

À la découverte du groupe d'holonomie

Elena Dorbec

La Sapienza, Rome, mars-juillet 2024

Table des matières

1	Déroulement du stage	2
2	Contenu mathématique	3
2.1	Objectif du stage	3
2.2	Définitions et généralités	3
2.2.1	Outils généraux et contexte mathématique	3
2.2.2	Définition de l'holonomie	5
2.2.3	Principe d'holonomie et premiers exemples	5
2.2.4	Holonomie homogène et structure riemannienne	6
2.3	Premiers théorèmes de décomposition	9
2.3.1	Réductibilité	9
2.3.2	Théorème de de Rham	9
2.3.3	Théorème de Berger	11
2.4	Exemples	12
2.4.1	Variétés kähleriennes	12
2.4.2	Variétés de Calabi-Yau	14
2.5	Bilan des thèmes abordés durant le stage	16
	Références	17

1 Dérroulement du stage

J'ai effectué mon stage au département de mathématiques Casletnuovo à l'université La Sapienza à Rome sous la direction de Simone Diverio. Nous avons décidé que l'enjeu du stage serait de se familiariser avec un domaine des mathématiques qui m'était encore inconnu mais dont la connaissance pourrait m'être utile dans ma vie mathématique future. Ce choix d'approche du stage comme l'occasion de me consacrer à l'étude générale d'un domaine plutôt que de recherche à proprement parler sur un point spécifique avait en particulier pour but de me permettre d'avoir une compréhension plus profonde de sujets que j'aborderai durant mon M2 et de m'aider plus tard à peut-être m'orienter plus facilement quand viendra le moment de décider sur quel sujet et avec qui faire ma thèse.

J'ai donc lu et appris énormément pendant ces quelques mois, portée par la ligne directrice qu'était le groupe d'holonomie. J'exposerai une partie des résultats dans ce rapports, et finirai par une liste des sujets que je n'aurai pas eu la place d'aborder. Simone Diverio me donnait en général chaque semaine un livre ou un papier pour références avec une question, dans lesquels je me plongeais pour tâcher d'y répondre et que je lui exposai ensuite.

Quant au déroulement à proprement parler, je rencontrais mon encadrant au moins une à deux fois par semaine pour faire un point sur mes lectures, parler un peu de la philosophie des résultats et de la manière dont on pouvait se construire une intuition des différents outils abordés. Souvent, je trouvais des détails qui me semblaient étranges dans les preuves que je lisais, soit qu'il me manque encore de la théorie pour comprendre un argument, soit que ces détails soient faux. Durant les rencontres avec Simone Diverio, il s'assurait donc que j'avais bien compris ce que je lisais, nous reprenions ensemble les points de preuve étranges, soit en nous convaincant qu'ils étaient faux et en trouvant une autre référence où chercher une méthode alternative, soit en explicitant le pas qui me manquait ou en m'aiguillant vers une nouvelle référence me permettant de pallier à mes lacunes si je n'étais pas assez familière avec les sujets abordés. J'ai ainsi lu assez linéairement un certain nombre de livres, comme par exemple [8] pour lequel je faisais petit à petit tous les exercices présents dans le livre que Simone corrigeait ensuite et dont on discutait ensemble.

Par ailleurs, j'assistais également au séminaire d'équipe chaque semaine, ce qui m'a permis d'interagir avec quelques intervenants à qui j'ai parfois pu poser des questions et d'autres professeurs du laboratoire d'algèbre et géométrie. Les premières semaines de mon stage, je retrouvais également les étudiants italiens qui faisaient leur stage de M2 avec mon encadrant pour leur présenter mes avancées et écouter les leurs sur les différents sujets qu'ils étudiaient.

Je reviens donc de ce stage très enthousiaste au vu de tout le savoir mathématique que j'ai accumulé. J'ai en outre la chance d'avoir pu apprendre l'italien en plus de perfectionner mon anglais à force d'être immergée dans le pays et grâce à mes nombreuses rencontres.

2 Contenu mathématique

2.1 Objectif du stage

L'objectif global du stage était de se familiariser avec le groupe d'holonomie et d'étudier la classification des variétés grâce aux théorèmes de Berger et de de Rham. Pour ce faire ainsi que pour se faire une idée précise des différentes structures de variétés, il s'agissait en particulier d'exhiber des exemples les plus généraux possibles — c'est-à-dire avec des groupes d'holonomie maximaux.

2.2 Définitions et généralités

2.2.1 Outils généraux et contexte mathématique

Sur une variété munie d'un fibré tangent, on n'a a priori pas de manière canonique de transporter de l'information entre les fibres d'un point à un autre. Il n'existe pas de translation canonique qui permettrait de conserver des informations de direction. C'est face à ce constat qu'est défini le transport parallèle, un outil qui nous permet de transporter ces informations d'une manière qu'on jugera canonique. Celle-ci dépendra en revanche en général du chemin qu'on choisit de considérer entre les deux points considérés.

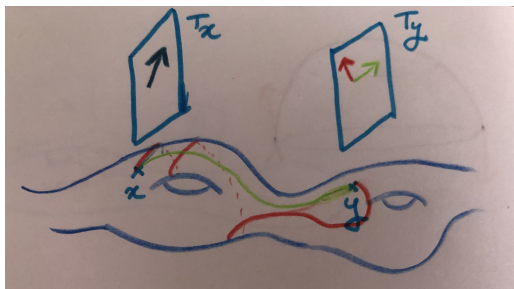


FIGURE 1 – Première illustration du principe de transport parallèle

Définition 1 (connexion).

