Étude de la rationalité de variétés algébriques par le calcul d'invariants

Giacomo Spriano
Sous la direction de Alena Pirutka

février-mai 2024

Résumé

Ce rapport a pour but d'introduire certaines techniques capables de détecter la (non)rationalité de variétés algébriques. Nous illustrerons ces techniques sur deux exemples.

Table des matières

Déroulement du stage

Tout d'abord, je tiens à remercier François Charles pour m'avoir mis en contact avec ma directrice de stage, Alena Pirutka. Je remercie également cette chercheuse et professeure de **NYU** grâce à laquelle je me suis intéressé à la géométrie algébrique, au moins à certains de ses sous-domaines.

Le sujet était le calcul d'invariants de birationalité, une branche de la géométrie algébrique. Ne connaissant que très peu le sujet, je m'y suis plongé à travers les livres de géométrie algébrique de D.Perrin [9] et R.Hartshorne [1], ainsi que via certains articles et documents que me proposait mon encadrante. J'ai dû également approfondir certaines notions sur les formes quadratiques. Les invariants étudiés par la chercheuse provenaient de la cohomologie galoisienne, mais pour le cas particulier des quadriques, les variétés que j'ai étudiées, ils se réinterprétaient à travers les invariants de la théorie de Witt. Ce sont ces derniers que je vais présenter. J'avais accès à un bureau partagé avec un doctorant et un ancien chercheur, cependant ces derniers n'y venaient que très rarement, je n'ai pu discuter que très brièvement avec eux. J'ai eu la chance de pouvoir assister à trois cours : un de théorie des nombres donné par Yuri Tschinkel ainsi qu'un corps d'algèbre commutative et un sur les schémas donnés par mon encadrante. J'ai également assisté à plusieurs séminaires.

Introduction

La question de la rationalité des variétés algébriques a été une source d'intérêt majeure pour certains mathématiciens. Entre la fin du xix^{e} siècle et le début du xx^{e} siècle de nombreux résultats ont été démontrés, notamment par l'école italienne, un résultat important dû à Castelnuovo et Enriques est que si X est une surface projective complexe lisse, alors si elle est unirationnelle, elle est rationnelle. L'hypothèse unirationnelle est essentielle sinon les courbes elliptiques en sont un contre-exemple. Il est à noter que la non-rationalité de ces courbes est à la base de la cryptographie sur les courbes elliptiques. Quand la dimension de X est supérieur à 3 encore beaucoup de questions subsistent, pour détecter la (non)rationalité nous utilisons des invariants, ce rapport a pour but d'en introduire certains. Pour étudier le problème de rationalité, les invariants utilisés proviennent de la cohomologie, à l'aide de $H^3(X, \mathbb{Z})$ Artin et Mumford ont trouvé une quadrique de dimension 2 unirationnelle et non rationnelle, on ne savait pas s'il en existait. Dans ce rapport je ne vais pas introduire la cohomologie mais d'autres invariants qui sont plus adaptés à ce contre-exemple, je vais essentiellement m'appuyer sur l'article : "Manuel Ojanguren : The Witt group and the problem of Lüroth" [6].

Premièrement nous introduirons les variétés algébriques (géométriques) et nous expliquerons pourquoi notre problème nécessite une approche plus poussée : nous devrons introduire les schémas. Nous verrons que l'invariant que nous allons utiliser est le corps des fonctions de la variété, il caractérise exactement la rationalité de la variété. Ce corps étant généralement difficile à calculer nous allons l'étudier par l'intermédiaire du groupe de Witt, que nous introduisons dans la partie 2, ensuite nous affinons encore cet invariant pour obtenir le groupe de Witt non ramifié, c'est cet invariant que nous allons utiliser dans la partie 3 pour montrer que la variété d'Artin et Mumford est unirationnelle mais non rationnelle. La partie 4 démontre les résultats techniques que nous avons omis précédemment. À la fin du stage mon encadrante m'a donné un article qui démontrait la non rationnalité d'une variété à l'aide de la cohomologie galoisienne, dans la partie 5 j'ai retranscrit la démonstration avec les outils que j'ai appris.

1 Introduction à la géométrie algébrique

1.1 Variétés algébriques

Premièrement nous allons définir une **variété algébrique** comme un ensemble de points solutions d'équations polynomiales, c'est-à-dire sous-ensemble de l'espace k^n ou de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$.

Définition 1.1. Soit I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$. On définit :

$$V(I) = \{x \in k^n \,; f(x) = 0 \; \forall f \in I\}$$

Les variétés algébriques **affines** sont les ensembles de cette forme .

Définition 1.2. Soit I un idéal homogène (c'est-à-dire engendré par des polynômes homogènes) de $k[X_0, \ldots, X_n]$. On définit :

$$V(I) = \{x \in \mathbb{P}^n_k \,; f(x) = 0 \; \forall f \in I\}$$

Les variétés algébriques **projectives** sont les ensembles de cette forme.

Remarque 1.1. Une variété affine se "compactifie" en une variété projective en homogénéisant l'idéal I par l'ajout d'une variable X_0. Réciproquement, une variété projective est le recollement de variétés affines, qui s'obtiennent en regardant la variété projective à travers les espaces affines ($X_i = 1$). Par ce fait, je ne préciserai plus si la variété est affine ou projective, par exemple je parlerai du cercle aussi bien comme défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1$ ou la version homogénéisée $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Définition 1.3. Les ensembles algébriques possèdent des propriétés d'ensembles fermés d'après :

$-\bigcap_{\alpha} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha} I_\alpha)$

$-V(I) \cup V(J) = V(IJ)$

Ainsi k^n et $\mathbb{P}^n_k$ héritent de la topologie engendrée par les fermés qui sont les variétés algébriques.

Cette dernière induit sur les variétés algébriques une **topologie**, dite **de Zariski**.

Les variétés que j'ai étudiées durant mon stage étaient des **quadriques** c'est-à-dire définie par une équation (ici homogène) de la forme :

$$a_1x_0^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 0$$

Plus précisément j'ai étudié la rationalité des quadriques, définissons cette notion :

Définition 1.4. Soit X et Y des variétés algébriques, disons affine, un **morphisme rationnel** est une application :

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & Y \\ (x_1 \ldots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \end{array}$$

Où les f_i sont des fractions rationnelles.

Le **morphisme** est dit **birationnel** s'il est bijectif et que son inverse est un morphisme rationnel.

Cependant, il peut arriver que les dénominateurs des f_i s'annulent en certains points de X. Ces points forme un fermé et son complémentaire un ouvert U, on dit alors que f est une **application rationnelle** , qu'on note $f : X \dashrightarrow Y$, s'il existe un ouvert U tel que $f : U \to Y$ soit un morphisme rationnel.

Une application $f : X \dashrightarrow Y$ est birationnelle s'il existe un ouvert U de X et V de Y tel que $f : U \to V$ soit un morphisme birationnel.

Dans ce cas on dit que X et Y sont birationnelles.

Si X est birationnelle à $\mathbb{P}_k^d$ on dit que X est **rationnelle**.

S'il existe une application $f : \mathbb{P}_k^n \dashrightarrow X$ dont l'image est dense dans X alors on dit que X est **unirationnelle**.

Maintenant on a le théorème suivant :

Théorème 1.1. Soit Q une quadrique, définie par :

$$a_1x_0^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 0$$

alors,
soit cette équation ne possède pas de solution
soit Q est rationnelle.

Démonstration 1.1. Supposons que l'équation admette une solution, soit $x = [x_0, \ldots, x_n] \in Q$, que nous fixons. Supposons par simplicité que $x_0 = 1$.

Construisons une application $f : \mathbb{P}_k^{n-1} \dashrightarrow Q$.

à un point $v = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{P}_k^{n-1}$, on pose le point $x_t = [1, tv_1 + x_1, \ldots, tv_n + x_n]$ et on cherche un t tel que $x_t\mathbb{Q}$:

$$a_0 + a_1(tv_1 + x_1)^2 + \cdots + a_n(tv_n + x_n)^2 = 0$$

i.e

$$(a_1v_1^2 + \ldots a_nv_n^2)t^2 + 2(a_1v_1x_1 + \cdots + a_nv_nx_n)t = 0$$

On trouve bien sur la solution triviale, $t = 0$ mais aussi $t_v = 2\dfrac{a_1v_1x_1 + \cdots + a_nv_nx_n}{a_1v_1^2 + \ldots a_nv_n^2}$.

ainsi l'application $v \mapsto x_{t_v}$ est rationnelle.

Cette application est en fait birationnelle, l'inverse est donné par : si $y \in Q$ on lui associe la droite passant par x et y, algébriquement le point : $[1, x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n]$.

C'est un morphisme birationel entre les ouverts $U = \{v = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{P}_k^{n-1} \,;\, a_1v_1x_1 + \cdots + a_nv_nx_n \neq 0 \; et \; a_1v_1^2 + \ldots a_nv_n^2 \neq 0\}$ et $V = (x_0 \neq 0) \cap Q \backslash \{x\}$.

