

ENS Paris Sciences et Lettres

Rapport de stage de Master 1

Géométrie anabélienne avec le type topologique étale

Brieuc Lair, ENS PSL, France

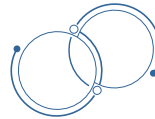
Sous la direction de Benjamin Collas, RIMS, Université de Kyoto, Japon



PSL 



京都大学
数理解析研究所
Research Institute for
Mathematical Sciences, Kyoto University



**Arithmetic & Homotopic
Galois Theory**
*A France-Japan International
Research Network*

Table des matières

Remerciements	2
Introduction	3
1 Préliminaires	4
1.1 Type topologique étale	4
1.2 Groupe fondamental simplicial et étale	5
1.3 Une catégorie de modèles sur les pro-ensembles simpliciaux	8
1.4 Contexte anabélien	11
2 Le théorème fondamental anabélien, reformulation	13
2.1 L'action de monodromie	13
2.2 Pro-groupes et espaces de Eilenberg-MacLane étales	15
2.3 Une version homotopique du théorème fondamental anabélien	18
3 Une rétraction fonctorielle	19
3.1 Comptage de points et revêtements étales	19
3.2 Morphismes dans un produit de courbes hyperboliques	21
3.3 Existence de la rétraction	22
4 Voisinages artiniens fortement hyperboliques	24
4.1 Les voisinages artiniens fortement hyperboliques	24
4.2 Une propriété cuspidale pour les courbes non rationnelles	25
4.3 Propriété cuspidale : cas général	27

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de stage, Benjamin Collas, pour son aide et ses conseils précieux tout au long de mon travail, et pendant la rédaction de ce mémoire. Je le remercie aussi de m'avoir fait découvrir un domaine passionnant des mathématiques.

Je remercie Séverin Philip pour m'avoir aidé pendant mon stage en répondant à mes nombreuses questions. Je remercie également Akio Tamagawa pour son accueil au RIMS. Je tiens enfin à remercier Ariane Mézard et Koichiro Sawada pour m'avoir soutenu pendant mon stage.

La réalisation de ce mémoire a eu lieu dans le cadre du projet « Arithmetic and Homotopic Galois Theory », soutenu par le réseau de recherche international CNRS France-Japon AHGT entre le RIMS Kyoto University, le LPP de l'université de Lille University, et le DMA de l'ENS PSL.

Version 16 août 2024.

Introduction

Dans [Gro97], Grothendieck conjecture que certaines courbes au-dessus d'un corps de nombres sont uniquement déterminées par leur groupe fondamental étale. Cette conjecture constitue le point de départ de la géométrie anabélienne, qui plus généralement pose la question des informations (points rationnels, invariants, ou le schéma lui-même) restructurables à partir de la donnée du groupe fondamental étale, ou plutôt de l'action galoisienne extérieure associée.

Le cas de la dimension zéro, c'est à dire que les automorphismes d'un corps de nombres sont en bijection avec les automorphismes extérieurs de son groupe de galois absolu, est établi par Neukirch [Neu69] et Uchida [Uch76]. Un résultat mathématique cité indépendamment de Grothendieck dans [Gro97].

Nakamura obtient les premiers résultats de reconstruction des groupes d'inertie, puis de reconstruction des courbes de genre 0 [Nak90]. La conjecture de Grothendieck en dimension 1 a ensuite été démontrée par Tamagawa [Tam97] pour les courbes hyperboliques affines sur un corps de nombres, puis généralisée au cas des courbes hyperboliques sur un corps sous- p -adique (i.e un sous-corps d'une extension finie de \mathbb{Q}_p) par Mochizuki [Moc99]. Le survey [NTM98] présente un panorama des résultats anabéliens de Nakamura à Mochizuki.

En dimension supérieure, la question de l'identification des variétés dites *anabéliennes*, c'est à dire restructurables à partir de leur groupe fondamental étale augmenté de la surjection canonique vers le groupe de galois absolu de la base, est toujours ouverte. Grothendieck indique plusieurs candidats : les variétés obtenues par fibrations successives de courbes anabéliennes et les espaces de module de courbes [Gro97]. Pour le premier, cela a été successivement vérifié par Nakamura, Tamagawa, Takao, Mochizuki pour les arrangements de courbes hyperboliques, et plus généralement pour les polycourbes de petites dimensions par Hoshi [Hos14].

Dans la même direction, dans sa lettre à Faltings, Grothendieck énonce aussi une conjecture pour les *bases de voisinages* : « In any case, I regard a variety as « anabelian » (I could say « elementary anabelian »), when it can be constructed by successive smooth fibrations from anabelian curves. Consequently (following a remark of M. Artin), any point of a smooth variety X/K has a fundamental system of (affine) anabelian neighbourhoods ». Cette conjecture a été prouvée par Schmidt et Stix pour des variétés lisses sur un corps de nombres dans [SS16] en utilisant le *type topologique étale*, puis généralisée par Hoshi [Hos20] aux variétés lisses sur un corps sous- p -adique dans une version absolue du théorème, en utilisant des techniques classiques de géométrie anabélienne.

L'objet de ce mémoire est d'illustrer comment des méthodes issues de la *topologie algébrique* et de la *théorie de l'homotopie* permettent d'établir un théorème de *géométrie arithmétique anabélienne*. Les résultats présentés ici proviennent du papier [SS16] de A. Schmidt et J. Stix.

Plan du mémoire

Dans la première section de ce rapport, nous présentons le *type topologique étale* de Friedlander, qui met en lien les groupes d'homotopie étale à la [SGA1] et simpliciale. Nous rappelons le formalisme des *catégories de modèles* de Quillen, et introduisons une catégorie de modèles sur les pro-ensembles simpliciaux selon Isaksen. Dans la deuxième section, nous établissons une reformulation du théorème fondamental anabélien de Mochizuki avec le formalisme du *type topologique étale*. Dans la troisième section, nous construisons une rétraction formelle au morphisme canonique induit par le type topologique étale, pour des schémas qui se plongent comme sous-schéma localement fermé dans un produit de courbes hyperboliques sur un corps de nombres. Finalement, dans la quatrième section nous montrons que cette rétraction est un isomorphisme pour les voisinages artiniens fortement hyperboliques, ce qui permet de conclure à la conjecture de Grothendieck pour les bases de voisinages.

Activités du stage

Mon stage a été rythmé par des rendez-vous hebdomadaires de 2h avec Benjamin Collas, auxquels se sont ajoutées deux séances de préparation à l'oral. J'ai effectué une soutenance de 1h pour présenter mon travail et répondre aux questions, devant Benjamin Collas, Akio Tamagawa et Koichiro Sawada au RIMS, et Ariane Mézard et Séverin Philip par Zoom. Pendant mon stage, j'ai pu assister à un cours sur les méthodes de Berkovich pour la résolution des non-singularités (RNS) par E. Lepage (IMJ-PRG, France), à trois séminaires AHGT, au séminaire de mai AG/NT du RIMS sur la conjecture des sections par Y. Hoshi, et à deux colloquium à l'Université de Kyoto. Avant de partir au Japon, j'ai aussi participé à l'Atelier de Géométrie Arithmétique de février sur le groupe de Grothendieck-Teichmüller.

1 Préliminaires

1.1 Type topologique étale

Le *type topologique étale* de Friedlander [Fri82] est une construction fonctorielle qui établit un lien entre géométrie algébrique et topologie algébrique. Il s'agit de notre cadre pour étudier les variétés algébriques à l'aide de méthodes homotopiques. Nous verrons qu'il encode des informations algébriques comme le groupe fondamental étale du schéma, et ses groupes de cohomologie étale.

Classiquement, la topologie algébrique peut être étudiée combinatoirement au niveau des ensembles simpliciaux. Nous notons $\mathbf{\Delta}$ la catégorie simpliciale et \mathbf{Ss} la catégorie des ensembles simpliciaux.

Définition 1.1.1 (Pro-ensembles simpliciaux). La catégorie $\mathbf{Pro-Ss}$ des *pro-ensembles simpliciaux* a pour objets les petits diagrammes cofiltrants d'ensembles simpliciaux. Pour $\{X_i\}_{i \in I}$ et $\{Y_j\}_{j \in J}$ deux tels diagrammes, leurs morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}}(\{X_i\}, \{Y_j\}) = \lim_j \mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ss}}(X_i, Y_j).$$

Théorème 1.1.2 ([EH76] 2.1.6). *Soit \mathcal{C} une catégorie. Il existe un foncteur $M : \mathbf{Pro-C} \rightarrow \mathbf{Pro-C}$ naturellement isomorphe à l'identité, tel que $M(X)$ soit indexé par un ensemble cofini et dirigé pour tout $X \in \mathbf{Pro-C}$.*

Tous les schémas dans ce mémoire sont supposés localement noethériens. La construction du type topologique étale s'inspire de la *topologie étale*, qui suggère de s'intéresser à la catégorie \mathbf{ET}/X des morphismes étales sur X .

Pour chaque caractéristique $p > 0$, choisissons un corps Ω_p contenant des sous-corps isomorphes aux corps résiduels de caractéristique p des schémas qu'on considère. L'ensemble des *points géométriques* de X , noté \bar{X} , consiste en tous les points géométriques $x : \mathrm{Spec}(\Omega) \rightarrow X$, où $\Omega = \Omega_p$ avec p la caractéristique du corps résiduel du point schématique associé à x .

Définition 1.1.3 (Revêtement rigide, [Fri82] Def 4.2). Un *revêtement rigide* $a : U \rightarrow X$ d'un schéma localement noethérien X est une union disjointe de morphismes étales pointés et séparés

$$a_X : (U_X, u_X) \mapsto (X, x), \quad \forall x \in \bar{X}$$

avec U_X connexe et $u_X \circ a_X : \mathrm{spec}(\Omega) \rightarrow X = x$.

Nous rappelons qu'un *schéma simplicial* est un objet simplicial dans la catégorie des schémas, i.e un foncteur contravariant $\mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{Sch}$. Dans la suite, nous indiquerons les schémas simpliciaux avec le point \bullet . Soit \mathcal{U}_\bullet un schéma simplicial au dessus d'une base S . Nous notons $\mathcal{U}_\bullet^{(n)}$ la n -troncature de \mathcal{U}_\bullet : $\mathcal{U}_\bullet^{(n)}$ est la restriction de \mathcal{U}_\bullet à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Delta}$ avec pour objets les $\Delta[k]$, $k \leq n$.

Définition 1.1.4 (Cosquelette, [Fri82] Exemple 1.3). Pour tout $n \geq 0$, le n -ième *cosquelette* de \mathcal{U}_\bullet sur S est défini par la propriété universelle suivante : pour tout schéma simplicial \mathcal{V}_\bullet sur S , l'ensemble des morphismes $\mathcal{V}_\bullet \rightarrow \text{cosk}_n^S \mathcal{U}_\bullet$ sur S est en bijection naturelle avec l'ensemble des morphismes $\mathcal{V}^{(n)} \rightarrow \mathcal{U}^{(n)}$ sur S .

Vu comme un foncteur, $\text{cosk}_n^S(-)$ est adjoint à droite au foncteur de n -troncature $(-)^{(n)}$. En général, le cosquelette peut s'exprimer comme un produit fibré fini avec pour termes les \mathcal{U}_k et S .

Exemple 1.1.5. Nous donnons deux exemples de cosquelette dans des petites dimensions.

- Si X est un schéma sur S , son 0-cosquelette est le *nerf de Čech* $N_S(X)$ de X sur S , avec $(N_S(X))_l$ le produit itéré $l + 1$ fois de X avec lui même au dessus de S .
- Si \mathcal{U}_\bullet est un schéma simplicial sur S , $(\text{cosk}_1^S \mathcal{U}_\bullet)_2 = (\mathcal{U}_1 \times_{\mathcal{U}_0} \mathcal{U}_1) \times_{(\mathcal{U}_0 \times_S \mathcal{U}_0)} \mathcal{U}_1$.

Définition 1.1.6 (Hyper revêtement rigide, [Fri82] Prop 4.3). Un *hyper revêtement rigide* $\mathcal{U}_\bullet \rightarrow X$ est un schéma simplicial \mathcal{U}_\bullet sur X vérifiant les propriétés suivantes :

1. le morphisme $\mathcal{U}_0 \rightarrow X$ est un revêtement *fini étale*,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} \rightarrow (\text{cosk}_n^X \mathcal{U}_\bullet)_{n+1}$ est un revêtement *fini étale* rigide.

Nous notons $\mathbf{HRR}(X)$ la catégorie des hyper revêtements rigides de X .

Proposition 1.1.7 ([Fri82] Prop 4.3). *Soit X un schéma localement noethérien. La catégorie $\mathbf{HRR}(X)$ est cofiltrante.*

Cela nous permet de définir maintenant le *type topologique étale*.

Définition 1.1.8 (Type topologique étale). Soit X un schéma localement noethérien. Le *type topologique étale* de X est le pro-ensemble simplicial suivant :

$$(X)_{\text{et}} = \pi_0 : \mathbf{HRR}(X) \rightarrow \mathbf{Ss}$$

où l'image par le foncteur π_0 d'un hyper revêtement rigide \mathcal{U}_\bullet est l'ensemble simplicial $\pi_0(\mathcal{U}_\bullet)$ de ses composantes connexes.

Le foncteur type topologique étale

$$(-)_{\text{et}} : \text{loc.noeth.Sch} \rightarrow \mathbf{Pro-Ss}$$

envoie un schéma localement noethérien X sur $(X)_{\text{et}}$ et un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ sur le morphisme induit $f_{\text{et}} : X_{\text{et}} \rightarrow Y_{\text{et}}$.

1.2 Groupe fondamental simplicial et étale

En topologie algébrique, le groupe fondamental topologique est un invariant algébrique associé à un espace topologique. Il est défini classiquement comme le groupe des lacets en un point modulo la relation d'homotopie.

Dans le cadre des (pro-)ensembles simpliciaux nous définissons des groupes d'homotopie analogues aux groupes d'homotopie de topologie algébrique.