Soit M une variété lisse connexe de dimension n . Soit E un fibré tangent à M de rang r . Une connexion ∇ sur E est un opérateur différentiel d'ordre 1 agissant sur $\mathcal{C}_\bullet^\infty(M, E)$ tel que

$$\nabla : \mathcal{C}_q^\infty(M, E) \rightarrow \mathcal{C}_{q+1}^\infty(M, E)$$

et tel que pour tous $f \in \mathcal{C}_p^\infty$, $s \in \mathcal{C}_q^\infty$,

$$\nabla(f \wedge s) = df \wedge s + (-1)^p f \wedge \nabla s$$

où df est la dérivée extérieure usuelle.

On a donc défini les connexions comme des opérateurs vérifiant les axiomes de dérivation usuels. On peut de même généraliser cette construction pour obtenir

une connexion sur une somme directe ou un produit tensoriel de fibrés sur une même variété, sur $\Lambda^p E$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ ou même tirer les connexions en arrière.

Maintenant, si γ est un chemin dans M , on veut définir un moyen de transporter l'information sur ce chemin. On s'intéresse donc aux sections s de γ dans E . On veut un moyen de dériver le long des sections. C'est là qu'intervient la dérivée covariante.

Définition 2 (dérivée covariante).

Soit ∇ une connexion et $s = (s_1, \dots, s_r)$ une base locale de E au dessus d'un ouvert U de M . Alors, on peut écrire en écriture matricielle :

$$\nabla s = s \cdot \omega$$

. On appelle ω la forme de connexion de ∇ .

Alors, si $\xi = \sum \xi^i s_i$ est une section de E sur U , on écrit

$$\nabla \xi = d\xi + \omega \xi$$

. $d\xi$ est alors la dérivée covariante de ξ .

En l'évaluant sur un vecteur tangent X de M en x on obtient ainsi un élément de la fibre E_x qu'on note

$$\nabla_X \xi = (\nabla \xi)(X) \in E_x.$$

C'est la dérivée covariante de ξ dans la direction X .

Venons en donc maintenant au transport d'informations. Comme on pense à généraliser une translation, on se dit qu'on aimerait agir avec une transformation de dérivée triviale selon un chemin.

Définition 3 (section parallèle).

Soient maintenant $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin lisse et $s : [0, 1] \rightarrow E$ une section lisse de E selon γ , soit une fonction \mathcal{C}^∞ telle que :

$$\forall t \in [0, 1], s(t) \in E_{\gamma(t)}.$$

On dit que s est parallèle selon γ si pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\nabla_{\gamma'(t)}(s(t)) = 0$$

On remarque ensuite qu'à γ fixé, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre 1, pour tout $\nu = s(0)$ fixé, il existe une unique section s de E au dessus de l'image de γ qui soit parallèle selon γ . On en est enfin arrivés à la définition du transport parallèle.

Définition 4 (transport parallèle).

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin lisse de M . Soit $\nu \in E_{\gamma(0)}$. Alors, le transport parallèle de ν selon γ est $s(1)$ où s est l'unique section parallèle selon γ telle que $s(0) = \nu$.

On notera $T_\gamma(\nu)$ le transport parallèle de ν selon γ .

Proposition 5. T_γ est un opérateur linéaire.

Démonstration. Cela découle directement de la linéarité de l'équation différentielle considérée et de l'unicité dans Cauchy-Lipschitz. \square

Aussi, maintenant qu'on a trouvé un moyen canonique de transporter de l'information sur la variété, on va essayer de quantifier la complexité induite par ce nouvel outil, soit à quel point notre nouvelle machinerie diffère de la translation simple dans le cas euclidien. On en vient donc assez naturellement à considérer l'ensemble des transformations induites sur l'espace tangent en un point par l'ensemble des transports parallèles par tous les lacets revenant en ce point. On aura donc un objet qui dépendra directement de la topologie de notre variété et qui pourra être représentatif de sa structure.

2.2.2 Définition de l'holonomie

Définition 6 (Groupe d'holonomie).

Le groupe d'holonomie H_x de la variété M au point $x \in M$ est l'ensemble des T_γ où $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est un chemin lisse de M tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.

Proposition 7. C'est un groupe, et même un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. L'inclusion dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vient directement de la linéarité, le chemin constant fournit l'élément neutre, la concaténation de chemins, la loi multiplicative et parcourir un chemin dans le sens inverse inverse la transformation. \square

Proposition 8 (Globalité du groupe d'holonomie).

La structure de H_x ne dépend pas de $x \in M$. Il existe donc pour la variété un groupe d'holonomie global, qu'on notera désormais H .

Remarque. L'holonomie dépend toutefois toujours de la connexion !

Démonstration. Tous les groupes d'holonomie sont conjugués par la transformation induite par le transport parallèle selon un chemin quelconque liant leurs points de référence. \square

2.2.3 Principe d'holonomie et premiers exemples

Exemple 1 (Cas euclidien).