Ce théorème pourrait laisser penser que l'étude de la rationalité des quadriques est sans intérêt. En fait d'un point de vue géométrique l'équation $a_0 + a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 0$ peut ne pas admettre de solution, cependant du point de vue des schémas, elle définit une variété algébrique qui elle n'est pas vide, ce sont donc ce genre de variétés que nous allons étudier dans les parties 3 et 5. Nous allons maintenant introduire ce que sont les schémas.

1.2 Schéma affine

Définition 1.5. Soit A un anneau, on définit $X = \mathrm{Spec}(A)$ comme l'ensemble des idéaux premiers de A, on munit cet ensemble de la **topologie de Zariski** qui est définie comme engendrée par les fermés :

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A); I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

où I est un idéal de A, on note $V(f)$ si I est l'idéal engendré par f. On note $D(f)$ le complémentaire de $V(f)$, ils forment une base d'ouverts.

L'espace topologique X peut être muni d'un **faisceau**, $\mathcal{O}_X$, défini par :

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f = A[\tfrac{1}{f}]$$

Pour $\mathfrak{p} \in X$, on définit $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ comme la limite inductive des $\mathcal{O}_X(U)$ où U parcourt les ouverts de X contenant $\mathfrak{p}$, on montre :

$$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$$

C'est un anneau local, on note $\mathcal{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ son unique idéal maximal.

Un tel espace est dit **localement annelé**, c'est-à-dire muni d'une structure de faisceau d'anneaux.

Les espaces localement annelés constituent une catégorie où les flèches sont des couples $(f, f^{\#})$ où, $f : X \to Y$ est une fonction continue et $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y$ un morphisme entre faisceaux tel que si U est un ouvert de Y, $f^{\#}(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.

Propriété 1.1. La transformation $A \to X$ définit un foncteur contravariant de la catégorie des anneaux vers celle des espaces localement annelés qui est de plus pleinement fidèle. Plus précisément, si A et B sont des anneaux on définit de manière fonctorielle une application bijective :

$$\begin{array}{rcl} Hom(A,B) & \to & Hom(\mathrm{Spec}(B), \mathrm{Spec}(A)) \\ \varphi & \mapsto & f, f^{\#} \end{array}$$

f est le morphisme continu entre les espaces définis par $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$
et $f^{\#}$ le morphisme entre faisceaux définis par :
pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$:

$$\begin{array}{rcl} f^{\#}_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),f(\mathfrak{p})} = A_{f(\mathfrak{p})} & \to & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B),\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}} \\ \frac{a}{b} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} \end{array}$$

Définition 1.6. On dit que X défini précédemment est un **schéma affine** sur un corps k quand A est une k-algèbre noetherienne intègre. (En réalité la littérature donne une définition plus générale mais nous nous contenterons de cette dernière pour ce rapport).

On dit que U un ouvert de X est affine s'il existe un anneau B tel que U soit isomorphe dans la catégorie des espaces localement annelés à $\mathrm{Spec}(B)$. On notera $U = \mathrm{Spec}(B)$. On a par exemple :

$$D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$$

Si $U_{\mathfrak{p}}$ est le complémentaire de $V(\mathfrak{p})$,

$$U_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$$

Remarque 1.2. Lien avec la géométrie : quel est le lien entre cette définition de variété algébrique et celle donnée dans la première sous-partie comme ensemble de solutions d'équations polynomiales ?

En fait une k-algèbre noetherienne est isomorphe à un quotient de $k[X_1, \ldots, X_n]$ par un idéal I, mais comme $k[X_1, \ldots, X_n]$ est noetherien, I est engendré par un nombre fini de polynômes, $P_1, \ldots, P_s$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ est solution de l'équation définie par ces polynômes on peut lui associer un idéal maximal, $\mathfrak{m}_x$, de $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ comme l'idéal engendré par $(X_1 - x_1), \ldots, (X_n - x_n)$, ainsi la variété "géométrique" s'injecte dans l'espace $X = \mathrm{Spec}(A)$, l'image de cette injection sont des points fermés de X, de plus quand le corps est algébriquement clos tous les points fermés sont atteint par cette injection, c'est le spectre maximal. Les notions que je vais définir pour les schémas peuvent s'adapter à l'objet géometrique et réciproquement, cependant le langage des schémas est plus confortable pour ce que je présenterai, voilà pourquoi je ne ferai plus référence à l'objet géométrique. Cependant il est quand même intéressant de garder une intuition géométrique, par exemple pour définir la dimension d'un espace, celle ci sera équivalente à la définition "analytique" de dimension d'une variété :

Définition 1.7. Soit A un anneau, $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers avec :

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subsetneq A$$

Si de plus cette chaine est de longueur maximal alors on dit que **la dimension de Krull de A est n**, on l'appelle aussi **la dimension de $\mathbf{X} = \mathbf{Spec(A)}$**.

Faisons remarquer que n'importe quel point $\mathfrak{p} \in X$ peut s'intercaler dans une telle chaîne de longueur n, sa position **i est** uniquement déterminé, on l'appelle **la codimension de $\mathfrak{p}$**.

Exemple 1.1. L'espace affine de dimension n peut être représenté par un schéma affine, on le note :

$$\mathbb{A}_k^n = \mathrm{Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$$

Sa dimension, comme nous venons de la définir, est bien n.

Le cercle est défini comme schéma affine par :

$$\mathrm{Spec}(k[X,Y]/(X^2+Y^2-1))$$

sa dimension est comme on peut l'espérer, 1.

Propriété 1.2. La dimension est invariante par changement de corps.

C'est-à-dire : si A est une k-algèbre et si K est une extension du corps k, alors l'extension scalaire de A à K, $A \otimes_k K$, est une K-algèbre de même dimension de Krull que celle de A.

Définition 1.8. Soit X un schéma affine sur un corps k, remarquons que A est alors unique car $\mathcal{O}_X(X) \cong A$, on note aussi $A = k[X]$, si celui ci est intègre est on note $k(X)$ le corps des fractions de A, on l'appelle **le corps des fonctions de X**.

Exemple 1.2. Le corps des fonctions de l'espace affine est :

$$k(\mathbb{A}_k^n) = k(X_1, \dots, X_n)$$

Le corps des fonctions du cercle est :

$$k(t)$$

Ce n'est pas totalement évident, nous allons le démontrer par la suite.

Tout les corps de fonctions ne sont pas des extensions transcendantes pures. Par exemple ce n'est pas le cas pour la courbe elliptique, définie par :

$$Y^2 = X(X-1)(X+1)$$

Le corps des fonctions de cette courbe est :

$$k(X, \sqrt{X^3 - X})$$

qui n'est pas transcendant pur.

Cette propriété de "transcendance pure" est ce que nous allons étudier par la suite, c'est la notion de rationalité comme nous allons la définir.

Définition 1.9. On dit que deux variétés algébriques, X et Y sont birationnelles, s'il existe des ouverts U de X et V de Y tel que U soit isomorphe à V dans la catégorie des espaces localement annelés.

On dit X est rationnelle si elle est birationnele à $\mathbb{A}_k^n$.

Remarque 1.3. Attention, la birationnalité n'est pas l'isomorphisme entre deux espaces localement annelés, bien que le second implique la première. Au niveau algébrique, si X et Y (affines) sont birationnelles cela équivaut à $k(X)$ est isomorphe à $k(Y)$ en tant que corps, et X isomorphe à Y en tant qu'espaces localement annelés équivaut à $k[X]$ isomorphe à $k[Y]$ en tant qu'anneaux.

Exemple 1.3. Comme nous l'avons dit précédemment, le cercle est rationnel, son corps des fonctions est isomorphe à $k(t)$. En effet on a une paramétrisation rationnelle du cercle par :

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$$

qui est défini presque partout, c'est-à-dire sauf sur un fermé d'intérieur vide (pour la topologie de Zariski), ici les $t \in k$ tels que $t^2 = -1$, et qui est presque bijective, c'est-à-dire injective et dont l'image est un ouvert non vide (donc dense) du cercle.

Ces deux propriétés sont équivalentes à l'existence d'un isomorphisme de k-algèbres :

$$\begin{array}{rcl} k[X,Y]/(X^2+Y^2-1) & \to & k(t) \\ X & \mapsto & \frac{2t}{1+t^2} \\ Y & \mapsto & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}$$

1.3 Schéma projectif

On va maintenant définir ce qu'est un schéma projectif, comme dans le cas géométrique on pourra le regarder dans l'espace affine ($X_0 = 1$), on va voir que la rationalité de cette sous-variété affine équivaut à celle de la variété projective. Cette remarque nous amène à penser que nous pourrions éviter la notion de schéma projectif, cependant dans la fin de la partie 2 j'introduirai le centre d'une valuation, notion principale pour comprendre l'exemple de Artin-Mumford. Un théorème essentiel nous dira que le centre est une sous-variété non vide de la variété projective, cependant pour garder le caractère non vide il faut considérer la variété projective dans son ensemble, il se pourrait que le centre se cache dans la partie ($X_0 = 0$). Pour être plus explicite les centres que nous considèrerons seront des sous-variété de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, il se pourra que le centre soit un point à l'infini.

