

Stage M1

Marthe GUILLERMIT

Mai 2024

Le diamètre des surfaces hyperboliques

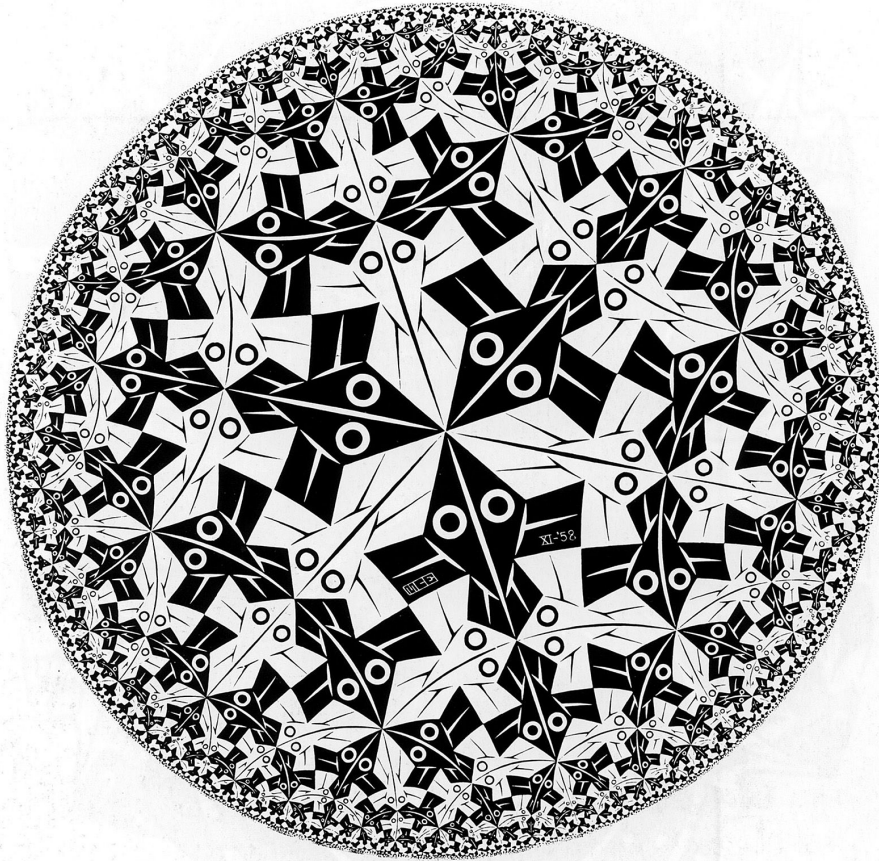


FIGURE 1 – M.C. Escher - Circle Limit I [3]

Introduction

J'ai effectué mon stage de M1 du 27 janvier au 27 mai à l'Indian Institute of Science à Bangalore avec Pr. Subhojoy Gupta. J'ai étudié la géométrie des surfaces hyperboliques, et je me suis particulièrement intéressée à l'étude du diamètre de celles-ci. J'ai notamment travaillé sur cette question avec Ajay Kumar Nair, Pabitra Barman and Pranab Sarkar, doctorants de mon tuteur.

Le tore est construit comme le quotient du plan complexe \mathbb{C} par la translation par 1 et par un vecteur de partie imaginaire non nulle. On souhaite trouver une représentation analogue pour les surfaces de genre supérieur. La géométrie euclidienne nous limite puisque les seules isométries, ie bijections qui conserve les longueurs, y sont les translations et les rotations. Or, il existe peu de sous groupes discrets de rotations ou de translations (qui permettent d'obtenir au quotient un espace séparé). Un groupe discret de rotations ne peut être généré que par un seul élément d'angle de rotation rationnel. Un groupe discret de translations admet au plus deux générateurs. En passant au quotient, on a alors ou bien l'anneau doublement infini ou bien le tore.

Pour enrichir les possibilités, il nous faut donc quitter la géométrie euclidienne. Nos isométries euclidiennes appartiennent en fait à un groupe plus large : les biholomorphismes de $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ dans $\hat{\mathbb{C}}$. Il s'agit de celles qui ont ∞ pour point fixe. Or, les surfaces de Riemann de genre $g \geq 2$ n'ont pas \mathbb{C} mais \mathbb{D} pour recouvrement universel. Si on se restreint maintenant aux bijections conformes qui conservent le disque \mathbb{D} ou le demi-plan \mathbb{H} , on peut définir la métrique hyperbolique comme celle qui est compatible avec ce groupe d'isométries. Comme nos isométries sont holomorphes, elles conservent les angles, et la définition des angles euclidiens et hyperboliques est identique. Les sous-groupes discrets d'isométries de \mathbb{H} sont appelés groupes de Fuchs et nous donnent une construction algébrique des surfaces de genre $g \geq 2$.

L'ensemble des surfaces de genre $g \geq 2$ constitue lui-même une variété \mathcal{M}_g de dimension réelle $6g - 6$ (voir section 2). On peut définir des fonctions continues de \mathcal{M}_g dans \mathbb{R} comme la systole, définie comme la longueur de la plus courte géodésique fermée, ou le diamètre. Ces fonctions nous éclairent sur la topologie de \mathcal{M}_g : comme il existe des surfaces de genre g de diamètre arbitrairement grand (voir section 3), on sait que la variété \mathcal{M}_g n'est pas compacte. Toutefois le diamètre admet un minimum (voir section 5), ce qui nous permet de construire une suite exhaustive de compacts pour \mathcal{M}_g .

Table des matières

1	Notions de géométrie hyperbolique	3
2	La décomposition en pantalons	6
3	Le lemme du col	8
4	Le diamètre minimum d'une surface de genre donné	12
5	Les surfaces extrémales	16

1 Notions de géométrie hyperbolique

Nous nous référons en général dans cette section à l'ouvrage de John Hubbard [6]. Nous nous concentrons en général sur les surfaces compactes sans bord.