En géométrie euclidienne, le transport parallèle est l'identité quel que soit le chemin, donc H est le groupe trivial.

Réciproquement, on verra que si le groupe d'holonomie est trivial, on peut définir une base locale qui se transporte à toute la variété et lui fournit une structure euclidienne.

On lit donc bien dans cet exemple que l'objet défini permet d'obtenir des informations sur la complexité de la structure de la variété. L'étendue de ces informations est résumée dans le résultat fondamental suivant.

Théorème 1 (Principe d'holonomie).

À chaque vecteur laissé invariant par le groupe d'holonomie correspond une section globale invariante sur la variété. Ou encore, à chaque section parallèle correspond en tout point un vecteur laissé invariant par le groupe d'holonomie.

Ce résultat permet de faire une liaison globale entre holonomie et structure de la variété. Par exemple, si $H \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, le groupe d'holonomie préserve une base orthogonale, qui se propage donc parallèlement sur toute la variété. Cela permet donc de définir une *métrique riemannienne* sur la variété, c'est à dire qu'on a défini un produit scalaire sur chaque fibre, qui se transporte de manière lisse grâce au transport parallèle.

Proposition 9. *Si $H \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors on sait munir M d'une structure Riemannienne.*

En outre, si $H \subset \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, alors le transport parallèle conserve en outre l'orientation de la base, d'où le résultat suivant.

Proposition 10. *Si $H \subset \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, alors on sait munir M d'une structure de variété riemannienne orientable.*

Plus l'holonomie est restreinte, plus on obtient donc une structure rigide sur la variété.

2.2.4 Holonomie homogène et structure riemannienne

Pour bien comprendre le cas riemannien, on va maintenant définir un sous groupe de Lie normal connexe du groupe d'holonomie et en déduire des structures de groupe d'holonomie maximal pour les cas $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On se restreindra alors dans toute la suite au cas des variétés riemanniennes.

Définition 11 (Groupe d'holonomie homogène ou restreinte).

On définit H_x^0 le groupe d'holonomie homogène d'une variété par les transformations induite par les lacets homotopes au chemin constant en x .

On parlera aussi d'holonomie restreinte.

Proposition 12. *C'est un sous-groupe distingué de H pour tout $x \in M$.*

Démonstration. Un chemin parcouru dans les deux sens est homotope au chemin constant. \square

Proposition 13. *Il existe alors un morphisme surjectif*

$$\pi_1(M, x) \rightarrow H/H_x^0$$

où $\pi_1(M, x)$ est le groupe fondamental de M en x .

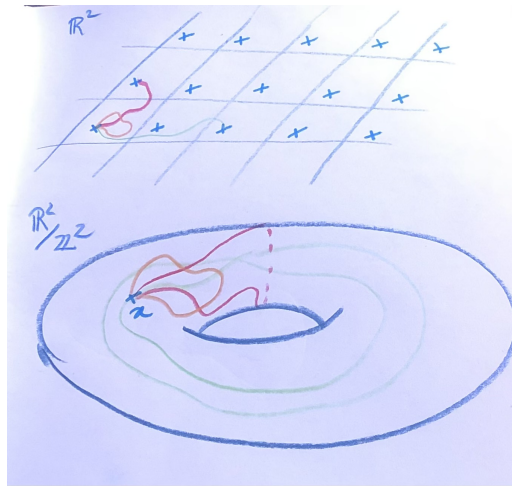


FIGURE 2 – Exemple du tore et de son revêtement universel, visualisation de l’holonomie restreinte

Exemple 2. On regarde le cas du tore en dimension 2 avec son revêtement universel \mathbb{R}^2 pour bien comprendre ce qui se passe.

On constate dans un premier temps que l’holonomie restreinte correspond à l’holonomie du revêtement universel. En effet, les lacets qui restent des lacets sur le revêtement universel sont ceux qui étaient homotopes au chemin constant.

On peut donc directement expliciter le morphisme.

Démonstration. À chaque élément du groupe fondamental, représenté par une copie de x sur le dessin, on peut associer naturellement un élément de H/H_0 obtenu par transport parallèle le long d’un chemin de la classe de chemins homotopes qui lie le point d’origine à sa copie correspondante sur le revêtement universel. \square

On lit donc une correspondance directe avec la topologie de la variété. On va directement appliquer ce résultat dans deux premiers exemples où l’holonomie n’est pas triviale.

Exemple 3 ($\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$).

Trouvons dans un premier temps l’holonomie de la sphère \mathbb{S}_2 .

Il s’agit donc de trouver les angles θ de $[0, 1]$ tels qu’une rotation de θ soit permise par déplacement parallèle sur la sphère. On va montrer qu’on peut en fait tous les obtenir et donc que le groupe d’holonomie de \mathbb{S}_2 est \mathbb{S}_1 , isomorphe à $\mathcal{SO}(2)$.

Il s’agit donc de trouver pour tout angle θ un lacet sur la sphère qui permette d’obtenir cette rotation. Or, on lit sur la figure 3 qu’avec le type de chemins représentés l’angle de rotation est directement proportionnel à la longueur l sur le dessin (ou à l’aire de la portion de sphère contenue dans le lacet, parcouru ici dans le sens trigonométrique comme indiqué par la flèche sur le dessin).