Définition 1.10. Un anneau B est dit gradué s'il possède une décomposition en somme directe :

$$B = \bigoplus_{d \geq 0} B_d$$

où les B_d sont des groupes abéliens pour l'addition et vérifient :
$B_n B_m \subseteq B_{n+m}$
Les éléments des B_d non nuls sont dit homogènes de degré d.

On dit qu'un idéal I est homogène s'il est engendré par des éléments homogènes, ce qui équivaut à dire qu'on a l'égalité :
$I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap B_d)$
Dans ce cas là, B/I est aussi gradué par :
$B/I = \bigoplus_{d \geq 0} B_d / I \cap B_d$
De plus on notera : $B_+ = \bigoplus_{d > 0} B_d$.

Exemple 1.4. L'exemple que nous allons étudier est celui des polynômes, $B = k[X_0, \ldots, X_n]$ où B_d sont les polynômes homogènes de degré d (et 0), et de ses quotients par des idéaux homogènes.

Définition 1.11. B étant un anneau gradué, on pose :

$$\mathrm{Proj}(B) = \{\mathfrak{p} \subseteq B \text{ tel que } \mathfrak{p} \text{ est un idéal premier homogène ne contenant pas } B_+\}$$

On définit de manière similaire aux variétés affines une topologie qui est donnée par les fermés :

$$V_+(I) = \{\mathfrak{p} \in ProjB; I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

où I est un idéal homogène de B. On note $V_+(f)$ quand I est engendré par un élément homogène, f, et , $D_+(f)$ sont complémentaire dans $ProjB$.

$D_+(f)$ est un ouvert affine, en effet il est homéomorphe à $SpecB_{(f)}$, où $B_{(f)}$ est l'anneau :

$$B_{(f)} = \left\{ \frac{a}{f^n}; \text{a homogène et } \deg a = n \deg f \right\}$$

Remarque 1.4. Ainsi $\mathrm{Proj}(B)$ est recouvert par des ouverts affines et ainsi hérite d'une structure de faisceaux, l'homéomorphisme précédent devient alors un isomorphisme dans la catégorie des espaces localement annelés.

De plus $\mathrm{Proj}(B)$ est lui même un espace localement annelé.

Exemple 1.5. L'espace projectif peut être vu comme un schéma par : $\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}(k[X_0, \ldots, X_n])$.

À une variété définie par une équation $P(X_0, \ldots, X_n) = 0$ on lui associe le schéma :

$X = \mathrm{Proj}(k[X_0, \ldots, X_n] / (P(X_0, \ldots, X_n)))$.

Les ouverts $D_+(X_i)$ (qu'on note $(X_i = 1)$) sont des sous variétés affines qui recouvrent X, on a $D_+(X_0) = \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n] / (P(1, X_1 \ldots, X_n)))$.

Réciproquement un schéma affine peut être "compactifié" en un schéma projectif par "homogénéisation de l'équation", exactement comme pour les variétés algébriques géométriques.

Définition 1.12. (**Propriété**)

On peut définir le corps des fonctions d'un schéma projectif de manière général mais dans ce rapport seul le cas de l'exemple précédent nous intéresse, $X = \mathrm{Proj}(k[X_0, \ldots, X_n] / (P(X_0, \ldots, X_n)))$, dans ce cas $k(X)$ est le corps des fractions de $k[X_1, \ldots, X_n] / (P(1, X_1 \ldots, X_n))$.

Définition 1.13. Soit X et Y deux schémas projectifs, on dit qu'ils sont birationnels quand il existe des ouverts $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$ isomorphes dans la catégorie des espaces localement annelés.

On dit X que est rationnelle si elle est birationnelle à $\mathbb{P}^n_k$.

On peut montrer que c'est équivalent à avoir $k(X)$ purement transcendant, c'est la caractérisation que nous utiliserons par la suite.

2 L'anneau de Witt

Dans toute la suite on se donne k un corps, de caractéristique différente de 2. On pourra penser k comme $\mathbb{C}$ ou bien le corps des fonctions d'une variété algébrique (ex : $\mathbb{C}(t)$). Ce sont les seuls cas qui nous intéresseront.

2.1 Les formes quadratiques.

Définition 2.1. Une **forme quadratique** (non dégénérée) sur k est la donnée d'un k espace vectoriel de dimension finie V et d'une forme bilinéaire $\varphi : V \times V \to k$ tels que :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} : V & \to & V^* \\ x & \mapsto & \varphi(x, \cdot) \end{array}$$

est bijective.

La **dimension** (ou rang) d'une forme quadratique est la dimension de son espace vectoriel sous-jacent.

Remarque 2.1. À une forme quadratique φ on peut associer une matrice symétrique $\bar{\varphi} = (a_{ij})$, pour cela choisissons une base de V, (e_i), le coefficient a_{ij} sera alors $\varphi(e_i, e_j)$.

Si $x = \sum x_i e_i$ et $y = \sum y_i e_i$ on a $\varphi(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)\bar{\varphi}(y_1, \ldots, y_n)^T$ en développant on obtient un polynôme en x_i et y_i, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, à φ on lui associe ce polynôme évalué en $x = y$: $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$.

On peut revenir au polynôme en les variables x_i et y_i par la formule : $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y)$.

Une forme quadratique est **entièrement caractérisée** par sa matrice, de même **par son polynôme**.

Il sera intéressant de penser une forme quadratique comme son polynôme associé.

Définition 2.2. On dit que deux formes quadratiques, (V, φ) et (V', ψ), sont **isométriques** s'il existe un isomorphisme, $\sigma : V \to V'$ tel que :

$\forall x, y \in V, \psi(\sigma(x), \sigma(y)) = \varphi(x, y)$

Cette notion définit une relation d'équivalence, on quotiente l'ensemble des formes quadratiques par cette dernière, ainsi, maintenant on considère deux formes quadratiques égales si elles sont isométriques. On vérifiera que les opérations d'addition et de multiplication passent au quotient. Il est bon de savoir que si Q est une matrice inversible, A une matrice représentant une forme quadratique et P son polynôme associé, alors :

QAQ^T est isométrique à A

$P((X_1, \dots, X_n)Q)$ est isométrique à $P(X_1, \dots, X_n)$.

Exemple 2.1. La transformation linéaire

$X \mapsto X + Y$

$Y \mapsto X - Y$

est bijective et donc les formes quadratiques $P(X, Y)$ et $P(X + Y, X - Y)$ sont isométriques, avec $P(X, Y) = X^2 - Y^2$ on obtient le résultat bien connu :

$X^2 - Y^2 \sim (X + Y)^2 - (X - Y)^2 = 4XY \sim XY$

Propriété 2.1. Toutes les formes quadratiques sont **diagonalisables**, c'est-à-dire que si (V, φ) est une forme quadratique, il existe une base de V, (e_i) et des $a_i \in k$, tel que si $x = \sum x_i e_i$:

$\varphi(x, x) = \sum a_i x_i^2$

Démonstration 2.1. Choisissons $e_1 \in P$ tel que $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$, et complétons en une base de P, $(e_1, \dots, e_n)$. Nous avons vu dans la remarque que nous pouvons associer bijectivement à φ (c'est ici qu'on utilise que $2 \in k^\times$, voir la remarque) un polynôme $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$. Nous pouvons l'écrire :

$a_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{i>1} a_{0i} x_i + \psi(x_2, \dots, x_n)$

Comme $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$, $a_{11} \neq 0$, effectuons le changement de variable : $x_1 \mapsto x_1 - \frac{1}{a_{11}} \sum_{i>1} a_{0i} x_i$ (qui est bien sûr bijectif)

on obtient :

$\varphi \sim a_{11}(x_1 - \frac{1}{a_{11}} \sum_{i>1} a_{0i} x_i)^2 + 2(x_1 - \frac{1}{a_{11}} \sum_{i>1} a_{0i} x_i) \sum_{i>1} a_{0i} x_i + \psi(x_2, \dots, x_n)$

$= a_{11} x_1^2 - \frac{2}{a_{11}} (\sum_{i>1} a_{0i} x_i)^2 + \psi(x_2, \dots, x_n)$

La partie $-\frac{2}{a_{11}} (\sum_{i>1} a_{0i} x_i)^2 + \psi(x_2, \dots, x_n)$ ne dépend pas de x_1, on raisonne par récurrence.

On notera une telle forme quadratique : $< a_1, \dots, a_n >$.

La condition $\tilde{\varphi}$ bijective équivaut à avoir les a_i tous non nuls.

Définition 2.3. On peut ajouter les formes quadratiques (V, φ) et (V', ψ) pour obtenir $(V \oplus V', \varphi \oplus \psi)$ et même en faire le produit, ce qui est défini comme : $(V \otimes V', \varphi \otimes \psi)$.

Ceci donne sur les formes diagonalisées :

$< a_1, \dots, a_n > + < b_1, \dots, b_m > = < a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m >$

$< a_1, \dots, a_n > \times < b_1, \dots, b_m > = < a_1 b_1, \dots, a_n b_1, \dots, a_1 b_m, \dots, a_n b_m >$ (taille mn).

Ceci donne une structure "d'anneau monoïde" aux formes quadratiques, en effet, l'espace nul est le neutre pour l'addition mais il n'y a pas d'opposé. En quotientant par les espaces métaboliques, que nous allons définir tout de suite, on va pouvoir remédier à ce problème.