Définition 1.2.1 (complexe de Kan). Un ensemble simplicial X est un *complexe de Kan* si tous les morphismes $\alpha : \Lambda_k^n \rightarrow X$ peuvent être étendus à un morphisme défini sur Δ^n dans le sens qu'il existe un morphisme $\beta : \Delta^n \rightarrow X$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \beta & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

soit commutatif.

Dans \mathbf{Ss} , deux morphismes $\alpha, \alpha' : K \rightarrow X$ sont équivalents par la relation *d'homotopie simpliciale* s'il existe un morphisme $\eta : K \times \Delta^1 \rightarrow X$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ \downarrow & \searrow \alpha & \\ K \times \Delta^1 & \xrightarrow{\eta} & X \\ \uparrow & \nearrow \alpha' & \\ K & & \end{array}$$

soit commutatif.

Soit X un complexe de Kan, et $v \in X_0$ un sommet. Nous définissons $\pi_n^{\text{simp}}(X, v)$ comme l'ensemble des classes d'équivalences d'applications $\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ telles que la bordure du n -simplexe soit envoyée sur v , i.e que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

soit commutatif dans \mathbf{Ss} . Établir une loi de composition sur π_n^{simp} est moins aisé que dans le cas topologique. Nous référons à [GJ99] I.7 pour la construction, et nous rappelons simplement le résultat principal de la section.

Théorème 1.2.2 ([GJ99] Théorème 7.2). *Soit X un complexe de Kan, et $v \in X_0$. Alors l'ensemble $\pi_n^{\text{simp}}(X, v)$ est un groupe pour $n \geq 1$, abélien pour $n \geq 2$.*

Le groupe π_n^{simp} est appelé le *n -ième groupe d'homotopie simpliciale*, et π_1^{simp} est le *groupe fondamental simplicial*. Nous le notons π_1 quand il n'y a pas d'ambiguïté. Le groupe fondamental simplicial peut être vu comme un foncteur $\pi_1 : \mathbf{Ss}_* \rightarrow \mathbf{Group}$. Nous pouvons l'appliquer sur des diagrammes d'ensembles simpliciaux pour obtenir un pro-groupe. Ainsi, il définit aussi un foncteur $\pi_1 : \mathbf{Pro-Ss}_* \rightarrow \mathbf{Pro-Group}$.

Pour A un anneau, nous notons A_{red} le quotient de A par son nilradical.

Définition 1.2.3 (Schéma géométriquement unibranche, [EGA]IV 6.15.1, 23.2.1). Un anneau local A est dit *unibranche* si l'anneau A_{red} est intègre et si la clôture intégrale de A_{red} est un anneau local. Nous dirons que A est *géométriquement unibranche* s'il est unibranche et si le corps résiduel de l'anneau local, clôture intégrale de A_{red} , est une extension radicielle de celui de A .

Un schéma X est *unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*) en un point x si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est unibranche (resp. géométriquement unibranche), il est *unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*) s'il l'est en tout point.

En particulier, les schémas *normaux* sont unibranches.

Théorème 1.2.4 ([Fri82] Théorème 7.3). *Soit X un schéma noethérien pointé, connexe et géométriquement unibranche. Alors pour tout k supérieur ou égal à 1, le groupe $\pi_k(X_{\text{ét}})$ est profini.*

En géométrie algébrique, nous définissons un *foncteur fibre* similaire à celui de topologie algébrique. Soit X un schéma localement noethérien, avec x un point géométrique de corps résiduel associé au point schématique $k(x) \hookrightarrow \Omega$. Notons \mathbf{ET}/X la catégorie des revêtements finis étales sur X . Nous appelons *foncteur fibre* le foncteur

$$F : \mathbf{ET}/X \longrightarrow \mathbf{Fin. Set}, \quad F(Y \xrightarrow{\pi} X) = \pi^{-1}(x)$$

avec

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x) &= \{\text{ensemble des points géométriques de } X \text{ sur } x \text{ à valeur dans } \Omega\} \\ &= \{\text{ensemble des points de } X \times_{k(x)} \Omega\}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.5. Le groupe fondamental étale $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$ de X au point géométrique x est le groupe d'automorphismes du foncteur fibre.

En général, le groupe fondamental étale est *profini*. Nous référons à [SGA1], Exposé V pour une présentation complète du groupe fondamental étale.

Exemple 1.2.6 (Groupe fondamental étale d'un corps). Soit k un corps, et Ω une extension de k algébriquement close. Notons $S = \text{Spec } k$ et \mathcal{C} la catégorie des revêtements finis étales de S . Les objets de \mathcal{C} sont de la forme $\text{Spec } K$, où K est une extension finie séparable de k . L'extension Ω de k définit un point géométrique s de S .

Par définition, pour un objet X de \mathcal{C} , son image par le foncteur fibre $F(X)$ est l'ensemble des points géométriques de $X = \text{Spec } K$ à valeurs dans Ω . Ainsi,

$$F(X) \simeq \text{Hom}_k(K, \Omega) \simeq \text{Hom}_k(K, k^{\text{sep}}) \simeq \lim \text{Hom}_k(K, N_i) \\ \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \simeq \text{colim Gal}(N_i/k)$$

avec N_i une famille filtrante d'extensions galoisiennes finies de k et k^{sep} une clôture séparable de k dans Ω . Nous concluons à un isomorphisme canonique

$$\pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec } k, s) \simeq \text{Gal}(k^{\text{sep}}, k).$$

Exemple 1.2.7 (Cas des variétés algébriques complexes). Soit X un \mathbb{C} -schéma localement de type fini connexe et X^{an} l'espace analytique associé. Notons $\varphi : X^{\text{an}} \rightarrow X$ le morphisme canonique. D'après le théorème d'existence de Riemann ([SGA1] Exposé XII Théorème 5.1), le foncteur qui à un revêtement fini étale X' de X associe le revêtement fini étale X'^{an} est une équivalence de catégorie entre la catégorie des revêtements finis étales de X et la catégorie des revêtements finis étales de X^{an} . En particulier, pour $x \in X^{\text{an}}$, nous avons un isomorphisme canonique

$$\pi_1(\widehat{X^{\text{an}}}, x) \simeq \pi_1^{\text{ét}}(X, \varphi(x))$$

où $\pi_1(\widehat{X^{\text{an}}}, x)$ est le *complété profini* du groupe fondamental topologique de X^{an} en x .

Remarque 1.2.8. Il existe un autre groupe fondamental étale pour les schémas, appelé pro-groupe fondamental élargi, et présenté dans [SGA3] Exposé X paragraphe 6. Les deux notions coïncident dans le cas des schémas géométriquement unibranches.

Le type topologique étale permet de relier les notions de groupe fondamental simplicial et étale.

Proposition 1.2.9. Soit X un schéma, et $x \in X$ un point géométrique. Alors nous avons un isomorphisme

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, x) \simeq \pi_1(X_{\text{ét}}, x_{\text{ét}})$$

où le groupe fondamental étale est pris au sens de SGA3.

La proposition 1.2.9 permet de généraliser le groupe fondamental étale aux dimensions supérieures.

Définition 1.2.10. Soit X un schéma, et $x \in X$. Pour toute dimension $n \geq 1$, nous appelons *n -ième groupe d'homotopie étale* de X en x , noté $\pi_n^{\text{ét}}(X, x)$, le groupe $\pi_n(X_{\text{ét}}, x_{\text{ét}})$.

Remarque 1.2.11. Comme pour le groupe fondamental, nous pouvons aussi adapter la *cohomologie singulière* topologique aux contextes simplicial et étale. Nous référons à [SGA41/2] pour une présentation complète de la cohomologie étale. Soit $\{Y_i\}_{i \in I}$ un pro-ensemble simplicial, et M un groupe abélien. Pour tout $n \geq 0$, le *n -ième groupe de cohomologie pro-simpliciale* de Y à coefficient dans M est défini par

$$H^n(Y, M) = \text{colim}_i H^n(Y_i, M).$$

[[Fri82] Proposition 5.9] Soit X un schéma connexe et M un groupe abélien. Alors il y a un isomorphisme naturel

$$H_{\text{ét}}^*(X, M) \simeq H^*(X_{\text{ét}}, M).$$

1.3 Une catégorie de modèles sur les pro-ensembles simpliciaux

Une *catégorie de modèles* est une structure introduite par Quillen dans [Qui67] qui donne un bon cadre fonctoriel pour étudier la *théorie de l'homotopie*. Nous utilisons les axiomes plus modernes exposés dans [Hov99].

Nous introduisons quelques définitions préliminaires. Soit \mathcal{C} une catégorie, nous appelons $\text{Map } \mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de \mathcal{C} et les morphismes sont les carrés commutatifs. Nous notons d et c les foncteurs domaine et codomaine $\text{Map } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Définition 1.3.1. Soit \mathcal{C} une catégorie.

1. Un morphisme f dans \mathcal{C} est une *rétraction* d'un morphisme g dans \mathcal{C} si f est une rétraction de g vu comme objets de $\text{Map } \mathcal{C}$. Ainsi, le morphisme f est une rétraction de g si et seulement si il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B \end{array}$$

où les composées horizontales sont l'identité.

2. Une *factorisation fonctorielle* est une paire ordonnée (α, β) de foncteurs $\text{Map } \mathcal{C} \rightarrow \text{Map } \mathcal{C}$ tels que $d \circ \alpha = d, c \circ \alpha = d \circ \beta, c \circ \beta = c$, et $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ pour tout $f \in \text{Map } \mathcal{C}$.

Définition 1.3.2 (Propriété des relèvements). Soit $i : A \rightarrow B$ et $p : X \rightarrow Y$ deux morphismes dans \mathcal{C} . Nous disons que i a la *propriété des relèvements à gauche par rapport à p* et que p a la *propriété des relèvements à droite par rapport à i* si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

il existe un relèvement $h : B \rightarrow X$ tel que $hi = f$ et $ph = g$.

Définition 1.3.3 (Structure de modèles). Une *structure de modèles* sur une catégorie \mathcal{C} est le choix de trois classes de morphismes appelées *équivalences faibles*, *fibrations* et *cofibrations*, et deux factorisations fonctorielles (α, β) et (γ, δ) satisfaisant les propriétés suivantes :

1. (2 parmi 3) Si f et g sont des morphismes de \mathcal{C} tels que fg est défini, et deux parmi f, g, fg sont des équivalences faibles, alors le troisième en est aussi une.
2. (Rétractions) Si f et g sont des morphismes de \mathcal{C} tels que f est une rétraction de g et g est une équivalence faible, cofibration ou fibration, alors f en est aussi une.
3. (Relèvements) Nous disons qu'un morphisme est une *fibration triviale* si c'est à la fois une fibration et une équivalence faible. Similairement, un morphisme est une *cofibration triviale* si c'est à la fois une cofibration et une équivalence faible. Alors les cofibrations triviales ont la propriété des relèvements à gauche par rapport aux fibrations, et les cofibrations ont la propriété des relèvements à gauche par rapport aux fibrations triviales.
4. (Factorisations) Pour tout morphisme f , $\alpha(f)$ est une cofibration, $\beta(f)$ est une fibration triviale, $\gamma(f)$ est une cofibration triviale, et $\delta(f)$ est une fibration.

Définition 1.3.4 (catégorie de modèles). Une *catégorie de modèles* est une catégorie avec toutes les petites limites et colimites, et munie d'une structure de modèles.

Pour utiliser des résultats de la théorie de l'homotopie sur une catégorie de modèles \mathcal{C} , nous pouvons inverser formellement les équivalences faibles pour passer à la *catégorie homotopique* $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

Définition 1.3.5 (Catégorie homotopique). Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles avec \mathcal{W} la sous-catégorie des équivalences faibles. Nous définissons la *catégorie homotopique* comme suit. Soit $F(\mathcal{C}, \mathcal{W}^{-1})$ la catégorie libre sur les morphismes de \mathcal{C} et les morphismes inversés de \mathcal{W} . Un objet de $F(\mathcal{C}, \mathcal{W}^{-1})$ est un objet de \mathcal{C} , et un morphisme est une suite finie de morphismes composables (f_1, \dots, f_n) où f_i est soit un morphisme de \mathcal{C} soit l'inverse w_i^{-1} d'un morphisme w_i de \mathcal{W} . Nous définissons $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ comme la catégorie quotient de $F(\mathcal{C}, \mathcal{W}^{-1})$ par les relations $1_A = (1_A)$ pour tout objet A , $(f, g) = (g \circ f)$ pour tous morphismes composables f et g , et $1_{\text{dom } w} = (w, w^{-1})$ et $1_{\text{codom } w} = (w^{-1}, w)$ pour tout morphisme $w \in \mathcal{W}$.

Exemple 1.3.6 (Espaces topologiques et ensembles simpliciaux). Les catégories de modèles permettent de formaliser le lien entre la théorie de l'homotopie sur les espaces topologiques et sur les ensembles simpliciaux. Le n -simplexe standard topologique $|\Delta^n| \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est l'espace $|\Delta^n| = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}$.

Soit T un espace topologique, l'ensemble singulier $S(T)$ est l'ensemble simplicial donné par $\Delta[n] \mapsto \text{Hom}(|\Delta^n|, T)$. Nous appelons $S(-) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ss}$ le *foncteur singulier*. Soit X un ensemble simplicial. Notons $\mathbf{\Delta} \downarrow X$ la catégorie dont les objets sont les morphismes $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, et les morphismes sont les diagrammes de morphismes simpliciaux :

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & & \\ \theta \downarrow & \searrow \sigma & \\ \Delta^m & \nearrow \tau & X \end{array}$$

La *réalisation* de l'ensemble simplicial X est définie comme la colimite

$$\begin{array}{c} |X| = \text{colim } |\Delta^n| \\ \Delta^n \rightarrow X \\ \text{dans } \mathbf{\Delta} \downarrow X \end{array}$$

dans la catégorie des espaces topologiques. Nous appelons *réalisation* le foncteur $|-| : \mathbf{Ss} \rightarrow \mathbf{Top}$. Le foncteur réalisation est adjoint à gauche au foncteur singulier dans le sens qu'il y a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, T) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Ss}}(X, S(T))$$

naturel en l'ensemble simplicial X et l'espace topologique T . Nous allons plus loin en introduisant la catégorie de modèles standard sur \mathbf{Ss} .