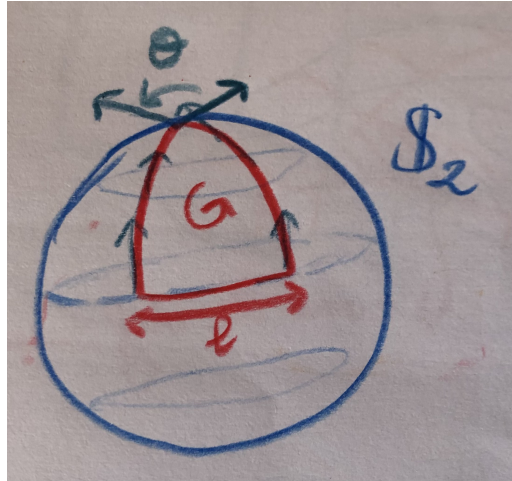


FIGURE 3 – Calcul de l’holonomie de S_2

Pour obtenir le résultat en dimensions supérieures, on raisonne par récurrence. En effet, le transport parallèle d’un vecteur selon un chemin appartenant à un plan orthogonal à ce vecteur ne le modifie pas. L’intersection d’une n -sphère avec un espace vectoriel de dimension k donnant — sauf cas très particuliers de tangence qu’on évite aisément — une k -sphère, on est capables de tourner les vecteurs un à un et obtenir toutes les rotations possibles. On peut donc rédiger une démonstration par récurrence grâce à la réduction des matrices de \mathcal{SO}_n .

Exemple 4 ($\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).

Comme on a un exemple précis pour $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ à l’aide de la sphère, on cherche à doubler la structure pour récupérer un exemple canonique pour $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

La propriété vue précédemment sur le groupe d’holonomie restreinte nous conduit naturellement à considérer \mathbb{RP}_n . En effet, son revêtement universel est S_n donc son holonomie restreinte, sous-groupe du groupe d’holonomie, est $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. En outre, \mathbb{RP}_n est une variété riemannienne non orientable. On sait donc d’avance qu’on a trouvé le bon candidat puisque son holonomie ne peut être incluse dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ mais est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Il ne nous reste plus qu’à exhiber précisément les chemins correspondants pour nous en convaincre. Le groupe fondamental étant constitué d’exactement deux éléments, on sait donc naturellement quels chemins considérer.

On remarque donc que les demi-grand cercles sont, des lacets permettant de renverser l’orientation des vecteurs. On a alors un groupe d’holonomie dont la structure est incluse dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et qui l’atteint effectivement. C’est bien l’exemple maximal qu’on souhaitait.

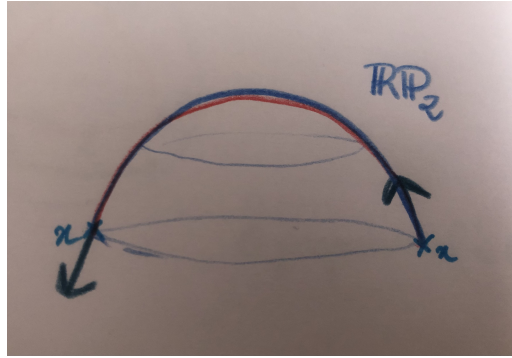


FIGURE 4 – Dessin d'un chemin permettant de renverser l'orientation d'un vecteur

2.3 Premiers théorèmes de décomposition

2.3.1 Réductibilité

Maintenant qu'on a compris les bases du calcul des groupes d'holonomie, on aimerait regarder l'holonomie de variétés moins simples. On va alors avoir besoin des résultats de deux théorèmes qui nous permettront de décomposer le problème en sous-problèmes plus simples et de limiter nos possibilités : ce sont les théorèmes de de Rham et Berger.

Tout d'abord, il faut se demander ce qu'on décompose. Le groupe d'holonomie peut en effet être vu comme un groupe agissant sur l'espace tangent. On peut alors voir ce couple comme une représentation.

Définition 14 (Variété irréductible).

On dira ici qu'une variété est irréductible si la représentation constituée par son espace tangent et son groupe d'holonomie l'est, c'est à dire si il n'y a pas de sous-espace stable de l'espace tangent qui soit laissé invariant par le groupe d'holonomie.

On sait donc maintenant par où dévisser la variété. C'est tout l'enjeu du théorème de de Rham.

2.3.2 Théorème de de Rham

Théorème 2 (de Rham).

Soit (M, g) une variété riemannienne complète et simplement connexe.

Alors, M est isométriquement équivalente au produit $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_k$ où M_0 (éventuellement réduit à un point) est muni d'une structure euclidienne et les $(M_i)_{i \geq 1}$ sont des variétés irréductibles. En outre, la décomposition est unique à l'ordre près.

Enfin, pour tout $p = (p_0, \dots, p_k) \in M$, si on note pour tout i , H_i le groupe d'holonomie de M_i en p_i pour les connexions induites, la groupe d'holonomie de M se décompose $H = H_0 \times \dots \times H_k$ et agit naturellement sur $T_p(M) = T_{p_0}(M_0) \oplus \dots \oplus T_{p_k}(M_k)$.

Démonstration. On ne présentera ici qu’une esquisse générale de la preuve, soit une structure globale et un aperçu des méthodes utilisées. Pour une démonstration complète, le lecteur pourra se référer à [2] ou à [11] IV.6.