Définition 2.4. On définit de manière classique l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel N d'une forme quadratique (φ, V) comme :

$$N^\perp = \{x \in V; \varphi(x, y) = 0 \; \forall y \in N\}$$

on a les propriétés suivantes :

-$\dim N + \dim N^\perp = \dim V$

-$N^{\perp\perp} = N$

Définition 2.5. Soit (φ, V) une forme quadratique. On dit qu'un sous-module $L \subseteq V$ est un **sous-lagrangien** si $L \subseteq L^\perp$ et un **lagrangien** si $L = L^\perp$.

On appelle **espace métabolique** toute forme quadratique possédant un lagrangien.

Définition 2.6. Les espaces hyperboliques des formes quadratiques sont égales (isométrique) à : $< 1, \dots, 1, -1, \dots, -1 >$, où le nombre de 1 et -1 sont égaux.

Propriété 2.2. Du moment que $2 \in k^\times$, ce que l'on a supposé initialement, alors les notions d'espace métabolique et hyperbolique sont les mêmes.

La notion d'espace métabolique est quand même intéressante car on vérifie facilement que la somme de deux espaces métaboliques est métabolique et le produit d'un espace métabolique par n'importe quel autre espace est métabolique. Montrons la dernière affirmation : si V est métabolique, soit $L \subseteq V$ un lagrangien de V, soit V' un autre espace alors, $L \otimes V'$ est un lagrangien, ainsi $V \otimes V'$ est métabolique.

Ce qui fait des espaces métaboliques "une sorte d'idéal" dans le monoïde des formes quadratiques.

Ainsi le quotient de l'espace des formes quadratiques par celui des espaces métaboliques donne un anneau. On le nomme **l'anneau de Witt** que l'on note $W(k)$.

Remarque 2.2. Précisons la relation d'équivalence pour le quotient, si M est un monoïde et $I \subseteq M$ stable par addition, alors, on dit que $a \sim b$ s'il existe $i, j \in I$ tels que $a+i = b+j$, $\sim$ est une relation d'équivalence qui définit le quotient M/I et a une structure de groupe additif, si I est stable par multiplication par un élément de M alors la multiplication sur M passe au classe d'équivalence et le quotient est un anneau.

La transformation, $k \to W(k)$ est **fonctorielle**, si $k \to k'$ est une extension de corps, alors une forme quadratique sur k s'étend en une sur k' par extension scalaire.

Comme tout espace métabolique est de rang pair, le rang passe au quotient en une application : $W(k) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on note $\boldsymbol{I(k)}$ **le noyau de cette application**.

Exemple 2.2. Par exemple l'opposé de $< a_1, \ldots, a_n >$ est $< -a_1, \ldots, -a_n >$.

En effet $< a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n >=< 1, -1 > \times < a_1, \ldots, a_n >= 0$ dans W(k).

Comme tout élément de $\mathbb{C}$ est un carré, toute forme quadratique est isométrique à $< 1, \ldots, 1 >$, mais aussi, $< 1, 1 >=< 1, -1 >$, on en déduit que $W(\mathbb{C})$ ne possède que deux éléments, 0 et $< 1 >$, c'est l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et aussi $I(\mathbb{C}) = \{0\}$.

Dans $\mathbb{R}$ tout positif est un carré, les formes quadratiques sont $< 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1 >$, dans $W(\mathbb{R})$ les seules éléments sont donc $< 1, \ldots, 1 >$, $< -1, \ldots, -1 >$ ou 0, l'anneau de Witt est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Pour $\mathbb{Q}$ c'est déjà plus compliqué, dans la suite nous nous intéresserons à des extensions transcendantes de $\mathbb{C}$, plus particulièrement, des corps de fonctions de variétés algébriques sur $\mathbb{C}$.

2.2 Les formes de Pfisters

On va maintenant introduire des formes quadratiques qui possèdent de bonnes propriétés.

Définition 2.7. Une sorte de formes quadratiques sont les formes de Pfister, on les note :

$$\ll a_1, \ldots, a_n \gg =< 1, -a_1 > \times \cdots \times < 1, -a_n >=< 1, -a_1, \ldots, -a_n, \ldots, (-1)^n a_1 \ldots a_n >$$

Définition 2.8. Soit φ une forme quadratique sur k, on dit que $\lambda \in k$ est représenté par φ s'il existe $x \in k^n \backslash \{0\}$ tel que $\lambda = \varphi(x)$. On note $D_\varphi(k)$ l'ensemble des éléments de k^* (non nuls) représentés par φ.

Remarque 2.3. φ représente 0 est la définition de l'isotropie.

On pourra facilement montrer qu'une forme hyperbolique représente tous les éléments.

Si K est une extension de k on notera encore $D_\varphi(K)$ où ici φ est étendue par scalaire.

Théorème 2.1. Lemme de Brahmagupta

soit $c = s^2 + at^2 \in k^*$ représenté par la forme quadratique $< 1, a >$. Alors, $c < 1, a >$ est isométrique à $< 1, a >$.

Démonstration 2.2. Cela est conséquence de la formule :

$$(s^2 + at^2)(X^2 + aY^2) = (sX + atY)^2 + a(tX - sY)^2$$

Les formes de Pfisters possèdent de bonnes propriétés dont celle d'être multiplicatives :

Définition 2.9. Une forme φ est dite multiplicative si elle est soit :

-hyperbolique

soit,

-anisotropique et pour $c \in D_\varphi(K)$, $c\varphi$ est isométrique à φ.

Remarquons que dans le cas où φ est multiplicative, $D_\varphi(K)$ est un sous-groupe de K^*.

Propriété 2.3. Toute forme de Pfister est multiplicative.

Démonstration 2.3. Pour $\varphi =< 1, a >$ c'est le lemme de Brahmagupta.
On va montrer que si φ est multiplicative alors, $\varphi < 1, a >$ l'est aussi.
Si φ est hyperbolique alors
$\varphi < 1, a >$ aussi, supposons donc que φ est anisotropique.

Si $\varphi < 1, a >$ est isotropique alors on va montrer qu'elle est hyperbolique :
on peut trouver u et v non tout deux nuls tel que :
$\varphi(u) + a\varphi(v) = 0$
nécessairement, $\varphi(u) \neq 0$ et $\varphi(v) \neq 0$, ainsi car φ est multiplicative :
$\varphi \simeq \varphi(u)\varphi$
$a\varphi \simeq a\varphi(v)\varphi = -\varphi(u)\varphi$
ainsi :
$\varphi \oplus a\varphi \simeq \varphi(u)\varphi \oplus -\varphi(u)\varphi$
qui est hyperbolique.

Supposons maintenant que φ et $\varphi < 1, a >$ sont toutes deux anisotropiques.
$c = \varphi(u) + a\varphi(v)$ on doit montrer que : $c\varphi < 1, a >\simeq \varphi < 1, a >$:
si $\varphi(u)$ ou $\varphi(v)$ est nul on utilise que φ est multiplicative et que $< a >< 1, a >\simeq< 1, a >$.
Sinon posons, $r = \varphi(u)$ et $s = \varphi(v)$, comme $D_\varphi(K)$ est un groupe et φ multiplicative :
$\varphi \simeq r\varphi \simeq \frac{r}{s}\varphi$
ainsi,
$c\varphi < 1, a >\simeq (1 + \frac{as}{r})\varphi \oplus \frac{as}{r}\varphi \simeq \varphi < 1, \frac{as}{r} >\simeq \varphi < 1, a >$

Remarque 2.4. En particulier une forme de Pfister isotropique est hyperbolique.

2.3 Lien avec la géométrie algébrique

Soit $\varphi = a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2$ une forme quadratique irréductible (I.e le polynôme est irréductible), comme annoncé en introduction on veut étudier les quadratiques, c'est à dire les schémas projectifs définis par les équations de la forme :

$$a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 = 0$$

On note Q_φ le schéma ainsi défini et $k(\varphi) = k(Q_\varphi)$ le corps des fonctions associé, c'est-à-dire rappelons le : le corps des fractions de $k[X_2, \ldots, X_n] / (a_1 + a_2X_2^2 + \ldots a_nX_n^2)$.

Propriété 2.4. Si φ est isoptropique sur K alors $K(\varphi)$ est rationnel.

Démonstration 2.4. Dire que φ est isotropique équivaut à dire que Q_φ possède un point géométrique, dans ce cas on utilise la méthode des cordes, celle montrée en partie 1.1, pour montrer que cette variété est birationnelle à $\mathbb{P}_K^{n-1}$.

La notion de forme de Pfister intervient dans le théorème important suivant, il fait le lien avec la géométrie algébrique. Une forme quadratique $\varphi =< a_1, \ldots, a_n >$ définit une équation :

$$a_1X_0^2 + \cdots + a_nX_{n-1}^2 = 0$$

on note Q_φ le schéma projectif associé, on rappelle que $k(Q_\varphi)$ est son corps des fonctions.