Définition 1.3.7 (Fibration de Kan). Un morphisme d'ensembles simpliciaux est une *fibration de Kan* si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions $\Delta_k^n \hookrightarrow \Delta^n$.

Axiome 1.3.8 (catégorie de modèles sur \mathbf{Ss}). Soit f un morphisme de \mathbf{Ss} ,

- c'est une *équivalence faible* si et seulement si $|f|$ induit des π_n isomorphismes pour tout $n \geq 0$,
- c'est une *cofibration* si et seulement si il est injectif,
- c'est une *fibration* si et seulement si c'est une fibration de Kan.

Proposition 1.3.9. *La catégorie \mathbf{Ss} est munie d'une catégorie de modèles par les axiomes 1.3.8.*

Les catégories de modèles permettent une comparaison précise des théories homotopiques avec les notions d'adjonction de Quillen et d'équivalence de Quillen. De manière informelle, une équivalence de Quillen entre deux catégories nous permet de les considérer comme « équivalentes homotopiquement ». Pour une exposition complète du sujet nous référons à [Hov99] Chapitre 1 Paragraphe 3. Le foncteur singulier et le foncteur réalisation sont une équivalence de Quillen, donc

l'étude de l'homotopie dans le cadre des ensembles simpliciaux et des espaces topologiques est similaire. Nous avons en particulier une équivalence de catégorie $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{Ss})$. À partir de maintenant nous parlerons sans distinction d'espace pour désigner un espace topologique ou un ensemble simplicial.

Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles, et X un objet de \mathcal{C} . Comme \mathcal{C} admet des limites et colimites finies, elle admet en particulier un objet initial 0 et un objet final 1 . Un objet X est dit *cofibrant* si l'unique morphisme $0 \rightarrow X$ est une cofibration. Similairement, l'objet X est dit *fibrant* si le morphisme $X \rightarrow 1$ est une fibration.

Notons f l'unique morphisme envoyant 0 sur X . Alors d'après les axiomes d'une catégorie de modèles, nous avons une factorisation $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ avec $\alpha(f) : 0 \rightarrow X_{cf}$ une *cofibration*, et $\beta(f) : X_{cf} \rightarrow X$ une *équivalence faible*. Nous pouvons mener un raisonnement similaire pour trouver un objet fibrant X_c faiblement équivalent à X .

Exemple 1.3.10. Tous les ensembles simpliciaux sont cofibrants.

Définition 1.3.11 (Remplacement fibrant et approximation fibrante). Soit X un objet d'une catégorie de modèles \mathcal{C} ayant pour factorisations fonctorielles (α, β) et (γ, δ) . Nous appelons remplacement cofibrant (resp. fibrant) de X , noté X_{cf} (resp. X_f), le codomaine de $\alpha(0 \rightarrow X)$ (resp. le codomaine de $\gamma(X \rightarrow 1)$).

Plus généralement, tous les objets faiblement équivalents à X et cofibrant (resp. fibrant) sont appelés *approximations cofibrantes* (resp. *approximation fibrantes*) de X .

Le théorème fondamental de Quillen permet de comprendre les morphismes dans la catégorie homotopique comme des morphismes de la catégorie de modèles.

Théorème 1.3.12 (Quillen, [Hov99] Théorème 1.2.10). Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles, avec $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}\mathcal{C}$ le morphisme canonique et X et Y deux objets de \mathcal{C} . Alors le morphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}\mathcal{C}}(\gamma X, \gamma Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{cf}, Y_f)$$

est un isomorphisme.

Nous adaptons les axiomes de la catégorie de modèles sur \mathbf{Ss} au cas de $\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}$. Pour cela, nous nous basons sur les travaux de Isaksen dans [Isa01]. Une des difficultés technique est la suivante.

Exemple 1.3.13 (Un pro-espace sans point). Rappelons qu'un point d'un pro-espace X est un morphisme $* \rightarrow X$. Considérons le diagramme D suivant, constitué d'une suite de copies de \mathbb{N} .

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{+1} & \mathbb{N} & \xrightarrow{+1} & \mathbb{N} & \xrightarrow{+1} & \mathbb{N} \\ & \swarrow & & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\ & & & & * & & m \end{array}$$

Alors si $* \rightarrow D$ est un point de D , et $m \in \mathbb{N}$ est sa valeur en la première copie de \mathbb{N} , alors sa valeur en la $m + 1$ -ième copie de \mathbb{N} devrait être -1 , une contradiction.

Donc nous ne pouvons pas axiomatiser les équivalences faibles d'un pro-espace en fonction du diagramme des groupes fondamentaux. Rappelons qu'un *système local* sur un espace X est un foncteur $\Pi X \rightarrow \mathbf{Ab}$, avec ΠX le *groupoïde fondamental* de X . Nous noterons $\mathcal{LS}(X)$ la catégorie des systèmes locaux sur X . Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces, alors f induit un morphisme de systèmes locaux $\Pi_n X \rightarrow f^* \Pi_n Y$, avec f^* le foncteur tiré en arrière.

Exemple 1.3.14. Pour tout $n \geq 2$, le système local $\Pi_n X$ est défini sur X par $(\Pi_n X)_x = \pi_n(X, x)$, avec les isomorphismes $(\Pi_n X)_x \rightarrow (\Pi_n X)_y$ donnés par les morphismes induits sur les groupes d'homotopie par les chemins.

Remarque 1.3.15. Nous pouvons aussi parler de systèmes locaux à valeurs dans une autre catégorie que \mathbf{Ab} , par exemple $\Pi_1 X$ qui est à valeurs dans \mathbf{Group} , ou $\pi_0 X$ à valeurs dans \mathbf{Set} .

Nous étendons la définition aux pro-espaces.

Définition 1.3.16 (Système local sur un pro-espace, tiré en arrière). Un *système local* sur un pro-espace X est un objet de $\operatorname{colim}_s \mathcal{LS}(X_s)$. Si L est un système local sur (X, ϕ) représenté par un foncteur $L_s : \Pi X_s \rightarrow \mathbf{Ab}$ et M est un autre système local sur X représenté par un foncteur $M_t : \Pi X_t \rightarrow \mathbf{Ab}$, alors un morphisme de L dans M est un élément de $\operatorname{colim}_u \operatorname{Hom}_{\mathcal{LS}(X_u)}(\phi_{us}^* L_s, \phi_{ut}^* M_t)$. Nous notons toujours $\mathcal{LS}(X)$ pour la catégorie des systèmes locaux sur X .

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de pro-espaces, le *tiré en arrière* $f^* : \mathcal{LS}(Y) \rightarrow \mathcal{LS}(X)$ est le foncteur $\operatorname{colim}_s \mathcal{LS}(Y_s) \rightarrow \operatorname{colim}_t \mathcal{LS}(Y_t)$.

Définition 1.3.17 (Groupes d'homotopie). Si X est un pro-espace et $n \geq 2$, alors $\Pi_n X$ est le pro-système local sur X donné par $\{\Pi_n X_s\}$. De plus, $\pi_0 X$ est le pro-ensemble donné par $\{\pi_0 X_s\}$, et $\Pi_1 X$ est le pro-système local sur X à valeurs dans les groupes non-abéliens donné par $\{\Pi_1 X_s\}$.

Axiome 1.3.18 (catégorie de modèles sur $\mathbf{Pro-Ss}$). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de pro-espaces,

- c'est une *équivalence faible* si $\pi_0 f$ est un isomorphisme de pro-ensembles, et $\Pi_n X \rightarrow f^* \Pi_n Y$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Pro-LS}(X)$ pour tout $n \geq 1$,
- c'est une *cofibration* si c'est niveau à niveau une cofibration d'espaces,
- c'est une *fibration* si il a la propriété des relèvements à droite par rapport à toutes les cofibrations triviales.

Théorème 1.3.19 ([Isa01] Théorème 6.4). *Les classes de morphismes de l'axiome 1.3.18 forment une catégorie de modèles sur $\mathbf{Pro-Ss}$.*

Comme dans \mathbf{Ss} , tous les pro-ensembles simpliciaux sont cofibrants.

Remarque 1.3.20 (Le type d'homotopie étale d'Artin et Mazur). Avant Friedlander, Artin et Mazur avaient défini dans [AM69] le *type d'homotopie étale*. Il est construit en associant à schéma (localement noethérien) X la catégorie $\mathbf{HR}(X)$ des hyper-revêtements de X , sans la condition de rigidité de Friedlander. La catégorie $\mathbf{HR}(X)$ n'est pas cofiltrante en général, au contraire de $\mathbf{Ho}(\mathbf{HR}(X))$ ([AM69], Corollaire 8.13 (i)), le type d'homotopie étale est donc défini au niveau de la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathbf{Ss})$, c'est le foncteur $X \mapsto X_{het} = (\pi_0 : \mathbf{Ho}(\mathbf{HR}(X)) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Ss}))$.

Les catégories de modèles n'existant pas au moment où Artin et Mazur ont introduit leur type d'homotopie étale, leur notion d'équivalence faible est différente des isomorphismes de $\mathbf{Pro-Ho}(\mathbf{Ss})$. Les équivalences faibles de la catégorie de modèles de Isaksen généralisent correctement les équivalences faibles de Artin-Mazur ([Isa01] Corollaire 7.5). Le type topologique étale est un relèvement du type d'homotopie étale ([Fri82] Proposition 4.5), selon le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & (-)_{et} & \xrightarrow{\quad} \mathbf{Pro-Ss} \\ & \dashrightarrow & \downarrow F \\ \text{loc.noeth.Sch} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Pro-Ho}(\mathbf{Ss}) \\ & (-)_{het} & \end{array}$$

avec F le foncteur d'oubli.

1.4 Contexte anabélien

En général, les corps utilisés en géométrie anabélienne sont des *corps de nombres* ou des *corps sous-p-adiques* (un sous-corps d'une extension finie de \mathbb{Q}_p).

Proposition 1.4.1 (Suite exacte courte d'homotopie, [SGA1] Exposé X Proposition 1.2). *Soit k un corps et X une k -variété, géométriquement connexe. Nous avons la suite exacte courte de groupes profinis suivante :*

$$1 \rightarrow \pi_1(X \times_k k^{\text{sep}}, *) \rightarrow \pi_1(X, *) \rightarrow \operatorname{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \rightarrow 1$$

avec $*$ un point géométrique convenable.

Nous retrouvons cette suite exacte pour les schémas de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$ (cf définition 2.2.1) induite par la suite exacte d'homotopie ([Fri82] Théorème 11.5).

Nous appelons *groupe de Galois absolu de k* , noté G_k , le groupe $\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$. Nous notons Π_X le groupe fondamental étale, relatif à un choix de point base. Finalement, nous appelons *groupe fondamental géométrique* le groupe topologique $\Delta_X = \ker(\Pi_X \rightarrow G_k)$. La suite exacte courte d'homotopie induit *l'action galoisienne extérieure* :

$$\rho : G_k \rightarrow \text{Out}(\Delta_X)$$

où, pour un groupe topologique G , le groupe des *automorphismes extérieurs* $\text{Out}(G)$ est le quotient du groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes continus de G par le groupe $\text{Inn}(G)$ des automorphismes intérieurs de G .

Exemple 1.4.2 (Caractère cyclotomique). Soit $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, \infty\}$. Pour calculer le groupe fondamental étale de X , remarquons que $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, \infty\} = \text{Spec}(\mathbb{Q}[X, \frac{1}{X}])$ et que $X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Nous en déduisons que $\pi_1(X(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$, et $\pi_1^{\text{et}}(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$. L'action galoisienne extérieure induite $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Out}(\hat{\mathbb{Z}})$ est le *caractère cyclotomique*.

La géométrie anabélienne pose la question suivante : pour X et Y deux k -variétés lisses géométriquement connexes, étant donné un isomorphisme $\gamma : \Pi_X \rightarrow \Pi_Y$ sur G_k , pouvons-nous lui associer de manière unique, modulo l'action de Δ_Y , un isomorphisme de k -variétés $\tilde{\gamma} : X \rightarrow Y$?

Dans ce mémoire, nous reformulons ce problème de géométrie anabélienne en termes de *type topologique étale*, en suivant les travaux de A. Schmidt et J. Stix [SS16]. Nous travaillerons en général sur des k -variétés lisses qui se plongent comme sous-schéma fermé d'un produit de courbes hyperboliques. Nous présentons le théorème suivant (théorème 3.3.1) :

Théorème 1.4.3. *Soit k un corps de nombres, et X et Y deux variétés lisses, géométriquement connexes sur k qui se plongent comme sous-schéma fermé d'un produit de courbes hyperboliques lisses. Alors le morphisme naturel*

$$\text{Isom}_k(X, Y) \longrightarrow \text{Isom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}})$$

est une injection scindée avec une rétraction fonctorielle

$$r : \text{Isom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}}) \rightarrow \text{Isom}_k(X, Y).$$

En section 4, nous aboutirons au théorème suivant (corollaire 4.3.8), qui établit la conjecture de Grothendieck :

Théorème 1.4.4. *Tous les points d'une variété lisse sur un corps de nombres admettent un système fondamental de voisinages hyperboliques anabéliens fortement artiniens.*

2 Le théorème fondamental anabélien, reformulation

La conjecture anabélienne pour les courbes hyperboliques (dimension 1) a été prouvée par S. Mochizuki dans [Moc99].

Théorème 2.0.1 (pGC, [Moc99] Théorème A). *Soit k un corps sous p -adique, X une k -variété lisse connexe, et Y une courbe lisse hyperbolique sur k . Alors le morphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{dom}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_k}^{\pi_1\text{-open}}(\Pi_X, \Pi_Y)_{\Delta_Y}$$

est une bijection.

