ENS Paris
DMA

Irina Mamsurova

La propriété (T) de Kazhdan et la programmation semi-definite

Rapport de stage M1

Encadrant :
Romain Tessera

Etablissement de stage :
Université Paris Cité
Place Aurélie Nemours 75013 Paris

Paris 2024

Résumé

Dans ce texte, on étudie les algorithmes numériques de démonstration qu'un groupe discret G possède la propriété (T) de Kazhdan et la théorie fondamentale sous-jacente de ces algorithmes.

Table des matières

Introduction

La propriété (T) de Kazhdan est une propriété de rigidité des représentations unitaires d'un groupe localement compact. À l'origine, elle fut introduite par D. Kazhdan dans [Ka] pour montrer qu'une grande classe de réseaux sont de type fini.

Pour trouver des exemples de groupes non compacts avec la propriété (T), les seules méthodes connues à l'époque de l'article de Kazhdan utilisaient la théorie des groupes de Lie ou des groupes algébriques, montrant que des groupes comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, ont la propriété (T). Une autre approche, développée par Y. Shalom dans [Sh] 30 ans après Kazhdan, permet également d'estimer des constantes de Kazhdan. Malheureusement, même cette approche ne permet pas de démontrer si un groupe possède la propriété (T) pour tous les groupes discrets, par exemple, pour $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_N)$.

Les résultats récents utilisent les critères spectraux de la propriété (T). Un groupe a la propriété (T) si et seulement si l'opérateur combinatoire de Laplace Δ_μ, défini par une marche aléatoire simple μ sur G, a le trou spectral, c'est-à-dire, il existe une plus petite valeur propre non nulle de Δ_μ. Ce résultat a été traduit en langage des algèbres de groupes par N. Ozawa dans [Oz], utilisant la théorie développée dans [Oz2].

Les méthodes numériques pour démontrer la propriété (T) et estimer la constante de Kazhdan en utilisant le critère d'Ozawa sont introduites dans [FK] et [NT]. Utilisant les propriétés de certains groupes, les auteurs de [KKN], [KN], [KNO], et [N] améliorent ces résultats. En particulier, ils confirment l'hypothèse que $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_N)$ a la propriété (T) pour $N \geq 4$ (les automorphismes de groupes libres n'ont pas la propriété de Kazhdan pour $N < 4$).

Ces estimations apparaissent dans les premières applications de la propriété (T) en dehors de la théorie des groupes. Les graphes expanseurs sont des suites de graphes « fortement connexes mais avec peu d'arêtes » dont le nombre de sommets tend vers l'infini. Si un graphe est un modèle de réseau de communication, on peut définir une constante mesurant la vitesse de transmission d'information dans le réseau. L'existence de graphes expanseurs avait d'abord été montrée de manière non constructive avec des outils probabilistes, mais G. A. Margulis dans [Ma2] a utilisé la propriété (T) pour construire explicitement une famille de graphes expanseurs. On peut estimer la vitesse de transmission d'information en utilisant la constante de Kazhdan. Les constantes obtenues par les méthodes numériques améliorent ces estimations.

La section 1 de ce texte couvre les définitions et caractérisations de la propriété (T). La section 2 examine les critères spectraux, notamment celui d'Ozawa. La section 3 se concentre sur les algorithmes numériques pour démontrer (T) pour certains groupes. Enfin, la section 4 aborde une application de la propriété de Kazhdan : les graphes expanseurs. Le stage inspirant ce texte a eu lieu à l'Université Paris Cité sous la direction de Romain Tessera. Les discussions régulières avec lui m'ont beaucoup aidé. Initialement, il était prévu d'apprendre seulement les aspects théoriques liés à la propriété (T) de Kazhdan. Cependant, mes intérêts pour les méthodes numériques nous ont conduits aux travaux de N. Ozawa, M. Kaluba, D. Kielak, P. Nowak, etc. Bien qu'il soit difficile d'obtenir numériquement de nouvelles estimations de la constante de Kazhdan pour certains groupes, ce texte, basé sur ce stage, permet d'acquérir les connaissances nécessaires pour continuer à travailler dans ce domaine. Il rassemble tous les résultats connus, avec les détails souvent absents des articles mais nécessaires pour un lecteur non familier avec ce sujet.

Remerciements. Je remercie Romain Tessera pour les nombreuses discussions et sa relecture attentive de ce texte. Ma profonde gratitude va aussi à Anna Erscler pour son aide avec l'organisation de mon stage, et à Cyril Houdayer pour l'introduction au sujet et ses cours « Superrigidité » à l'ENS. Merci également à Gabriel Peyré pour son aide avec la partie numérique, ainsi qu'à Tim Netzer et Andreas Thom, qui ont discuté de leur ancien article avec moi et m'ont envoyé toutes les versions de leur code.

