Rapport de stage de M1:
Complexité topologique, sommes connexes et maximalité.

Nicolas HEITZ

Février-Juillet 2024

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation générale

La notion de complexité topologique introduite en 2003 par Farber vise à proposer une mesure de la complexité à déterminer, pour un système mécanique donné, une manière de passer d'un état initial à un état final. Autrement dit, dans un espace d'états donnés, quelle est la difficulté à créer un algorithme permettant, avec la donnée de l'état A initial et de l'état B final, de trouver un chemin de A vers B. L'idée est alors la suivante : si l'on modifie peu les deux états A et B, il semblerait logique de ne pas modifier trop le chemin les reliant. On cherche donc à créer un algorithme "continu". Mais cette continuité locale n'est en général pas réalisable globalement, d'où la question :

Quelle est le nombre minimal de règles, définies localement de manière continue, nécessaires pour déterminer un algorithme fonctionnant pour toute paire d'états A et B ?

On peut traduire cela mathématiquement, donnant alors la définiton suivante :

Définition 1.1 (Complexité Topologique)**.**
Soit X un espace connexe par arcs (l'espace des configurations du système), et X^I l'espace des chemins dans X ($I = [0;1]$). On note $p : \gamma \in X^I \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \in X \times X$.

La complexité topologique de l'espace X est donnée par : $TC(X) = min\{k \in \mathbb{N}, \exists\ U_0, \dots U_k, s_i : U_i \to X^I, \bigcup U_i = X \times X\}$ avec les U_i ouverts dans X et s_i une section locale continue de p, ie $p \circ s = id_{U_i}$.
Chaque s_i est donc un algorithme de planification localement continu. La donnée de tous les s_i permet de construire un algorithme global.
Si $TC(X) = 0$, c'est qu'il existe une section globale et continue de p (donc un alogorithme global).

C'est l'étude de cette notion qui a été au coeur du stage effectué. Elle est notamment reliée à des notions déjà existantes, parfois plus générales ($LS - category$, *secat* ...). Il s'agit d'un invariant homotopique, qui, d'un point de vue purement mathématique, au-delà de la motivation précédemment présentée, est relié au problème de l'immersion des espaces projectifs réels (problèmes assez récurrent et encore ouvert), et fournit un invariant sur les groupes qui n'a pour l'instant pas été identifié à un invariant algébrique déjà connu.

Pour étudier TC, on utilise essentiellement des outils de topologie algébrique et d'algèbre générale, qui vont être en partie présentés dans la suite de ce rapport.

Dans le cas d'un CW-complexe X connexe par arcs, on peut obtenir la majoration suivante :

Proposition 1.2. $TC(X) \leq 2dim(X)$

Cette borne supérieure peut-être atteinte, uniquement lorsque l'espace n'est pas simplement connexe, et on dit alors que l'espace a complexité topologique maximale. Cette question de la maximalité (ou non) de TC peut se ramener à une caractérisation purement algébrique. A ce sujet, on peut noter, par exemple, les résultats suivants :

Théorème 1.3.

1. *Toute surface de genre ≥ 2 a complexité topologique maximale. A l'inverse, toute surface de genre < 2 a complexité topologique non maximale.*
2. *Il existe des classes de groupes abéliens G tels que toute n-variété d'une dimension n donnée et ayant pour groupe fondamental G a TC non maximal (ie $TC(\mathcal{M}) < 2n$).*

Ce sont des généralisations de tels résultats qui ont été étudiées, notamment autour des questions suivantes :

— En généralisant les surfaces orientables (qui sont des sommes connexes de tores de dimension 2) à des dimensions supérieures, que peut-on dire de $TC(\mathbb{T}^n \# \mathbb{T}^n)$?

— Peut-on trouver de nouvelles classes de groupes vérifiant (2.), ou bien être capable de créer des contre-exemple à la généralisation d'une telle propriété, c'est-à-dire des variétés avec TC maximal pour un groupe fondamental donné ?

— L'opération de somme connexe étant au coeur des théorèmes de classification des variétés, peut-on mieux comprendre la complexité topologique des/de certaines sommes connexes ?

Le développement qui va suivre vise donc à apporter des réponses ou éléments de réflexion concernant ces problématiques.

1.2 Cadre et déroulement du stage

Le stage s'est déroulé au Portugal dans la ville de Braga, sur le campus de l'Université du Minho, et plus particulièrement au sein du CMAT (Centro de Matematica), l'unité de recherche affiliée au département de mathématiques de l'université (DMAT). J'ai travaillé sous la direction et en collaboration avec Lucile Vandembroucq, professeure associée au DMAT et chercheuse en topologie algébrique, dans l'unité "Geometry, Topology and Applications". Nous avions des rendez-vous hebdomadaires ou bi-hebdomadaires, d'une demi-journée, pour travailler ensemble, qu'elle me présente des notions à étudier, ou que je lui propose mes idées développées au cours du reste de la semaine.

Le stage a commencé par un travail d'un peu plus d'un mois consistant en des lectures d'articles afin de comprendre les différentes techniques utilisées pour le calcul de TC, et les outils généraux de topologie algébrique associés. Par la suite, plusieurs semaines ont été dévouées au traitement d'un exemple encore indéterminé, dont la résolution constituait l'objectif initialement fixé du stage. Le calcul associé à cet exemple n'a malheureusement pas abouti, mais a cependant conduit à modifier la conjecture initiale. De plus, les nombreuses tentatives effectuées sur cet exemple m'ont permis d'acquérir une bonne intuition sur la notion étudiée, et donc de développer, durant la fin du stage, quelques résultats originaux et extensions de résultats existants.

Il est à noter que toute la durée du stage à été ponctuée de conférences données par des chercheurs en visite à l'université. Plus notablement, j'ai pu participer le 10 mai à un séminaire de géométrie et topologie dans la ville de Coïmbra, où étaient présents de nombreux géomètres du pays. Finalement, le 28 juin a eu lieu, à Braga et organisé par Mme Vandembroucq, une journée de topologie centrée autour de TC, où j'ai pu faire une présentation de 30 minutes devant différents chercheurs invités, dont Michael Farber, chercheur à l'origine de la notion de complexité topologique.

Chapitre 2

Résultats généraux

2.1 Outils de topologie algébrique

Certains outils sont requis pour pouvoir énoncer et démontrer les principaux résultats du présent rapport. Nous allons donc essayer de les présenter succintement, en donnant une intuition la plus précise possible à chaque fois, sans s'attarder sur des preuves trop longues ou vérifications de certaines caractérisations. A chaque fois, on donnera une référence canonique où ces notions "classiques" sont très rigoureusement présentées. Nous supposons connus les résultats et concepts d'un cours de topologie algébrique de M1 (groupe fondamental, homologie, complexes de chaînes, CW-complexes, revêtement universel etc...)

2.1.1 Rappels de cohomologie

Définition 2.1. *Pour un espace X et un groupe abélien G, on définit les n-cochaînes singulières comme le groupe $C^n(X;G) = Hom(C_n(X);G)$ où $C_n(X)$ (les n-chaînes singulières) est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les $\sigma : \Delta^n \to X$. (Δ^n étant le n-simplexe).*
Muni de la dérivation $\delta : C^n(X;G) \to C^{n+1}(X;G)$ qui agit via $\delta(\varphi) = \varphi \circ \partial$ (où ∂ est la dérivation usuelle sur les chaînes singulières), $C^*(X;G)$ est un complexe de cochaînes, qui induit donc une homologie notée $H^*(X;G)$ et appelée ***cohomologie de X à coefficients dans G****.*

Remarque 2.2. De même que pour l'homologie singulière, on dispose pour la cohomologie des concepts et résultats classiques : cohomologie réduite, cohomologie relative, morphismes induits par les applications continues, invariance par homotopie, excision, suite de Mayer-Vietoris et cohomologie cellulaire.

Propriété 2.3. *Si G est un anneau (noté $\mathcal{R}$), φ une k-cochaîne, ψ une l-cochaîne et $v_0, \dots, v_{k+l}$ les sommets d'un $(k+l)$-simplexe σ, on peut définir l'opération :*

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \dots, v_{k+l}])$$

qui est associative et distributive sur l'addition usuelle. Elle passe au quotient, et fournit à $H^*(X;\mathcal{R})$ une structure d'anneau gradué. Cette opération est appelée ***cup produit****, il est commutatif si $\mathcal{R}$ est commutatif.*

Nous n'en dirons pas plus sur les propriétés de la cohomologie et du cup produit, renvoyant le lecteur à [Hat02] (chapitre 3) pour des explications précises. Il n'est pas nécessaire de comprendre parfaitement la cohomologie pour comprendre les premiers résultats qui seront proposés, juste de savoir que l'on associe un anneau à un espace, de manière homotopiquement invariante.

Propriété 2.4. *Soient M et N deux variétés compactes connexes et orientables de dimension d, on note $M\#N$ leur somme connexe. Alors, la structure additive de l'anneau $H^*(M\#N;\mathcal{R})$ est donnée par :*
$H^0(M\#N;\mathcal{R}) = \mathcal{R}$
$H^i(M\#N;\mathcal{R}) = H^i(M) \oplus H^i(N)$ *pour* $1 \leq i \leq d-1$
$H^d(M\#N;\mathcal{R}) = \mathcal{R}$

De plus, en tant qu'anneau de $H^*(M\#N;\mathcal{R})$ est isomorphe au produit direct de $H^*(M;\mathcal{R})$ et $H^*(N;\mathcal{R})$ avec une identification en degré 0 des éléments unitaires et en degré d des classes caractéristiques.

Remarque 2.5. On utilise ici implicitement le fait suivant : pour des d-variétés connexes et orientables, $H^0(M;\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ (et on appelle "élément unitaire" l'élément identifié à l'unité de cet anneau $\mathcal{R}$) et $H^d(M;\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ (et on appelle **classe caractéristique** l'élément identifié à l'unité de cet anneau $\mathcal{R}$).