Définition 2.10. On dit qu'une forme φ est contenue dans une autre τ s'il existe une forme ψ tel que : $\tau = \varphi \oplus \psi$.
On dit qu'une forme quadratique φ est voisine d'une forme de Pfister τ s'il existe $\lambda \in k^*$ tel que $\lambda\varphi$ soit contenue dans τ et $\dim \varphi > \frac{1}{2} \dim \tau$.

Un autre théorème important sur les formes de Pfisters est le suivant :

Théorème 2.2. Si τ est une forme de Pfister de dimension au moins 4 , le noyau de l'application suivante :

$$W(k) \to W(k(\tau))$$

est l'idéal engendré par τ, $W(k)\tau$.

Ce théorème est conséquence immédiate de la proposition suivante :

Propriété 2.5. Si φ est une forme sur K de dimension au moins 3. ψ anisotropique sur K tel que $\psi \sim 0$ sur $W(K(\varphi))$ alors pour tout $c \in D_\psi(K)$, $c\varphi$ est contenue dans ψ. Si de plus φ est une forme de Pfister alors , il existe ρ tel que : $\psi = \varphi \otimes \rho$.

Le théorème suivant est central pour expliquer le contre exemple de Artin et Mumford.

Théorème 2.3. Soit φ une forme quadratique sur k qui est voisine d'une forme de Pfister τ, le noyau de :

$$W(k) \to W(k(Q_\varphi))$$

est l'idéal de $W(k)$ engendré par τ.

Définition 2.11. Soit p un polynôme irréductible de $k[t]$, on va définir une application :

$$\partial_p : W(k(t)) \to W({}^{k[t]}\!/_{(p)})$$

par :
$\partial_p(< a >) = 0$ si la valuation p-adique de a est paire.
Dans le cas contraire on trouve b un polynôme de valuation p-adique nulle tel que :
$< a >=< pb >$ on définit alors :
$\partial_p < a >=< \bar{b} >$

Avant d'attaquer la partie sur les valuations nous aurons besoin de ce théorème, nous le démontrerons dans la partie 4.

Théorème 2.4. On a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow W(k) \longrightarrow W(k(t)) \stackrel{\oplus_p \partial_p}{\longrightarrow} \bigoplus_p W({}^{k[t]}\!/_{(p)}) \longrightarrow 0$$

où p parcourt l'ensemble des polynômes irréductibles de $k[t]$.

2.4 Les valuations.

Le corps des fractions est un invariant de birationnalité, cependant il n'est pas commode à calculer. Ici à partir d'une variété et de son corps des fractions nous allons construire un invariant de corps qui sera calculable à l'aide de considération géométrique sur la variété. Pour cela nous allons introduire les valuations.

Définition 2.12. Une **valuation** (discrète de rang 1) sur k est une application $v : k^* \to \mathbb{Z}$ telle que :
$\forall x, y \in k$:
$-v(xy) = v(x) + v(y)$
$-v(x + y) \geq min(v(x), v(y))$
on définit aussi $v(0) = +\infty$ pour plus de commodité.

Pour K une extension de k on note $\mathcal{V}_K$ l'ensemble des valuations de K qui sont nulles sur k. Pour $v \in \mathcal{V}_K$, on note :

$$\mathcal{A}_v = \{x \in K, v(x) \geq 0\}$$

$$\mathcal{P}_v = \{x \in K, v(x) > 0\}$$

$\mathcal{A}_v$ est un anneau, il est même local et $\mathcal{P}_v$ est son seul idéal maximal. On note le corps résiduel de v :

$$k(v) = {}^{\mathcal{A}_v}\!/_{\mathcal{P}_v}$$

On montre facilement que $\mathcal{P}_v$ est un idéal principal engendré par n'importe quel π_v tel que $v(\pi_v) = 1$.
Un tel π_v donne une application $\partial_v : W(K) \to W(k(v))$ de la même manière que nous avons défini ∂_p un peu plus tôt. Cette application dépend du choix de π_v mais pas son noyau.
On peut maintenant définir **le groupe non ramifié de Witt** de K (vu comme extension de k) :

$$W_{nr}(K) = \bigcap_{v \in \mathcal{V}_K} \ker \partial_v$$

De plus on pose pour φ une forme quadratique :

$$\mathrm{Ram}(\varphi) = \{v \in \mathcal{V}_K ; \partial_v \varphi \neq 0\}$$

on a : $\mathrm{Ram}(\varphi) = \varnothing \Leftrightarrow \varphi \in W_{nr}(K)$.

Cet invariant de birationalité est un bon invariant car on a le théorème suivant :

Propriété 2.6. Soit $K \to L$ une extension, soit $\xi \in W_{nr}(K)$, soit ξ_L son image par $W(K) \to W(L)$, alors $\xi_L \in W_{nr}(L)$. Autrement dit W_{nr} est un foncteur, on a une flèche :

$$W_{nr}(K) \to W_{nr}(L)$$

Démonstration 2.5. Supposons qu'il existe $w \in \mathrm{Ram}(\xi_L)$ alors la restriction à K : $v = w_{|K}$ appartient à $\mathrm{Ram}(\xi)$, de manière évidente.

Théorème 2.5. Pour K une extension de k et $K(t)$ vu comme extension de k, on a :

$$W_{nr}(K(t)) = W_{nr}(K)$$

Démonstration 2.6. D'après la proposition précédente on a une flèche : $W_{nr}(K) \to W_{nr}(K(t))$, il faut montrer qu'elle est injective st surjective.

Déjà elle est injective de manière évidente, en effet c'est une restriction de la flèche injective : $W(K) \to W(K(t))$.

Montrons maintenant la surjectivité, premièrement en considérant la valuation associée à un polynôme irréductible $p \in K[t]$ on a que $W_{nr}(K(t)) \subseteq \ker \partial_p : W(K(t)) \to W({}^{K[t]}\!/_{(p)})$ et ce pour tout p. Donc par la suite exacte du théorème 2.4, $W_{nr}(K(t)) \subseteq W(K)$.

Maintenant soit v une valuation sur K, ce qui est intéressant est qu'on peut la prolonger sur $K(t)$, de manière naturelle par $w(a_n t^n + \dots a_0) = min(v(a_i))$ (penser à $K = \mathbb{Q}$ et v un valuation p-adique). Si $\xi \in W(K)$ tel que $\partial_v \xi \neq 0$ alors on a que $\partial_w \xi \neq 0$, ce qui conclut : $W_{nr}(K(t)) \subseteq W_{nr}(K)$.

On en déduit facilement :

$$W_{nr}(k(t_1, \dots, t_n)) = W(k)$$

Ainsi si X est une variété sur $\mathbb{C}$ et L son corps des fonctions, on a que, si X est rationnelle alors, $W_{nr}(L) = W(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On affine encore cet invariant, on pose $I_{nr}(K) = I(K) \cap W_{nr}(K)$. Comme $I(\mathbb{C}) = \{0\}$ on a que $I_{nr}(\mathbb{C}(t_1, \dots, t_n)) = \{0\}$, et ainsi **si X est rationnelle alors $\boldsymbol{I_{nr}(L) = \{0\}}$**. Dans la suite on va exhiber une variété pour laquelle on trouve $\beta \in I_{nr}(\mathbb{C})$ non nul, on aura montré que la variété n'est pas rationnelle.

Précisons maintenant **le plan d'attaque** pour montrer la non-rationalité d'une quadrique. Notons X la variété à étudier, celle-ci étant définie par une forme quadratique : $\varphi = 0$. Soit $L = k(\varphi)$ son corps des fonctions, en choisissant bien $\beta \in I(K)$ non nul nous allons vouloir montrer que sa ramification est vide et ainsi on aura $I_{nr}(K) \neq \varnothing$. En prenant une valuation $v \in \mathrm{Ram}(\beta)$ nous voulons aboutir à une contradiction, à une telle valuation nous allons associé un objet géométrique, une sous-variété de X, et par des considérations géométriques nous allons aboutir à la contradiction voulue.

Cet objet géométrique est **le centre d'une valuation**, on va maintenant le définir et donner quelques exemples.

Définition 2.13. Soit X une variété algébrique sur k, $K = k(X)$ son corps des fonctions, pour $v \in \mathcal{V}_K$ une valuation de K invariante sur k, on définit le centre de v, C_v pour l'ensemble des $p \in X$ tel que :

$$\mathcal{O}_{X,p} \subseteq \mathcal{A}_v \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_p \supseteq \mathcal{P}_v \cap \mathcal{O}_{X,p}$$

On vérifie que C_v définit une sous-variété non vide de X.

Exemple 2.3. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une variété algébrique sur k, un type particulier de valuations sont celles que nous disons "associées à une sous-variété" : si Y est une sous-variété de X de codimension 1 et $\mathfrak{p}$ son point générique (i.e $V(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}) = Y$) on définit $v = v_{\mathfrak{p}}$ la valuation $\mathfrak{p}$-adique définie pour $f \in A$ par : $v(f) = \max\{n \in \mathbb{N}, f \in \mathfrak{p}^n\}$, qu'on étend à K classiquement, $v(\frac{f}{g}) = v(f) - v(g)$.

Pour ce genre de valuations leur centre est simplement la sous-variété par laquelle elles sont définies, (ici Y).