1 Préliminaires

Convention : Tous les groupes sont supposés discrets. Beaucoup des résultats présentés ici se généralisent aux groupes localement compacts, nous renvoyons le lecteur au livre de Bekka, De la

Harpe et Valette [BHV] qui se place dans ce cadre.

1.1 Représentations unitaires

Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid uu^* = u^*u = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\}$ le groupe des opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$. On le munit de la topologie forte : la topologie la moins fine telle que $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H} : u \mapsto u\xi$ est continue pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.

Soit G un groupe topologique. On dit que $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire fortement continue si π est un morphisme de groupes continu pour la topologie forte sur $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Remarque : Pour G discret, tout morphisme de groupe $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est fortement continu. On ne précise donc pas que les représentations sont « fortement continues » dans la suite.

Définition 1.1. Si G est un groupe et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G, on dit que

— le vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est *G-invariant* si $\forall s \in G$ on a $\pi(s)\xi = \xi$;

— le vecteur $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ est *(E, κ)-invariant* si $\sup_{s \in E} \|\pi(s)\xi - \xi\| < \kappa \|\xi\|$, où $E \subset G$ et $\kappa > 0$;

— la représentation $(\pi, \mathcal{H})$ a *presque des vecteurs invariants* s'il existe un vecteur unitaire (κ, E)-invariant pour tous $\kappa > 0$ et $E \subset G$ fini.

Remarque :

— Si $Q' \subset Q$ et $\kappa' \geq \kappa$, alors chaque vecteur (Q, κ)-invariant est (Q', κ')-invariant.

— Pour chaque $\xi \in \mathcal{H}$, $g \in G$ on a $||\pi(g)\xi - \xi|| = ||\pi(g^{-1})\xi - \xi||$ par unitarité. Un vecteur est donc (Q, κ)-invariant si et seulement si il est $(Q \cup Q^{-1}, \kappa)$-invariant.

— Chaque vecteur $(Q, \kappa/n)$-invariant est $((Q \cup Q^{-1})^n, \kappa)$-invariant.

Exemple 1.2. Soit $\ell^2(G)$ l'ensemble des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_g |f(g)|^2 < +\infty$ muni de sa structure d'espace de Hilbert canonique. Le groupe G agit unitairement sur $\ell^2(G)$ par $g \cdot f : h \mapsto f(g^{-1}h)$. Cette représentation est la *représentation régulière gauche de G*, notée λ_G.

1.2 Propriété (T)

Définition 1.3. Soit $\Lambda \subset G$ un sous-groupe. On dit que

— l'inclusion $\Lambda \subset G$ a la *propriété (T) de Kazhdan relative* si toute représentation unitaire de G qui admet presque des vecteurs G-invariants admet des vecteurs Λ-invariants non nuls ;

— le groupe G a la *propriété (T) de Kazhdan* si $G \subset G$ a la propriété (T) de Kazhdan relative ;

— la paire (E, κ) où $E \subset G$ et $\kappa > 0$ est une *paire de Kazhdan pour l'inclusion* $\Lambda \subset G$ (ou juste pour G si $\Lambda = G$) si toute représentation unitaire de G qui a un vecteur (E, κ)-invariant non nul a un vecteur Λ-invariant non nul. Le nombre $\kappa > 0$ est appelé la *constante de Kazhdan* pour G et E.

Fait. Soit G un groupe qui a la propriété (T) et qui admet un ensemble de générateurs fini S tel que $S = S^{-1}$. Il existe alors $\kappa > 0$ tel que (S, κ) est une paire de Kazhdan.

Remarque : Pour un groupe topologique G, un sous-ensemble compact Q et une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G, on étend la notion de la constante de Kazhdan en définissant la constante de Kazhdan associée à Q et π comme

$$\kappa(G, Q, \pi) = \inf\{\max_{x \in Q} \|\pi(x)\xi - \xi\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| = 1\} \geq 0.$$

Exemple 1.4. Les groupes finis ont la propriété (T).

Démonstration. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G fini. Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\sum_{s \in G} \pi(s)\xi$ est G-invariant. Supposons que $(\pi, \mathcal{H})$ ait presque des vecteurs invariants. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ unitaire $(G, 1/2|G|)$-invariant. Alors

$$\left\| \sum_{s \in G} \pi(s)\xi - |G|\xi \right\| = \left\| \sum_{s \in G} (\pi(s)\xi - \xi) \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme ξ est unitaire, $\sum_{s \in G} \pi(s)\xi$ est non nul, ce qui conclut. □

