i \in I} K(s_{j-1}, s_j) \geq c^m K(L)^{|I|} \quad (25)$$

La démonstration repose cependant sur les trajectoires (continues) des chaînes de Markov considérées et notamment la monotonie de certaines probabilités dépendant d'un point d'arrivée. On connecte les différents "morceaux" avec notamment l'inégalité de Jensen ou encore des inégalités classiques de produit/somme. L'intérêt ici est qu'on obtient directement une constante c qui ne dépend que de α et de l'échelle de la taille des blocs L (mais pas de d_{\max}). On aurait donc *a priori* une minoration de la forme :

$$\prod_{j=1}^l K((i_{k+1} - i_k - 1)L + d_{k+1} + f_k) \geq \begin{cases} K(2d_{\max})^\lambda c^m K(L)^\Lambda \\ C^m K(L)^{|I|} \end{cases} \quad (26)$$

Où λ serait donc le nombre de blocs adjacents deux à deux et Λ une valeur à déterminer selon le nombre de *grands* sauts et leur taille (nous discutons brièvement des valeurs dans la suite). Cette minoration aurait comme intérêt d'être commune à tous les termes des différentes sommes.

2.2.2 Le terme en U et Z

On veut désormais trouver une minoration du terme de la forme (pour $d_1, f_1, \dots, d_l, f_l \leq d_{\max}$) :

$$H(I) := \prod_{j=1}^l U(L - f_j - d_j) Z_{d_j, f_j} \quad (27)$$

C'est notamment ici que nous allons exploiter la relation (9), et donc, compte tenu de la définition de Z_{d_j, f_j} , on a :

$$H(I) = \prod_{j=1}^l U(L - f_j - d_j) \tilde{U}(L - f_j - d_j) \exp(F(h + \Lambda(\beta))(N - d_j - f_j)) \quad (28)$$

On a donc une expression qui contient des termes en U et \tilde{U} or il est possible de montrer, à nouveau en adaptant un résultat du *preprint* que ces deux termes sont proches, on a un résultat du type :

Proposition 2.2 *Il existe c_1 et c_2 telles que pour tout $\beta > 0$:*

$$c_1 U(n \wedge \kappa(h)) \leq \tilde{U}(n) \leq c_2 U(n \wedge \kappa(h)) \quad (29)$$

et :

$$c_1 F'(h) \leq U(\kappa(h)) \leq c_2 F'(h) \quad (30)$$

Dans notre cas avec $U(N - d_j - f_j)$ si on choisit comme annoncé $d_{\max} \ll N$ on aurait donc que les deux termes sont de l'ordre de $F'(h + \Lambda(\beta))$. Autrement dit, on a une version plus quantitative du théorème de renouvellement qui nous annonçait la convergence vers $F'(h + \Lambda(\beta))$.

2.2.3 Approche de la minoration

Si on met bout à bout les éléments évoqués, on s'approche donc d'une minoration qui nous conviendrait pour l'énergie libre. On a en effet, pour l'espérance de Z_{mL} :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{mL}) &\geq \sum_{d_1, f_1 \in B_{i_1}} \sum_{d_2, f_2 \in B_{i_2}} \cdots \sum_{d_l \in B_{i_l}, f_l = mN} \prod_{j=1}^l K((i_{k+1} - i_k - 1)L + d_{k+1} + f_k) \\
&\quad U(L - f_j - d_j) Z_{d_j, f_j} \\
&\geq \sum_{d_1, f_1 \in B_{i_1}} \sum_{d_2, f_2 \in B_{i_2}} \cdots \sum_{d_l \in B_{i_l}, f_l = mN} c^m K(2d_{\max})^\lambda K(L)^\Lambda c_3 \\
&\quad \prod_{j=1}^l F'(h + \Lambda(\beta))^2 \exp(F(h + \Lambda(\beta))(L - d_j - f_j)) \\
&\geq c^m K(2d_{\max})^\lambda K(L)^\Lambda c_3 \left[F'(h + \Lambda(\beta))^2 \exp(LF(h + \Lambda(\beta))) \left(\frac{1 - \exp(-LF(h + \Lambda(\beta)))}{1 - \exp(F(h + \Lambda(\beta)))} \right)^2 \right]^{|I|} \\
&\geq c_3 c^m K(2d_{\max})^\lambda K(L)^\Lambda F'(h + \Lambda(\beta))^{-2|I|} \exp(|I|LF(h + \Lambda(\beta))) F(h + \Lambda(\beta))^{2|I|} \quad (31)
\end{aligned}$$

Où la dernière ligne est valable pour des h proches de $-\Lambda(\beta)$. On a donc finalement isolé tous les termes d'intérêt de notre découpage.