2.1.2 Deck transformations

Définition 2.6. *Soit X un espace localement connexe par arcs, et $p : \widetilde{X} \to X$ son revêtement universel. Une* ***deck-transformation*** *de $\widetilde{X}$ est un homéomorphisme $g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tel que $p \circ g = p$.*

Propriété 2.7. *Pour un point $x_0 \in X$ fixé, on a un isomorphisme entre le groupe G des deck-transformations de $\widetilde{X}$ et $\pi_1(X, x_0) = \pi$. De plus, G agit librement sur $\widetilde{X}$.*

Démonstration. Soir $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ un relevé du point x_0. On a alors l'énoncé suivant :

Une deck-transformation est entièrement déterminée par son action sur $\widetilde{x_0}$.

En effet, soit $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$ et $\widetilde{\omega}$ un chemin entre $\widetilde{x_0}$ et $\widetilde{y}$ (ce choix est unique à homotopie près puisque $\widetilde{X}$ est simplement connexe). On pose $\omega = p \circ \widetilde{\omega}$ et $y = p(\widetilde{y})$.
On a alors $\omega = pg \circ \widetilde{\omega}$. Donc $g \circ \widetilde{\omega}$ est un relevé de ω. Par unicité du relevé, c'est le seul relevé de ω commençant en $g(\widetilde{x_0})$. L'élément $g(\widetilde{y}) = g(\widetilde{\omega}(1))$ est alors défini comme le point final de ce relevé. Cette définition ne dépend pas du choix de $\widetilde{\omega}$ puisque les homotopies à extrémités fixées peuvent être relevées. $g(\widetilde{y})$ ne dépend donc que de $g(\widetilde{x_0})$.

On a donc l'isomorphisme suivant :

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$$

défini par $\varphi([\sigma])(\widetilde{x_0}) = \widetilde{\sigma}(1)$ avec $\widetilde{\sigma}$ l'unique relevé de σ commençant en $\widetilde{x_0}$. (Une fois encore, cela ne dépend pas du choix du représentant σ.) Cette application est bien définie par ce qui précède, et fournit bien un isomorphisme (en utilisant le fait que $p^{-1}(\{x_0\}) \simeq \pi_1(X, x_0)$).
Enfin, avec la caractérisation précédemment donnée d'un élément de g, on remarque que si $g(\widetilde{y}) = \widetilde{y}$ pour un certain $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$, alors $g \circ \widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}$, par unicité du relèvement (à extrémités fixées). Dès lors, $g(\widetilde{x_0}) = \widetilde{x_0}$ et donc $g = id$. On en conclut que l'action de G sur $\widetilde{X}$ est libre. □

Avec $\mathbb{Z}[\pi] = \{\sum_i n_i g_i, n_i \in \mathbb{Z} \textit{ presque tous nuls}, g_i \in \pi\}$, cette action s'étend aux simplexes et donne à $C_n(\widetilde{X})$ une structure de $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre pour tout $n \geq 0$. Une base de ces modules est obtenue par des choix de relevés $\{\widetilde{\sigma},\ \sigma \in C_i(X)\}$.

2.1.3 (Co-)Homologie à coefficients locaux

Nous présentons maintenant une généralisation du concept de cohomologie, avec des coefficients dans des $\mathbb{Z}[\pi]$-modules plutôt que des groupes abéliens. Elle utilise la structure de $\mathbb{Z}[\pi]$-module de $C_*(\widetilde{X})$ mentionnée dans le paragraphe précédent. Plus de détails sont donnés dans le chapitre 5 de [DK01] ou le chapitre 6 de [Whi78].

Propriété 2.8. *Soit X un espace connexe par arcs, avec π son groupe fondamental et $x_0 \in X$. La* ***cohomologie de X à coefficients locaux dans le $\mathbb{Z}[\pi]$-module A****, notée $H^*(X; A)$, peut être définie de manière équivalente comme l'homologie d'un des deux complexes de cochaînes suivants :*
- *$Hom_{\mathbb{Z}[\pi]}(\mathcal{C}_*(\widetilde{X}), A)$*
- *$Hom_{\mathbb{Z}[\pi]}(\mathcal{C}_*^{x_0}(\widetilde{X}), A)$ où $\mathcal{C}_*^{x_0}(\widetilde{X})$ est le complexe de chaîne des simplexes $\sigma : \Delta \to X$ avec $p(\sigma(v_i)) = x_0$ pour chaque sommet v_i de Δ. Ici, $p : \widetilde{X} \to X$ désigne le recouvrement universel.*

Remarque 2.9.

1. De même, on peut définir **l'homologie de X à coefficients locaux dans le $\mathbb{Z}[\pi]$-module A**, notée $H_*(X; A)$, comme étant l'homologie d'un des deux complexes :
   — $\mathcal{C}_*(\widetilde{X}) \otimes_\pi A$
   — $\mathcal{C}_*^{x_0}(\widetilde{X}) \otimes_\pi A$
   avec $\otimes_\pi$ désignant l'espace des **coinvariants** de ces produits tensoriels sous l'action de π (ie avec les identifications $g \cdot \sigma \otimes g \cdot a = \sigma \otimes a$).
2. On dispose d'un **cup produit à coefficients**, défini comme le cup produit normal, avec une "multiplication" : $A \times B \to A \otimes B$, pour A et B deux $\mathbb{Z}[\pi]$-modules. Attention, ce cup produit nous fait donc changer de système de coefficients, on n'a plus de structure d'anneau globale pour un système de coefficients locaux fixés.
3. Ces constructions sont compatibles avec les notions déjà existantes : si on munit un anneau $\mathcal{R}$ d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi]$-module trivial, on retrouve $H^*(X; \mathcal{R})$ et $H_*(X; \mathcal{R})$. Le cup produit peut aussi être rendu compatible, via $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \xrightarrow{\times} \mathcal{R}$.

Définition 2.10. *Soit π un groupe et A un groupe abélien sur lequel on a une action de π (par exemple, $\pi = \pi_1(X)$ et A un système de coefficients locaux). Un **homomorphisme croisé** f est une fonction $\pi \to G$ telle que $f(gh) = f(g) + g \cdot f(h)$ pour tout $g, h \in \pi$.*

Propriété 2.11. *Soit X un espace topologique connexe par arcs, avec groupe fondamental $\pi = \pi_1(X, x_0)$ et A un système de coefficients locaux sur X (ie A est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module). En fixant un relevé $\widetilde{x_0}$ de x_0 on crée une bijection entre les homomorphismes croisés $f : \pi \to A$ et les cocycles à coefficients $u : \mathcal{C}_1^{x_0}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\mathbb{Z}[\pi]-mod} A$ de la manière suivante :*
A chaque crossed-homomorphism f, on associe le cocycle u_f via $u_f(\widetilde{\sigma}) = f([\sigma])$ avec $\widetilde{\sigma}$ un relevé du lacet σ dans X basée en x_0, tel que $\widetilde{\sigma}(0) = \widetilde{x_0}$.

2.2 Définitions des invariants et premières propriétés

Définition 2.12. *Une **fibration** est une application continue $p : E \to B$ qui satisfait la propriété de relèvement des homotopies :*
- *pour toute $f : X \to E$, et toute homotopie $H : X \times [0;1] \to B$ telle que $H(.,0) = p \circ f$, il existe une homotopie $G : X \times [0;1] \to E$ avec $H = p \circ G$ et $G(.,0) = f$.*

*Si B est connexe par arcs, on peut vérifier que tous les $p^{-1}(b)$ sont homotopiquement équivalents à un espace F, appelé la **fibre**. L'espace B est appelé la **base** et E, **l'espace total**. Dans ce qui suit, toutes les bases seront connexes par arcs.*

Définition 2.13. *Soit $p : E \to B$ une fibration, on note $secat(p)$ la* categorie sectionnelle *de p, qui est le plus petit entier n tel que B admet un recouvrement par $n+1$ ouverts sur chacun desquels p admet une section. Si un tel entier n'existe pas, on pose $secat(p) = +\infty$.*

Théorème 2.14. *Soit $p : E \to B$ une fibration, alors $secat(p) \geq len(ker(p^*))$ où $p^* : H^*(B) \to H^*(E)$ et $len(I)$ est la longueur du plus grand produit non nul d'éléments de I (ie $I^{len(I)} \neq \{0\}$ et $I^{len(I)+1} = \{0\}$).*

Démonstration. Soit $U_0, U_1, \ldots, U_n$ un recouvrement ouvert de B tel que $n = secat(p)$ et pour chaque $0 \leq i \leq n$, on a une section locale $s_i : U_i \to E$ de p. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ U_i \arrow[ur, "s_i"] \arrow[r, hook, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

En passant à la cohomologie, on obtient :

$$\begin{tikzcd} & ker(p^*) \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed] & \\ H^*(U_i) & H^*(B) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[d, "p^*"] & H^*(B,U_i) \arrow[l, "\sigma_i"'] \\ & H^*(E) \arrow[ul, "s_i^*"] & \end{tikzcd}$$

où la ligne du milieu provient de la suite exacte de cohomologie de la paire (B, U_i). Puisque $ker(p^*) \subset ker(j^*)$, on peut définir un morphisme $ker(p^*) \xrightarrow{f_i} H^*(B, U_i)$, tel que $\sigma_i \circ f_i = id_{ker(p^*)}$.
En combinant ces morphismes pour tout i, on obtient, pour $x_0, x_1, \ldots, x_n \in ker(p^*)$,
$x_0 \cup \cdots \cup x_n = \sigma_0(f_0(x_0)) \cup \cdots \cup \sigma_n(f_n(x_n)) = 0$, puisque les représentants de $\sigma_i(f_i(x_i))$ s'annulent sur U_i et donc le cup produit s'annule sur $B = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
Ainsi, le produit de $n+1$ éléments de $ker(p^*)$ est toujours 0 donc $len(ker(p^*)) \leq n$. $\square$

Définition 2.15. *La **LS-catégorie** d'un espace connexe par arcs X, notée $cat(X)$, est définie par les deux énoncés équivalents suivants :*
- *$cat(X) = min\{n \in \mathbb{N}, \exists\ U_0, \ldots, U_n \subset X$ avec chaque U_i ouvert et contractile dans $X\}$*
- *$cat(X) = secat(ev_1)$ avec $ev_1 : PX \to X$ qui a tout chemin dans X (avec origine fixée en un point $x_0 \in X$) associe son point d'arrivée.*

Théorème 2.16. *Si X est un CW-complexe connexe par arcs, alors $cat(X) \leq dim(X)$.*

Démonstration. Pour les résultats sur cat que nous allons utiliser, on se réfère à [Jam78]. $\square$

Remarque *2.17.* Les théorèmes énoncés sont valables dans des conditions parfois très précises, les hypothèses données ne seront pas toujours les plus faibles. Tous les espaces que nous considérerons en exemples sont des CW-complexes qui vérifieront donc toujours les propriétés topologiques nécessaires pour leur appliquer les théorèmes fondamentaux de la théorie développées.
En l'absence d'hypothèses sur les espaces, nous considérerons par défaut que ce sont des CW-complexes.