Le point de vue du *type topologique étale* suggère alors de considérer le diagramme suivant :

Diagramme 2.0.2.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{open}}(X, Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{G_k}^{\pi_1\text{-open}}(\Pi_X, \Pi_Y)_{\Delta_Y} \\ \downarrow (-)_{\mathrm{et}} & & \uparrow \pi_1 \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}\downarrow k_{\mathrm{et}}}^{\pi_1\text{-open}}(X_{\mathrm{et}}, Y_{\mathrm{et}}) & \dashrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}\downarrow (k_{\mathrm{et}}, *)}^{\pi_1\text{-open}}((X_{\mathrm{et}}, *), (Y_{\mathrm{et}}, *))_{\Delta_Y} \end{array}$$

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser aux morphismes suivants, dans l'idée de compléter le diagramme :

1. l'oubli de point base $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}\downarrow k_{\mathrm{et}}}^{\pi_1\text{-open}}(X_{\mathrm{et}}, Y_{\mathrm{et}}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}\downarrow (k_{\mathrm{et}}, *)}^{\pi_1\text{-open}}((X_{\mathrm{et}}, *), (Y_{\mathrm{et}}, *))_{\Delta_Y}$,
2. le morphisme $\pi_1 : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}\downarrow (k_{\mathrm{et}}, *)}^{\pi_1\text{-open}}((X_{\mathrm{et}}, *), (Y_{\mathrm{et}}, *))_{\Delta_Y} \rightarrow \mathrm{Hom}_{G_k}^{\pi_1\text{-open}}(\Pi_X, \Pi_Y)_{\Delta_Y}$.

2.1 L'action de monodromie

Nous avons remplacé le groupe fondamental étale par le type topologique étale, ce qui permet d'utiliser des méthodes issues de la théorie de l'homotopie. Pour relier les morphismes entre espaces pointés et non-pointés, nous reconstruisons formellement *l'action de monodromie*. Pour cela, nous introduisons les *groupes d'homotopie topologique* d'un pro-ensemble simplicial, qui se comportent comme les groupes d'homotopie classique de topologie-algébrique. Nous notons $(I, 0, 1)$ et $(S^n, *)$ respectivement l'intervalle unité simplicial pointé en ses deux sommets 0 et 1, et la n -sphère simpliciale pointée, vus comme pro-ensembles simpliciaux constants.

Définition 2.1.1 (Groupes d'homotopie topologique). Soit (Y, y_1, y_2) un pro-espace pointé.

1. Nous notons $\pi_1^{\mathrm{top}}(Y, y_1, y_2)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}_*)}((I, 0, 1), (Y, y_1, y_2))$. Nous appelons *groupe fondamental topologique* de Y en y , le groupe

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathrm{top}}(Y, y) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1^{\mathrm{top}}(Y, y, y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}_*)}((I, 0, 1), (Y, y, y)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}_*)}((S^1, *), (Y, y)). \end{aligned}$$

2. Généralisons la construction en plus grande dimension. Soit $n \geq 1$, nous appelons *n -ième groupe d'homotopie topologique* de (Y, y) le groupe $\pi_n^{\mathrm{top}}(Y, y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}_*)}((S^n, *), (Y, y))$.

Remarque 2.1.2. Si Y est fibrant, d'après le théorème fondamental de Quillen (théorème 1.3.12), le *n -ième groupe d'homotopie topologique* est l'ensemble des morphismes de pro-ensemble simpliciaux de $(S^n, *)$ dans (Y, y) modulo la relation d'homotopie.

Considérons $Y \rightarrow Z$ une *approximation fibrante* de Y (cf définition 1.3.11) telle que $y_i \mapsto z_i$ pour $i = 1, 2$. Alors pour tout chemin α de z_1 à z_2 dans Z et tout morphisme $f : (X, x) \mapsto (Z, z_1)$, le diagramme 2.1.3 est commutatif, où F est défini via la propriété de relèvement des fibrations.

Diagramme 2.1.3.

$$\begin{array}{ccc} (X, x) \vee (I, 0) & \xrightarrow{f \vee \alpha} & Z \\ \downarrow & \nearrow F & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & * \end{array}$$

Proposition 2.1.4 ([Whi78] Chapitre 3 Paragraphe 1).

— *Le diagramme 2.1.3 induit une composition*

$$\begin{aligned} [(X, x), (Y, y_1)] \times \pi_1^{\text{top}}(Y, y_1, y_2) &\longrightarrow [(X, x), (Y, y_2)] \\ (f, \alpha) &\longmapsto (\alpha(f) : x \mapsto F(x, 1)). \end{aligned}$$

— *Lorsque $y = y_1 = y_2$, nous en déduisons une action dite monodromique de $\pi_1^{\text{top}}(Y, y)$ sur $[(X, x), (Y, y)]$.*

Cette action est la clé du théorème classique de théorie de l'homotopie suivant. Nous rappelons qu'un pro-ensemble simplicial pointé (Y, y) est dit *connexe par arcs* si son groupe fondamental topologique est trivial : $\pi_1^{\text{top}}(Y, y) = *$.

Théorème 2.1.5 ([Whi78] Chapitre 3 Paragraphe 1). *Soient (X, x) et (Y, y) deux pro-ensembles simpliciaux pointés, et supposons Y connexe par arcs. Alors l'oubli de point induit un isomorphisme*

$$\left([(X, x), (Y, y)]_{\mathbf{Pro-Ss}_*} \right)_{\pi_1^{\text{top}}(Y, y)} \xrightarrow{\sim} [X, Y]_{\mathbf{Pro-Ss}}.$$

Nous allons raffiner ce théorème en travaillant au dessus d'une base.

Théorème 2.1.6. *Soit (B, b) un pro-espace, et soit (X, x) et (Y, y) deux pro-espaces pointés sur (B, b) . Notons $p_X : (X, x) \rightarrow (B, b)$ et $p_Y : (Y, y) \rightarrow (B, b)$ les morphismes canoniques, et $\varphi = \pi_1^{\text{top}}(p_Y) : \pi_1^{\text{top}}(Y, y) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(B, b)$. Supposons que Y et B sont connexes par arcs, et que φ est surjective. Alors le morphisme induit par l'oubli de points est surjectif et se factorise en un isomorphisme sous l'action de $\Delta = \varphi^{-1}(\text{Stab}(p_X))$.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*) \downarrow (B, b)}((X, x), (Y, y)) & \twoheadrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow B}(X, Y) \\ \Downarrow & \nearrow \sim & \\ \left(\text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*) \downarrow (B, b)}((X, x), (Y, y)) \right)_{\Delta} & & \end{array}$$

Démonstration. Oublions momentanément le morphisme p_X . Nous avons une décomposition en union disjointe

$$[(X, x), (Y, y)]_{\mathbf{Pro-Ss}_*} = \coprod_{p \in [(X, x), (B, b)]_{\mathbf{Pro-Ss}_*}} \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow (B, b)}((X, x, p), (Y, y, p_Y)) \quad (1)$$

où un morphisme $f_0 : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ de $\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss})$ s'envoie sur lui même vu comme morphisme sur (B, b) , dans la composante $p = p_Y f_0$. En appliquant le même raisonnement dans le cas des morphismes non pointés, nous trouvons aussi la décomposition

$$[X, Y]_{\mathbf{Pro-Ss}} = \coprod_{p \in [X, B]_{\mathbf{Pro-Ss}}} \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow B}((X, p), (Y, p_Y)). \quad (2)$$

Par le théorème 2.1.5 nous avons une $\pi_1^{\text{top}}(Y, y)$ -action sur $[(X, x), (Y, y)]_{\mathbf{Pro-Ss}_*}$ dont l'espace des orbites s'identifie avec le terme de gauche de (2).

Montrons la surjectivité. Soit $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow B}(X, Y)$, le morphisme f est dans la composante p_X de (2). Soit $f_0 \in [(X, x), (Y, y)]_{\mathbf{Pro-Ss}_*}$ un antécédent de f . Par définition, f_0 est dans

la composante $p_Y f_0$ de (1). Par construction, p_X et $p_Y f_0$ sont égaux dans $[X, B]_{\mathbf{Pro-Ss}}$. D'après le théorème 2.1.5, il existe $\sigma \in \pi_1^{\text{top}}(B, b)$ tel que $\sigma(p_Y f_0) = p_X$ dans $\text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}((X, x), (B, b))$. Soit τ une pré-image de σ , alors $\tau(f_0)$ est dans la composante p_X de (1), donc il s'agit bien d'un antécédent de f .

Pour l'injectivité, les morphismes f_0 et f'_0 ont la même image si et seulement si il existe $\tau \in \pi_1^{\text{top}}(Y, y)$ tel que $f_0 = \tau(f'_0)$, qui est envoyé dans $\text{Stab}(p_X) \subset \pi_1^{\text{top}}(B, b)$ par p_{Y*} . \square

Appliquons ce théorème au contexte géométrique du théorème 2.0.1. Par construction, nous avons l'inclusion $\Delta_Y = \ker(\Pi_Y \twoheadrightarrow G_k) \leq \text{Stab}(\Pi_Y \twoheadrightarrow G_k) = \Delta$. Montrons que $\Delta = \Delta_Y$. Pour cela, nous utiliserons le résultat intermédiaire suivant.

Définition 2.1.7 (SCF). Un groupe profini est dit *Strongly Center Free* (Fortement Sans Centre) si tous ses sous-groupes ouverts ont un centre trivial.

Lemme 2.1.8 ([Moc99] Lemme 15.8). *Les corps sous-p-adiques sont fortement sans centre.*

Soit $g \in \text{Stab}(p_X)$, par définition g centralise le sous-groupe ouvert $\text{Im}(\Pi_X \rightarrow G_k) \leq G_k$, donc $g = 1$ par (SCF). Ainsi $\Delta = \ker(\Pi_Y \rightarrow G_k) = \Delta_Y$. Nous avons montré le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.9. *L'application naturelle*

$$\text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_{\downarrow k_{\text{et}}}}^{\pi_1\text{-open}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}}) \rightarrow \left(\text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_{\downarrow (k_{\text{et}}, *)}}^{\pi_1\text{-open}}((X_{\text{et}}, *), (Y_{\text{et}}, *)) \right)_{\Delta_Y}$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme s'insère dans le diagramme 2.0.2.

2.2 Pro-groupes et espaces de Eilenberg-MacLane étales

En topologie algébrique, la notion d'espaces d'Eilenberg-MacLane est utilisée pour décrire des espaces dont l'information homotopique est contenue entièrement dans le groupe fondamental. La classe des espaces d'Eilenberg-MacLane est notée $K(\pi, 1)$. En utilisant le type topologique étale, nous donnons une définition analogue pour les objets de nature géométrique.

Définition 2.2.1 ($K(\pi_{\text{et}}, 1)$). Un schéma pointé (Y, y) est un $K(\pi_{\text{et}}, 1)$ *étale* si les groupes d'homotopie supérieurs de son type topologique étale sont triviaux : $\forall n \geq 2, \pi_n(Y_{\text{et}}, y_{\text{et}}) = *$.

Exemple 2.2.2. Comme dans le cas topologique, les courbes hyperboliques lisses sur un corps de caractéristique 0 sont des $K(\pi_{\text{et}}, 1)$ (voir [Sch96] Proposition 15).

Un des intérêts de cette notion est que si (Y, y) est un $K(\pi_{\text{et}}, 1)$, alors nous avons une équivalence faible $(Y, y) \sim B\pi_1^{\text{et}}(Y, y)$ dans notre catégorie de modèles. Ici B désigne le foncteur *espace classifiant*. Rappelons cette construction.

Définition 2.2.3 (Espace classifiant). Soit G, G' deux pro-groupes.

- Nous appelons $EG \in \mathbf{Pro-Ss}_*$ le nerf de la catégorie où chaque objet est un élément de G et tous les objets sont uniquement isomorphes. EG est muni d'une G action naturelle.
- Nous appelons $BG \in \mathbf{Pro-Ss}_*$ le quotient EG/G . De manière équivalente, BG est nerf de la catégorie constituée d'un unique objet et où chaque morphisme est donné par un élément de G . Le pro-espace BG est appelé *espace classifiant* de G .

Proposition 2.2.4. *Soit G un pro-groupe.*

1. *Le pro-espace EG est contractile.*
2. *Nous avons*

$$\pi_n(BG) = \begin{cases} G, & \text{pour } n = 1, \\ 0, & \text{pour } n \geq 2, \end{cases}$$

Démonstration. Les preuves sont les même que dans le cas où G est un groupe, voir [Hat02], Chapitre 1 Exemple 1B7. \square

Nous introduisons une dernière notion technique avant de continuer. Dans **Top**, les revêtements sont des fibrations, nous allons montrer un équivalent pour les pro-espaces. Nous rappelons qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux $p : Y \rightarrow X$ est un revêtement si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow i & \nearrow s & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{v} & X \end{array}$$

de flèches pleines u, i, p, v , il existe un unique relèvement s qui fasse commuter le diagramme.

Définition 2.2.5 (Revêtement de pro-espace). Un morphisme $Y \rightarrow X$ de pro-ensembles simpliciaux est un revêtement s'il est isomorphe à un revêtement niveau à niveau d'ensembles simpliciaux.

Proposition 2.2.6. *Les revêtements sont des fibrations dans **Pro-Ss**.*

Démonstration. Soit I un ensemble d'indices cofini dirigé, et $(Y_i)_I \rightarrow (X_i)_I$ un revêtement niveau à niveau. L'unicité du relèvement pour les revêtements montre que pour tout $t \in I$, le morphisme

$$Y_t \rightarrow X_t \times_{\lim_{s < t} X_s} Y_s$$

est un revêtement, donc une fibration et une co-1-équivalence (selon [Isa01] Définition 3.1). Toujours en suivant Isaksen [Isa01], le morphisme $Y \rightarrow X$ est une *fibration forte* (Définition 6.5), donc une fibration (Proposition 14.5). \square

Le morphisme naturel

$$G = BG_1 \rightarrow \pi_1(BG) = G$$

est l'identité sur G . Cela nous permet de définir le diagramme 2.2.7 ci dessous.

Diagramme 2.2.7.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(G', G) & \xrightarrow{B(-)} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}(BG', BG) \\ \parallel & & \downarrow \mathrm{Ho}(-) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(G', G) & \xleftarrow{\pi_1} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(BG', BG) \end{array}$$

Proposition 2.2.8. *Toutes les flèches du diagramme 2.2.7 sont des isomorphismes.*

Démonstration. Il est clair par lecture du diagramme que la composée $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}(BG', BG) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(G', G)$ est surjective. Montrons que c'est une bijection. Pour cela, observons que les morphismes $\varphi : BG' \rightarrow BG$ ne dépendent que des morphismes induits au niveau des 1-cellules $\varphi_1 : G' = (BG')_1 \rightarrow (BG)_1 = G$. En effet, il apparait par récurrence en appliquant les morphismes face $\partial_n : BG_n \rightarrow BG_{n-1}$ qu'un n -simplexe de BG ne dépend que de ses bords, i.e ses cellules de dimension 1. Ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} BG'_1 = G & \xrightarrow{\varphi} & BG_1 = G \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \pi_1(BG') & \xrightarrow{\pi_1(\varphi)} & \pi_1(BG) \end{array}$$

montre que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}(BG', BG) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(G', G)$ est bien une injection.