Proposition 1. *L'ensemble des biholomorphismes du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ est*

$$\text{Isom}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ces isométries conservent la métrique hyperbolique $\frac{|dz|}{\Im(z)}$.

On a ainsi un isomorphisme de groupe entre $\text{Isom}(\mathbb{H})$ et $PSL_2(\mathbb{R})$, qui nous permet également de définir l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{H} .

Les géodésiques sont des portions soit de droites euclidiennes soit de demi-cercles euclidiens coupant perpendiculairement l'axe réel.

Définition 2. *Soit $\gamma : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ un élément de $\text{Isom}(\mathbb{H})$. On dit que :*

- 1. γ est elliptique si $|a + d| < 2$ ie γ a un unique point fixe dans \mathbb{H} .*
- 2. γ est parabolique si $|a + d| = 2$ ie γ a un unique point fixe dans $\mathbb{R} \cup \infty$.*
- 3. γ est hyperbolique si $|a + d| > 2$ ie γ a deux points fixes dans $\mathbb{R} \cup \infty$.*

Proposition 3. *Donnons quelques propriétés et définitions autour des transformations hyperboliques :*

- 1. $z \mapsto rz$ avec $r \in \mathbb{R}$ est une transformation hyperbolique admettant 0 et ∞ pour points fixes.*
- 2. Toute transformation hyperbolique est conjuguée dans $\text{Isom}(\mathbb{H})$ à une transformation de la forme $z \mapsto rz$.*
- 3. Si $r > 1$, 0 est dit répulsif et ∞ est dit attractif.*
- 4. La géodésique ayant pour extrémités les points fixes est appelé axe de la transformation.*

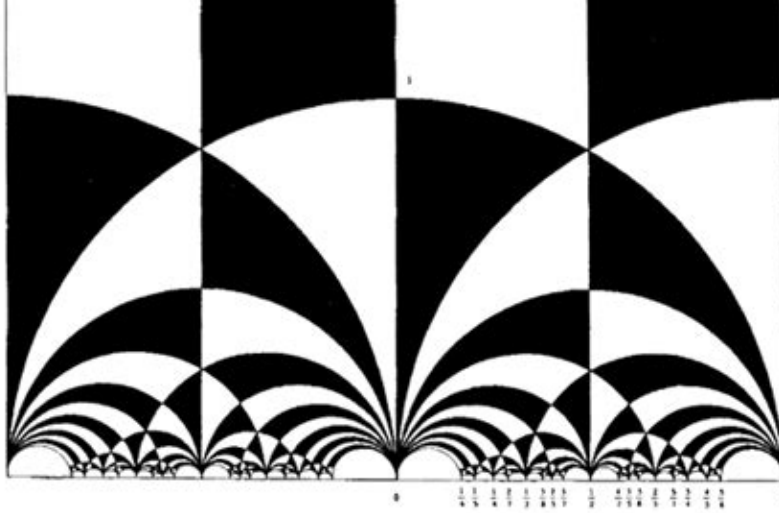


FIGURE 2 – Le pavage de Dedekind

Ici, tous les triangles ont la même taille dans la métrique hyperbolique du demi-plan. L'ensemble des isométries qui conservent ce pavage est $PGL_2(\mathbb{Z})$, aussi appelé groupe modulaire. Il est engendré par les réflexions dans les côtés du triangle de sommets $(i; e^{i\frac{\pi}{3}}; +\infty)$

Théorème 4. Soit X une surface de genre $g \geq 2$. Il existe $\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$ sous-groupe discret tel que

$$X \cong \mathbb{H}/\Gamma.$$

Introduisons maintenant quelques idées plus géométriques.

Définition 5. Le domaine fondamental d'un groupe de Fuchs $\Gamma \in PSL_2(\mathbb{R})$ est un ouvert $U \in \mathbb{H}$ qui vérifie :

1. $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma(U) \cap U = \emptyset$
2. $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{\gamma(U)} = \mathbb{H}$

Ainsi, si U est un domaine fondamental, on a $\pi|_U : U \mapsto \mathbb{H}/\Gamma$ est injective et $\pi|_{\bar{U}} : \bar{U} \mapsto \mathbb{H}/\Gamma$ est surjective.

Exemple 6. Le triangle $(i; e^{i\frac{\pi}{3}}; +\infty)$ est un domaine fondamental du groupe modulaire $PGL_2(\mathbb{Z})$. Si on se restreint aux isométries qui conservent l'orientation, on obtient $PSL_2(\mathbb{Z})$ dont le domaine fondamental correspond à l'union de deux domaines fondamentaux, un triangle noir et un triangle blanc sur la figure 2 de $PGL_2(\mathbb{Z})$.

Définition 7. Soit $X \cong \mathbb{H}/\Gamma$ une surface compacte sans bord, π le quotient et $p \in \mathbb{H}$. On définit comme suit la cellule de Dirichlet-Voronoi autour du point p ,

qu'on note $\mathcal{D}_{DV}(p)$:

$$\mathcal{D}_{DV}(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid \forall \gamma \in \Gamma, d(z; p) < d(z; \gamma(p))\}.$$

Proposition 8. $\mathcal{D}_{DV}(p)$ est un domaine fondamental.