Définition 2.18. *La* ***complexité topologique*** *d'un espace topologique connexe par arcs X, notée $TC(X)$ est définie comme la catégorie sectionnelle de la fibration $p : X^I \to X \times X$, avec $I = [0;1]$ et pour $\gamma \in X^I$, $p(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$. Cette fibration a pour fibre ΩX (l'ensemble des lacets pointés en un point x_0).*
Cette définition correspond à ce qui a été énoncé en introduction.

Propriété 2.19. *Si X est un CW-complexe connexe par arcs, alors :*

$$cat(X) \leq TC(X) \leq 2cat(X) \leq 2dim(X)$$

Si $TC(X) = 2dim(X)$, on dit que l'espace a ***complexité topologique maximale****.*

Démonstration. La seconde inégalité découle de $cat(X \times X) \leq 2cat(X)$. En effet, pour X connexe par arcs, on peut créer des sections de $X^I \xrightarrow{p} X \times X$ sur $cat(X \times X) + 1$ ouverts recouvrant $X \times X$, en créant un chemin reliant x et y via celui reliant (x, y) à (x_0, x_0) (donné par les sections locales de $ev_1 : P(X \times X) \to X \times X$). Ainsi, $TC(X) \leq cat(X \times X)$.

Si $TC(X) = k$, alors pour un recouvrement $U_0, \dots, U_k$ de $X \times X$, avec les sections s_i sur chaque U_i, posons les ensembles V_i tels que $\{x_0\} \times V_i = U_i \cap \{x_0\} \times X$. Ils sont ouverts et contractiles. Ainsi, on a $cat(X) \leq k = TC(X)$. $\square$

Propriété 2.20. *Soit $\Delta : X \to X \times X$ l'inclusion diagonale $x \mapsto (x, x)$, alors un élément $u \in H^*(X \times X; A)$ est appelé* ***zero-divisor*** *si $\Delta^*(u) = 0$. Si le cup produit de n zero-divisors est non nul dans $H^*(X \times X; A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)$, alors $TC(X) \geq n$. La longueur maximale d'un tel produit est appelée* ***zero-divisors cup length*** *de X, et notée $zcl(X)$.*

Démonstration. C'est une application de 2.14. Il suffit de voir que p^* et Δ^* ont le même noyau. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\Delta"'] & X^I \arrow[d, "p"] \\ & X \times X \end{tikzcd}$$

avec $\alpha : x \mapsto c_x$ où c_x est le chemin constant en x. α est une équivalence d'homotopie et donc $ker(\Delta^*) = ker(\alpha^* \circ p^*) = ker(p^*)$. $\square$

Remarque *2.21.* Si l'on prend des coefficients dans un corps $\mathbf{k}$ (ou plus généralement si il n'y a pas de torsion) avec l'action triviale de $\pi_1(X \times X)$, alors $\Delta^* : H^*(X \times X; \mathbf{k}) \to H^*(X; \mathbf{k})$ peut être identifié au cup produit $\cup : H^*(X; \mathbf{k}) \otimes H^*(X; \mathbf{k}) \to H^*(X; \mathbf{k})$, via l'isomorphisme de Künneth.

La multiplication dans $H^*(X; \mathbf{k}) \otimes H^*(X; \mathbf{k}) \simeq H^*(X \times X; \mathbf{k})$ est donnée par :
$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (-1)^{|b||c|} a \cup c \otimes b \cup d$, où $|x|$ est le degré de la classe de cohomologie x. (On peut se référer à [Hat02] 3.2 pour plus de précisions.)

Exemple *2.22.* Finissons cet aperçu global de la complexité topologique en la calculant, à l'aide des résultats précédents, pour les sphères $\mathcal{S}^n$ $(n \geq 1)$. Nous allons devoir distinguer le cas des sphères de dimension paire et impaire, commençons pas le cas impair.

Lorsque n est impair, le "théorème de la boule chevelue" assure que $\mathcal{S}^n$ peut être muni d'un champ de vecteurs tangents et unitaires continu. Ainsi, on peut créer deux ouverts recouvrants $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$ avec des sections locales continues de $p : X^I \to X \times X$. Pour le premier, prenons $U_1 = \{(A, B), A \neq -B\}$ l'ensemble des couples de points non antipodaux. On a alors une section continue qui consiste à choisir le chemin le plus court les reliant. Pour U_2, on prend un voisinage ouvert de $\{(A, B), A = -B\}$ en y étendant la section continue qui relie A à $-A$ en suivant le méridien donné par le champ de vecteurs tangents. On obtient alors $TC(\mathcal{S}^n) \leq 1$.

Et puisque $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ est un zero-divisor pour $a \in H^n(\mathcal{S}^n; \mathbf{k}) \simeq \mathbf{k}$ (et 1 le générateur de $H^0(\mathcal{S}^n; \mathbf{k}) \simeq \mathbf{k}$), $zcl(\mathcal{S}^n) \geq 1$. Finalement, il vient par double inégalité que $TC(\mathcal{S}^n) = 1$.

Lorsque n est pair, le théorème de la boule chevelue ne s'applique pas. Ainsi, on peut aussi obtenir une majoration en créant des sections locales continues, mais il nous faut plus d'ouverts. $U_1 = \{(A, B), A \neq -B\}$ muni de la section proposée dans le paragraphe précédent fonctionne toujours. Mais il faut deux ouverts, deux "règles", pour relier les points antipodaux : si l'on se prive d'un point, on peut munir la sphère de dimension paire d'un champ de vecteurs tangents unitaire continu, et donc appliquer une construction similaire à l'ouvert U_2 précédent. On termine finalement de recouvrir $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$ en faisant un choix arbitraire pour la dernière paire de points antipodaux. On obtient donc au moins $TC(\mathcal{S}^n) \leq 2$.

Reprenons notre zero-divisor $a\otimes 1-1\otimes a$, on observe que $(a\otimes 1-1\otimes a)^2 = a\otimes a+(-1)^{n^2} a\otimes a = 2\, a\otimes a \neq 0$. Donc $zcl(\mathcal{S}^n) \geq 2$. Finalement, $TC(\mathcal{S}^n) = 2$.

Chapitre 3

Critère de maximalité

3.1 Théorème de Costa-Farber

Définition 3.1. *Rappelons que $\mathbb{Z}[\pi]$ est défini comme l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum_i n_i g_i$ pour $n_i \in \mathbb{Z}$ et $g_i \in \pi$. Cet ensemble peut être muni d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi \times \pi]$-module via :*

$$(a,b) \cdot \textstyle\sum_i n_i g_i = \sum_i n_i (a g_i b^{-1}) \text{ pour } a,b \in \pi$$

Soit I le noyau de $\sum_i n_i g_i \mapsto \sum_i n_i$, il hérite ainsi d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi \times \pi]$-module. Ces deux ensembles peuvent donc être vus comme des systèmes de coefficients locaux sur $X \times X$, la base de le fibration associée à TC.

Le théorème suivant est fondamental dans la détermination de la maximalité de TC, en particulier lorsque la borne inférieure issue de la cohomologie n'est pas suffisante :

Théorème 3.2. *Soit X un CW-complexe de dimension $n \geq 2$, et π son groupe fondamental, alors il existe une classe de cohomologie $\mathfrak{v}_X \in H^1(X \times X; I)$ tel que :*

$$TC(X) = 2n \text{ si et seulement si } \mathfrak{v}_X^{2n} \neq 0 \text{ dans } H^{2n}(X \times X; I^{\otimes 2n})$$

*De plus, $\mathfrak{v}_X$ est la classe ν_X, le cocycle à coefficients dans I associé au crossed homomorphism $f : (a,b) \in \pi \times \pi \mapsto ab^{-1} - 1 \in I$. Par la suite, $\mathfrak{v}_X$ sera nommé la **classe de Costa-Farber**.*

Démonstration. La preuve de ce point fondamental est le sujet de la section 2 de [CF10]. □

3.2 Bar Résolution

Nous allons désormais présenter une construction permettant d'avoir un point de vue algébrique sur la cohomologie à coefficients, afin d'ensuite pouvoir utiliser efficacement le théorème précédent.