L'objectif désormais est de choisir les grandeurs judicieusement afin de faire se compenser les différents termes. On veut donc notamment d_{\max} de l'ordre de $\kappa(\beta) = \frac{1}{F(h)}$ et donc $L \gg \kappa(\beta)$ pour respecter les conditions précédentes. L'objectif ici était une annulation des termes en h . En effet, on a :

$$F'(h + \Lambda(\beta)) \sim_{h \rightarrow -\Lambda(\beta)} h^{\frac{1}{\alpha} - 1} \text{ et } K(F(h + \Lambda(\beta))^{-1}) \asymp (h^{-\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha - 1} \quad (32)$$

On remarque donc que :

$$F'(h + \Lambda(\beta)) K(F(h + \Lambda(\beta))^{-1}) F(h + \Lambda(\beta))^{-2} \asymp h^{\frac{2}{\alpha} - 1 + 1 - \frac{2}{\alpha}} = 1 \quad (33)$$

Ici on a donc un problème avec l'exposant 2 en trop pour F' sûrement dû à une erreur de calcul ou d'approche dans l'heuristique. De plus, il reste à gérer le problème du terme $K(L)$ dont il était espérer qu'il soit compensé également, l'idée étant de s'approcher du terme en exponentiel qui (comme on vise $|I| \approx m$). En formalisant plus cette heuristique il aurait sûrement été possible de s'affranchir de ces problèmes. De plus, il aurait fallu plus formaliser le calcul des exposants Λ , λ et même $|I|$ qui devraient idéalement être proche de m . C'est a priori le cas des deux derniers, si on a bien choisi comment définir un "bon" bloc de manière judicieuse.

2.2.4 Éléments de conclusion

L'idée initiale était donc d'utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour contrôler la fonction de partition et la logique est la suivante, on cherche les blocs tels que $Z_i \geq \frac{\mathbb{E}(Z_i)}{2}$. Cela nécessite donc le calcul de la variance que l'on n'abordera pas ici. On vise une probabilité élevée de vérifier l'inégalité (qui dépend *a priori* du ϵ visé) pour avoir un maximum de bons blocs. La proportion de bons blocs apparaît donc dans l'exponentielle et la fonction de partition serait minorée par une expression proche de son espérance comme nous venons de calculer, à une constante près qui disparaîtrait à la limite dans la définition de l'énergie libre *quenched*.

On a donc esquissé une idée de preuve pour l'amélioration du résultat de Lacoïn. Bien qu'il reste de nombreuses zones d'imprécision, on a montré les grandes idées de la stratégie de preuve.

Références

- [1] G. Giacomin, *Random Polymer Models*, IC press, World Scientific, London, 2007.
- [2] G. Giacomin, , *Disorder and critical phenomena through basic probability models* , École d'Été de Prob- ´ abilités de Saint-Flour XL 2010, Springer Lecture Notes in Mathematics, 2011.
- [3] H. Lacoïn, “The martingale approach to disorder irrelevance for pinning models”, URL : <https://arxiv.org/abs/1002.4753>.
- [4] K. Alexander, “The effect of disorder on polymer depinning transitions”, *Commun. Math. Phys.*, **279**, 117-146 (2008).
- [5] F. L. Toninelli, “A replica-coupling approach to disordered pinning models”, *Commun. Math. Phys.*, **280**, 389-401 (2008).
- [6] K. Alexander, G. Yildirim, “Directed polymers in a random environment with a defect line”, *Electron. J. Probab.*, **20**, no.6, 1-20 (2015).