Démonstration. Remarquons d'abord que :

$$\forall \gamma_0 \in \Gamma, \gamma_0(\mathcal{D}_{DV}(p)) = \mathcal{D}_{DV}(\gamma_0(p)).$$

En effet :

$$\begin{aligned} z \in \gamma_0(\mathcal{D}_{DV}(p)) &\iff \forall \gamma \in \Gamma, d(\gamma_0^{-1}z; p) < d(\gamma_0^{-1}z; \gamma(p)) \\ &\iff \forall \gamma \in \Gamma, d(z; \gamma_0(p)) < d(z; \gamma_0(\gamma(p))) \\ &\iff \forall \zeta \in \Gamma, d(z; \gamma_0(p)) < d(z; \zeta(\gamma_0(p))) \\ &\iff z \in \mathcal{D}_{DV}(\gamma_0(p)) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{\gamma(U)} = \mathbb{H}$: Comme X est compacte et Γ discret, pour tout $z \in \mathbb{H}$, $d(\pi(z); \pi(p)) = \min_{\gamma \in \Gamma} d(z; \gamma(p)) < \infty$ et ce minimum est atteint. Soit $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $d(\pi(z); \pi(p)) = d(z; \gamma_0(p))$, on a $\forall \gamma \in \Gamma, d(z; \gamma_0(p)) \leq d(z; \gamma(\gamma_0(p)))$ donc $z \in \overline{\mathcal{D}_{DV}(\gamma_0(p))}$. Ainsi

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{\gamma(\mathcal{D}_{DV}(p))} = \mathbb{H}.$$

Montrons enfin que $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma(\mathcal{D}_{DV}(p)) \cap \mathcal{D}_{DV}(p) = \emptyset$. Supposons que $z \in \gamma(\mathcal{D}_{DV}(p)) \cap \mathcal{D}_{DV}(p) = \mathcal{D}_{DV}(\gamma(p)) \cap \mathcal{D}_{DV}(p)$. Nous aurions alors :

$$\begin{cases} d(z; p) < d(z; \gamma(p)) \\ d(z; p) > d(z; \gamma(p)). \end{cases}$$

$\mathcal{D}_{DV}(p)$ est donc bien un domaine fondamental pour Γ . □

Définition 9. Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{H}$ un polygone convexe tel que

1. Pour tout compact K , $K \cap \mathcal{P}$ contient un nombre fini de côté du polygone.
2. Il existe une partition des côtés du polygone $(s_i; s'_i)_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$, il existe $g_i \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ tel que $s'_i = g_i(s_i)$ et $\mathcal{P} \cap g_i(\mathcal{P}) = s_i$.
3. Pour tout $z \in \mathcal{P}$,

$$\#\{\mathcal{P} \cap g_i(z)_{i \in I}\} < \infty$$

On appelle la donnée $(\mathcal{P}; g_{i \in I})$ un polygone apparié.

On définit la relation d'équivalence $z \sim g_i(z)$ si $z, g_i(z) \in \mathcal{P}$. Soit $X = \mathcal{P}/$ et V_x la classe d'équivalence d'un point x . Z est l'image dans X des sommets de \mathcal{P} . Si x est un sommet du polygone, on note $0 < \alpha_x(\mathcal{P}) < \pi$ l'angle en x du polygone \mathcal{P} .

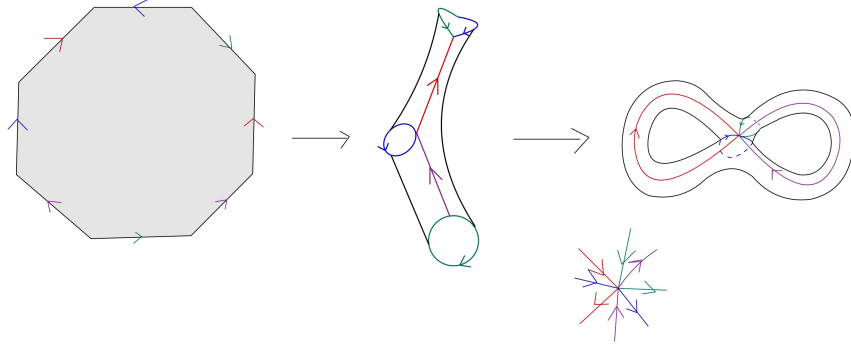


FIGURE 3

Théorème 10 (Théorème du polygone de Poincaré). 1. Soit $(\mathcal{P}; g_{i \in I})$ un polygone apparié. Si X est complet pour la métrique induite par le quotient, et si pour tout $z \in Z$, il existe un entier $n_z \geq 1$ tel que

$$\sum_{x \in V_z} \alpha_x(P) = \frac{2\pi}{n_z}$$

alors le sous-groupe $\Gamma := \langle g_1, g_2, \dots \rangle \subset \text{Aut}(\mathbb{H})$ généré par les $\{g_i\}_{i \in I}$ est discret, et \mathcal{P} est un domaine fondamental pour Γ .

2. Si w_z est un mot dans les g_i, g_i^{-1} représentant un lacet autour de z ,

$$\langle g_{i \in I} \mid w_z^{n_z} \text{ } z \in Z \rangle$$

est une représentation de Γ .

2 La décomposition en pantalons

En parallèle de la construction algébrique des surfaces comme quotient de \mathbb{H} par un groupe de Fuchs, on peut adopter une construction plus topologique comme collage de surfaces élémentaires que sont les "pantalons".

Définition 11. Un pantalon est une surface à bord dont le bord comprend trois composantes connexes qui sont soit des géodésiques soit un point à l'infini.

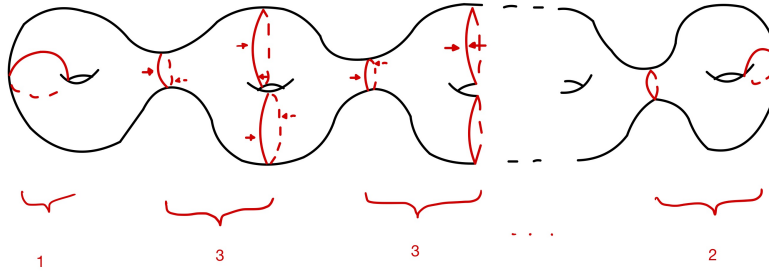


FIGURE 4 – Décomposition en pantalon d’une surface de genre g

À chacun de ces lacets géodésiques peut être associé un élément hyperbolique dans Γ le groupe de Fuchs de la surface. Le tiré en arrière du lacet donne une fois prolongé l’axe de cette transformation tandis que la longueur du lacet nous donne la longueur de déplacement le long de l’axe.

Théorème 12. *Soit X une surface hyperbolique compacte munie de sa métrique hyperbolique. Alors il existe une famille maximale de géodésiques \mathcal{F} qui ne s’intersectent pas telle que si P est une composante connexe de $X \setminus \mathcal{F}$, \bar{P} est un pantalon.*

Ce théorème s’appuie sur une propriété de la géométrie des surfaces hyperboliques.