Pour conclure au résultat de la proposition, il suffit de montrer que le passage à la catégorie homotopique induit un morphisme surjectif $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}(BG', BG) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(BG', BG)$. Comme tous les pro-espaces sont cofibrants, si BG est fibrant c'est direct d'après le théorème fondamental de Quillen. En général BG n'est pas fibrant, mais nous en construisons une approximation fibrante.

Lemme 2.2.9. Notons G^* le pro-groupe $(\prod_{j \leq i} G_j)_{i \in I}$. Le morphisme canonique $BG = EG/G \rightarrow EG^*/G \stackrel{\text{def}}{=} B^*G$ est une approximation fibrante. De plus, le pro-espace $BG^* = EG^*/G^*$ est fibrant.

Démonstration du lemme. Montrons que le morphisme $BG \rightarrow B^*G$ est une équivalence faible. Dans \mathbf{Ss} , le morphisme $BG_i = EG_i/G_i \rightarrow B^*G_i = EG_i^*/G_i$ est une équivalence faible pour tout i , donc $BG \rightarrow B^*G$ est une équivalence faible niveau à niveau, en particulier une équivalence faible dans $\mathbf{Pro-Ss}$.

Montrons maintenant que B^*G est fibrant. Dans \mathbf{Ss} les morphismes de groupes surjectifs $f : G' \rightarrow G$ induisent des fibrations $E(f) : E(G') \rightarrow E(G)$. Par construction, le morphisme

$$\prod_{j \leq i} = G_i^* \rightarrow \prod_{j < i} G_j^* = \lim_{j < i} G_j^*$$

est *surjectif*. Par conséquent, le morphisme induit $\lambda_i : EG_i^* \rightarrow E(\lim_{j < i} G_j^*) = \lim_{j < i} EG_j^*$ est *fibrant*. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} EG_i^* & \xrightarrow{\lambda_i} & E(\lim_{j < i} G_j^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B^*G)_i = EG_i^*/G_i & \xrightarrow{\mu_i} & \lim_{j < i} EG_j^* = \lim_{j < i} (B^*G)_j \end{array}$$

les flèches verticales sont des revêtements donc des fibrations. Ainsi μ_i est une fibration.

Les espaces $(B^*G)_i$ et $\lim_{j < i} (B^*G)_j$ admettent des revêtements contractibles, donc leurs groupes d'homotopie de degrés supérieurs ou égaux à 2 sont triviaux. Ainsi, B^*G est *fortement fibrant* ([Isa01], Définition 6.5), donc fibrant ([Isa01], Proposition 14.5). Le même argument montre que BG^* est fibrant. \square

Fin de la démonstration de la proposition 2.2.8. Le revêtement canonique $B^*G \rightarrow BG^*$ induit une injection au niveau des morphismes

$$\text{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(BG', B^*G) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(BG', BG^*).$$

Comme BG^* est fibrant, nous utilisons le résultat de la proposition 2.2.8. Nous obtenons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}(BG', B^*G) & \longleftarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}(BG', BG^*) \\ \text{Ho}(-)\Downarrow & & \Downarrow \text{Ho}(-) \\ \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(BG', B^*G) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(BG', BG^*) \\ \Uparrow & & \parallel \\ \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(BG', BG) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(BG', BG^*) \\ \pi_1(-)\Downarrow & & \Downarrow \pi_1(-) \\ \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(G', G) & \longleftarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(G', G^*) \end{array}$$

Nous concluons par lecture du diagramme que l'application

$$\pi_1 : \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}(BG', BG) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(G', G)$$

est une injection, donc une bijection. Cela complète la preuve. \square

Nous pouvons généraliser la proposition précédente en ne considérant que les morphismes vers un espace classifiant.

Proposition 2.2.10 ([SS16] Proposition A.16). *Le morphisme naturel*

$$\pi_1(-) : \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_*}((X, x), BG) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Group}}(\pi_1(X, x), G)$$

est un isomorphisme.

Soit Y une courbe hyperbolique lisse sur un corps sous- p -adique. D'après l'exemple 2.2.2, Y est un $K(\pi_{\text{et}}, 1)$. Nous avons en particulier une équivalence faible $(Y_{\text{et}}, *) \sim B\pi_1(Y_{\text{et}}, *)$. En injectant cette équivalence faible dans la proposition 2.2.10, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.11. *Reprenons les notations du théorème 2.0.1. L'application naturelle*

$$\text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}\downarrow(k_{\text{et}}, *)}^{\pi_1\text{-open}}((X_{\text{et}}, *), (Y_{\text{et}}, *))_{\Delta_Y} \longrightarrow \text{Hom}_{G_k}^{\pi_1\text{-open}}(\Pi_X, \Pi_Y)_{\Delta_Y}$$

est bijective.

2.3 Une version homotopique du théorème fondamental anabélien

Nous déduisons des corollaires 2.1.9 et 2.2.11 le résultat suivant.

Théorème 2.3.1. *Soit k un corps sous p -adique, X une k -variété lisse connexe, et Y une k courbe hyperbolique lisse. L'application naturelle*

$$(-)_{\text{et}} : \text{Hom}_k^{\text{open}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}\downarrow k_{\text{et}}}^{\pi_1\text{-open}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}})$$

est une bijection.

Démonstration. Nous pouvons compléter le diagramme 2.0.2 en utilisant les bijections des corollaires 2.1.9 et 2.2.11. Nous obtenons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_k^{\text{open}}(X, Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{G_k}^{\pi_1\text{-open}}(\Pi_X, \Pi_Y)_{\Delta_Y} \\ \downarrow (-)_{\text{et}} & & \uparrow \wr_{\pi_1} \\ \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}\downarrow k_{\text{et}}}^{\pi_1\text{-open}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}\downarrow(k_{\text{et}}, *)}^{\pi_1\text{-open}}((X_{\text{et}}, *), (Y_{\text{et}}, *))_{\Delta_Y} \end{array}$$

et le résultat du théorème s'en déduit immédiatement. □

Remarque 2.3.2. Les hypothèses du théorème sont exactement les même que celles du théorème 2.0.1, il s'agit seulement d'une reformulation.

3 Une rétraction fonctorielle

Nous pouvons maintenant formuler un équivalent homotopique de la conjecture de Grothendieck en dimensions supérieures : pour X et Y deux k -variétés *anabéliennes*, nous avons une bijection $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{open}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss} \downarrow k_{\mathrm{et}}}^{\pi_1\text{-open}}(X_{\mathrm{et}}, Y_{\mathrm{et}})$. Pour approcher cette conjecture, nous allons construire une rétraction

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{r} & \\ \mathrm{Isom}_k(X, Y) & & \mathrm{Isom}_{\mathbf{Pro-Ss}}(X_{\mathrm{et}}, Y_{\mathrm{et}}) \\ & \xrightarrow{\pi_1} & \end{array}$$

Notre moyen technique pour la construire sera de considérer des objets géométriques qui se plongent comme sous-schéma localement fermé dans un produit de courbes hyperboliques.

3.1 Comptage de points et revêtements étales

Avant de présenter le résultat principal de la section, nous présentons une version homotopique de la formule du point fixe de Lefschetz.

Théorème 3.1.1 (Formule des points fixes de Lefschetz, [Mil13] Théorème 25.1). *Soit X une variété complète nonsingulière sur un corps algébriquement clos k , et soit $\varphi : X \rightarrow X$ un morphisme régulier. Alors*

$$(\Gamma_\varphi \cdot \Delta) = \sum (-1)^r \mathrm{Tr}(\varphi | H^r(X, \mathbb{Q}_l)).$$

Ici, Γ_φ est le graphe de φ et Δ est la diagonale dans $X \times X$. Le *nombre d'intersection* $(\Gamma_\varphi \cdot \Delta)$ s'interprète comme le cardinal de l'intersection de Γ_φ et Δ , donc du nombre de points fixes de φ comptés avec multiplicité. En particulier, quand φ est le Frobenius et k un corps fini, la formule de Lefschetz compte le nombre de k -points de X .

Soit S un schéma noethérien normal, de point géométrique générique $\bar{\eta}$, au dessus du point générique η . Soit $s \in S$ un point fermé avec un corps résiduel $\mathbb{F}_s = \kappa(s)$ fini de cardinal $N(s) = |\mathbb{F}_s|$, et \bar{s} un point géométrique au dessus de s . Un choix de chemin étale entre \bar{s} et $\bar{\eta}$ induit un morphisme

$$G_{\kappa(s)} = \pi_1^{\mathrm{et}}(s, \bar{s}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{et}}(S, \bar{s}) \simeq \pi_1^{\mathrm{et}}(S, \bar{\eta})$$

par lequel le *Frobenius arithmétique* $\varphi_s \in G_{\kappa(s)}$ agit sur les $\pi_1^{\mathrm{et}}(S, \bar{\eta})$ -modules.

Proposition 3.1.2 (Formule de Lefschetz homotopique, [SS16] Proposition 4.1). *Dans la situation ci-dessus, soit l un nombre premier inversible sur S . Soit $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow S$ un morphisme propre lisse équidimensionnel de dimension relative d , et soit $X \subset \bar{X}$ le complément ouvert d'un diviseur strict à croisement normaux $D = \bigcup_{\alpha=1}^n D_\alpha \hookrightarrow \bar{X}$ relativement à S , avec D_α/S des diviseurs relatifs lisses pour $\alpha = 1, \dots, n$.*

Alors la $G_{\kappa(s)}$ -action sur $H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l)$ se factorise par $\pi_1^{\mathrm{et}}(S, \bar{\eta})$, et la φ_s -action induite compte le nombre de \mathbb{F}_s -points de la fibre X_s par

$$|X_s(\mathbb{F}_s)| = N(s)^d \cdot \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \mathrm{Tr}(\varphi_s | H_{\mathrm{et}}^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l)).$$

Proposition 3.1.3. *Soit k un corps de nombres, X une k -variété lisse, et Y un schéma qui se plonge comme sous-schéma localement fermé dans un produit de courbes hyperboliques : $Y \hookrightarrow C_1 \times \dots \times C_N$. Soit $f : X \rightarrow W$ un morphisme de k -variétés. Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathrm{Isom}_{\mathbf{Pro-Ss}}(X_{\mathrm{et}}, Y_{\mathrm{et}})$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & X_{\mathrm{et}} & \\ \gamma \swarrow & & \searrow f_{\mathrm{et}} \\ Y_{\mathrm{et}} & \xrightarrow{\iota_{\mathrm{et}}} & W_{\mathrm{et}} \end{array}$$

commute. Alors f se factorise à travers Y , i.e il existe un unique isomorphisme $g : X \xrightarrow{\sim} Y$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ Y & \xrightarrow{\iota} & W \end{array}$$

commute.

La preuve repose sur le lemme dit de Tamagawa de séparation de points rationels dans des revêtements étales de la courbe.

Démonstration. La proposition s'obtient en considérant un modèle régulier de la courbe pour se ramener à un corps de base fini en le point spécial. Soit S un schéma régulier connexe de type fini sur \mathbb{Z} et de point générique η . Nous nous plaçons dans le contexte suivant :

- $C_i \rightarrow S$ sont des courbes relatives propres et lisses, avec des fibres géométriquement connexes de genre ≥ 1 .
- $\iota : Y \hookrightarrow W = C_1 \times_S \dots \times_S C_N$ est un sous-schéma localement fermé, lisse en tant que S -schéma.
- $f : X \rightarrow W$ est un S -morphisme, avec X/S lisse.
- X et Y ont les compactifications sur S de la proposition 3.1.2, en particulier telles que $\bar{X}, \bar{Y} \rightarrow S$ soient des morphismes propres lisses de dimension relative d .

Supposons qu'il existe $\gamma \in \text{Isom}_{\mathbf{Pro-Ss}}((X_\eta)_{\text{et}}, (Y_\eta)_{\text{et}})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (X_\eta)_{\text{et}} & \\ \gamma \swarrow & & \searrow (f_\eta)_{\text{et}} \\ (Y_\eta)_{\text{et}} & \xrightarrow{(\iota_\eta)_{\text{et}}} & (W_\eta)_{\text{et}} \end{array}$$

commute. Alors f se factorise à travers Y .

Démonstration. Le morphisme f se factorise à travers Y si et seulement si le plongement $\iota_X : Y \times_W X \hookrightarrow X$ est un isomorphisme. Il est suffisant de montrer que ι_X est surjectif. D'après [EGA] Corollaire 10.4.6, le plongement ι_X est surjectif si tous les points fermés sont dans l'image. Or d'après [EGA] Lemme 10.4.11.1, tous les points fermés ont un corps résiduel fini. Nous devons donc établir le fait suivant :

pour tout corps fini \mathbb{F} , pour tout $x \in X(\mathbb{F})$, $f(x) \in \text{Im}(\iota : Y(\mathbb{F}) \rightarrow W(\mathbb{F}))$.