Si $X = \mathbb{A}_k^1$ on peut montrer que toutes les valuations sont de cette forme mais ce n'est plus vrai pour $\mathbb{A}_k^2$, on peut en obtenir d'autres par éclatements successifs de points, notion que j'ai décidé de ne pas développer dans ce rapport par souci de longueur.

La proposition suivante nous donne une condition suffisante pour qu'une valuation soit associée à son centre.

Propriété 2.7. Nous nous plaçons dans le cadre de la définition du centre d'une valuation, si C_v est de codimension 1 sur X, soit $\mathfrak{p}$ son point générique, on note $w = v_{\mathfrak{p}}$ la valuation associée à C_v, alors, $v = w$.

Démonstration 2.7. Par définition du centre :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \mathcal{A}_w \subseteq \mathcal{A}_v \\ \mathcal{M}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{P}_w \supseteq \mathcal{P}_v \cap \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{cases}$$

ce qui a pour conséquence que $\forall f \in K$:

$$\begin{cases} w(f) \geq 0 \Rightarrow v(f) \geq 0 \\ w(f) = 0 \Rightarrow v(f) = 0 \end{cases}$$

Choisissons π un générateur de $\mathcal{P}_w$, comme C_v est de codimension 1, autrement dit $\mathfrak{p}$ son point générique est un idéal maximal, ainsi $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \mathcal{A}_w$ est un anneau de valuation, c'est-à-dire que tout élément $g \in K$ se décompose en $\pi^m f$ avec $w(f) = 0$, en choisissant g tel que $v(g) = 1$ on obtient :

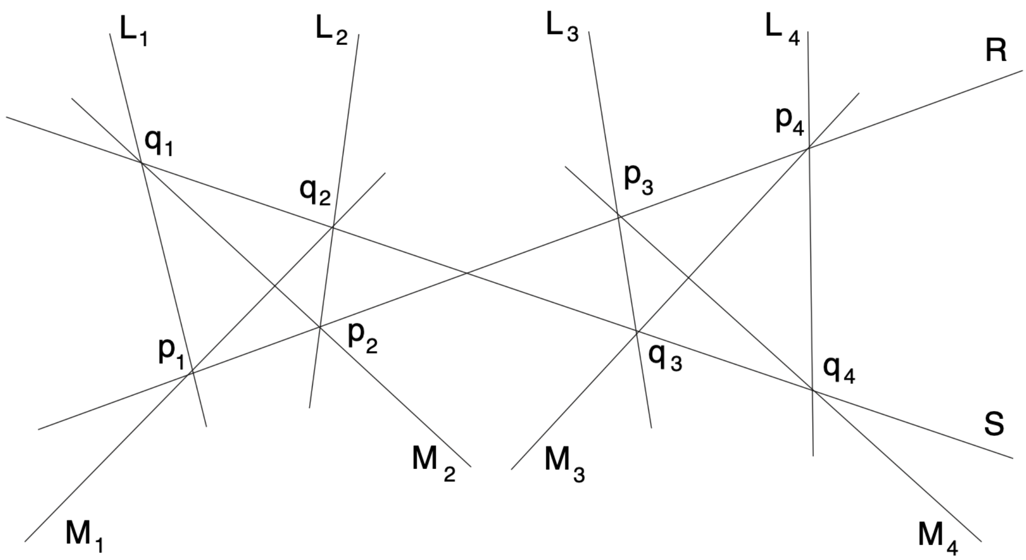
$1 = v(g) = mv(\pi)$

comme $v(\pi) \geq 0$ on a que $m = 1$ et surtout $v(\pi) = 1$ ce qui permet de conclure que $v = w$.

Remarque 2.5. Ce théorème nous permet de déduire la remarque que j'ai donnée précédemment, à savoir que sur $k(P_k^1) = k(t)$ les seules valuations sont de la forme $v = v_a : v_a(f) = \nu$ telle que $f = (t-a)^\nu \frac{p(t)}{q(t)}$ avec $p(a) \neq 0$ et $q(a) \neq 0$. En effet, C_v est dans ce cas une sous-variété stricte de $\mathbb{P}_k^1$ non vide, elles sont toutes de codimension 1, c'est un point $\{a\}$, le théorème conclut.

3 Le contre-exemple d'Artin et Mumford

On considère la configuration de droite suivante :



On suppose que R et S sont définies par les polynômes : $x = 0$ et $y = 0$.

l_i , m_i des polynômes de degré 1 de $\mathbb{C}(x, y)$ définissant ces droites, l'important est que ces droites s'intersectent en des points communs, ainsi **les polynômes suivants ont des zéros communs et de multiplicité connue**.

On pose :
$g_1 = l_1 l_2 m_1 m_2$
$g_2 = l_3 l_4 m_3 m_4$
$f = xy$

Définissons la forme quadratique sur le corps $K = \mathbb{C}(x, y)$:
$\varphi =< 1, -f, -g_1 g_2 >$

Elle définit un schéma projectif sur $\mathbb{C}(x, y)$ par l'équation :

$$X_0^2 - fX_1^2 - g_1 g_2 X_2^2 = 0$$

que nous notons Q_φ, notation que nous avions déjà définie dans la partie précédente. Et notons L le corps des fonctions de Q_φ : $K(Q_\varphi)$. L est par définition une extension de $\mathbb{C}(x, y)$ mais aussi une extension de $\mathbb{C}$ et c'est comme ça que nous allons considérer L par la suite. Nous allons montrer que $\boldsymbol{I_{nr}(L) \neq \{0\}}$.

Faisons quelques remarques avant de traiter le problème, la variété que l'on a définie n'a pas de point dans K, cette variété est donc **vide du point de vue géométrique**, cependant ce n'est pas le cas du point de vu schématique.

Remarque 3.1. Nous pouvons aussi voir cette variété d'un autre point de vue, f, g_1 et g_2 sont des polynômes en x et y, nous pouvons les homogénéiser en rajoutant une variable z, ainsi on obtient une équation homogène en les variables X_0, X_1 et X_2 et homogène en les variables x, y et z, l'équation donne une nouvelle variété sur $\mathbb{C}$ qui se plonge dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. On peut montrer que cette variété sur $\mathbb{C}$ à le même corps de fonctions que celle initiale sur K, ainsi on aura au passage trouvé une variété complexe non rationnelle.

Une remarque importante pour la suite est que φ est voisine de la forme de Pfsiter :

$$\tau =\ll f, g_1 g_2 \gg =< 1, -f, -g, f g_1 g_2 >$$

Nous introduisons :
$\alpha_1 =\ll f, g_1 \gg$
$\alpha_2 =\ll f, g_2 \gg$
Regardons l'application :

$$W(K) \to W(L)$$

comme $L = K(\mathbb{Q}_\varphi)$ et $\dim \varphi > \frac{1}{2} \dim \tau$ le théorème nous donne que le noyau de cette application est : $W(K)\tau$. Sauf que comme $I(K)\tau \subseteq I(K)^3 = 0^*$ on a même : $W(K)\tau = \{0, \tau\}$.

*Nous détaillerons ce fait là dans la partie 4.2.

Ensuite, on remarque que : $\alpha_1 - \alpha_2 =< -g_1 > \tau$, ainsi α_1 et α_2 ont la même image dans $W(L)$, nous la notons β. Nous allons montrer que $\boldsymbol{\beta \neq 0}$ **et** $\boldsymbol{\beta \in I_{nr}(L)}$.

Pour la non nullité on va montrer que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$ dans $W(L)$ ainsi si $\beta = 0$ on aurait que $\alpha_1 = \alpha_2 = \tau$.

Maintenant on veut montrer que $\mathbf{Ram}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varnothing}$, mais comme β est image de α_1 on sait que cet ensemble est inclus dans $\mathrm{Ram}(\alpha_1)$, de même il est inclus dans $\mathrm{Ram}(\alpha_2)$, on va montrer que l'intersection est vide.

Étudions $\boldsymbol{v \in}$ **Ram** $\boldsymbol{(\alpha_1)}$, c'est une valuation du corps $K(Q_{\alpha_1})$, en fait on va la restreindre au corps $K = \mathbb{C}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$, ainsi son centre C_v sera vu comme un sous-variété de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$, on va montrer que les possibilités sont restreintes, ensuite on fera de même pour $\mathrm{Ram}(\alpha_2)$ et on remarquera que les possibilités pour les centres sont disjointes.

Une remarque à garder en tête est qu'on ne peut pas avoir $v(f)$ et $v(g_1)$ pairs, sinon on calcule facilement, $\partial_v \alpha_1 = 0$ par la description explicite de ∂_v.

Premièrement si $\boldsymbol{C_v}$ **est une courbe**, c'est une sous-variété de codimension 1, d'après la propriété 2.7 v est la valuation associée à cette courbe, et alors f ou g_1 doit s'annuler sur toute la courbe, sinon : $v(f) = v(g_1) = 0$. Donc C_v est R, S, L_1, L_2, M_1, M_2, montrons que ce ne pas être R, et ce sera de même pour S.