Proposition 13. *Sur une surface hyperbolique toute classe d’homotopie admet un unique représentant géodésique.*

Cette propriété est due à la convexité de la fonction distance hyperbolique. Dans le cas des pantalons, elle implique que les trois composantes du bord sont les seules géodésiques fermées simples de la surface. Pour cette raison, le pantalon apparaît comme la brique élémentaire pour construire des surfaces hyperboliques : on ne peut pas le découper en plus petit morceau le long de lacets géodésiques.

Une surface de genre g se décompose en $2g - 2$ pantalons, et inversement, on peut construire une surface de genre g en recollant des pantalons le long de leur bord géodésique de même longueur.

Proposition 14. *Un pantalon est déterminé par la longueur de ses bords.*

Démonstration. Un pantalon est recouvert par deux hexagones symétriques à angles droits. Or, en géométrie hyperbolique, un hexagone à angles droits est déterminé par la longueur de trois de ses bords. \square

L'illustration de la figure 4 justifie ainsi le fait que \mathcal{M}_g soit une surface de dimension $3g - 3$. En effet, pour décomposer la surface en pièce homéomorphe à des pantalons, nous devons découper le long de $3g - 3$ lacets : 3 lacets par trou, sauf le premier et le dernier trou. Les pantalons hyperbolique sont déterminés par la longueur de leurs bords. En donnant la longueur des $3g - 3$ lacets et la "torsion" du recollement entre deux jambes de pantalons (le décalage entre les flèches rouges sur la figure), on détermine donc uniquement une surface de genre g .

3 Le lemme du col

Le lemme du col est un ingrédient essentiel pour comprendre pourquoi on peut construire des surfaces de diamètre arbitrairement grand.

Définition 15. *Soit X une surface hyperbolique et $C \in X$ un lacet géodésique simple. Un demi-col est une région A isomorphe (ie biholomorphe) à un anneau semi-ouvert $A \cong \{1 \leq |z| < R\}$ où l'isomorphisme envoie C sur \mathbb{S}^1 . Un col est l'union de deux de ces régions A_1 et A_2 telles que $A_1 \cap A_2 = C$.*

Exemple 16. *Soit $X = \mathbb{H} / \langle g_l \rangle$ où $g_l : z \mapsto e^l z$ et $\pi : \mathbb{H} \mapsto X$ le quotient. La région $A = \pi(z = re^{i\theta} \mid \psi < \theta < \pi - \psi)$ avec ψ tel que $\tan(\psi) = k/l$ est un col autour de C_l d'aire $2k$.*

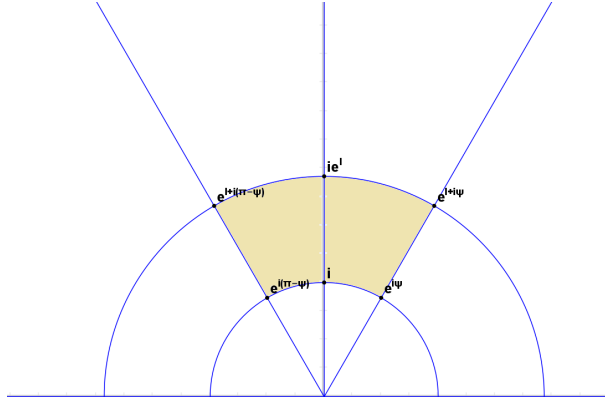


FIGURE 5

La région délimitée par les droites euclidiennes d'angle ψ et $\pi - \psi$ et les arcs de cercle de rayon 1 et de rayon e^l est un domaine fondamental pour l'action

de g_l sur le secteur d'angle ψ . On calcule l'aire de cette région :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_A \frac{1}{y^2} dx dy \\
&= \int_1^{e^l} \int_\psi^{\pi-\psi} \frac{1}{r \sin(\theta)^2} d\theta dr \\
&= 2 \tan(\psi) \ln e^l \\
&= 2k
\end{aligned}$$

Théorème 17. Soit X une surface de Riemann pouvant être représentée comme le quotient du demi-plan par un groupe de Fuchs et soit $l > 0$. Alors toutes les composantes du bord et toutes les géodésiques fermées simples de longueur inférieure à l admettent un col d'aire k autour d'elles, où $k = l/2 \sinh(l/2)$ pour les composantes du bord et $k = l/\sinh l/2$ pour les géodésiques simples.

Démonstration. Nous suivons ici la preuve de Halpern [5].

On note Γ le groupe de Fuchs associé à X et $\pi : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}/\Gamma$. D'abord, si on découpe la surface le long des géodésiques fermées, la métrique ne change pas. On peut donc se concentrer sur le cas des bords géodésiques. Admettons que X à un bord géodésique C_l de longueur l , ie il existe $g_l \in \Gamma$ élément hyperbolique de longueur d'axe l . On suppose que l'axe imaginaire pur est l'axe de g_l .

Toute transformation hyperbolique $\gamma \in \Gamma$ d'axe distinct de g_l envoie le second quadrant sur un demi cercle à l'intérieur du premier quadrant. En effet, la simplicité de C_l implique que $\{\Re(z) = 0\} \cap \gamma(\{\Re(z) = 0\}) = \emptyset$. De plus, l'axe de γ n'intersecte pas non plus l'axe imaginaire pur donc les extrémités attractive et répulsive appartiennent toutes les deux au demi-axe \mathbb{R}_+^* et $\gamma(\infty) < \gamma(0)$.

Soit $A = \{z = re^{i\theta} \mid \psi < \theta < \pi/2\}$, avec $0 < \psi < \pi/2$ tel que $\tan(\psi) = l/k$. $\pi(A)$ est un col d'aire k autour de C_l si et seulement si pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $\gamma = g_l^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $\gamma(A) \cap A = \emptyset$.