Il s’agit donc de montrer que si en un point x de M il existe un sous-espace $T'_x(M)$ de l’espace tangent $T_x(M)$ invariant par H , M est isométrique au produit de deux sous-variétés dont le produit des groupes d’holonomie redonne H .

Dans un premier temps, on va construire ces sous-variétés.

Si M est réductible en x , notons donc $T'_x(M)$ un sous-espace de l’espace tangent $T_x(M)$ invariant par H . Alors, par transport parallèle, on obtient une distribution T' qui à tout $y \in M$ associe un sous-espace T'_y de $T_y(M)$. Cette distribution est bien définie — c’est-à-dire est indépendante du chemin choisi — car par construction ces espaces sont laissés invariants par le groupe d’holonomie, donc par transport parallèle le long de toute courbe fermée.

On remarque alors que cette distribution T' est *différentielle* (en définissant des bases locales) et *involutive* (si X et Y sont deux champs de vecteur de T' , $\nabla_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\gamma_t(Y_{x(t)}) - Y_y) \in T'_y$ où x est la courbe intégrale de X d’origine y et γ_t le transport parallèle entre $x(t)$ et y selon x).

Ensuite, on définit M' comme la variété intégrale maximale de T' à travers x .

On voit alors que M' est *complètement géodésique* (i.e. toute géodésique d’origine x_0 dans M' et de direction initiale dans $T_{x_0}(M') = T'(x_0)$ reste dans M') et *complète* (car les géodésiques dans M' sont des géodésiques dans M et on caractérise un espace complet par le fait que ses géodésiques soient définies sur \mathbb{R}).

Ensuite, grâce à l’hypothèse riemannienne, puisque le groupe d’holonomie est alors constitué de matrices orthogonales, on peut définir une distribution T'' qui se propage aussi par transport parallèle et qui reste en tout point un complémentaire à T' .

On peut maintenant regarder ce qui se passe à échelle locale. On montre alors qu’en tout point $y \in M$, en définissant M' et M'' les sous-variétés intégrales maximales de T' et T'' qui passent par y , il existe un voisinage V de y qui se décompose en $V' \times V''$ deux voisinages ouverts respectivement dans M' et M'' et tel que la métrique Riemannienne en V soit le produit direct de celles sur V' et V'' .

Pour ce faire, on passe par un système de coordonnées locales et on utilise l’orthogonalité de T' et T'' .

Ensuite, pour le généraliser à toute la structure et décomposer le groupe H , on utilise la simple connexité de la variété M .

D’abord, localement, on utilise l’étude précédente afin de définir des projections du groupe d’holonomie grâce au transport parallèle et on vérifie que H se décompose bien comme un produit direct sur tout élément issu de transport parallèle selon un lacet assez petit.

Puis, globalement, grâce à la simple connexité on décompose tout grand lacet en plus petits lacets sur lesquels on peut raisonner localement. On applique alors un lemme appelé lemme du lasso pour transporter la structure de point en point, comme illustré ci-dessous. La donnée du groupe d'holonomie étant une donnée ponctuelle et non locale et l'aller-retour sur un chemin par transport parallèle étant une transformation triviale, on étend bien la décomposition du groupe d'holonomie.

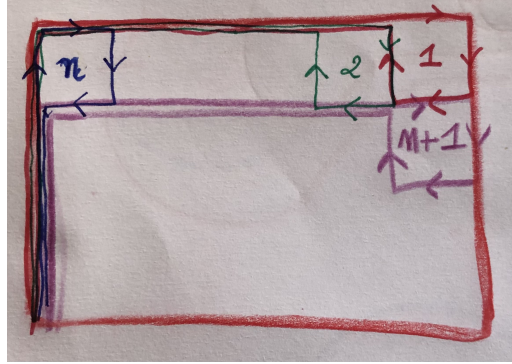


FIGURE 5 – Illustration du lemme du lasso : à la suite de toutes les petites transformations, on aura bien parcouru la grande boucle.

Ensuite, une fois le groupe décomposé, il reste à montrer l'unicité de la décomposition — qui provient directement de l'orthogonalité — et que M est globalement isométrique au produit direct de M' et M'' . Ce dernier point résulte encore de la simple connexité de la variété.

En effet, elle nous permet de définir deux projections p' et p'' sur M' et M'' respectivement, qui sont en outre telles que (p', p'') soit une isométrie grâce aux propriétés du transport parallèle. Les détails de cette construction sont exposés en détails aux pages 187 à 192 de [11]. \square

On est alors capables de décomposer les variétés simplement connexes en sous-variétés dont les groupes d'holonomie sont irréductibles. En appliquant ce théorème au revêtement universel des variétés, on peut donc avoir une idée générale de la structure de toute variété. Il nous manque alors la connaissance de ces dits blocs irréductibles. C'est justement le sujet du théorème de Berger, qui classe les groupes d'holonomie irréductibles et qu'on admettra ici.

2.3.3 Théorème de Berger

Théorème 3 (Berger).

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n qui ne soit pas localement symétrique.