Soit X un espace $K(\pi, 1)$ (*ie* $\pi_n(X) = 0$ for $n \geq 2$ and $\pi_1(X) = \pi$), alors $\widetilde{X}$ est contractile. Alors, la suite exacte suivante fournit une résolution de $\mathbb{Z}$ vu comme $\mathbb{Z}[\pi]$-module trivial :

$$\cdots \to C_2(\widetilde{X}) \xrightarrow{\partial} C_1(\widetilde{X}) \xrightarrow{\partial} C_0(\widetilde{X}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

avec, on le rappelle, $C_i(\widetilde{X})$ muni d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre généré par des choix de relevés $\{\widetilde{\sigma},\ \sigma \in C_i(X)\}$, avec l'action libre à gauche de π par deck-transformations. Ici, ε est l'application $Z[\pi]$-linéaire donnée par $\varepsilon(\widetilde{x}) = 1$ pour tout $x \in X$.

Une autre telle résolution (dont la construction est détaillée dans le chapitre 1 de [Bro82]) est :

$$\cdots \to B_2(\pi) \xrightarrow{\delta} B_1(\pi) \xrightarrow{\delta} B_0(\pi) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

avec $B_i(\pi)$ le $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre généré par l'ensemble $\{[a_1|a_2|\ldots|a_i],\ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i) \in \pi^i\}$, et ε induite par $\varepsilon([]) = 1$. La dérivation est l'application $\mathbb{Z}[\pi]$-linéaire donnée par :

$$\partial([a_1|a_2|\ldots|a_i]) = a_1 \cdot [a_2|a_3|\ldots|a_i] + \textstyle\sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k [a_1|a_2|\ldots|a_k a_{k+1}|a_i] + (-1)^i [a_1|\ldots|a_{i-1}]$$

Par propriété des résolutions libres, il existe une équivalence de chaînes f, compatible avec ε.

Si l'on considère les $\mathbb{Z}$-chaînes $C_*(\widetilde{X}) \otimes_\pi A$ et $B_*(\pi; A) := B_*(\pi) \otimes_\pi A$ avec dérivation $\partial \otimes id$ pour tout $\mathbb{Z}[\pi]$-module A, cette équivalence de chaînes donne :

$$H_*(X; A) = H(B_*(\pi; A))$$

De même, en considérant les cochaînes $Hom_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_*(\widetilde{X}), A)$ et $C^*(\pi; A) := Hom_{\mathbb{Z}[\pi]}(B_*(\pi), A)$ avec dérivation $\delta = \cdot \circ \partial$, on obtient :

$$H^*(X; A) = H(C^*(\pi; A))$$

Essayons de mieux comprendre le lien entre ces chaînes pour essayer de traduire algébriquement les opérations topologiques usuelles. On rappelle que l'on peut considérer les simplexes dans $C_*^{x_0}(\widetilde{X})$ pour définir la (co-)homologie à coefficients locaux. Fixons $\widetilde{x_0}$ un relevé de x_0 et considérons l'application $\mathbb{Z}[\pi]$-linéaire $f : C_*^{x_0}(\widetilde{X}) \to B_*(\pi)$ définie pour $\sigma \in C_n^{x_0}(\widetilde{X})$ tel que $\sigma(v_0) = \widetilde{x_0}$ par :

$$\sigma \mapsto [\sigma(v_0, v_1)| \dots |\sigma(v_{n-1}, v_n)]$$

où $\sigma(v_i, v_{i+1}) \in \pi$ est la classe de $p(\sigma([v_i, v_{i+1}]))$. Pour faire simple, f associe à chaque simplexe basé en $\widetilde{x_0}$ l'élément de $B_*(\pi)$ correspondant à la suite de certaines de ses arêtes qui peuvent être vues comme éléments du groupe fondamental π (après projection sur X). Le fait que $\widetilde{X}$ soit contractile nous permet cette identification, qui conserve assez d'information sur les simplexes pour induire la même (co-)homologie. Pour les simplexes non basés en $\widetilde{x_0}$, on les "translate" par deck transformation avec un coefficient dans π.

Pour obtenir un équivalent du **cross produit** (une opération qui multiplie les classes d'homologie, voir [Hat02], 3.B, pour plus de détails), on utilise la fonction d'Eilenberg-Zilber :

$$EZ : B_*(\pi) \otimes B_*(\pi) \to B_*(\pi \times \pi)$$

qui est la fonction $\mathbb{Z}[\pi] \otimes \mathbb{Z}[\pi] \simeq \mathbb{Z}[\pi \times \pi]$-linéaire définie par :

$$[a_1|a_2| \dots |a_i] \otimes [b_{i+1}| \dots |b_n] \mapsto \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{i,n-i}} sgn(\sigma)[q_{\sigma^{-1}(1)}| \dots |q_{\sigma^{-1}(n)}]$$

avec $q_k = (a_k, 1)$ si $1 \leq k \leq i$ et $(1, b_k)$ sinon. (Ici, $\mathcal{S}_{i,n-i}$ désigne l'ensemble des permutations conservant l'ordre des deux listes, et sgn est le morphisme de signature.)

Avec l'identification proposée, cette application correspond exactement au découpage d'un produit de simplexes $\Delta^i \times \Delta^{n-i}$ en une union de simplexes Δ^n_σ qui est utilisé pour définir le cross produit simplicial dans $C_*(\widetilde{X}) \otimes C_*(\widetilde{X})$ (Cf [Hat02] 3.B). Avec des coefficients locaux, on obtient l'application $\mathbb{Z}$-linéaire :

$$EZ : B_*(\pi; A) \otimes B_*(\pi; B) \to B_*(\pi \times \pi; A \otimes B)$$

qui induit donc le cross produit en homologie à coefficients locaux.

De même, pour le **cup produit**, on utilise la diagonale d'Alexander-Whitney, qui est l'application $\mathbb{Z}[\pi]$-linéaire donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta : & B_*(\pi) \to B_*(\pi) \otimes B_*(\pi) \\ & [a_1| \dots |a_n] \mapsto \sum_{i=0}^{n} [a_1| \dots |a_i] \otimes a_1 \dots a_i [a_{i+1}| \dots |a_n] \end{aligned}$$

avec la $\mathbb{Z}[\pi]$ structure sur $B_*(\pi) \otimes B_*(\pi)$ induite par action diagonale.

Alors, pour des cochaînes $\varphi \in C^i(\pi; A)$ et $\psi \in C^{n-i}(\pi; B)$, on définit :

$$\begin{aligned} \varphi \cup \psi : & B_n(\pi) \xrightarrow{(\varphi \otimes \psi) \circ \Delta} A \otimes B \\ & [a_1| \dots |a_n] \mapsto \varphi([a_1| \dots |a_i]) \otimes a_1 \dots a_i \cdot \psi([a_{i+1}| \dots |a_n]) \end{aligned}$$

Puisque cette diagonale d'Alexander-Whitney correspond au découpage d'un simplexe σ en $\sigma([v_0, \dots, v_i]) \otimes \sigma([v_i, \dots, v_n])$, ce cup produit induit la même opération que le cup produit topologique en cohomologie à coefficients locaux sur X.

Tout ceci est utile pour avoir un point de vue algébrique sur la classe de Costa-Farber quand X est un espace $K(\pi, 1)$. En effet, la classe $\mathfrak{v}_X \in H^1(X \times X, I)$ possède alors un représentant "algébrique" dans $Hom_{\mathbb{Z}[\pi]}(B_1(\pi \times \pi), I)$.

Connaissant l'homomorphisme croisé associé à la classe de Costa-Farber, on utilise 2.11 pour trouver un représentant de $\mathfrak{v}_X$ dans $Hom_{\mathbb{Z}[\pi \times \pi]}(C_1^{(x_0,x_0)}(\widetilde{X} \times \widetilde{X}), I)$. Le représentant "algébrique" peut alors être déduit via notre équivalence de chaînes, et on obtient qu'il s'agit de l'application $\mathbb{Z}[\pi \times \pi]$-linéaire :

$$v : [(g,h)] \mapsto gh^{-1} - 1$$

En utilisant le cup produit précédemment défini, on obtient le représentant suivant pour $\mathfrak{v}_X^n$:

$$\begin{aligned} v^n : B_n(\pi \times \pi) &\xrightarrow{\mathbb{Z}[\pi\times\pi]-mod} I^{\otimes n} \\ [(a_1,b_1)|\dots|(a_n,b_n)] &\mapsto (a_1b_1^{-1}-1)\otimes\cdots\otimes a_1\dots a_{n-1}(a_nb_n^{-1}-1)(b_1\dots b_n)^{-1} \end{aligned}$$

3.3 Cas des variétés

Nous avons désormais un représentant algébrique de la puissance $2n$ de la classe de Costa-Farber, dont on souhaite savoir si elle s'annule. Quand X est une variété (que l'on notera alors plutôt M) de dimension $n \geq 2$ on peut alors appliquer la dualité de Poincaré ([DK01] théorème 5.7) pour avoir :

$$TC(M) < 2n \Leftrightarrow \mathfrak{v}_M^{2n} \cap [M \times M] = 0 \in H_0(M \times M; I^{\otimes 2n} \otimes \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq I^{\otimes 2n} \otimes_{\pi\times\pi} \widetilde{\mathbb{Z}}$$

avec $[M \times M] \in H_{2n}(M \times M; \widetilde{\mathbb{Z}})$ la classe fondamentale de la $2n$-variété $M \times M$, et $\widetilde{\mathbb{Z}}$ son **module d'orientation**. (On a $\widetilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ comme ensemble avec action triviale de $\pi \times \pi$ dans le cas orientable. Dans le cas non-orientable, l'action de $\pi \times \pi$ est parfois une multiplication par -1, prenant en compte les changements d'orientation.) En utilisant la formule de Künneth $[M \times M] = [M] \times [M]$ pour $[M] \in H_n(M; \widetilde{\mathbb{Z}})$, la classe fondamentale de M.