Prouvons d'abord cette équivalence. Si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \neq g_l^n$ et $\gamma(A) \cap A \neq \emptyset$, on est dans le cas ci dessous :

On a représenté les demi cols. Alors $A \cup \gamma(A)$ est une région connexe et il existe un chemin i à $\gamma(i)$. En passant au quotient, on obtient un élément du groupe fondamental de $\pi(A)$ différent des c_l^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci contredit le fait que $\pi(A)$ soit isomorphe à un anneau.

Inversement, si pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $\gamma = g_l^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $\gamma(A) \cap A = \emptyset$, alors tout tiré en arrière d'un lacet basé en $z \in A$ relie z à un $g_l^n(z)$. A/Γ a donc bien \mathbb{Z} pour groupe fondamental.

Montrons maintenant que si $\gamma \neq g_l^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $\gamma(A) \cap A = \emptyset$. Soit $\gamma : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Alors $\gamma(\infty) = a/c$ et $\gamma(0) = b/d$. L'axe imaginaire pur est

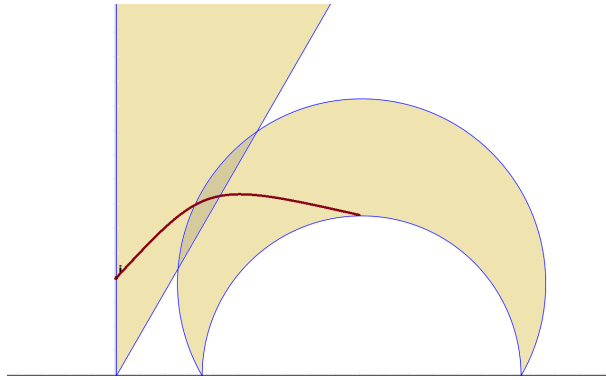
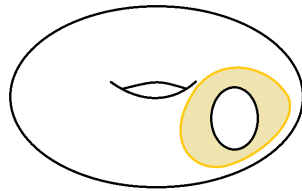
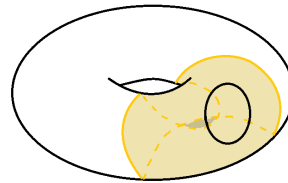


FIGURE 6



(a) $A \cap \gamma(A) = \emptyset$



(b) $A \cap \gamma(A) \neq \emptyset$

donc envoyé sur le demi cercle coupant l'axe des abscisses perpendiculairement en $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$. Le bord de A , ie $\{re^{i\psi} \mid r \in \mathbb{R}\}$, s'envoie sur l'arc de cercle qui coupe l'axe des abscisses en $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ et forme avec $\gamma(A)$ un angle qui vaut ψ (voir 8).

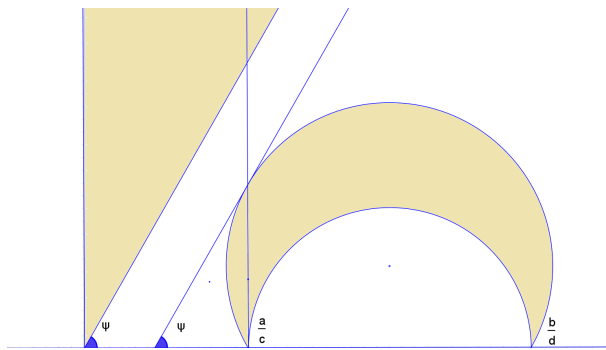


FIGURE 8

Avec un peu de trigonométrie, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma(A) \cap A = \emptyset &\iff \tan \psi \times \frac{a}{c} > \tan(\pi/2 - \psi) \times -\frac{1}{cd} \\ &\iff \frac{\tan \psi}{a/c} > -\frac{1}{cd \tan \psi} \\ &\iff -ad < k^2/l^2.\end{aligned}$$

Il nous reste à prouver que cette inégalité est vérifiée lorsque $k = l/(\sinh l/2)$. On procède par l'absurde, en montrant que le contraire contredit la discrétion de Γ . On considère la suite d'éléments de Γ $\gamma_n = \gamma_{n-1}g_l\gamma_{n-1}^{-1}$, avec $\gamma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$. Comme $\gamma_n \neq g_l$, γ_n envoie le second quadrant sur une région à l'intérieur du premier et on a $0 < \frac{a_n}{c_n} < \frac{b_n}{d_n}$. De plus, $a_n d_n - b_n c_n = 1$ donc $a_n d_n < 0$ et $b_n c_n < 0$. Ainsi si on suppose $|b_1 c_1| = -b_1 c_1 < -bc = |bc|$, on a $-a_1 d_1 < -ad$ et comme pour $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{b_{n+1} c_{n+1}}{b_n c_n} \right| = \left| a_n d_n (e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})^2 \right|$, on obtient par récurrence

$$\left| \frac{b_{n+2} c_{n+2}}{b_{n+1} c_{n+1}} \right| < \left| \frac{b_{n+1} c_{n+1}}{b_n c_n} \right| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a donc

$$\left| \frac{b_n c_n}{bc} \right| < \left| \frac{b_1 c_1}{bc} \right|^n$$

donc $|b_n c_n| \rightarrow 0$. Cela contredit le fait que Γ soit un groupe discret. On en déduit que $|b_1 c_1| = -b_1 c_1 = adbc(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})^2 > |bc| = -bc$ et donc $-ad \geq (e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})^{-2} = k^2/l^2$. \square

Corollaire 18.

$$\sup_{X \in \mathcal{M}_g} \text{diam}(X) = \infty$$

où \mathcal{M}_g est l'ensemble des surfaces compactes connexes sans bord de genre g avec $g \geq 2$.

Démonstration. On construit une surface de genre g contenant un lacet C de longueur $\epsilon < 1$, ce qui est possible en recollant des pantalons comme dans la section 2.