Alors, son groupe d'holonomie restreinte (qui est donc le groupe d'holonomie dans le cas simplement connexe) est isomorphe à un des sous-groupes suivants de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}); \quad \mathcal{U}\left(\frac{n}{2}\right); \quad \mathcal{SU}\left(\frac{n}{2}\right); \quad \mathcal{Sp}\left(\frac{n}{4}\right); \quad \mathcal{Sp}(1) \cdot \mathcal{Sp}\left(\frac{n}{4}\right).$$

Avec en plus les cas $Spin(9)$ si $n = 16$, $Spin(7)$ si $n = 8$ et G_2 si $n = 7$.

On peut donc maintenant s'atteler à comprendre ce que signifie une restriction du groupe d'holonomie à chacun de ces groupes, ce que nous tenterons de présenter succinctement à l'aide de quelques exemples dans la partie suivante.

2.4 Exemples

Rappelons que grâce au principe d'holonomie, une restriction de l'holonomie correspond à une rigidification de la structure : on obtient une section lisse d'une structure de fibré plus ou moins complexe au dessus de la variété.

2.4.1 Variétés kähleriennes

Proposition 15. *Si le groupe d'holonomie d'une variété de dimension n est inclus dans $U(\frac{n}{2})$, alors cette variété admet une structure kählerienne.*

Une première remarque est qu'une variété admettant une structure Kählerienne est en particulier une structure complexe est donc effectivement toujours de dimension paire, ce qui est cohérent avec ce résultat. On notera ainsi dans la suite $m = \frac{n}{2}$.

Définition 16 (Rappels sur $U(m)$).

On note $U(m)$ l'intersection des groupes $O(2m)$ avec $GL_m(\mathbb{C})$ et $Sp(2m, \mathbb{R})$.

On a ici noté $GL_m(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $GL_{2m}(\mathbb{R})$ constitué des matrices qui sont issues de la projection d'une matrice complexe sur les matrices réelles (on sépare partie réelle et partie imaginaire soit en chaque point en remplaçant chaque valeur par un petit bloc, soit globalement à l'échelle de la matrice). Cela correspond aux matrices qui commutent avec la matrice correspondant à la multiplication par i décomposée selon la convention choisie.

Par ailleurs, l'intersection de deux de ces groupes suffit à restreindre la structure à $U(m)$.

Définition 17 (Rappels sur les structures de variétés kähleriennes).

Une variété kählerienne est une variété symplectique munie d'une structure semi-complexe intégrable et compatible avec la forme symplectique.

Rappelons qu'une forme symplectique est une 2-forme différentielle fermée et non dégénérée. Il s'agit en fait de compatibilité entre une structure riemannienne liée à une métrique g , une structure semi-complexe J et une forme symplectique ω . On aura $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$.

Démonstration. On ne développera pas ici tous les détails techniques, mais voici une description des éléments permettant de faire le lien entre ces deux structures.

Par exemple, on peut commencer par remarquer que le fait que le groupe d'holonomie de la variété riemannienne soit inclus dans $GL_n(\mathbb{C})$ nous fournit une

structure semi-complexe globale : grâce au principe d'holonomie, on obtient dans chacun des espaces tangents un vecteur qui correspondra à la composante complexe.

On regarde alors le tenseur de Nijenhuis :

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

D'après le théorème de Newlander-Nirenberg, ce tenseur est nul si et seulement si la structure quasi-complexe est liée à une structure complexe sans torsion.

Il reste donc à constater qu'on peut choisir une connexion qui rende cette structure parallèle et soit en même temps sans torsion afin d'avoir une compatibilité avec la structure riemannienne. En effet, rappelons que la *connexion de Levi-Civita* d'une variété riemannienne est l'unique connexion sans torsion qu'on peut définir sur cette variété. Elle est celle qui rend la métrique parallèle. On dira que c'est celle qui correspond à la métrique.

Or, l'inclusion du groupe d'holonomie dans $\mathcal{U}(m)$ permet justement ce choix et définit donc une variété de Kähler — la forme symplectique provenant directement de l'union de la métrique riemannienne et de la structure complexe. \square

Proposition 18 (Exemple maximal).

Le groupe d'holonomie de $\mathbb{C}\mathbb{P}_m$ est $\mathcal{U}(m)$.

On lit donc ici que $\mathbb{C}\mathbb{P}_m$ est en quelques sortes la variété kählerienne la plus générale possible.

Démonstration. On munit naturellement $\mathbb{C}\mathbb{P}_m$ d'une structure kählerienne en y projetant la métrique canonique de \mathbb{C}^{m+1} ou encore celle de \mathbb{S}_{2m} . On appelle la métrique obtenue la *métrique de Fubini-Study*.

Plus précisément, notons par exemple π la projection naturelle de $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{C}\mathbb{P}_m$ qui à (z_0, \dots, z_m) associe $[z_0, \dots, z_m]$ et u la métrique sur \mathbb{C}^{m+1} , soit $u(z_0, \dots, z_m) = |z_0|^2 + \dots + |z_m|^2$. Alors, la $(1, 1)$ -forme fermée $\alpha = dd^c(\log u)$ qui serait la projection naturelle n'est pas directement une forme de Kähler associée à une métrique kählerienne sur $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ parce qu'elle n'est pas positive, mais il existe une unique $(1, 1)$ -forme ω sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ telle que $\alpha = \pi^*(\omega)$. La métrique g sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ telle que la forme de Kähler associée soit ω est alors la métrique de Fubini-Study. Elle hérite donc de toutes les symétries des métriques canoniques de \mathbb{C}^{m+1} ou de la sphère.