L'opération $\cap$ (que nous ne détaillerons pas ici) peut être vue dans ce cas précis comme l'évaluation de $\mathfrak{v}^{2n} \otimes id_{\mathbb{Z}}$ sur un représentant $\Omega \otimes_{\pi\times\pi} 1 \in B_{2n}(\pi\times\pi) \otimes_{\pi\times\pi} \widetilde{\mathbb{Z}}$ de $[M \times M] = [M] \times [M]$. Trouver ce représentant algébrique de la classe fondamental dépend fortement de la variété M, mais si cela est possible, on se réduit alors au calcul suivant :

Est-ce que $v^{2n}(\Omega) \otimes_{\pi\times\pi} 1$ vaut 0 dans $I^{\otimes 2n} \otimes_{\pi\times\pi} \widetilde{\mathbb{Z}}$?

***Exemple* 3.3.** Prenons $X = \mathcal{S}^1$, qui est un espace $K(\pi, 1)$ pour $\pi = \mathbb{Z}$.

La première étape est de trouver un représentant de $[\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1] = [\mathcal{S}^1] \times [\mathcal{S}^1] \in H_2(\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1, \mathbb{Z})$ dans $B_2(\pi \times \pi, \mathbb{Z})$. Puisque l'application d'Eilenberg-Zilber induit le cross produit, on cherche quelque chose de la forme $EZ(\alpha \otimes \alpha) \otimes_{\pi\times\pi} 1$ où $\alpha \otimes_\pi 1$ est un représentant de $[\mathcal{S}^1]$ dans $B_1(\pi; \mathbb{Z})$.

Pour trouver un tel α, considérons la résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[\pi]$-module trivial suivante :

$$0 \to C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Avec C_0 et C_1 deux $\mathbb{Z}[\pi]$-modules libres, générés respectivement par e_0 and e_1, et l'application d_1 donnée par $e_1 \mapsto ae_0 - e_0$ avec a un générateur de $\pi = \mathbb{Z}$. (Ici, ε associe à $(\sum_i n_i g_i)e_0$ l'entier $\sum_i n_i$.) Cette résolution est alors équivalente à la Bar resolution, et les application définies par $e_0 \mapsto []$ et $e_1 \mapsto [a]$ induisent une application entre chaînes.
En observant que $e_1 \otimes_\pi 1$ est un représentant du générateur de l'homologie $H_1(C_* \otimes_\pi Z)$, on obtient que $[a] \otimes_\pi 1$ est un représentant de $[\mathcal{S}^1] \in H_1(X)$ dans $B_1(\pi; \mathbb{Z})$.

Après application de EZ, on a que $([(a,1)|(1,a)] - [(1,a)|(a,1)]) \otimes_{\pi\times\pi} 1$ représente $[\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1]$.

Pour conclure à la non-maximalité de $TC(\mathcal{S}^1)$, on regarde alors si $\nu^2([(a,1)|(1,a)] - [(1,a)|(a,1)]) \otimes_{\pi\times\pi} 1$ vaut 0 dans $\mathbf{I}[\pi]^{\otimes 2} \otimes_{\pi\times\pi} \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \nu^2([(a,1)|(1,a)] - [(1,a)|(a,1)]) \otimes_{\pi\times\pi} 1 &= ((a-1)\otimes(a,1)\cdot(a^{-1}-1) - (a^{-1}-1)\otimes(1,a)\cdot(a-1)) \otimes_{\pi\times\pi} 1 \\ &= ((a-1)\otimes(1-a)) \otimes_{\pi\times\pi} 1 - ((a^{-1}-1)\otimes(1-a^{-1})) \otimes_{\pi\times\pi} 1 \\ &= ((a-1)\otimes(1-a)) \otimes_{\pi\times\pi} 1 - ((1-a)\otimes(a-1)) \otimes_{\pi\times\pi} (a,1)\cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque l'action de $\mathbb{Z}[\pi \times \pi]$ sur $\mathbb{Z}$ est triviale.
Ainsi, $TC(\mathcal{S}^1) < 2$.

***Remarque* 3.4.** Le lecteur attentif aura remarqué que $\mathcal{S}^1$ n'est pas de dimension ≥ 2 et que dons le théorème de Costa-Farber ne s'applique pas dans ce cas. Ici cependant, on sait par d'autres moyens que $TC(\mathcal{S}^1) = 1$ et le but de cet exemple était de fournir un cas simple de calcul de représentant de $[M]$.

Exemple 3.5. Considérons $X = \mathbb{T}^n = \mathcal{S}^1 \times \cdots \times \mathcal{S}^1$, qui est un espace $K(\pi, 1)$ avec $\pi = \mathbb{Z}^n$.

Pour $1 \leq i \leq n$, si a_i génère la $i^{\text{ème}}$ $\mathbb{Z}$-composante de π, on sait que $[a_i] \otimes_{\mathbb{Z}} 1$ est un représentant de $[\mathcal{S}^1_{(i)}]$. (Ici, a_i est vu à la fois comme élément de $\mathbb{Z}$ mais surtout pour la suite, comme élément de $\pi = \mathbb{Z}^n$. En appliquant EZ plusieurs fois, on obtient le représentant suivant pour $[\mathbb{T}^n]$ dans $B_n(\pi; \mathbb{Z})$:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)[a_{\sigma(1)}| \dots |a_{\sigma(n)}] \otimes_\pi 1 \tag{3.1}$$

En appliquant une dernière fois EZ, on a finalement que

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma)[b_{\sigma^{-1}(1)}| \dots |b_{\sigma^{-1}(2n)}] \otimes_{\pi \times \pi} 1$$

représente $[\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n]$, avec $b_k = (a_k, 1)$ si $1 \leq k \leq n$ et $(1, a_{k-n})$ si $n + 1 \leq k \leq 2n$.

La construction précédemment proposée semble donner un point de vue efficace pour tester l'annulation de $\mathfrak{v}_X^{2n}$, mais n'est en l'état applicable que sous une hypothèse très restrictive : X doit être un espace $K(\pi, 1)$. Voyons comment **étendre cette construction à toute variété M de dimension $n \geq 2$.**

Considérons π le groupe fondamental de M, et $B\pi$ son espace classifiant (à savoir l'unique espace $K(\pi, 1)$, à équivalence d'homotopie près). On peut toujours se doter d'une fonction continue, dite classifiante, $\gamma : M \to B\pi$, qui induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. Les classes de cohomologie $\mathfrak{v}_\pi := \mathfrak{v}_{B\pi} \in H^1(\pi \times \pi; I)$ et $\mathfrak{v}_M \in H^1(M \times M; I)$ sont liées par :

$$\mathfrak{v}_M = (\gamma \times \gamma)^* \mathfrak{v}_\pi$$

(Nous admettons ici ce fait qui peut être démontré via certaines caractérisations de la classe de Costa-Farber et en considérant de bons diagrammes commutatifs.)

Rappelons que, via la dualité de Poincaré, on a :

$$TC(M) < 2n \Leftrightarrow \mathfrak{v}_M^{2n} \cap [M \times M] = 0$$

Une propriété dite de naturalité de l'opération $\cap$ se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
H_{2n}(M \times M; \widetilde{\mathbb{Z}}) \otimes H^{2n}(M \times M; I^{\otimes 2n}(\pi)) & \xrightarrow{\cap} & I^{\otimes 2n}(\pi) \otimes_{\pi \times \pi} \widetilde{\mathbb{Z}} \\
\downarrow{\scriptstyle (\gamma\times\gamma)_*} \qquad\qquad {\scriptstyle (\gamma\times\gamma)^*}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
H_{2n}(B\pi \times B\pi; \widetilde{\mathbb{Z}}) \otimes H^{2n}(B\pi \times B\pi; I^{\otimes 2n}(\pi)) & \xrightarrow{\cap} & I^{\otimes 2n}(\pi) \otimes_{\pi \times \pi} \widetilde{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

Au travers duquel on peut donc se ramener à :

$$TC(M) < 2n \Leftrightarrow \mathfrak{v}_\pi^{2n} \cap (\gamma \times \gamma)_*([M \times M]) = 0 \text{ in } I^{\otimes 2n} \otimes_{\pi \times \pi} \widetilde{\mathbb{Z}}$$

Puisque $B\pi$ est un espace $K(\pi, 1)$, on peut alors utiliser la Bar resolution pour trouver des représentants algébriques de $\mathfrak{v}_\pi^{2n}$ (bien connu) et de $(\gamma \times \gamma)_*([M \times M])$ (ce qui peut s'avérer difficile dépendamment de M et γ).

Chapitre 4

Applications

4.1 Premier exemple : $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$

Théorème 4.1. *Soit $T = \mathcal{S}^m \times \cdots \times \mathcal{S}^m = (\mathcal{S}^m)^n$. Alors :*
- *si m est impair, alors $TC(T) = n$*
- *if m est pair, alors $TC(T) = 2n$.*

Démonstration. Cette preuve est assez directe en utilisant la valeur de $TC(\mathcal{S}^m)$, la majoration $TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y)$ (vraie sous certaines hypothèses vérifiées ici), et la borne inférieure cohomologique. Les détails sont présentés dans [Far03]. $\square$

Lorsque $m = 1$, on utilise la notation $\mathbb{T}^n = (\mathcal{S}^1)^n$.

Propriété 4.2. $5 \leq TC(\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3) \leq 6$

Démonstration. $M = \mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$ est une variété connexe par arcs de dimension 3, donc $TC(M) \leq 6$.

Pour $TC(M) \geq 5$, on utilise 2.20, avec coefficients dans $\mathbb{Q}$. La structure de $H^*(M;\mathbb{Q})$ est la suivante, conformément aux résultats sur les tores (exemple 3.16 de [Hat02]) et sur les sommes connexes (2.4) :
- générée sur $\mathbb{Q}$ par les éléments de degré 1 : a_1, a_2, a_3 et x_1, x_2, x_3
- $a_i a_j = -a_j a_i$ et $x_i x_j = -x_j x_i$ si $j \neq i$ et 0 sinon
- $a_i x_j = 0$
- $a_1 a_2 a_3 = x_1 x_2 x_3$ en degré 3.