Par le lemme du col 17, on sait que le lacet admet un col A d'aire $k = \frac{1}{\sinh(1/2)}$. On définit sur A le système de coordonnées suivant : si $\eta : [0; 1] \mapsto X$ paramétrise le lacet C , pour tout $z \in A$, il existe un unique $t \in [0; 1]$ tel que $d(z; C) = d(z; \eta(t)) = \rho$. On note alors $(t; \rho)$ les coordonnées de z . Ces coordonnées sont appelées coordonnées de Fermi et illustrées sur la figure 9. La métrique hyperbolique devient dans ces coordonnées : $dz^2 = dt^2 + \epsilon^2 \cosh^2 \rho d\rho$. On note $L(\epsilon)$ la largeur d'un col d'aire k autour d'un lacet de longueur ϵ . On a alors :

$$\begin{aligned}k &= \int_0^1 \int_{-L(\epsilon)}^{L(\epsilon)} \epsilon \cosh \rho d\rho dt \\ &= 2\epsilon \sinh L(\epsilon)\end{aligned}\tag{1}$$

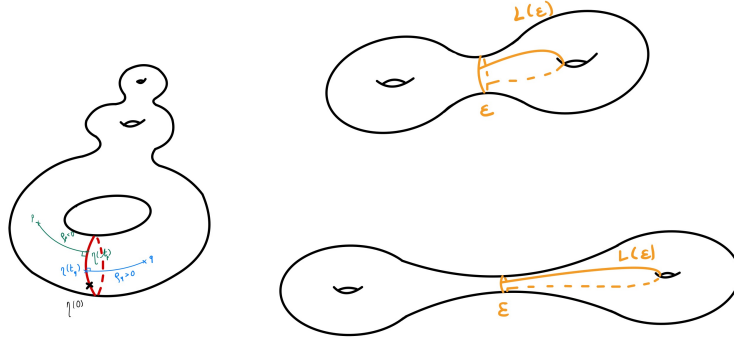


FIGURE 9

On déduit du comportement de la fonction \sinh que $L : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction strictement décroissante avec $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(\epsilon) = +\infty$.

Si on prend $p \in C$ sur le lacet et q sur la frontière du col, on a donc $d(p; q) = L(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty$, comme illustré sur la figure 9. \square

4 Le diamètre minimum d'une surface de genre donné

En revanche, le diamètre d'une surface de genre donné admet un minimum.

Proposition 19. *Pour tout $g \geq 2$, la fonction diamètre $\text{diam} : \mathcal{M}_g \mapsto \mathbb{R}$ admet un minimum.*

Démonstration. On considère une suite de surfaces de diamètres décroissants. On choisit un système de coordonnées comme introduites dans la section 2. Le diamètre maximum donne une borne supérieure pour la longueur des lacets, et le lemme du col implique que la longueur des lacets admet également une borne inférieure. La suite de coordonnées appartient donc à un compact et admet une valeur d'adhérence, qui définit une surface. \square

On ne peut donc pas écraser tant qu'on veut une surface de genre $g \geq 2$, contrairement à un tore ou une boule. Un autre angle pour comprendre cette

propriété est de s'intéresser à l'aire des surfaces. Cette approche nous permet de calculer une borne inférieure pour le diamètre.

Proposition 20. *Soit X une surface de genre $g \geq 2$ de diamètre diam_X . On a :*

$$\text{diam}_X > \text{arccosh}(4g - 3).$$

Démonstration. Une surface X de genre $g \geq 2$ est recouverte par un $4g$ -gône hyperbolique dont tous les sommets sont identifiés. Or l'aire d'un n -gône hyperbolique est déterminée par son nombre de côtés et ses angles intérieurs, notés $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$, via la formule :

$$\mathcal{A}_n = (n - 2)\pi - \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$$

Ici tous les sommets du polygône sont identifiés donc $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = 2\pi$. On obtient alors :

$$\mathcal{A}(X_g) = 4(g - 1)\pi.$$

Maintenant si $p \in X$ réalise le diamètre diam_X , le cercle hyperbolique de centre p et de rayon diam_X recouvre la surface. Or, l'aire d'un cercle hyperbolique de rayon R vaut $\pi(\cosh R - 1)$. On a donc

$$\pi(\cosh(\text{diam}_X) - 1) \geq 4(g - 1)\pi$$

et ainsi

$$\text{diam}_X > \text{arccosh}(4g - 3).$$

□

On peut améliorer cette borne, mais la borne optimale n'est pas aujourd'hui connue. La meilleure borne connue à ce jour est due à C. Bavard [1] :

Proposition 21 (Bavard, 1996). *Pour X surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, on a :*

$$\cosh \text{diam}_X \geq \frac{1}{\sqrt{3} \tan \beta_g}$$

avec diam_X le diamètre de X et $\beta_g = \pi/(12g - 6)$.

Ce résultat sur le diamètre est un corollaire du théorème suivant :

Théorème 22 (Bavard, 1996). *Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. On pose $\beta_g = \pi/(12g - 6)$.*

1. *Si un disque fermé de rayon R recouvre X alors*

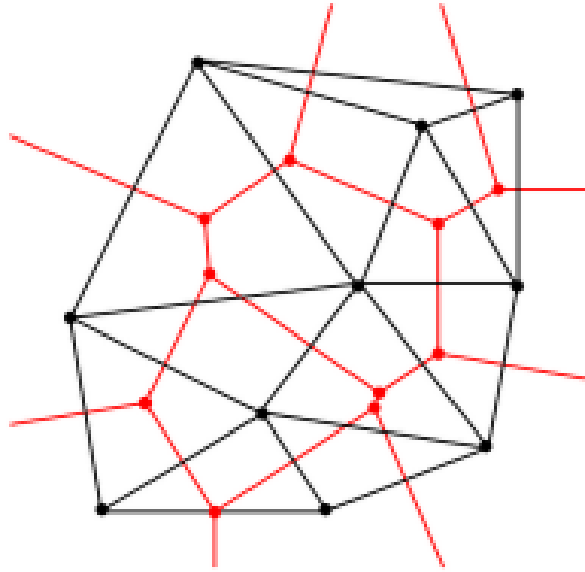
$$\cosh R \geq \frac{1}{\sqrt{3} \tan \beta_g}$$

2. *Pour tout genre $g \geq 2$ cette borne est atteinte par certaines surfaces modulaires.*

Preuve de la proposition. Comme X est compacte, il existe $(p; q) \in X$ qui vérifie $d(p; q) = \text{diam}(X)$. Alors le cercle de rayon $\text{diam}(X)$ centré en p recouvre X .