Proposition 1.5. *Si $\Lambda \lhd G$ et G a la propriété (T), alors G/Λ aussi.*

Démonstration. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G/Λ qui a presque des vecteurs invariants. Si $p : G \to G/\Lambda$ est la projection canonique, alors $(\pi \circ p, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G, qui a aussi presque des vecteurs invariants. Il existe donc un vecteur non nul G-invariant pour $\pi \circ p$, donc invariant pour π. □

Proposition 1.6. *Si G a la propriété (T), alors G est de type fini.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-groupes de G de type fini. On a $G = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$. On construit une représentation unitaire $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ où $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \ell^2(G/H)$ par

$$\forall g, h \in G, \forall H \in \mathcal{A}, \pi(g)\delta_{hH} = \delta_{ghH}.$$

Cette représentation a presque des vecteurs invariants. En effet, si $E \subset G$ est fini, alors $\langle E \rangle \in \mathcal{A}$. Pour tout $g \in E$, $\pi(g)\delta_{\langle E \rangle} = \delta_{\langle E \rangle}$ car $g \in \langle E \rangle$, donc $\delta_{\langle E \rangle}$ est un vecteur (E, κ)-invariant pour tout $\kappa > 0$. Par la propriété (T), il existe $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ non nul et $\pi(G)$-invariant. Comme ξ est non nul, il existe $H \in \mathcal{A}$ tel que ξ_H, la projection de ξ sur $\ell^2(G/H)$, est non nulle. Comme $\pi(g)\xi_H = \xi_H$ pour tout $g \in G$ et ξ_H est non nul, il vient que G/H est fini (sinon, ξ_H ne serait pas dans $\ell^2(G/H)$). Comme H est de type fini et G/H est fini, G est de type fini. □

1.3 Caractérisations de la propriété (T)

1.3.1 Actions affines isométriques et propriété (FH)

Définition 1.7. Un *espace de Hilbert affine réel* est un ensemble $\mathcal{H}$ muni d'une action simplement transitive du groupe additif d'un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}^0$.
Remarque. Une action $G \curvearrowright X$ est dite simplement transitive si elle est transitive et $\mathrm{Stab}(x) = \{e\}$ pour tout $x \in X$.
On appelle une *translation* une application $T_\xi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ induite par l'action de $\xi \in \mathcal{H}^0$ et on la note $x \mapsto x + \xi$. L'unique vecteur $\xi \in \mathcal{H}^0$ tel que $T_\xi x = y$ est noté $y - x$.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert affine réel. On définit une métrique d sur $\mathcal{H}$ par $d(x, y) = \|x - y\|$. On rappelle le résultat suivant d'analyse fonctionnelle :

Théorème 1.8 (Mazur-Ulam)**.** *Toute surjection isométrique F d'un espace vectoriel normé réel dans un autre est affine.*

Par le théorème de Mazur-Ulam, chaque isométrie de $\mathcal{H}$ est affine.

Soit $\mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$ le *groupe orthogonal* de $\mathcal{H}^0$ (le groupe des opérateurs linéaires inversibles isométriques sur $\mathcal{H}^0$). Pour $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ on définit un morphisme $p : \mathrm{Isom}(\mathcal{H}) \to \mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$ par $p(g)\xi = g(x + \xi) - g(x)$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}^0$, où x est un point arbitraire de $\mathcal{H}$. Le morphisme p est surjectif et $\ker p = \mathcal{H}^0$. Le choix d'origine $0 \in \mathcal{H}$ donne une décomposition $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}) = \mathcal{O}(\mathcal{H}^0) \ltimes \mathcal{H}^0$.

Définition 1.9. Une *action par isométries affines* de G sur $\mathcal{H}$ est un morphisme de groupes $\alpha : G \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ tel que l'application $G \to \mathcal{H}$, $g \mapsto \alpha(g)x$ est continue pour chaque $x \in \mathcal{H}$.

En composant α avec $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}) \to \mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$, on obtient une représentation orthogonale de G sur $\mathcal{H}^0$ – un morphisme $\pi : G \to \mathcal{O}(\mathcal{H}^0)$ tel que $G \to \mathcal{H}$, $g \mapsto \alpha(g)x$ est continue pour tout $x \in \mathcal{H}$. On appelle π la *partie linéaire* de α.

Définition 1.10. On dit qu'un groupe topologique G a la *propriété (FH)* (point Fixes sur les espaces de Hilbert) si chaque action par isométries affines de G sur un espace de Hilbert réel a un point fixe.

Le résultat suivant montre le lien entre la propriété (FH) et la propriété (T) pour tous les groupes topologiques, pas nécessairement discrets. On rappelle qu'un groupe localement compact est dit σ-compact s'il existe une suite croissante de sous-ensembles compacts Q_n de G tels que $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$.