De plus, on remarque que $\overline{a_i} = a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i$ et $\overline{x_i} = x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i$ (pour tout i) sont des zero-divisors, dans $H^*(M;\mathbb{Q}) \otimes H^*(M;\mathbb{Q}) = H^*(M \times M;\mathbb{Q})$.

On observe que $\overline{a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3} = -a_1 a_2 a_3 \otimes x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \otimes a_1 a_2 a_3 = 0$ mais que par exemple, $\overline{a_1 a_2 a_3 x_1 x_2} = a_1 a_2 a_3 \otimes x_1 x_2 + x_1 x_2 \otimes a_1 a_2 a_3 \neq 0$ $\square$

Remarque 4.3. Plus généralement, pour n impair, on a $2n - 1 \leq TC(\mathbb{T}^n \# \mathbb{T}^n) \leq 2n$. Pour n pair, la borne inférieure est meilleure. En effet, la généralisation pour des tores de dimension n du précédent calcul donne :

$$\overline{a_1} \cdot \ldots \overline{a_n} \cdot \overline{x_1} \cdot \cdots \cdot \overline{x_n} = \pm(a_1 a_2 \ldots a_n \otimes x_1 \ldots x_n + (-1)^n x_1 \ldots x_n \otimes a_1 \ldots a_n)$$

qui n'est non nul que lorsque n est pair. En conséquence, $TC(\mathbb{T}^n \# \mathbb{T}^n) = 2n$ si n est pair.

On peut désormais essayer d'appliquer la procédure donnée au chapitre précédent pour déterminer si $TC(M) = 6$ ou non, ce qui permettrait de conclure quant à la valeur de $TC(M)$.

Tout d'abord, le pinch $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{T}^3 \vee \mathbb{T}^3$, qui contracte la 2-sphère au long de laquelle est faite la somme connexe, est une application classifiante dans l'espace $K(\mathbb{Z}^3 * \mathbb{Z}^3, 1)$ qu'est $\mathbb{T}^3 \vee \mathbb{T}^3$.

Propriété 4.4. *Un représentant de $(\gamma \times \gamma)_*([M \times M])$ dans $B_6(\pi \times \pi; \mathbb{Z}) = B_6(\pi \times \pi) \otimes_{\pi \times \pi} \mathbb{Z}$, où $M = \mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$ et $\pi = \mathbb{Z}^3 * \mathbb{Z}^3 =< a, b, c, u, v, w | ab = ba, ac = ca, bc = cb, uv = vu, uw = wu, vw = wv >$, est :*

$$EZ(A \otimes A + U \otimes U + A \otimes U + U \otimes A) \otimes_{\pi \times \pi} 1 = \Delta \otimes_{\pi \times \pi} 1$$

avec $A = [a|b|c] + [c|a|b] + [b|c|a] - [b|a|c] - [a|c|b] - [c|b|a]$ et $U = [u|v|w] + [v|w|u] + [w|u|v] - [v|u|w] - [w|v|u] - [u|w|v]$.

Démonstration. Dans l'exemple 3.5, nous avons vu que $A \otimes_{\mathbb{Z}^3} 1$ et $U \otimes_{\mathbb{Z}^3} 1$ sont des représentants de la classe fondamentale de deux tores dans distincts dans $B_3(\mathbb{Z}^3; \mathbb{Z})$.

De plus, le pinch donne l'égalité suivante en homologie de dimension 3 :

$$\gamma_*([M]) = [\mathbb{T}^3_{(1)}] \oplus [\mathbb{T}^3_{(2)}] \text{ in } H_3(\mathbb{T}^3_{(1)} \vee \mathbb{T}^3_{(2)}; \mathbb{Z}) = H_3(\mathbb{T}^3_{(1)}; \mathbb{Z}) \oplus H_3(\mathbb{T}^3_{(2)}; \mathbb{Z})$$

représenté par $(A+U) \otimes_\pi 1$ dans $B_3(\pi; \mathbb{Z})$. Puisque $(\gamma \times \gamma)_*([M \times M]) = \gamma_*([M]) \times \gamma_*([M])$, et EZ induit le cross produit, on obtient le résultat énoncé.

□

Puisque la varité est orientable (et donc $\widetilde{\mathbb{Z}}$ est trivial), nous sommes donc désormais réduits à déterminer si $\nu^6(\Delta)$ s'annule dans les coinvariants de $I(\pi)^{\otimes 6}$ ou non. (Les coinvariants étant le quotient de $I(\pi)^{\otimes 6}$ sous identification des éléments dans une même orbite pour l'action diagonale de $\pi \times \pi$.)

Propriété 4.5. *$\nu^6(EZ(A \otimes A)) = \nu^6(EZ(U \otimes U)) = 0$ dans les coinvariants de $I(\pi)^{\otimes 6}$.*

Démonstration. $EZ(A \otimes A) \otimes_{\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3} 1$ est exactement le représentant de $[\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3]$ obtenu à la fin de l'exemple 3.5. Puisque $TC(\mathbb{T}^3) = 3$ est non maximale (Théorème 4.1), on a que $\nu^6(EZ(A \otimes A))$ s'annule dans les coinvariants de $I(\mathbb{Z}^3)$ pour l'action de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$. Puisque $I(\mathbb{Z}^3)$ est inclus dans $I(\pi)$ et que l'action de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$ est "incluse" dans celle de $\pi \times \pi$, $\nu^6(EZ(A \otimes A))$ s'annule *a fortiori* dans les coinvariants de $I(\pi)^{\otimes 6}$.
On peut faire exactement le même raisonnement pour U. □

A partir de ce point, nous sommes donc réduits à l'étude de $\nu^6(EZ(A \otimes U + U \otimes A))$ dans les coinvariants $(I(\pi)^{\otimes 6})_{\pi \times \pi}$. Cette étude n'a pas abouti, sous la forme actuellement proposée, il s'agit tout de même de 1440 termes. Nous avons envisagé des simplifications (changements de représentants, projections sur d'autres structures algébriques plus facilement étudiables etc...), sans succès. Mais au regard des expressions obtenues par ces différentes techniques, nous conjecturons que ce terme ne s'annule pas et donc que $TC(\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3) = 6$.

4.2 Simplifications dans le cas d'une somme connexe

La simplification précédemment observée pour $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$ est plus générale. En effet, on rappelle 3.3 :

$$TC(M) < 2n \Leftrightarrow \mathfrak{v}_\pi^{2n} \cap (\gamma \times \gamma)_*([M \times M]) = 0 \text{ in } I^{\otimes 2n} \otimes_{\pi \times \pi} \widetilde{\mathbb{Z}}$$

Considérons désormais une somme connexe $M \# N$, en dimension ≥ 3, elle a pour groupe fondamental $\pi = \pi_M * \pi_N$, le produit libre des groupes fondamentaux des variétés. On peut alors créer une application classifiante de la manière suivante :

$$\gamma : M \# N \xrightarrow{pinch} M \vee N \xrightarrow{\gamma_M \vee \gamma_N} B\pi_M \vee B\pi_N = B\pi_M * \pi_N = B\pi_{M \# N}$$

avec $\gamma_*([M \# N]) = \gamma_M([M]) \oplus \gamma_N([N]) = \mathbf{m} \oplus \mathbf{n}$. Il vient alors l'énoncé suivant :

Théorème 4.6. *Soient M et N deux variétés de même dimension $n \geq 3$. On distingue 2 cas :*

1. *Si $TC(M)$ et $TC(N)$ sont non maximales, alors $TC(M \# N) < 2n \Leftrightarrow \mathfrak{v}_\pi^{2n} \cap (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}) = 0$ (seuls les termes "croisés" subsistent)*
2. *Si $TC(M)$ est maximale et N est orientable, alors $TC(M \# N) = 2n$.*

4.3 Espaces classiques

4.3.1 Calculs pour la bouteille de Klein

Théorème 4.7. *En utilisant la technique de la Bar resolution, on trouve que $TC(K) = 4$ où K est la bouteille de Klein.*
Dans les calculs, l'obstruction au fait que $\mathfrak{v}_K^4$ soit nulle réside dans le fait que :

$$s = (a-1) \wedge (ab - ba) \wedge (b-1) \neq 0 \text{ dans les coinvariants } \left(\bigwedge^3 I(\pi_2; \mathbb{Z}_2)\right)_{\pi_2 \times \pi_2}$$

avec $\pi_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$ et $I(\pi_2; \mathbb{Z}_2) = I(\pi_2) \otimes \mathbb{Z}_2$ ($\bigwedge$ désigne l'algèbre extérieure).

Démonstration. C'est tout le sujet de [CV17]. Si nous mettons en avant l'obstruction calculatoire, c'est parce que, comme observé dans l'étude du cas $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$, il est très difficile de prouver qu'une quantité ne s'annule pas dans des espaces de coinvariants n-linéaires comme ceux considérés. Pour cet exemple (fondamental puisqu'il a permis le calcul de TC pour toute surface non-orientable de genre ≥ 2), c'est une étude "exhaustive" après réduction du problème qui a été utilisée. Elle n'est pas nécessairement réplicable sur d'autres exemples... □

4.3.2 Tore et espace projectif

Proposition 4.8. *Un représentant de* $[\mathbb{RP}^n]$ *(avec* $\mathbb{RP}^n$ *l'espace projectif réel de dimension* n*) dans* $B_n(\mathbb{Z}_2;\widetilde{\mathbb{Z}})$ *est* $[a|\dots|a]\otimes_{\mathbb{Z}_2} 1$*, avec* a *le générateur de* $\mathbb{Z}_2$ *et l'action sur* $\widetilde{\mathbb{Z}}$ *donnée par* $a\cdot 1=-1$*.*

Théorème 4.9. *Pour tout* $n\geq 2$*,* $TC(\mathbb{RP}^n\#\mathbb{T}^n)=2n$*.*
Et pour $n=1$*,* $TC(\mathbb{RP}^1\#\mathbb{T}^1)=TC(\mathcal{S}^1\#\mathcal{S}^1)=TC(\mathcal{S}^1)=1$

La preuve qui va suivre peut paraître un peu technique, mais montre une partie des astuces calculatoires pouvant être utilisées pour simplifier les calculs.