De même, soit $\gamma : I \rightarrow X$ un lacet géodésique tel que $l(\gamma) = l(X)$ la systole, ie un lacet de longueur minimale. Alors pour $p \in \gamma(I)$, le cercle de centre p et de rayon $l(X)/2$ est plongé dans X . □

Preuve du théorème. Soit Γ le groupe de Fuchs associé à la surface X . On considère le pavage de \mathbb{H} par les cellules de Dirichlet-Voronoi associé à \mathbb{H} . Chaque sommet v du pavage par les cellules de Dirichlet-Voronoi est à équidistance de trois antécédents de p , centre de trois cellules distinctes. v est donc le centre du cercle circonscrit d'un triangle dont les trois sommets sont identifiés. Ces triangles constituent un pavage stable pour l'action de Γ , dual du pavage de Dirichlet-Voronoi et sont appelés cellules de Delaunay.



On veut donner une borne inférieure à la densité du recouvrement dans une cellule de Delaunay. On considère un triangle dont le cercle circonscrit est de rayon R . Chaque triangle est recouvert par au moins trois sections de disque. On a alors :

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(\cosh R - 1)}{\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} \\ &= (\cosh R - 1) + \frac{\pi(\cosh R - 1)}{\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} \end{aligned} \quad (2)$$

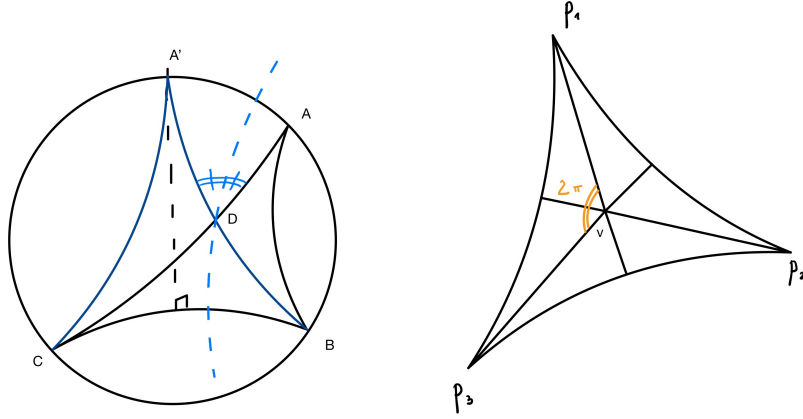


FIGURE 10

Ainsi, pour R fixé, la densité est minimale lorsque l'aire du triangle est maximale. Ce maximum est atteint par le triangle équilatéral.

Soit ABC un triangle quelconque inscrit dans le cercle de rayon R . Si ABC n'est pas équilatéral, on peut supposer $AB \leq AC$. On trace la médiatrice du côté BC et on note A' l'intersection entre le cercle $C(v; R)$ et cette médiatrice. On a $Aire(A'BC) \geq Aire(ABC)$. En effet, si on note D comme sur la figure 10 l'intersection de $A'B$ et AC , la réflexion σ dans la bissectrice de $\widehat{ADA'}$ est une isométrie (qui inverse l'orientation) telle que $\sigma(ABD) \subset A'DC$.

En particulier, on remarque que les angles en v entre les segments reliant v au sommets du triangle valent tous $2\pi/3$ et les segments ont longueur R . Cela nous permet de calculer les angles $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$ en utilisant la loi des cosinus hyperbolique dans le triangle $(v; p; p')$:

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\theta}{2} \cosh R$$

et ainsi

$$\sqrt{3} \cosh R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 \tag{3}$$

Comme cette densité est minimale, on a

$$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(\cosh R - 1) \geq \mathcal{A}_v \times \delta_R.$$

Or, le pavage de Delaunay est invariant par Γ le groupe de Fuchs tel que $X = \mathbb{H}/\Gamma$. On en déduit qu'il existe une union finie de cellule de Delaunay qui donne un domaine fondamental, et on remarque alors que comme tous les sommets de la triangulation sont identifiés dans le quotient, la somme des angles intérieurs de l'ensemble de ces cellules est 2π .

On a alors

$$2\pi(\cosh R - 1) \geq 4\pi(g - 1)\delta_R$$

Or

$$\delta_R = \frac{3\theta(\cosh R - 1)}{\pi - 3\theta_R}$$

Donc on en déduit

$$\theta_R \leq \frac{\pi}{6g - 3}.$$

En combinant cette inégalité avec (3) on obtient alors le résultat :

$$\cosh R \geq \frac{1}{\sqrt{3} \tan \beta_g}.$$

□

Cette preuve nous donne aussi une description des surfaces réalisant l'égalité, puisqu'on sait qu'elle possède un domaine fondamental qui est un polygone régulier d'angle $2\pi/3$. Chaque sommet a donc une multiplicité égale à trois, et puisque la caractéristique d'Euler d'une surface de genre g vaut $2 - 2g$, le polygone a $12g - 6$ côtés. On note \mathcal{P}_g le $(12g - 6)$ -gône régulier d'angle $2\pi/3$.

5 Les surfaces extrémales

Comprenons pourquoi notre borne n'est pas optimale.