Notons $s \in S$ le point fermé de la base sous x , et $f(x) = (w_1, \dots, w_N)$, avec $w_i \in C_{i,s}(\mathbb{F})$. Soit $D_i \leq \pi_1^{\text{et}}(C_{i,s})$ un groupe de décomposition de w_i . D'après le lemme de séparation des points rationnels [Tam97] Corollaire 2.10, les groupes de décompositions de différents points rationels ne sont *pas conjugués*. En utilisant la correspondance entre sous groupes ouverts de $\pi_1^{\text{et}}(C_{i,s})$ et revêtements étales connexes de $C_{i,s}$, nous allons maintenant construire un revêtement dont l'unique point rationnel est w_i . En effet, pour tout point rationel $w'_i \neq w_i$ de $C_{i,s}$, nous pouvons trouver un sous-groupe ouvert $G_{w'_i} \leq \pi_1^{\text{et}}(C_{i,s})$ tel que $D_i \leq G_{w'_i}$ et $G_{w'_i}$ ne contient aucun sous-groupe de décomposition (conjugués) de w'_i . Le groupe $G_i = \bigcap_{w'_i \neq w_i} G_{w'_i}$ est un sous-groupe ouvert de $\pi_1^{\text{et}}(C_{i,s})$,

donc il est associé à un revêtement étale $W_i \rightarrow C_{i,s}$. Finalement, en prenant $W'_s = \prod_{i=1}^N W_i$, nous obtenons un revêtement étale $h : W'_s \rightarrow W_s$ tel que $h(W'_s(\mathbb{F})) = f(x)$. Après changement de base $W'_s \rightarrow W_s$, il suffit de montrer que $Y'_s = Y_s \times_{W_s} W'_s$ a un \mathbb{F} -point.

Soit $X'_s = X_s \times_{W_s} W'_s$, q le cardinal de \mathbb{F} , d_X la dimension relative de X/S et d_Y la dimension relative de Y/S . D'après la formule de Lefschetz homotopique (Proposition 3.1.2), nous trouvons

$$|Y_s(\mathbb{F})| = q^{d_Y} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Tr}(\varphi_s | H_{\text{et}}^i(Y'_\eta, \mathbb{Q}_l)) = q^{d_Y} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{Tr}(\varphi_s | H_{\text{et}}^i(X'_\eta, \mathbb{Q}_l)) = q^{d_Y - d_X} \cdot |X_s(\mathbb{F})|.$$

Comme $X_s(\mathbb{F}) \neq \emptyset$, l'ensemble $Y_s(\mathbb{F})$ est non-vidé, ce qui conclut la preuve, \square

L'homotopie supérieure intervient dans le comptage via les groupes étales de degré supérieur. *Remarque 3.1.4.* L'isomorphisme entre les groupes de cohomologie l -adique dans le calcul de $|Y_s(\mathbb{F})|$ vient de [SS16] Proposition 2.3.

3.2 Morphismes dans un produit de courbes hyperboliques

Comme nous avons vu précédemment, les courbes hyperboliques lisses sur des corps de caractéristique 0 sont des objets de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$. Comme nous nous intéressons désormais à des produits finis de ces courbes, il est intéressant de savoir si la propriété $K(\pi_{\text{et}}, 1)$ est conservée après produit. Nous avons le fait général suivant :

Fait 3.2.1 ([SS16] Lemme 2.7 b)). *Soit k de caractéristique 0, et Y_1 et Y_2 deux k -variétés géométriquement connexe et géométriquement unibranche (cf définition 1.2.3). Alors si Y_1 et Y_2 sont de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$, leur produit l'est aussi.*

Nous allons maintenant montrer que le type d'homotopie étale d'un morphisme dans un produit de variétés $K(\pi_{\text{et}}, 1)$ peut être lu composante par composante.

Lemme 3.2.2. *Soit k un corps de caractéristique 0 avec G_k fortement sans centre (SCF), X une k -variété, et Y_1 et Y_2 deux k -variétés géométriquement connexes et géométriquement unibranches de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$. Alors le morphisme naturel*

$$\text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}}(X_{\text{et}}, (Y_1 \times_k Y_2)_{\text{et}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}}(X_{\text{et}}, Y_{1,\text{et}}) \times \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}}(X_{\text{et}}, Y_{2,\text{et}})$$

est une bijection.

Démonstration. Soit \bar{k}/k une fermeture algébrique, et $\bar{x} \in X, \bar{y}_i \in Y_i$ des points géométriques. Notons Y le produit de Y_1 et Y_2 sur k , et $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ le point géométrique associé.

L'étude combinée des suites exactes d'homotopie pour Y_1 et Y_2 nous donne le diagramme suivant, qui fait apparaître une nouvelle suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Delta_{Y_2} & \longrightarrow & \Pi_{Y_2} & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & \searrow & \\ 1 & \twoheadrightarrow & \Delta_{Y_1} \times \Delta_{Y_2} & \twoheadrightarrow & \Pi_{Y_1} \times_{G_k} \Pi_{Y_2} & \twoheadrightarrow & G_k \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ 1 & \longrightarrow & \Delta_{Y_1} & \longrightarrow & \Pi_{Y_1} & & \end{array}$$

Comme les k -variétés Y_1 et Y_2 sont *géométriquement unibranches*, le groupe fondamental de leur type topologique étale est celui de [SGA1]. En utilisant la formule de Küneth ([SGA1] Exposé XIII Proposition 4.6), nous avons un isomorphisme $\Delta_Y \simeq \Delta_{Y_1} \times \Delta_{Y_2}$. Nous aboutissons au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Delta_Y & \longrightarrow & \Pi_Y & \longrightarrow & G_k \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \Delta_{Y_1} \times \Delta_{Y_2} & \longrightarrow & \Pi_{Y_1} \times_{G_k} \Pi_{Y_2} & \longrightarrow & G_k \longrightarrow 1 \end{array}$$

qui permet de conclure à un isomorphisme $\Pi_Y \xrightarrow{\sim} \Pi_{Y_1} \times_{G_k} \Pi_{Y_2}$ par le lemme des 5.

Ainsi, par propriété universelle des produits fibrés, il vient que pour tout pro-groupe augmenté $\pi \rightarrow G_k$, l'application naturelle

$$\text{Hom}_{G_k}(\pi, \Pi_Y) \longrightarrow \text{Hom}_{G_k}(\pi, \Pi_{Y_1}) \times \text{Hom}_{G_k}(\pi, \Pi_{Y_2})$$

est bijective. Comme Y_1, Y_2 et $Y = Y_1 \times Y_2$ sont de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$, d'après la proposition 2.2.10 l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_* \downarrow (k_{\text{et}}, \bar{k}_{\text{et}})}((X_{\text{et}}, *), (Y_{\text{et}}, *)) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_* \downarrow (k_{\text{et}}, \bar{k}_{\text{et}})}((X_{\text{et}}, *), (Y_{1,\text{et}}, *)) \times \\ &\quad \text{Hom}_{\mathbf{Pro-Ss}_* \downarrow (k_{\text{et}}, \bar{k}_{\text{et}})}((X_{\text{et}}, *), (Y_{2,\text{et}}, *)) \end{aligned}$$

est bijective. Comme G_k est (SCF), nous aboutissons au résultat en appliquant le théorème 2.1.9 en faisant agir des deux côtés par $\Delta_Y \simeq \Delta_{Y_1} \times \Delta_{Y_2}$. \square

Pour appliquer ce lemme à la question de la rétraction présentée dans l'introduction de cette section, nous introduisons une dernière définition technique.

Définition 3.2.3 (Facteurs dominants). Soit Y un sous-schéma localement fermé dans un produit de k -courbes lisses géométriquement connectées $C_i : \iota : Y \hookrightarrow W = C_1 \times \dots \times C_N$. Notons p_i les projections $p_i : W \rightarrow C_i$. Le plongement ι est dit à *facteurs dominants* si $p_i \iota$ est un morphisme dominant pour tout $i = 1, \dots, N$.

Remarque 3.2.4. Si Y est de plus géométriquement connexe et géométriquement réduite sur k , nous pouvons toujours, quitte à retirer des points rationnels, supposer que ι est à facteurs dominants.

La proposition suivante est une conséquence directe du lemme 3.2.2 et du théorème 2.3.1.

Proposition 3.2.5. Soit k un corps sous- p -adique, $Y \hookrightarrow W = C_1 \times \dots \times C_N$ un plongement à facteurs dominants d'une variété géométriquement connexe et géométriquement unibranche dans un produit de courbes hyperboliques, et X une k -variété lisse connexe. Alors pour tout morphisme π_1 -ouvert $\gamma : X_{\text{et}} \rightarrow Y_{\text{et}}$, il existe un unique morphisme de k -variétés $f : X \rightarrow W$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X_{\text{et}} & \\ \gamma \swarrow & & \searrow f_{\text{et}} \\ Y_{\text{et}} & \xrightarrow{\iota_{\text{et}}} & W_{\text{et}} \end{array}$$

commute.

Démonstration. D'après le Théorème 2.3.1, à chaque composée $\gamma(\iota p_i)_{\text{et}}$ correspond un morphisme de k -variétés $f_i : X \rightarrow C_i$. Notons $f = (f_i)$, nous concluons d'après le lemme 3.2.2 que $f_{\text{et}} = \gamma \iota_{\text{et}}$. \square

3.3 Existence de la rétraction

Théorème 3.3.1. Soit k un corps de nombres, X et Y des k -variétés lisses et géométriquement connexes qui se plongent comme sous-schéma localement fermé dans un produit de courbes hyperboliques sur k . Alors le morphisme naturel

$$(-)_{\text{et}} : \text{Isom}_k(X, Y) \longrightarrow \text{Isom}_{\mathbf{Pro-Ss} \downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}})$$

admet une unique rétraction fonctorielle

$$r : \text{Isom}_{\mathbf{Pro-Ss} \downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}}) \longrightarrow \text{Isom}_k(X, Y)$$

avec les propriétés suivantes :

1. *Rétraction* : pour tout k -isomorphisme $g : X \xrightarrow{\sim} Y$, nous avons

$$r(g_{\text{et}}) = g.$$

2. *Fonctorialité* : soit Z une k variété définie similairement à X et Y . Pour des isomorphismes $\gamma_1 : X_{\text{et}} \xrightarrow{\sim} Y_{\text{et}}$ et $\gamma_2 : Y_{\text{et}} \xrightarrow{\sim} Z_{\text{et}}$, nous avons

$$r(\gamma_2 \gamma_1) = r(\gamma_2) r(\gamma_1).$$

Démonstration. Construisons une telle rétraction. Fixons un plongement à facteurs dominants $Y \hookrightarrow W = C_1 \times \dots \times C_N$ dans un produit de courbes hyperboliques. Pour un isomorphisme

$\gamma : X_{\text{et}} \longrightarrow Y_{\text{et}}$ donné, d'après la Proposition 3.1.3 il existe un unique morphisme de k -variétés $f : X \longrightarrow W$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X_{\text{et}} & \\ \gamma \swarrow & & \searrow f_{\text{et}} \\ Y_{\text{et}} & \xrightarrow{\iota_{\text{et}}} & W_{\text{et}} \end{array} \quad (3)$$

commute. Nous appliquons alors la proposition 3.2.5 pour obtenir un unique morphisme de k -variétés $r(\gamma) : X \longrightarrow Y$ tel que

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ r(\gamma) \swarrow & & \searrow f \\ Y & \xrightarrow{\iota} & W \end{array} \quad (4)$$

commute.

Par lecture des diagrammes 3 et 4, il vient que $(\iota r(\gamma))_{\text{et}} = f_{\text{et}} = \iota_{\text{et}} \gamma$, et en composant par les projections nous trouvons aussi

$$(p_i \iota r(\gamma))_{\text{et}} = (p_i \iota)_{\text{et}} \gamma. \quad (5)$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Le morphisme $r(\gamma)$ ne dépend pas de ι .*

1. Rétraction : Par unicité de f puis de sa factorisation en $r(g_{\text{et}})$, nous concluons que $r(g_{\text{et}})$ est bien une rétraction. En effet, $f_{\text{et}} = (\iota g)_{\text{et}}$, d'où $f = \iota g$ et f se factorise bien par g .
2. Functorialité : Nous choisissons un plongement $\iota_Z : Z \hookrightarrow V = D_1 \times \dots \times D_M$. Il est suffisant de montrer que $(\iota_Z r(\gamma_1 \gamma_2))_{\text{et}} = (\iota_Z r(\gamma_1) r(\gamma_2))_{\text{et}}$, en effet nous nous ramenons à l'énoncé initial en regardant le morphisme composante par composante (lemme 3.2.2), puis en appliquant le théorème 2.3.1. Le calcul $(\iota_Z r(\gamma_1 \gamma_2))_{\text{et}} = (\iota_Z r(\gamma_1) r(\gamma_2))_{\text{et}}$ est une application directe de la propriété (5).

La combinaison des propriétés 1. et 2. permet de montrer que $r(\gamma)$ est un isomorphisme. En effet, $r(\gamma^{-1})$ est un inverse de $r(\gamma)$.

L'unicité de la rétraction est aussi une conséquence du lemme 3.2.2 et du Théorème 2.3.1. \square

Démonstration du lemme. . Soit $\iota' : Y \hookrightarrow W' = C'_1 \times \dots \times C'_M$ un autre plongement. Nous obtenons par construction un unique morphisme $f' : X \longrightarrow W'$, et une factorisation $g' : X' \longrightarrow Y$. La construction appliquée au produit $(\iota, \iota') : Y \hookrightarrow W \times W'$, induit le morphisme $(f, f') : X \longrightarrow W \times W'$, qui se factorise par $h : X \longrightarrow Y$. Finalement, en projetant (f, f') sur chacun des facteurs, nous trouvons que $r(\gamma) = h = g'$. Donc $r(\gamma)$ est bien indépendant du choix du plongement. \square

Remarque 3.3.3. Ce résultat est intéressant car il met en jeu des variétés de dimensions supérieures qui ne sont pas nécessairement des $K(\pi_{\text{et}}, 1)$.

4 Voisinages artiniens fortement hyperboliques

Il est maintenant naturel de savoir si nous pouvons trouver de bons espaces X et Y pour lesquels la rétraction $r : \text{Isom}_{\mathbf{Pro-Ss}\downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}}) \longrightarrow \text{Isom}_k(X, Y)$ est un isomorphisme.

4.1 Les voisinages artiniens fortement hyperboliques

Les voisinages artiniens fortement hyperboliques (SHAN) sont des objets de dimensions supérieures qui sont pour autant contraints par des conditions géométriques et homotopiques fortes.

Définition 4.1.1 (Fibration élémentaire). Soit k un corps, X et Y deux k -variétés lisses. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est une *fibration élémentaire* si c'est le complémentaire dans une courbe propre lisse $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow Y$ avec des fibres géométriquement connexes d'un diviseur $D \subset \bar{X}$ qui est fini étale sur Y , et tel que les fibres de f soient des courbes affines.