Si $C_v = R$ alors $v(f) = 1$ et $\bar{g_1} \in \mathbb{C}(v) = \mathbb{C}(R) = \mathbb{C}(y)$ est un polynôme de degré 4 qui s'annule deux fois en p_1 et deux fois en q_1, c'est donc un carré. On a donc :

$\partial_v \alpha_1 = \partial_v < 1, -f, -g1, fg1 >=< -\frac{\bar{f}}{x} > + < \frac{\bar{f}}{x}\bar{g_1} >=< -\frac{\bar{f}}{x} > + < \frac{\bar{f}}{x} >= 0$

Donc si C_v est une courbe c'est L_1, L_2, M_1 ou M_2.

De plus si v est la valuation associée à L_1 on montre par les mêmes arguments que : $\partial_v \alpha_1 \neq 0$, ce qui a pour conséquence de vérifier que $\alpha_1 \neq 0$.

Maintenant si $\boldsymbol{C_v}$ **est un point** de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$, notons le p. Dans ce cas là on a que $v(f)$ et $v(g_1)$ doivent être impairs, en effet supposons $v(f)$ pair, par multipliant par un carré adapté on peut supposer $v(f) = 0$, montrons que $\bar{f} \in \mathbb{C}(v)$ est un carré et on conclura par le même dernier calcul. Pour cela remarquons que, $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\mathbb{C}, p} \subseteq \mathcal{A}_v$ car $v(f) = 0$, sauf que par définition du centre, $\mathcal{M}_p \supseteq \mathcal{P}_v \cap \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\mathbb{C}, p}$, ainsi l'inclusion précédente se factorise en : $\bar{f} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_\mathbb{C}, p}/\mathcal{M}_p = \mathbb{C}(p) \subseteq \mathcal{A}_v/\mathcal{P}_v = \mathbb{C}(v)$, or comme p est un point, $\mathbb{C}(p) = \mathbb{C}$. Et comme tout élément de $\mathbb{C}$ est un carré, $\bar{f}$ est un carré, ce qui conclut.

La dernière remarque nous permet de restreindre p à p_1, p_2, q_1, q_2.

Finalement on obtient que :
si $\boldsymbol{v \in}$ **Ram** $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{C_v \in \{L_1, L_2, M_1, M_2, p_1, p_2, q_1, q_2\}}$.
De même :
si $\boldsymbol{v \in}$ **Ram** $\boldsymbol{\alpha_2}$, $\boldsymbol{C_v \in \{L_3, L_4, M_3, M_4, p_3, p_4, q_3, q_4\}}$.

Ce qui montre que **Ram** $\boldsymbol{\alpha_1 \cap}$ **Ram** $\boldsymbol{\alpha_2 = \varnothing}$, et on a aussi montré que ces deux ensembles sont non vides, en effet, la valuation associée à L_1 est dans $\mathrm{Ram}(\alpha_1)$. Ce qui à pour conséquence de montrer que α_1 et α_2 sont non nuls et différents, on a tous les arguments pour conclure.

4 Démonstration des résultats manquants

4.1 Démonstration du théorème 2.3

Dans cette partie nous allons démontrer que la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow W(k) \longrightarrow W(k(t)) \xrightarrow{\oplus_p \partial_p} \bigoplus_p W(k[t]/(p)) \longrightarrow 0$$

Pour cela nous allons suivre la démonstration du [4] T. Y. Lam IX.3.1. Pour cela on pose :

L_d le sous-anneau de $W(k(t))$ engendré par les $< f >$ où $\deg f \leq d$.

(Remarque : L_d contient tout les $< f >$ où f est produit d'irréductibles de degré plus petit que d.)

On a de manière évidente une suite exacte :

$$0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow W(k(t)) \longrightarrow \bigoplus_{d \geq 1} L_d/L_{d-1} \longrightarrow 0$$

L'injection fonctorielle $W(k) \hookrightarrow W(k(t))$ définit un isomorphisme : $W(k) \cong L_0$. Ensuite nous allons construire un isomorphisme : $\bigoplus_p W({}^{k[t]}\!/_{(p)}) \cong \bigoplus_{d\geq 1} {}^{L_d}\!/_{L_{d-1}}$ de sorte à ce que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & W(k(t)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] & \bigoplus_{d\geq 1} {}^{L_d}\!/_{L_{d-1}} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W(k) \arrow[r] & W(k(t)) \arrow[r] & \bigoplus_p W({}^{k[t]}\!/_{(p)}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En fait on va montrer que :
$\bigoplus_{\deg p = d} \partial_p : {}^{L_d}\!/_{L_{d-1}} \to \bigoplus_{\deg p = d} W({}^{k[t]}\!/_{(p)})$
est un isomorphisme.

Premièrement cette application est bien définie en effet, si $\deg \pi = d$ et $< f > \in L_{d-1}$ on ne peut pas avoir $\pi \mid f$ est donc $\partial_p < f > = 0$.

On va pouvoir construire une réciproque qu'on va noter v_p définie par :
$v_p(\bar{g}) = < pg > + L_{d-1}$
On vérifie que cela ne dépend pas du représentant de la classe de $\bar{g}$.
On a facilement que :

$$\partial_p \circ v_p = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad \partial_p \circ v_{p'} = 0 \quad \text{pour } p \neq p'.$$

ainsi :

$$\bigoplus_{\deg p = d} \partial_p \circ \bigoplus_{\deg p = d} v_p = \mathrm{id}$$

Il suffit maintenant de montrer que chaque v_p est surjectif.

L_d est engendré additivement par les $< p_1 \dots p_r g_1 \dots g_m >$ où les p_i sont irréductibles unitaires de degré d et $\deg g_i < d$.

Si $r = 1$ la forme quadratique précédente est dans l'image de $\bigoplus_{\deg p = d} v_p$ car $v_{p_1}(\overline{g_1 \dots g_n}) = < p_1 g_1 \dots g_n > + L_{d-1}$ et $v_p(\overline{g_1 \dots g_n}) = 0$ pour $\deg p = d$ et $p \neq p_1$.

Maintenant nous allons montrer que nous pouvons passer du cas r au cas $r+1$:

posons $h = p_1 - p_2$, $\deg h < d$. La forme quadratique $< p_2, h >$ est isométrique à $< p_1, p_1 p_2 h >$ via le changement de variable : $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & -p_2 \end{pmatrix}$.

Ainsi on a dans $W(k(t))$ l'égalité : $< p_1 > = < p_2 > + < h > - < f_1 f_2 h >$
en multipliant par $< p_2 \dots p_{r+1} g_1 \dots g_n >$ on obtient l'égalité :
$< p_1 \dots p_{r+1} g_1 \dots g_n > = < p_3 \dots p_{r+1} g_1 \dots g_n > + < p_2 \dots p_{r+1} > - < p_1 p_3 \dots p_{r+1} g_1 \dots g_n >$
le cas r nous donne que le membre de droite est dans l'image de $\bigoplus_{\deg p = d} v_p$ ainsi la récurrence permet de conclure.

4.2 $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_m)$ est un corps C_m

Dans la démonstration de la non rationnalité du contre exemple de Artin et Munford nous avons eu besoin du fait que $I(K)^3 = 0$ où K était $\mathbb{C}(t_1, t_2)$. Pour montrer cela remarquons que $I(K)^3$ est engendre par les formes de Pfisters de dimension $2 \times 3 = 6$, montrons qu'elles sont toutes nulles, c'est-à-dire métaboliques et même isotropes suffit par la propriété de multiplicativitée des formes de Pfisters. Pour celà il suffit de remarquer qu'une forme : $a_1 X_1^2 + \dots + a_6 X_6^2$ à coefficients dans $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ représente (non trivialement) 0. Cela est conséquence du théorème que nous allons montrer, $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ est un corps C_2.

Définition 4.1. Soit K un corps, on dit qu'il est C_m si, pour $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré d, $F = 0$ admet une solution non triviale dès que $n > d^m$.

Si $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ est bien un corps C_2, comme $6 > 2^2$ on pourra conclure. Nous allons montrer plus généralement :

Théorème 4.1. Soit k un corps algébriquement clos, $k(t_1, \dots, t_m)$ est un corps C_m.

Nous voulons démontrer ce théorème par récurrence mais pour faire marcher l'hérédité nous avons besoin d'une hypothèse de récurrence plus large, nous allons démontrer une version plus générale, le théorème précédent est le cas $r = 1$.

Théorème 4.2. Soit k un corps algébriquement clos et $K = k(t_1, \ldots, t_m)$, si $F_1, \ldots, F_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ sont homogènes de degrés au plus d et si $n > rd^i$ alors $F_1, \ldots, F_r$ admettent un zéro non trivial commun.

Démonstration 4.1. Comme annoncé nous allons montrer cela par récurrence, on va premièrement montrer le cas $m = 0$, c'est-à-dire que $k = K$.

Introduisons, la k-algèbre $B = k[X_1, \ldots, X_n]$ et la sous-algèbre $A = k[F_1, \ldots, F_r]$ et $\mathfrak{a}$ l'idéal de B engendré par $F_1, \ldots, F_r$.

Dans un premier temps on va montrer que B est finiment engendré par A.

Par le Nullstellensatz on peut trouver un entier $N \geq 1$ tel que $X_i^N \in \mathfrak{a} \forall i$, et posons C la k-algèbre engendrée par A et $\{X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}, 0 \leq i_1, \ldots, i_n \leq N\}$, c'est bien sur un A-module de type fini, on va montrer que $C = B$.