Comme cette métrique se restreint facilement à l'intersection de $\mathbb{C}\mathbb{P}_m$ avec un hyperplan, cette intersection est isométrique et non pas seulement isomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}_{m-1}$, cela permet un raisonnement par récurrence, comme sur la sphère.

Pour l'initialisation, on remarque que $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$ est isométrique à la sphère \mathbb{S}_2 et que $\mathcal{U}(1)$ est justement \mathbb{S}_1 , donc c'est le cas de l'exemple 3 que nous avons déjà développé ici. \square

2.4.2 Variétés de Calabi-Yau

On s'intéresse maintenant aux variétés dont le groupe d'holonomie est inclus dans $SU(m)$.

Il existe plusieurs définitions non-équivalentes entre elles des variétés de Calabi-Yau dans la littérature. Voici celle que nous choisirons ici, en suivant le choix fait par D. Joyce dans [9].

Définition 19 (Variété de Calabi-Yau).

On appelle variété de Calabi Yau une variété de Kähler compacte (M, J, g) de dimension $m \geq 2$ dont le groupe d'holonomie est égal à $SU(m)$.

Étudions maintenant ses propriétés.

Identifions \mathbb{R}^{2m} avec \mathbb{C}^m de coordonnées complexes (z_1, \dots, z_m) et définissons une métrique g , une 2-forme réelle ω et une m -forme complexe θ sur \mathbb{C}^m par :

$$g = |dz_1|^2 + \dots + |dz_m|^2, \quad \omega = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \dots + dz_m \wedge d\bar{z}_m),$$

et $\theta = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$.

Définition 20 ($SU(m)$).

$SU(m)$ est alors le sous-groupe de $GL_{2m}(\mathbb{R})$ qui préserve g , ω et θ .

θ est en effet une forme volume holomorphe, soit le nouvel objet conservé par rapport au cas seulement kählerien.

D'après le principe d'holonomie, une variété d'holonomie $SU(m)$ admet naturellement des formes ω et θ invariante par la connexion de Levi-Civita. De telles formes g , ω et θ sont donc définies en tout point de M . Il y a alors en outre, comme précédemment, une unique structure complexe J faisant le lien entre g et ω .

Réciproquement, toute variété kählerienne admettant une forme volume holomorphe parallèle a son holonomie incluse dans $SU(m)$. Il est donc naturelle d'étudier le fibré canonique de la variété.

Définition 21 (fibré canonique).

On appelle fibré canonique de la variété et on note K_M le fibré en droite holomorphe $\Lambda^{m,0}(M)$. La forme θ est alors vue comme une section globale holomorphe jamais nulle de K_M .

Pour étudier de plus près les variétés d'holonomie $SU(m)$ et en tirer des propriétés afin d'en exhiber un exemple, il est alors important d'étudier les *classes de Chern* de la variété. Nous ne donnerons ici qu'un aperçu des résultats sans entrer dans les détails car une exposition de ces outils ne saurait être faite complètement dans ce rapport. Nous y penserons donc ici comme aux *coefficients du polynôme caractéristique de la courbure de la variété*, la courbure pouvant être atteinte directement par le carré de la connexion. En effet, la courbure sera à ce stade un élément fondamental de l'étude des groupes d'holonomie. On aura par exemple la propriété suivante.

Proposition 22 (Courbure de Ricci).

Si (M, J, g) est une variété kählérienne, alors son groupe d'holonomie restreinte est inclus dans $SU(m)$ si et seulement si elle est Ricci-plate, c'est à dire que la trace de son opérateur de courbure est nulle.

Démonstration. Puisque g est de Kähler, la connexion de Levi-Civita ∇ de g induit une connexion ∇^K sur K_M et le groupe d'holonomie de cette nouvelle connexion est alors inclus dans $U(1)$. Une action d'une matrice $A \in U(m)$ suite à un chemin sur M correspond à une multiplication par $\det(A)$ sur le chemin induit sur K_M .

On a alors $H_0(\nabla^K) = \det(H_0)$ où on note $H_0(\nabla^K)$ le groupe d'holonomie restreinte lié à ∇^K sur K_M , d'où $H_0 \subset SU(m)$ si et seulement si $H_0(\nabla^K) = \{1\}$.

Ensuite, on a que $H_0(\nabla^K) = \{1\}$ si et seulement si ∇^K est plat (c'est le cas euclidien) et on peut montrer par un calcul explicite que la courbure de ∇^K est exactement la courbure de Ricci de g . \square

Pour en revenir aux classes de Chern, celle qui nous intéressera particulièrement ici sera $c_1(M)$, la première classe de Chern, qui est une classe caractéristique de K_M . On dispose en effet du théorème de Yau qui nous permet de faire un lien direct entre la courbure de Ricci et la première classe de Chern.

Théorème 4 (Yau).

Les variétés complexes compactes admettant une métrique kählérienne à courbure de Ricci nulle sont exactement les variétés compactes de type kählérien dont la première classe de Chern est nulle.