Les fibrations élémentaires conservent le type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$.

Proposition 4.1.2 ([SS16] Proposition 2.8). *Soit $X \rightarrow Y$ une fibration élémentaire de variétés lisses sur un corps k de caractéristique 0. Si Y est de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$, alors X l'est aussi.*

Définition 4.1.3 (SHAN). Un *voisinage artinien fortement hyperbolique* (SHAN) est une k -variété lisse telle qu'il existe une suite de morphismes

$$X = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = \text{Spec}(k)$$

telle que pour tout i :

1. le morphisme $X_i \rightarrow X_{i-1}$ est une fibration élémentaire dans des courbes hyperboliques,
2. X_i admet un plongement $X_i \hookrightarrow W_i$ dans un produit de courbes hyperboliques.

Une application récursive de la proposition 4.1.2 montre que les SHAN sur des corps de caractéristique 0 sont des $K(\pi_{\text{et}}, 1)$.

Proposition 4.1.4 ([SGA4], Exposé XI Proposition 3.3). *Tous les points d'une variété lisse géométriquement connexe sur un corps parfait infini k admettent un système fondamental de voisinages artiniens fortement hyperboliques ouverts pour la topologie de Zariski.*

Remarque 4.1.5. La proposition de [SGA4] est formulée sur un corps algébriquement clos. Cependant, elle s'adapte au cas d'un corps parfait infini et un point rationnel, voir [SS16] Lemme 6.3.

Nous allons maintenant faire une esquisse de la preuve du théorème suivant.

Théorème 4.1.6. *Soit k un corps de nombres, et X un SHAN sur k . Si $\gamma \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss})\downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}})$ est un automorphisme tel que $r(\gamma) = \text{Id}_X$, alors $\gamma = \text{Id}_{X_{\text{et}}}$.*

Démonstration (esquisse). Choisissons un point géométrique \bar{x} au dessus du point générique. Par le corollaire 2.2.11, nous pouvons trouver un relèvement pointé $\gamma_0 \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}^*)\downarrow (k_{\text{et}}, \bar{k}_{\text{et}})}(X_{\text{et}}, *)$ de γ .

Soit $\varphi_0 = \pi_1(\gamma_0)$. Comme X est de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$ (par la proposition 4.1.2), d'après le corollaire 2.2.11 il suffit de montrer que φ_0 est un automorphisme intérieur de $\pi_1^{\text{et}}(X_{\text{et}}, \bar{x})$ induit par un élément de $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, \bar{x})$.

Pour montrer ce résultat, nous procédons par récurrence sur la dimension de X . Le cas $X = 0$ est clair. Soit $f : X \rightarrow Y$ le dernier morphisme de la fibration, i.e une fibration élémentaire dans des courbes hyperboliques avec Y un SHAN. Par récurrence, supposons que le théorème est vrai pour Y . Notons $\bar{y} = f(\bar{x})$.

Comme X est de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$, la suite exacte longue d'homotopie (cf [Fri82] Théorème 11.5) donne lieu à une suite exacte courte

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{y}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(Y, \bar{y}) \rightarrow 1.$$

Si φ_0 préserve les classes de conjugaison, il préserve $\Delta = \pi_1^{\text{et}}(X, \bar{x})$ et induit un G_k -automorphisme

$$\psi_0 : \pi_1^{\text{et}}(Y, \bar{y}) \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(Y, \bar{y}).$$

Comme Y est de type $K(\pi_{\text{et}}, 1)$, nous pouvons trouver un élément $\delta_0 \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow (k_{\text{et}}, \bar{k}_{\text{et}})}(Y_{\text{et}}, \bar{y}_{\text{et}})$ qui correspond à ψ_0 . Notons $\delta \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow k_{\text{et}}}(Y_{\text{et}})$ l'automorphisme sous-jacent à δ_0 , et $\varphi = \pi_1(\delta)$ l'automorphisme extérieur sous φ_0 . Nous avons $\delta f_{\text{et}} = f_{\text{et}} \gamma$.

Lemme 4.1.7. *Soit f, δ et γ comme ci-dessus, tels que $\delta f_{\text{et}} = f_{\text{et}} \gamma$. Alors $fr(\delta) = r(\gamma)f = f$.*

Nous en déduisons que $r(\gamma) = \text{Id}_Y$, et par hypothèse de récurrence, $\gamma = \text{Id}_{Y_{\text{et}}}$. Ainsi, $\psi_0 = \pi_1(\delta_0)$ est un automorphisme intérieur de $\pi_1^{\text{et}}(Y, \bar{y})$ donné par un élément de $\pi_1^{\text{et}}(Y_{\bar{k}}, \bar{y})$. La fin de la preuve s'obtient en effectuant le changement de base $X_K = X \times_Y \eta$, avec K le corps résiduel du point générique η . La variété X_K est une K -courbe hyperbolique lisse, et la géométrie anabélienne des courbes hyperboliques ([Moc99]) permet alors de conclure. \square

Dans cette preuve, nous avons fait l'hypothèse cruciale que φ_0 préservait les classes de conjugaisons. Nous démontrons ce résultat dans le reste de la section.

Démonstration du lemme. Comme Y se plonge dans un produit de courbes hyperboliques, il suffit de montrer que $hfr(\delta) = hr(\gamma)f$ pour tout morphisme dominant $h : Y \rightarrow C$ dans une courbe hyperbolique. Par le théorème 2.3.1, il suffit de montrer que

$$h_{\text{et}} f_{\text{et}} r(\delta)_{\text{et}} = h_{\text{et}} r(\gamma)_{\text{et}} f_{\text{et}}.$$

Le calcul est une application directe de la propriété (5). \square

4.2 Une propriété cuspidale pour les courbes non rationnelles

Nous commençons par le cas particulier où les courbes hyperboliques qui interviennent dans le plongement ne sont pas rationnelles.

Définition 4.2.1 (Automorphisme normal). Un automorphisme de groupe est dit *normal* si tout sous-groupe normal est envoyé sur lui même.

Proposition 4.2.2. *Soit k un corps de nombres, et X une k -variété lisse géométriquement connexe avec un plongement à facteurs dominants comme sous-schéma localement fermé d'un produit de k -courbes hyperboliques*

$$\iota : X \hookrightarrow W = C_1 \times \dots \times C_N.$$

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(NR) : aucune des C_i n'est rationnelle.

Alors, pour $\gamma \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}) \downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}})$ tel que $r(\gamma) = \text{Id}_X$, le morphisme induit $\varphi = \pi_1(\gamma) \in \text{Aut}_{G_k}^{\text{out}}(\pi_1(X))$ est un automorphisme normal.

Démonstration. Soit $N \subset \pi_1^{\text{et}}(X)$ un sous groupe normal ouvert. Alors $\varphi(N)$ est un sous-groupe normal ouvert et nous voulons montrer que $N = \varphi(N)$. Nous notons X_N le revêtement étale connexe de X associé à N , et $(X_N)_{\text{et}}$ est le revêtement de X_{et} associé à N . Comme $r(\gamma) = \text{Id}_X$, une applications des théorèmes 3.3.1 et 2.3.1 montre que $\iota_{\text{et}} \gamma = \iota_{\text{et}}$. Par la propriété classique de

classification des revêtements par les sous-groupes du groupe fondamental de la base (cf [AM69] Chapitre 2 Corollaire 2.8), il existe un revêtement de pro-espace

$$\gamma_N : (X_N)_{\text{et}} \rightarrow (X_{\varphi(N)})_{\text{et}}$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} (X_N)_{\text{et}} & \longrightarrow & X_{\text{et}} & \xrightarrow{\text{ét}} & W_{\text{et}} \\ \gamma_N \downarrow & & \downarrow \gamma & & \parallel \\ (X_{\varphi(N)})_{\text{et}} & \longrightarrow & X_{\text{et}} & \xrightarrow{\text{ét}} & W_{\text{et}} \end{array}$$

Pour montrer que $N = \varphi(N)$, il suffit de trouver un morphisme $X_N \rightarrow X_{\varphi(N)}$ tel que

$$\begin{array}{ccccc} X_N & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\text{ét}} & W_{\text{et}} \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ X_{\varphi(N)} & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\text{ét}} & W_{\text{et}} \end{array}$$

commute. En effet, cela implique que $N \subset \varphi(N)$, puis que $N = \varphi(N)$ car N et $\varphi(N)$ ont le même indice dans $\pi_1^{\text{ét}}(X)$.

Comme aucune des courbes C_i n'est rationnelle, remplaçons les par leurs compactifications lisses. Après ce remplacement, W est produit de courbes propres lisses de genre positif. Soit S un schéma régulier connexe de type fini sur \mathbb{Z} et de corps résiduel k . La proposition s'obtient en considérant les modèles réguliers des variétés sur S , i.e nous nous retrouvons dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_N & \longrightarrow & \mathcal{X} & \xrightarrow{\text{ét}} & W_{\text{et}} \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ \mathcal{X}_{\varphi(N)} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \xrightarrow{\text{ét}} & W_{\text{et}} \end{array}$$

Par le théorème de densité de Chebotarev, (cf [Mil20] Théorème 3.25), le morphisme $\mathcal{X}_N \rightarrow \mathcal{X}_{\varphi(N)}$ existe si et seulement si l'ensemble des points fermés de \mathcal{X} qui se séparent complètement dans \mathcal{X}_N coïncide avec l'ensemble des points fermés de \mathcal{X} qui se séparent complètement dans $\mathcal{X}_{\varphi(N)}$. Ainsi, il faut montrer que pour tout corps fini \mathbb{F} et tout $x \in \mathcal{X}(\mathbb{F})$, il existe un point dans \mathcal{X}_N sur x si et seulement si il existe un point dans $\mathcal{X}_{\varphi(N)}$ au dessus de x . Cela se déduit exactement comme dans la preuve de la proposition 3.1.3 : en trouvant un bon revêtement étale $W' \rightarrow W$, puis en effectuant le changement de base, et la conclusion se fait par un argument de cardinalité. \square

Proposition 4.2.3. *Fixons \bar{k} une clôture algébrique de k , et $\bar{x} : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow X$ un point géométrique. Sous les hypothèses de la proposition 4.2.2, l'automorphisme $\varphi : \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ préserve les classes : chaque élément est envoyé sur un élément conjugué.*

Démonstration. Prenons encore $N \subset \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ un sous-groupe normal ouvert. Nous avons montré que $\varphi(N) = N$, i.e φ induit un automorphisme $\bar{\varphi}$ de $G = \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})/N$. Nous reprenons également un schéma S connexe régulier de type fini sur \mathbb{Z} et de corps résiduel k , tel que la situation s'étende sur S , i.e nous obtenons un revêtement galoisien $\mathcal{X}_N \rightarrow \mathcal{X}$ de groupe de galois G .

Soit $g \in G$ arbitraire, et notons H le sous-groupe de G engendré par g . Par densité de Cheboterev, nous trouvons un point fermé $P \in \mathcal{X}$ et un point fermé $P' \in \mathcal{X}_N$ sur P tel que g est le Frobenius de P' dans G .

Soit P_H l'image de P' dans la sous-extension \mathcal{X}_H engendrée par H . Alors P_H a le même corps résiduel que $P : k(P_H) = k(P)$. Le même argument montre qu'il existe un point fermé $Q_H \in \mathcal{X}_{\bar{\varphi}(H)}$ sur P avec $k(Q_H) = k(P)$. Ainsi, H contient le groupe de décomposition $G_{Q'}(\mathcal{X}_N/\mathcal{X})$ d'un point $Q' \in \mathcal{X}_N$ sur Q_H . Les groupes G et $G_{Q'}(\mathcal{X}_N/\mathcal{X})$ ont le même ordre donc sont égaux.

Le groupe $G_{Q'}(\mathcal{X}_N/\mathcal{X})$ est généré par un autre Frobenius sur P , i.e pour un $h \in G$ par le conjugué hgh^{-1} de g . Nous obtenons

$$\langle \bar{\varphi}(g) \rangle = \bar{\varphi}(H) = \langle hgh^{-1} \rangle$$

d'où

$$\bar{\varphi}(g) = hg^m h^{-1}$$

pour un certain $m \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$.

Soit $g \in \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ arbitraire. Pour un sous-groupe normal ouvert N nous notons l'image de g dans $G = \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})/N$ par g_N . L'automorphisme induit sur G par φ est noté φ_N . Le sous ensemble fermé

$$M_N = \{(h, m) \in \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \times \hat{\mathbb{Z}} \mid \varphi_N(g_N) = h_N(g_N)^m h_N^{-1}\} \subset \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \times \hat{\mathbb{Z}}^\times$$

est non-vide par l'argument de densité de Chebotarev. De plus, si $N_1 \subset N_2$ sont deux sous-groupes normaux ouverts, $M_{N_1} \subset M_{N_2}$. Par compacité, l'intersection de tous les M_N est non vide, et pour n'importe quel

$$(h_g, m_g) \in \bigcap_N M_N \subset \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \times \hat{\mathbb{Z}}^\times$$

nous avons $\varphi(g) = h_g g^{m(g)} h_g^{-1}$. Montrons que $m(g) = 1$ pour tout g . En effet, l'extension cyclotomique de k induit une surjection

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow G_k \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$$

préservée par φ (car φ est un G_k -automorphisme). L'égalité $m(g) = 1$ est vraie pour les éléments dont l'image dans $\hat{\mathbb{Z}}$ génère un sous-groupe ouvert. C'est une partie dense car elle contient la préimage de \mathbb{Z} . Le résultat suit par compacité. \square

4.3 Propriété cuspidale : cas général

Nous allons maintenant généraliser la proposition 4.2.3 pour enlever l'hypothèse (NR) de non rationalité des courbes C_i . Nous introduisons un résultat de géométrie dans les pro-espaces. Rappelons qu'une catégorie de modèles est dite *propre à gauche* (resp. *à droite*) si les équivalences faibles sont préservées par les sommes amalgamées le long de cofibrations (resp. préservées par les produits fibrés le long de fibrations).

Proposition 4.3.1 ([Isa01] Proposition 17.1). *La catégorie de modèles sur $\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}$ est propre à gauche et à droite.*

Une conséquence de la propriété est le lemme suivant.