On appelle surfaces extrémales de genre g les surfaces pouvant être recouverte par un disque de diamètre minimal appelé lui-même disque extrêmeal. On peut les dénombrer en listant les différents appariements possibles des côtés de \mathcal{P}_g . Un appariement est un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_{12g-6}$ d'ordre 2 n'admettant pas de point fixe. Si on note $\rho = (1\ 2\ 3\ \dots\ 12g - 6)$, σ doit vérifier : $(\rho\sigma)^3 = id$, puisque les sommets ont chacun multiplicité trois. Cela correspond à faire le tour du sommet. Pour $g = 2$, il existe 9 surfaces optimales illustrées ci-dessous :

Toutefois, le rayon d'un disque extrêmeal sur une surface extrêmeale ne correspond pas au diamètre minimal d'une surface de genre $g \geq 2$. Il existe en effet un nombre fini de disques extrêmeaux sur une surface extrêmeale. Si on se place en un point quelconque p , ie qui n'est pas le centre d'un de ses disques, le disque de rayon R_g et de centre p ne recouvre pas la surface donc il existe un point q tel que $d(p; q) \geq R_g$.

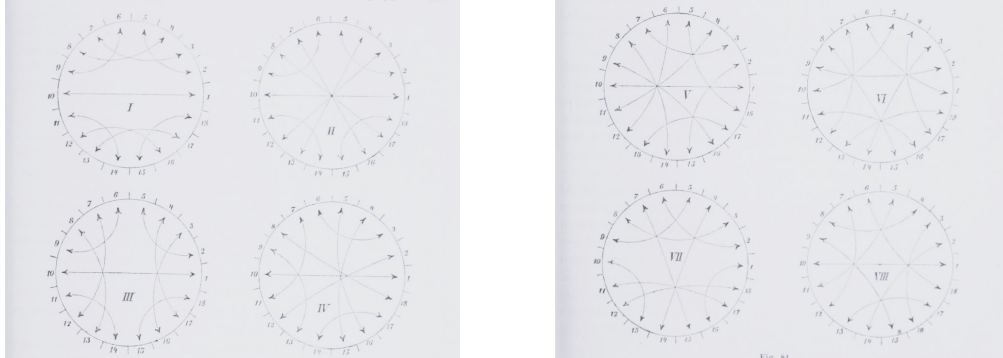


FIGURE 11

La neuvième surface est obtenue en renversant l'orientation de *VIII*. Ces figures sont extraites de [4]

Proposition 23. *Une surface extrémale X admet un nombre fini de disques extrémaux.*

Preuve. On montre que l'ensemble des centres de tels disques est discret. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 24. *Soit γ une transformation hyperbolique. Alors $\forall z \in \mathbb{H}$, $d = d(z; \gamma(z))$ vérifie*

$$\sinh(d/2) = \sinh(\lambda/2) \cosh \delta$$

avec λ le déplacement sur l'axe et δ la distance du point à l'axe.

Preuve du lemme. Il suffit de montrer que ceci est vrai pour $\gamma : z \rightarrow \lambda z$ puisque toute transformation hyperbolique est conjuguée à une transformation de cette forme.

On remarque que pour tout $0 < \theta < \pi$, γ préserve $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}$. La distance δ entre $z = re^{i\theta}$ et l'axe de γ ie l'axe imaginaire pur dépend donc seulement de θ . Elle est réalisée par un arc de cercle coupant l'axe perpendiculairement ie centré en 0. On a donc un quadrilatéral ayant pour sommets $(ir; ir\lambda; r\lambda e^{i\theta}; rei\theta)$ avec deux angles droits en ir et en $ir\lambda$. Comme $\delta = d(ir; rei\theta) = d(ir\lambda; r\lambda e^{i\theta})$, les côtés opposés sont égaux et on peut couper le quadrilatère en deux quadrilatères possédant chacun trois angles droits. On applique alors la formule des sinus pour un quadrilatéral à angles droits. On obtient directement :

$$\sinh(d/2) = \sinh(\lambda/2) \cosh \delta$$

□

Le centre d'un disque extrmal p est situé à égale distance des centres de toutes les cellules voisines dans le pavage de Dirichlet-Voronoi qui lui est associé. Par le lemme 24, un autre centre de disque extrmal dans le voisinage de p

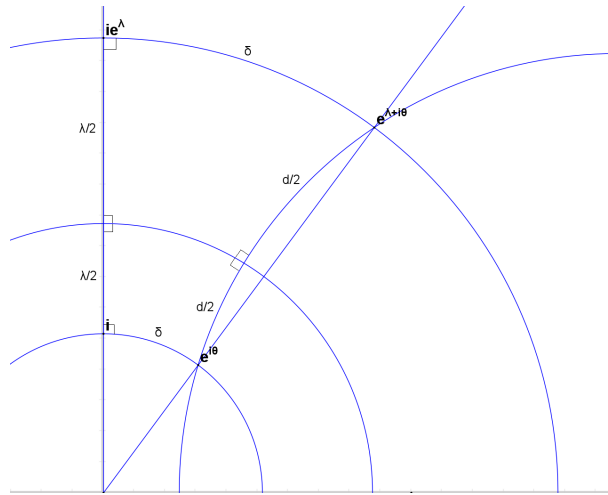


FIGURE 12

devrait donc se situer à la même distance que p des axes des transformations hyperboliques qui codent les appariements des côtés. Cet ensemble est discret. \square

Ainsi malgré leur grande régularité, rien ne dit que ces surfaces réalisent le diamètre minimum.

En s'inspirant de l'étude du diamètre de graphes réguliers ; Curien, Budzinski et Petri décrivent dans [2] le comportement asymptotique du diamètre minimum diam_g :

Théorème 25.

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\text{diam}_g}{\log g} = 1.$$

Références

- [1] Christophe BAVARD. “Disques extrémaux et surfaces modulaire”. In : *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*. T. 5. 2. 1996, p. 191-202.
- [2] Thomas BUDZINSKI, Nicolas CURIEN et Bram PETRI. “On the minimal diameter of closed hyperbolic surfaces”. In : *Duke Mathematical Journal* 170 (2021).
- [3] M.C. ESCHER. *Circle limit I*. 1958.
- [4] R. FRICKE et F. KLEIN. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*. 1897.

- [5] Noemi HALPERN. “A Proof of the Collar Lemma”. In : *Bulletin of the London Mathematical Society* 13.2 (1981), p. 141-144.
- [6] John H. HUBBARD. *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics*. T. 1 : *Teichmüller Theory*. 2006.