Par l'absurde prenons $f \in B \backslash C$ de degré minimal, on peut supposer que c'est un monôme, $f = X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n}$

comme $f \notin C$ on a un $j_k \geq N$, mais comme $X_k^N \in \mathfrak{a}$:

$X_k^N = \sum_{i=1}^{r} G_i F_i$

et on peut choisir $degG_i = N - degF_i$.

$f = \sum_{i=1}^{r} X_1^{j_1} \ldots X_k^{j_k - N} \ldots X_n^{j_n} G_i F_i$

et comme $degX_1^{j_1} \ldots X_k^{j_k-N} \ldots X_n^{j_n} G_i < degf$ on a par minimalité de $degf$ que $X_1^{j_1} \ldots X_k^{j_k-N} \ldots X_n^{j_n} G_i \in C$ et comme $F_i \in C$ on aurait $f \in C$.

Ainsi B est de type fini sur A est donc $k(X_1, \ldots, X_n)$ est une extension finie du $k(F_1, \ldots, F_r)$, or si $n > r$ cela est strictement impossible.

Supposons maintenant $m \geq 1$ et supposons le théorème vrai pour $K' = k(t_1, \ldots, t_{m-1})$.

Nous pouvons supposer que les coefficients des F_i sont à valeur dans $k[t_1, \ldots, t_m]$,notons h le degré maximal les F_i en t_m.

Introduisons de nouvelles variables polynomiales, $X_{j,k}$ et faisons la substitution :

$X_j = \sum_{k=0}^{N} X_{j,k} t_m^k$

où N peut être choisi aussi grand que l'on veut.

on a :

$$F_i = \sum_{k=0}^{Nd+h} G_{i,k}(X_{1,0}, \ldots, X_{n,N}) t_m^k$$

où les $G_{i,k}$ sont à coefficients dans K'. En choisissant N assez grand pour que $n(N+1) > r(Nd + h + 1)d^{m-1}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver un zéro non trivial commun au $G_{i,k}$ ce qui conclut.

Pour finir cette partie voilà un théorème qui m'a parut intéressant de présenter pour sa démonstration, il n'est cependant pas utilisé dans ce rapport.

Propriété 4.1. Si K est un corps C_m et L une extension algébrique de K, alors L est C_m.

Démonstration 4.2. Nous aurons besoin plusieurs fois de faire intervenir la norme d'un élément $x \in M$ où M est un A-module libre de rang fini, dans le cadre général :

$$\begin{array}{ccc} M & \to & M \\ y & \mapsto & xy \end{array}$$

est une application A linéaire, nous notons $N_A(x)$ son déterminant, on l'appelle la norme de x.

Prenons $F \in L[X_1, \ldots, X_n]$ de degré d avec $n > d^i$ qui par l'absurde n'aurait pas de zéro non trivial.

Remplaçons L par le corps engendré par K et les coefficients de F, on peut donc supposer que L est de dimension finie sur K, qu'on note m.

Posons $N_{K[X_1,\ldots,X_n]}(F) = G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ homogène de degré dm.

Pour $\xi \in K^n$, comme $G(\xi) = N_K(F(\xi))$ et comme F ne s'annule pas non trivialement c'est aussi le cas pour G.

On va construire une suite de polynômes :

$F_1 = F$

pour $k \geq 1$:

$F_k(X_1, \ldots, X_{n^k}) = F_{k-1}(F(X_1, \ldots, X_n), \ldots, F(X_{n^k-n+1}, \ldots, X_{n^k}))$

On a que $F_k \in L[X_1, \ldots, X_{n^k}]$ est homogène de degré d^k et car F n'a pas de zéro non trivial on montre par récurrence que c'est aussi vrai pour tous les F_k.

Mais alors en posant $G_k = N_{L[X_1,\ldots,X_{n^k}]}(F_k)$ est homogène à coefficients dans K de degré $d^k m$ on aurait alors par la remarque précédente sur G que G_k ne s'annule pas trivialement, or ceci est faux pour k assez grand dès que $n^k > (d^k m)^i$ car K est C_m.

5 Un autre exemple de variété rationnelle non rationnelle

Cet exemple peut être retrouvé dans l'article [7], initialement traité par de la cohomologie galoisienne, ici je retranscris l'exemple par les méthodes développées dans ce rapport.

On considère la quadrique suivante définie sur le corps $K = \mathbb{C}(x, y)$:

$$xS^2 + yT^2 + U^2 + xyF(x, y, 1)V^2 = 0$$

où $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ qui n'est pas un carré dans K.

C'est la variété algébrique sur K de la forme quadratique : $q =< 1, x, y, F(x, y, 1)xy >\in W(K)$.

Notons $L = K(q)$ le corps des fonctions de cette quadrique.

Considérons la forme de Pfister $\alpha =\ll x, y \gg=< 1, x, y, xy >\in W(K)$, et α' son image dans $W(K(Q))$.

Premièrement, $\alpha' \neq 0$. Par l'absurde, supposons que $\alpha' = 0$ dans $W(L)$ on a par proposition que $\alpha' \simeq c \cdot q$ sauf que le discriminant de α' est un carré et celui de q non, ce qui contradictoire avec l'isométrie, donc $\alpha' \neq 0$.

On veut montrer que α' n'est pas ramifiée, ainsi on aura montré que $I_n r(L) \neq 0$ et ainsi la quadrique n'est pas rationnelle.

On prend donc une valuation v de $W(L)$, on veut montrer que $\partial_v \alpha' = 0$. v induit une valuation sur K qu'on note v_K.

Remarque 5.1. Par contre α n'est pas non ramifié, en effet on a par exemple :

$\partial_x(\alpha) =\ll y \gg\neq 0$

Par contre, si $\partial_{v_K}\alpha = 0$, alors, $\partial_v \alpha' = 0$. C'est une simple conséquence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} W(K) & \longrightarrow & W(L) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_{v_K}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_v} \\ W(k(v_K)) & \longrightarrow & W(k(v)) \end{array}$$

On aura besoin de la proposition suivante :

Propriété 5.1. Si F(x,y,z) est un carré dans $k(v)$ alors $\partial_v \alpha' = 0$.

Démonstration 5.1. Nous en donnons ici une esquisse, à l'instar de la construction du corps p-adique $\mathbb{Q}_p$ on peut compléter K pour la norme induite par v : $\pi^{v(\cdot)}$. On note K_v le corps obtenu. Le morphisme δ_v se factorise en :

$$W(K) \to W(K_v) \to W(k(v))$$

les flèches sont naturelles, en effet $k(v)$ est aussi un corps résiduel de K_v.

Comme $F(x, y, z)$ est un carré dans $k(v)$ ça l'est aussi dans K_v

On va procéder par disjonction de cas selon sa codimension du centre de v_K, $C_v \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$,.

-Si C_v est de codimension 1 :

On sait par la proposition 2.5 que v_K est la valuation associée à son centre, on en déduit alors que C_v ne peut être qu'une des droites L_x , L_y ou L_z.

Si par exemple v_K est la valuation associée à L_x alors, $F(x, y, z) = (y - z)^2$ dans $k(v)$, c'est un carré non nul, par la proposition, $\partial_v \alpha' = 0$.

-Si C_v est de codimension 2, c'est-à-dire un point $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:
p est sur l'une des droites L_x, L_y ou L_z.

1) Si p n'est sur aucune intersection, par exemple si $p \in L_x$, $y \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},p} \backslash \mathcal{M}_p$ et donc sa classe dans $\mathbb{C}(v)$ est en fait dans $\mathbb{C}(p)^* = \mathbb{C}^*$, donc c'est un carré non nul et de plus $v(x) = 1$, on en déduit que $\partial_v(\alpha) = 0$.

2) Si p et à l'intersection de $(x = 0)$ et $(y = 0)$, $F(x, y, 1) = 1$ dans $k(v)$, c'est donc un carré non nul, par la proposition, $\partial_v \alpha' = 0$.

On a montré ce que l'on voulait.

Références

[1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[2] B. Kahn, *Formes Quadratiques sur un Corps.*

[3] A. Quéguiner-Mathieu, *Galois Cohomology, Quadratic Forms and Milnor K-Theory.*

[4] T. Y. Lam, *Introduction to Quadratic Forms over Fields*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 67, American Mathematical Society, 2005.

[5] A. Pirutka, *Varieties That Are Not Stably Rational, Zero-Cycles and Unramified Cohomology*, Oberwolfach Reports, 2016.

[6] M. Ojanguren, *The Witt Group and the Problem of Lüroth*, Manuscripta Mathematica, Vol. 70, No. 3, 1991, pp. 243–248.

[7] B. Hassett, A. Pirutka, and Y. Tschinkel, *Stable Rationality of Quadric Surface Bundles over Surfaces*, Acta Mathematica, Vol. 220, No. 2, 2018, pp. 341–405.

[8] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés Unirationnelles Non Rationnelles : Au-delà de l'Exemple d'Artin et Mumford*

[9] D. Perrin, *Géométrie Algébrique : Une Introduction*, Ellipses, 1995.