Lemme 4.3.2 ([Hir03] Lemme 12.3.3). *Soit $W' \rightarrow W$ une fibration de $\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}$. Supposons que $f : X \rightarrow W$ et $g : Y \rightarrow W$ sont des morphismes de $\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss}$, et $h : Y \rightarrow X$ est une équivalence faible avec $g = fh$. Alors le morphisme naturel*

$$h \times \text{Id} : Y \times_W W' \rightarrow X \times_W W'$$

est une équivalence faible.

Proposition 4.3.3. *Soit W, X, Y des pro-espaces et $f : X \rightarrow W$, $g : Y \rightarrow W$ des morphismes de pro-espaces. Supposons qu'il existe $\gamma \in \text{Isom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss})}(X, Y)$ tel que $g\gamma = f$ dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss})$. Soit $p : W' \rightarrow W$ un revêtement.*

Alors il existe $\gamma' \in \text{Isom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro}\text{-}\mathbf{Ss})}(X \times_W W', Y \times_W W')$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \leftarrow & X \times_W W' & \rightarrow & W' \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' & & \parallel \\ Y & \leftarrow & Y \times_W W' & \rightarrow & W' \end{array}$$

commute.

Démonstration. Nous pouvons remplacer W puis X et Y par des approximations fibrantes. Ainsi, nous supposons désormais que γ est une équivalence faible de **Pro-Ss** telle que $g\gamma = f$ dans **Ho(Pro-Ss)**, et que p est un revêtement niveau à niveau.

Choisissons une homotopie $F : X \times \Delta[1] \rightarrow W$ entre f et $g\gamma$. Le diagramme suivant commute sur le carré extérieur car F se restreint à f sur $X \times \{0\}$.

$$\begin{array}{ccc} (X \times_W^f W') \times \{0\} & \xrightarrow{\text{pr}_{W'}} & W' \\ \downarrow & \searrow^{F'} & \downarrow p \\ (X \times_W^f W') \times \Delta[1] & \xrightarrow{\text{pr}_{X \times \Delta[1]}} & W \end{array}$$

La propriété de l'unique relèvement d'un revêtement induit un unique morphisme F' . Donc l'affectation

$$(x, w') \rightarrow (x, F'(x, w', 1))$$

définit un morphisme

$$\varphi : X \times_W^f W' \rightarrow X \times_W^{g\gamma} W'$$

qui commute dans **Ho(Pro-Ss)** avec les projections respectives à W' et est un isomorphisme dans **Pro-Ss**. D'après le lemme 4.3.2, le morphisme induit

$$\gamma \times \text{Id} : X \times_W^{g\gamma} W' \longrightarrow Y \times_W^g W'$$

est une équivalence faible. Nous obtenons l'équivalence faible de l'énoncé en considérant la composition $\gamma' = (\gamma \times \text{Id})\varphi$. \square

Nous pouvons adapter sans peine ce résultat en termes de schémas et de type topologique étale.

Proposition 4.3.4. *Soit W, X, Y des schémas, et $f : X \rightarrow W$, $g : Y \rightarrow W$ des morphismes. Supposons qu'il existe $\gamma \in \text{Isom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss})}(X_{\text{et}}, Y_{\text{et}})$ tel que $g_{\text{et}}\gamma = f_{\text{et}}$ dans **Ho(Pro-Ss)**. Soit $W' \rightarrow W$ fini étale.*

Alors il existe $\gamma' \in \text{Isom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss})}((X \times_W W')_{\text{et}}, (Y \times_W W')_{\text{et}})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_{\text{et}} & \leftarrow & (X \times_W W')_{\text{et}} & \rightarrow & W'_{\text{et}} \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' & & \parallel \\ Y_{\text{et}} & \leftarrow & (Y \times_W W')_{\text{et}} & \rightarrow & W'_{\text{et}} \end{array}$$

*commute dans **Ho(Pro-Ss)**.*

Définition 4.3.5 (Revêtement ℓ -géométrique). Soit k un corps de nombres, X une k -variété connexe, et ℓ un nombre premier. Nous disons qu'un revêtement connexe étale pointé $h : (X', \bar{x}') \rightarrow (X, \bar{x})$ est ℓ -géométrique si l'action de $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, \bar{x})$ sur la fibre géométrique $h^{-1}(\bar{x})$ se factorise par un ℓ -groupe fini.

Si $H = \pi_1^{\text{et}}(X', \bar{x}') \subset \pi_1^{\text{et}}(X, \bar{x})$ est le sous-groupe ouvert correspondant, $\bar{H} = H \cap \pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, \bar{x})$ et \bar{N} est le sous-groupe normal maximal de $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, \bar{x})$ contenant \bar{H} , alors être ℓ -géométrique est équivalent à ce que $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, \bar{x})/\bar{N}$ soit un ℓ -groupe.

Le lemme technique suivant utilise des idées classiques en géométrie anabélienne. Il repose notamment sur les travaux de Nakamura pour la compréhension du ℓ -Frattini.

Lemme 4.3.6 ([SS16] Lemme 5.4). *Soit k un corps, ℓ un premier différent de la caractéristique de k , et (C, \bar{c}) une k -courbe hyperbolique géométriquement pointée. Alors*

$$\pi_1^{\text{et}}(C, \bar{c}) = \bigcup H$$

où H parcourt les sous-groupes ouverts de $\pi_1^{\text{et}}(C, \bar{c})$ tels que le revêtement étale associé $C_H \rightarrow C$ soit ℓ -géométrique et que C_H admette une compactification lisse de genre $g \geq 1$.

Proposition 4.3.7. *Soit k un corps de nombres, et X une k -variété lisse géométriquement connexe qui se plonge comme un sous-schéma localement fermé dans un produit de courbes hyperboliques. Alors, pour $\gamma \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss})\downarrow k_{\text{et}}}(X_{\text{et}})$ avec $r(\gamma) = \text{Id}_X$, le morphisme induit $\varphi = \pi_1(\gamma) \in \text{Aut}_{G_k}^{\text{out}}(\pi_1(X))$ préserve les classes.*

Démonstration. Soit $\iota : X \hookrightarrow W = X_1 \times_k \dots \times_k C_N$ un plongement à facteurs dominants dans un produit de courbes hyperboliques sur k . Choisissons un point géométrique \bar{x} de X , et notons $\bar{w} = \iota(\bar{x})$. Soit $\sigma \in \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ arbitraire.

Si aucune des C_i n'est rationnelle, nous concluons avec la proposition 4.2.3. Dans le cas contraire, supposons qu'une des C_i , par exemple C_1 , est rationnelle. Notons $\bar{c}_1 = p_1(\bar{w})$, et soit N le sous-groupe normal maximal de $\pi_1^{\text{ét}}(C_1, \bar{c}_1)$ contenu dans l'image de $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$. Choisissons un nombre premier $\ell > (\pi_1^{\text{ét}}(C_1, \bar{c}_1) : N)$.

D'après le lemme 4.3.6, il existe un revêtement étale connexe ℓ -géométrique $(C'_1, \bar{c}'_1) \rightarrow (C_1, \bar{c}_1)$ tel que $\pi_1^{\text{ét}}(p_1 \iota)(\sigma) \in \pi_1^{\text{ét}}(C'_1, \bar{c}'_1)$ et que le genre de C'_1 soit positif. Notons k' le corps de base de C'_1 . Alors le schéma

$$X' = X \times_{C_1} C'_1 = X_{k'} \times_{C_{1,k}} C'_1 = X_{k'} \times_{(C_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} C_{n,k'})} (C'_1 \times_{k'} C_{2,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} C_{n,k'})$$

est géométriquement connexe sur k' . En procédant de manière récursive, nous trouvons un revêtement fini étale connexe $(W', \bar{w}') \rightarrow (W, \bar{w})$ tel que

1. $W' = C'_1 \times_{k'} \dots \times_{k'} C'_n$, avec k' une extension finie de k , et les C'_i des courbes lisses géométriquement connexes sur k' , avec une compactification de genre supérieur ou égal à 1,
2. $X' = X \times_W W'$ est géométriquement connexe sur k' ,
3. $\sigma \in \pi_1^{\text{ét}}(X', \bar{x}')$ avec $\bar{x}' \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{x}, \bar{w})$.

Soit $\iota' : X' \rightarrow W'$ l'immersion induite par ι . Par le lemme 4.3.7 il existe $\gamma' \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss})}(X'_{\text{et}})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_{\text{et}} & \leftarrow & X'_{\text{et}} & \xrightarrow{\iota'} & W'_{\text{et}} \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' & & \parallel \\ X_{\text{et}} & \leftarrow & X'_{\text{et}} & \xrightarrow{\iota'} & W'_{\text{et}} \end{array}$$

commute dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss})$. D'après le théorème 2.1.5, nous pouvons relever γ en $\gamma_0 \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(X_{\text{et}}, \bar{x}_{\text{et}})$ et γ' en $\gamma'_0 \in \text{Aut}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Pro-Ss}_*)}(X'_{\text{et}}, \bar{x}'_{\text{et}})$, et il existe un élément $\tau \in \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ tel que

$$\pi_1^{\text{ét}}(\gamma_0) = \tau \pi_1^{\text{ét}}(\gamma'_0) \tau^{-1}.$$

Par la proposition 4.2.3, il existe $\tau' \in \pi_1^{\text{ét}}(X', \bar{x}')$ tel que $\pi_1^{\text{ét}}(\gamma'_0) = \tau' \sigma \tau'^{-1}$. Ainsi $\pi_1^{\text{ét}}(\gamma_0)(\sigma)$ est un conjugué de σ , ce qui conclut la preuve. \square

Le lemme 4.1.4 et le théorème 4.1.6 impliquent le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.8. *Tous les points d'une variété lisse sur un corps de nombres admettent un système fondamental de voisinages hyperboliques anabéliens fortement artiniens.*

Références

- [AM69] M. ARTIN et B. MAZUR. *Etale Homotopy*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1969. ISBN : 9783540046196.
- [EGA] Jean DIEUDONNÉ et Alexander GROTHENDIECK. *Éléments de géométrie algébrique*. T. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32. 1961–1967.
- [EH76] D.A. EDWARDS et H.M. HASTINGS. *Cech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1976. ISBN : 9783540381037.

- [Fri82] Eric M. FRIEDLANDER. *Etale Homotopy of Simplicial Schemes. (AM-104)*. Princeton University Press, 1982. ISBN : 9780691082882.
- [GJ99] P.G. GOERSS et J.F. JARDINE. *Simplicial Homotopy Theory : Progress in Mathematics 174*. English. Birkhauser, 1999.
- [Gro97] Alexandre GROTHENDIECK. « Brief an G. Faltings ». In : *Geometric Galois Actions*. Sous la dir. de Leila SCHNEPS et PierreEditors LOCHAK. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1997, p. 49-58.
- [Hat02] A. HATCHER. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002. ISBN : 9780521795401.
- [Hir03] P.S. HIRSCHHORN. *Model Categories and Their Localizations*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2003. ISBN : 9780821849170.
- [Hos14] Y. HOSHI. « The grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension ». In : *Journal of Mathematical Sciences (Japan)* 21 (jan. 2014), p. 153-219.
- [Hos20] Yuichiro HOSHI. « A note on an anabelian open basis for a smooth variety ». In : *Tohoku Mathematical Journal* 72.4 (2020), p. 537-550.
- [Hov99] M. HOVEY. *Model Categories*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1999. ISBN : 9780821843611.
- [Isa01] Daniel C. ISAKSEN. « A model structure on the category of pro-simplicial sets ». In : (2001). arXiv : math/0106152 [math.AT]. URL : <https://arxiv.org/abs/math/0106152>.
- [Mil13] James S. MILNE. *Lectures on Etale Cohomology (v2.21)*. Available at www.jmilne.org/math/. 2013.
- [Mil20] J.S. MILNE. *Class Field Theory (v4.03)*. Available at www.jmilne.org/math/. 2020.
- [Moc99] Shinichi MOCHIZUKI. « The local pro-p anabelian geometry of curves ». In : *Inventiones Mathematicae* 138 (jan. 1999), p. 319-423. DOI : 10.1007/s002220050381.
- [Nak90] Hiroaki NAKAMURA. « Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines. » In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 411 (1990), p. 205-216.
- [Neu69] Jürgen NEUKIRCH. « Kennzeichnung der p-adischen und der endlichen algebraischen Zahlkörper. » In : *Inventiones mathematicae* 6 (1968/69), p. 296-314.
- [NTM98] Hiroaki NAKAMURA, Akio TAMAGAWA et Shinichi MOCHIZUKI. *The Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves*. 1998.
- [Qui67] D.G. QUILLEN. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1967. ISBN : 9783540355236.
- [Sch96] Alexander SCHMIDT. « Extensions with restricted ramification and duality for arithmetic schemes ». en. In : *Compositio Mathematica* 100.2 (1996), p. 233-245.
- [SGA1] Alexander GROTHENDIECK. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. T. 224. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1971.
- [SGA3] Michael ARTIN et al. *Schémas en groupes*. Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Paris : Institut des Hautes Études Scientifiques, 1963-1966.
- [SGA4] Michael ARTIN, Alexander GROTHENDIECK et Jean-Louis VERDIER. *Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas I, II, III*. T. 269, 270, 305. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971.
- [SGA41/2] Pierre DELIGNE. « SGA 4 1/2 – Cohomologie étale ». In : *Lecture Notes in Mathematics* 569 (1977).
- [SS16] Alexander SCHMIDT et Jakob STIX. « Anabelian geometry with étale homotopy types ». In : *Annals of Mathematics* 184.3 (nov. 2016), p. 817-868. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2016.184.3.5.
- [Tam97] Akio TAMAGAWA. « The Grothendieck conjecture for affine curves ». In : *Compositio Mathematica* 109.2 (1997), p. 135-194. DOI : 10.1023/A:1000114400142.
- [Uch76] Koji UCHIDA. « Isomorphisms of Galois groups ». In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 28.4 (1976), p. 617-620. DOI : 10.2969/jmsj/02840617.
- [Whi78] George W. WHITEHEAD. *Elements of homotopy theory*. T. 61. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1978, p. xxi+744. ISBN : 0-387-90336-4.