Démonstration. En utilisant les représentant connus et la technique de la Bar Resolution, sachant que $\mathbb{RP}^n$ et $\mathbb{T}^n$ n'ont pas complexité topologique maximale, on est réduit à montrer que :

$$\nu^{2n}(EZ([\mathbb{RP}^n]\otimes[\mathbb{T}^n]))+\nu^{2n}(EZ([\mathbb{T}^n]\otimes[\mathbb{RP}^n]))\otimes_{\pi\times\pi}1\neq 0 \tag{4.1}$$

dans $I^{\otimes 2n}(\pi)\otimes_{\pi\times\pi}\widetilde{\mathbb{Z}}$. On fait ici un amalgame de notations en désignant les représentants des classes fondamentales comme les classes elles-mêmes. Ici, $\pi=\mathbb{Z}^n*\mathbb{Z}_2$ et on notera u_i $(1\leq i\leq n)$ les générateurs de $\mathbb{Z}^n$, et a le générateur de $\mathbb{Z}_2$. $\widetilde{\mathbb{Z}}$ est le $\mathbb{Z}[\pi\times\pi]$-module avec $(g,h)\cdot t=\omega(g)\omega(h)t$, pour $\omega:\pi\to\{\pm1\}$ le morphisme défini par $\omega(u_i)=1$ et $\omega(a)=-1$.

Afin de prouver la non-annulation, nous allons appliquer une série de projections.

La première est la suivante : $\widetilde{\mathbb{Z}}\xrightarrow{mod_2}\mathbb{Z}_2$, qui envoie le $\mathbb{Z}[\pi\times\pi]$-module précédemment décrit sur $\mathbb{Z}_2$ muni de l'action triviale de $\pi\times\pi$. Ainsi, on peut désormais considérer le terme (4.1) dans $I^{\otimes 2n}\otimes_{\pi\times\pi}\mathbb{Z}_2$, ou de manière équivalent dans les coinvariants $(I(\pi;\mathbb{Z}_2)^{\otimes 2n})_{\pi\times\pi}$.

Ensuite, considérons les morphismes $f_i:\pi\to\langle u_i\rangle$, définis par $f_i(a)=1$ et $f_i(u_j)=1$ si $j\neq i$, $f_i(u_i)=u_i$. Considérons aussi le morphisme $g:\pi\to\langle a\rangle$, avec $g(a)=a$ et $g(u_i)=1$. Finalement, considérons $h:\pi\to\pi_2$, avec $h(a)=a$, $h(u_1)=b$ and $h(u_i)=1$ pour $i\geq 2$. Ils induisent de manière linéaire des morphismes sur $I(\pi)$.
Si l'on applique $h\otimes h\otimes h\otimes f_2\otimes\dots\otimes f_n\otimes g\otimes\dots\otimes g$ sur (4.1), Les seuls termes ne s'annulant pas sont :
- $\nu^{2n}([(a,1)|(a,1)|(1,u_1)|(1,u_2)|\dots|(1,u_n)|(a,1)|\dots|(a,1)])$
- $\nu^{2n}([(a,1)|(1,u_1)|(a,1)|(1,u_2)|\dots|(1,u_n)|(a,1)|\dots|(a,1)])$
- $\nu^{2n}([(1,u_1)|(a,1)|(a,1)|(1,u_2)|\dots|(1,u_n)|(a,1)|\dots|(a,1)])$
- $\nu^{2n}([(1,a)|(1,a)|(u_1,1)|(u_2,1)|\dots|(u_n,1)|(1,a)|\dots|(1,a)])$
- $\nu^{2n}([(1,a)|(u_1,1)|(1,a)|(u_2,1)|\dots|(u_n,1)|(1,a)|\dots|(1,a)])$
- $\nu^{2n}([(u_1,1)|(1,a)|(1,a)|(u_2,1)|\dots|(u_n,1)|(1,a)|\dots|(1,a)])$

Finalement, en projetant $(I(\pi;\mathbb{Z}_2)^{\otimes 2n})_{\pi\times\pi}$ sur $(I(\pi_2;\mathbb{Z}_2)^{\otimes 3})_{\pi_2\times\pi_2}\otimes(I(\langle u_2\rangle;\mathbb{Z}_2))_{\langle u_2\rangle\times\langle u_2\rangle}\otimes\dots\otimes(I(\langle u_n\rangle;\mathbb{Z}_2))_{\langle u_n\rangle\times\langle u_n\rangle}\otimes(I(\langle a\rangle;\mathbb{Z}_2))_{\langle a\rangle\times\langle a\rangle}\otimes\dots\otimes(I(\langle a\rangle;\mathbb{Z}_2))_{\langle a\rangle\times\langle a\rangle}$, on est réduit à inspecter le terme :

$$S\otimes(u_2-1)\otimes\dots\otimes(u_n-1)\otimes(a-1)\otimes\dots\otimes(a-1)$$

qui n'est naturellement pas nul si S n'est pas nul dans $(I(\pi_2;\mathbb{Z}_2)^{\otimes 3})_{\pi_2\times\pi_2}$, avec :

$$\begin{aligned}S=\ &(a-1)\otimes a(a-1)\otimes a^2(b-1)\\&+(a-1)\otimes a(b-1)\otimes a(a-1)b\\&+(b-1)\otimes(a-1)b\otimes a(a-1)b\\&+(a-1)\otimes(a-1)a\otimes(b-1)a^2\\&+(a-1)\otimes(b-1)a\otimes b(a-1)a\\&+(b-1)\otimes b(a-1)\otimes b(a-1)a\end{aligned}\tag{4.2}$$

Le passage au quotient $(I(\pi;\mathbb{Z}_2)^{\otimes 2n})_{\pi\times\pi}\to(\bigwedge^3 I(\pi_2;\mathbb{Z}_2))_{\pi_2\times\pi_2}$ est compatible avec les coinvariants (pour l'action diagonale), comme décrit dans [CV17]. Et il envoie S sur l'élément s, qui est non nul d'après 4.7. □

***Remarque* 4.10.** On peut appliquer des techniques très similaires au cas de la variété $\mathbb{RP}^n\#\mathbb{RP}^n$ pour $n\geq 2$, pour trouver de même que $TC(\mathbb{RP}^n\#\mathbb{RP}^n)=2n$. L'approche proposée ressemble à ce qui est fait dans [CV18] mais à un niveau plus calculatoire.

4.3.3 Tableau récapitulatif

Variété de référence	$\mathbb{RP}^n \# \mathbb{T}^n$	$\mathbb{RP}^n \# \mathbb{RP}^n$	$\mathbb{T}^n \# L^n_m$	$\mathbb{T}^n \# \mathbb{T}^n$
Dimensions pour TC maximal	$n \geq 2$	$n \geq 2$	$n = 4k - 1$	n pair
Dimensions utilisables	$n \geq 4$ impair	$n \geq 4$ impair	$n = 4k - 1 \geq 4$	$n \geq 4$ pair
Groupe fondamental (dimension ≥ 3)	$\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}^n$

Quelques explications au sujet de ce tableau s'imposent. Tout d'abord, il convient de noter que les résultats concernant la première, deuxième et quatrième somme connexe de référence ont été démontrés ou évoqués précédemment. Pour la troisième variété, la démonstration est différente, utilisant une généralisation de la borne inférieure cohomologique pour TC (présentée dans [FG08]). Dans ce cas, L^n_m désigne le **lens space** de dimension n et de groupe fondamental $\mathbb{Z}_m$, qui est une construction "classique" pour tout m et pour tout n impair.

Notons que pour la troisième et quatrième colonne, les résultats ne sont pas complets, et restent indéterminés pour les dimensions manquantes (on ne sait pas si TC est maximal ou non).

Enfin, les "dimensions utilisables" sont les dimensions qui pourront être utilisées dans l'énoncé du théorème 4.13, car elles vérifient les conditions suivantes : la dimension est supérieure à 4 et la variété associée est orientable.

4.4 Extensions d'obstructions

Comme annoncé en introduction, et énoncé plus précisément dans [CV21], il existe des groupes abéliens G ayant la propriété suivante :

Pour toute variété orientable de dimension $n \geq 2$ (pouvant dépendre de G) et ayant groupe fondamental G, on a $TC(M) < 2n$.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les calculs et la compréhension de la maximalité de nos "sommes connexes de référence" pour déterminer des groupes G avec la propriété inverse suivante :

Il existe une/des variétés M ayant pour groupe fondamental G et $TC(M) = 2dim(M)$.

4.4.1 Surgery

Les techniques de chirurgie ou **surgery** sont des constructions permettant, à partir d'une variété donnée, de créer une variété associée en modifiant certaines de ses propriétés, et en en conservant d'autres. Elles sont très utiles dans la construction de contre-exemples notamment.

Nous en présentons ici un énoncé, qui s'avère très utile dans notre construction :

Théorème 4.11. *Soit M une variété orientable de dimension $n \geq 4$, ayant pour groupe fondamental π_M. Si il existe une application continue $f : M \to K$ (K étant un espace connexe) qui induit un morphisme surjectif $\pi(f) : \pi_M \to \pi_1(K)$, alors, pour tout $\alpha \in ker(\pi(f))$, on peut construire une variété $\widetilde{M}$ de dimension n, telle que $\pi_{\widetilde{M}} = \pi_M / \langle \alpha \rangle$ ainsi qu'une application continue $g : \widetilde{M} \to K$ telle que $\pi(g)$ reste surjective et $f_*([M]) = g_*([\widetilde{M}])$ dans $H_n(K, \mathbb{Z})$.*
Ici, $\langle \alpha \rangle$ est le sous-groupe normal engendré par α dans π_M. On rappelle que $[M]$ est la classe fondamentale de la variété M (et de même pour $[\widetilde{M}]$).