Comme on en arrive à toucher à des structure de moins en moins concrètes, on essaie maintenant d'interpréter l'holonomie purement en termes de géométrie complexe et de laisser un peu de côté les références à la métrique, afin de pouvoir exhiber plus simplement un exemple concret de variété de Calabi-Yau. Ceci est permis par le théorème précédent (admis dans le cadre du stage) couplé au principe de Bochner.

Théorème 5 (principe de Bochner).

Soit M une variété kählérienne compacte dont la courbure de Ricci est nulle. Alors tout champ de tenseurs holomorphes sur M est parallèle.

Démonstration. Par le calcul, on obtient que si X est un champ de tenseurs,

$$\Delta(\|X\|^2) = \|\nabla X\|^2$$

. Le laplacien est alors positif donc nul donc $\nabla X = 0$. \square

De ces deux théorèmes ainsi que grâce au théorème de Beauville, qui est un théorème de décomposition pour les variétés compactes qui affine celui de Berger et au théorème de Cheeger-Gromoll qui est un théorème de décomposition des variétés à courbures de Ricci positive, on déduit le résultat suivant.

Proposition 23 (Caractérisation des variétés de Calabi-Yau).

Soit M une variété compacte kählérienne de dimension complexe m . La variété M est une variété de Calabi-Yau (donc admet une métrique kählérienne dont le

groupe d'holonomie est $SU(m)$) si et seulement si son fibré canonique K_M est trivial et on a $H^0(M', \Omega_{M'}^p) = 0$ pour $0 < p < m$ et pour tout revêtement étale fini M' de M où on note Ω_X le faisceau des formes holomorphes sur X , $\Omega_X^p = \Lambda^p \Omega_X$ et H^0 pour la cohomologie.

Exemple 5 (Exemple maximal).

Toute hypersurface lisse de degré $(m + 1)$ dans $\mathbb{C}P^m$, donc une courbe définie par un polynôme homogène de degré $(m + 1)$ sur $\mathbb{C}P^m$ est une variété de Calabi-Yau.

Pour le montrer, il s'agit donc de calculer les nombres de hodge de cette surface, ce qu'on fait grâce à l'écriture de suite exactes de faisceaux et en jouant avec la définition de la caractéristique d'Euler. Une explication détaillée et le calcul d'un exemple est justement l'objet de [4].

2.5 Bilan des thèmes abordés durant le stage

Durant ce stage, j'ai eu l'occasion d'explorer beaucoup de thèmes mathématiques afin de comprendre les résultats exposés plus haut ainsi que leurs démonstrations. En voici un court aperçu.

J'ai d'abord évidemment appris énormément de bases de géométrie riemannienne et complexe dont je n'avais qu'une vague idée et que je ne savais pas bien manipuler. J'ai appris à travailler avec des géodésiques, connaître les différents types de courbure d'une variété et à mener à bien des calculs de géométrie différentielle, avec par exemple la formule de Weizenblock. J'ai découvert ce qu'était un cut locus et travaillé avec des champs de Jacobi. J'ai ensuite découvert les classes de Chern, ainsi que le théorème d'Hirzenbruck-Riemann-Roch et ai appris à calculer des valeurs de la caractéristique d'Euler de variétés grâce aux caractères de Chern et à la classe de Todd. J'ai également, dans le cadre de la lecture de la démonstration des théorèmes de Beauville et de Cheeger-Gromoll évoqués ci-dessus découvert le théorème de Yau, les théorèmes de Bieberbach sur les groupes cristallographiques et les fonctions de Busemann. Les dernières semaines, j'ai commencé à lire un peu sur les conditions d'Einstein et les fibrés vectoriels hermitiens d'Einstein (Einstein-Hermitian vector bundles) sans toutefois beaucoup approfondir ces questions.

J'ai donc appris énormément de choses et suis très reconnaissante à Simone Diverio pour son temps, sa patience, son enthousiasme et sa bonne humeur quotidienne, qui ont grandement contribué à faire de ce stage un véritable moment d'épanouissement mathématique.

Références

- [1] Beauville A. (1986) *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle.*
- [2] de Rham G. (1952) *Sur la réductibilité d'un espace de Riemann.*
- [3] Cheeger G., Gromoll D. (1970), *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature.*
- [4] Kothari C.- *The hodge numbers of projective hypersurfaces.*
- [5] Clarke A., Santoro B., (2012), *Holonomy groups in Riemannian geometry/*
- [6] Demailly JP. (2012), *Complex analytic and differential geometry.*
- [7] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., (1980), *Riemannian Geometry.*
- [8] Huybrechts D., (2000), *Complex Geometry*
- [9] Joyce D., (2000), *Compact manifolds with special holonomy.*
- [10] Kobayashi S., (1987), *Differential geometry of complex vector bundles*
- [11] Kobayashi S., Nomizu K, (1963), *Fondations of Differential Geometry, Volume 1*
- [12] Kobayashi S., Nomizu K., (1969), *Fondations of Differential Geometry, Volume 2*
- [13] Petersen P., (2000), *Riemannian Geometry*
- [14] Sakai T., (1992), *Riemannian Geometry*
- [15] Salamon S, (1989), *Riemannian geometry and holonomy groups*
- [16] Hatcher A., (2000), *Algebraic Geometry*
- [17] Stroh B., *Géométrie complexe et théorie de Hodge*
- [18] Diverio S, (2016-2018), fiches d'exercices diverses