Démonstration. Soit $\alpha \in ker(\pi(f))$. Puisque M est orientable, α peut être représenté par une immersion $\widehat{\alpha} : \mathcal{S}^1 \times \mathcal{D}^{n-1} \to M$.
Considérons les deux diagrammes push-out suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^1 \times \mathcal{D}^{n-1} \arrow[r, hook, "\widehat{\alpha}"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d] \\ \mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^{n-1} \arrow[r] & W = M \sqcup_{\widehat{\alpha}} \mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^{n-1} \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^2 \times \mathcal{S}^{n-2} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \widetilde{M} = W \setminus (\mathcal{D}^2 \times int(\mathcal{D}^{n-1})) \arrow[d] \\
\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^{n-1} \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

Puisque $n \geq 4$, le théorème de Van Kampen donne $\pi_{\widetilde{M}} = \pi_1(W)$ et $\pi_1(W) = \pi_M/\langle\alpha\rangle$. Ainsi, la variété $\widetilde{M}$ a le groupe fondamental voulu. 2tendons maintenant le premier diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^1 \times \mathcal{D}^{n-1} \arrow[r, hook, "\widehat{\alpha}"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "f"] & \\
\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^{n-1} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi"] & W & K
\end{tikzcd}$$

φ est bien définie puisque $f \circ \widehat{\alpha}$ est homotopiquement trivial comme $\pi(f)(\alpha) = 1$. Dès lors, f peut être étendue de manière unique sur W d'après la propriété universelle du push-out. Soit g la restriction de cette application f nouvellement étendue à $\widetilde{M}$. Il reste à prouver que $f_*([M]) = g_*([\widetilde{M}])$.

Les deux diagrammes push-out donnent les suites de Mayer-Vietoris suivantes (en homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$) :

$$\dots \to H_n(\mathcal{S}^1 \times \mathcal{D}^{n-1}) \to H_n(M) \oplus H_n(\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^{n-1}) \to H_n(W) \to H_{n-1}(\mathcal{S}^1 \times \mathcal{D}^{n-1}) \to \dots$$

$$\dots \to H_n(\mathcal{D}^2 \times \mathcal{S}^{n-2}) \to H_n(\widetilde{M}) \oplus H_n(\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^{n-1}) \to H_n(W) \to H_{n-1}(\mathcal{D}^2 \times \mathcal{S}^{n-2}) \to \dots$$

dont on déduit que $H_n(M) \simeq H_n(W) \simeq H_n(\widetilde{M})$. Et par construction de g on obtient finalement que $f_*([M]) = g_*([\widetilde{M}])$. $\square$

4.4.2 Théorèmes d'extension

On note $\mathcal{M}_{ref} = M_{ref} \# N_{ref}$ les variétés présentées dans 4.3.3. (Les résultats suivants sont vérifiés pour ces variétés de références proposées mais on ne prétend évidemment pas que notre table est exhaustive. Ils ont une portée qui se veut plus générale, mais le temps à manqué pour comprendre exactement les constructions dont on donne ici un aperçu.)

Propriété 4.12. *Soit M une variété de dimension n telle qu'il existe une application $\gamma : M \to M_{ref} \vee N_{ref} = X = pinch(\mathcal{M}_{ref})$ avec $\gamma([M]) = [M_{ref}] \oplus [N_{ref}]$.*
Alors la complexité topologique M est maximale : $TC(M) = 2n$.

Théorème 4.13. *Soit G un groupe finiment présenté $\langle S|R\rangle$ avec $S' \subset S$ et $R' \subset R$ tels qu'on ait le diagramme commutatif de morphismes de groupes suivant :*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, two heads, "\varphi"] & & \pi_{ref} \\
& \langle S'|R'\rangle \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

avec φ surjective, i induit par l'inclusion $S' \hookrightarrow S$ et π_{ref} un des groupes fondamentaux de nos variétés de référence. Alors il existe une variété $\mathcal{N}$ de dimension n (dépendant de π_{ref}, comme indiqué dans 4.3.3) avec $\pi_1(\mathcal{N}) = G$ et $TC(\mathcal{N}) = 2n$.

Remarque 4.14. Le diagramme donné est équivalent à la condition suivante :

Il existe un morphisme $\varphi : G \to \pi_{ref}$ telle que la suite suivante est exacte et scindée :
$$1 \to ker(\varphi) \to G \xrightarrow{\varphi} \pi_{ref} \to 1$$

Il est en effet évident que le diagramme induit une telle suite exacte scindée. Inversement, si la suite est exacte et scindé, via une injection $i : \pi_{ref} \to G$, en écrivant $\langle A|B\rangle$ une présentation de π_{ref}, on peut créer $\langle i(A), \dots | i(B), \dots\rangle$ une présentation finie de G qui convient.

Démonstration. La preuve de ce fait repose sur la construction explicite d'une telle variété $\mathcal{N}$, avec pour point de départ une variété M construite de sorte à vérifier les hypothèses de 4.12 et une application γ "compatible" avec φ. On applique ensuite la technique de chirurgie présentée, pour obtenir le résultat. $\square$

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Bilan général

Si le calcul de $TC(T^3\#\mathbb{T}^3)$ n'a pas pu aboutir, ce stage m'a tout de même permis de découvrir une méthode calculatoire permettant de déterminer la maximalité ou non de la complexité topologique d'un espace. Finalement, après avoir buté longuement sur les calculs, je pense avoir acquis une bonne compréhension de ces mécanismes, ce qui a permis quelques généralisations un peu moins calculatoires. Aux questions posées en introduction, nous pouvons donc proposer les réponses suivantes :

— Il existe des processus permettant d'étendre la maximalité de la complexité topologique de certaines variétés à d'autres, ce qui forunit une base de contre-exemples à l'extension de certains résultats existants.

— La structure de somme connexe (en dimension ≥ 3) est intéressante, amenant à certaines simplifications dans le calcul de la complexité topologique. Elle paraît, tout au moins conjecturellement, avoir un rôle important dans la maximalité de TC.

5.2 Eléments non présentés et possibles prolongements

Pour finir, voici une liste de quelques points qui n'ont pas été présentés, mais qui ont été, ou bien centraux dans mon étude et pour la compréhension de ces questions autour de la complexité topologique, ou bien étudiés comme potentielles prolongements des résultats précédemment énoncés.

— La **théorie de l'obstruction** occupe une place centrale dans la caractérisation de la maximalité (théorème 3.2), et est un domaine de la topologie algébrique particulièrement intéressant qu'il m'a été donné de découvrir, d'abord de manière générale puis appliqué à l'exemple de TC. De bonnes références pour la théorie de l'obstruction sont [Hat02] et [DK01].

— Le concept de sectional category pour une fibration (nombre minimal de sections locales) peut être mieux compris à l'aide du **joint itéré de la fibration**. On peut alors utiliser certains résultats de théorie de l'obstruction adaptés pour ces fibrations jointes, que j'ai beaucoup étudiés. Ils sont notamment présentés dans un article assez ancien ([Sch66]), dont j'ai cherché à "moderniser" certaines preuves (pour une meilleure compréhension personnelle).

— Nous avons beaucoup évoqué la notion de groupe fondamental, mais dans le cas de variétés (ou même d'espaces) **simplement connexes**, il existe des analogues aux résultats de maximalité étudiés dans ce rapport, comme présenté par exemple dans [FG09].

— Les techniques utilisées pour prouver la maximalité de $TC(\mathbb{T}^n\#\mathbb{RP}^n)$ et $TC(\mathbb{RP}^n\#\mathbb{RP}^n)$ à partir du calcul pour la bouteille de Klein sont originales et pourraient trouver des généralisations.

— De même, les techniques d'"extension" utilisées dans le chapitre 4 pourraient être généralisées, en créant peut-être des "classes" de variétés ayant toutes complexité topologique maximale (ou non).

— Finalement, la question de la complexité topologique d'une somme connexe en fonction de la complexité topologique de ses deux composantes semble fondamentale, et je travaille encore sur une généralisation de 4.6, qui traiterait mieux le cas de la maximalité, indépendamment de l'orientabilité.

Bibliographie

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups.* Springer New York, NY, 1982.

[CF10] Armindo Costa and Michael Farber. Motion planning in spaces with small fundamental groups. *Communications in Contemporary Mathematics*, 12(01) :107–119, 2010.

[CV17] Daniel C. Cohen and Lucile Vandembroucq. Topological complexity of the klein bottle. *Journal of Applied and Computational Topology*, 1(2) :199–213, May 2017.

[CV18] Daniel C. Cohen and Lucile Vandembroucq. Motion planning in connected sums of real projective spaces, 2018.

[CV21] Daniel C. Cohen and Lucile Vandembroucq. On the topological complexity of manifolds with abelian fundamental group. *Forum Mathematicum*, 33(6) :1403–1421, 2021.

[DK01] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology.* American Mathematical Society, 2001.

[Far03] Michael Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Computational Geometry*, 29 :211–221, 2003.

[FG08] Michael Farber and Mark Grant. Robot motion planning, weights of cohomology classes, and cohomology operations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 :3339–3349, 2008.

[FG09] Michael Farber and Mark Grant. Topological complexity of configuration spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(5) :1841–1847, 2009.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[Jam78] I.M. James. On category, in the sense of lusternik-schnirelmann. *Topology*, 17(4) :331–348, 1978.

[Sch66] A. S. Schwarz. The genus of a fiber space. *Amer. Math. Soc. Transl.*, (55) :49–140, 1966.

[Whi78] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory.* Springer-Verlag, 1978.