Théorème 1.11 (Delorme-Guichardet, 1977, [D])**.** *Soit G un groupe topologique.*

- *Si G a la propriété (T), alors G a la propriété (FH).*
- *Si G est localement compact, σ-compact et a la propriété (FH), alors G a la propriété (T).*

On donne maintenant une autre caractérisation de la propriété (T) par la 1-cohomologie.

1.3.2 1-cohomologie

Définition 1.12. Soit $(\mathcal{H}^0, \pi)$ une représentation orthogonale de G sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}^0$. On dit qu'une fonction $b : G \to \mathcal{H}^0$ est :

— un *1-cocycle* si $\forall g, h \in G, b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)$;

— un *1-cobord* s'il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tout $g \in G$.

On note $Z^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel des 1-cocycles et $B^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel des 1-cobords. Un 1-cobord est toujours un 1-cocyle et on note $H^1(G, \pi) \overset{\text{def}}{=} Z^1(G, \pi)/B^1(G, \pi)$ l'espace quotient, appelé le premier groupe de cohomologie. La définition de $H^1(G, \pi)$ peut être adaptée au cas d'une représentation unitaire π d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert complexe.

L'action affine par isométries associée à un cocycle $b \in Z^1(G, \pi)$ est l'action affine par isométries α de G sur $\mathcal{H}$ définie par $\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g)$, $g \in G$, $x \in \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert affine canonique associé à $\mathcal{H}^0$.

Lemme 1.13. *Soit π une représentation orthogonale d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}^0$. Soit $b \in Z^1(G, \pi)$ avec une action affine isométrique associée α. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction b appartient à $B^1(G, \pi)$.*
2. *L'action α a un point fixe dans $\mathcal{H}$.*
3. *L'action α est conjuguée à π par une translation : il existe $\xi \in \mathcal{H}^0$ tel que $\alpha(g)x = \pi(g)(x + \xi) - \xi$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathcal{H}$.*

Démonstration. $(1 \Rightarrow 2)$ Si $b \in B^1(G, \pi)$, il existe $\xi \in \mathcal{H}^0$ tel que si $g \in G$ on a $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$. Alors $\alpha(g)x = \pi(g)(x + \xi) - \xi$ pour tout $g \in G$, $x \in \mathcal{H}$. En particulier, $-\xi$ est fixé par α.
$(2 \Rightarrow 3)$ Supposons que α fixe $-\xi$. Alors $b(g) = \alpha(g)(-\xi) - \pi(g)(-\xi) = \pi(g)\xi - \xi$ et donc $\alpha(g)x = \pi(g)(x + \xi) - \xi$ pour tout $g \in G$ et $x \in \mathcal{H}$.
$(3 \Rightarrow 1)$ Si α est conjuguée a π par une translation a $\xi \in \mathcal{H}^0$, alors $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tout $g \in G$, donc $b \in B^1(G, \pi)$. ☐

On rappelle que pour tout $g \in G$ et $x \in \mathcal{H}^0$ on a $\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g)$, $\|\pi(g)x\| = \|x\|$ et le fait que chaque ensemble borné non-vide X d'un espace de Hilbert complexe ou réel est contenu dans unique boule de rayon minimal. On appelle le centre de cette boule *le centre de X*. Remarquons que s'il existe une orbite X de l'action α qui est bornée alors le centre de $\alpha(g)X$ est $\alpha(g)x_0$ où x_0 est le centre de X. Or $\alpha(g)X = X$, donc le centre x_0 est un point fixe de l'action α. Avec le lemme précédent, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.14. *Soit π une représentation orthogonale d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}^0$. Soit $b \in Z^1(G, \pi)$ et α l'action affine isométrique associée. Sont équivalents :*

1. *La fonction b appartient à $B^1(G, \pi)$.*
2. *L'action α a un point fixe dans $\mathcal{H}$.*
3. *La fonction b est bornée.*
4. *Toutes les orbites de α sont bornées.*
5. *Il existe une orbite bornée de α.*

En conséquence, on peut reformuler la propriété (FH) en termes de 1-cohomologie.

Corollaire 1.15. *Soit G un groupe topologique. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le groupe G a la propriété (FH).*
2. *Pour toute représentation orthogonale π de G, $H^1(G, \pi) = 0$.*

1.3.3 Actions sur les arbres et propriété (FA)

Définition 1.16. On appelle *graphe non orienté* un couple $X = (V, \mathbb{E})$ où V est un ensemble et $\mathbb{E} \subset V^2$ est un ensemble de couples d'éléments de V tel que si $(x, y) \in \mathbb{E}$, alors $(y, x) \in \mathbb{E}$. Les éléments de V sont les *sommets* du graphe et les éléments de $\mathbb{E}$ sont les *arêtes*. Pour $e = (x, y) \in \mathbb{E}$, on note $\bar{e} = (y, x)$. On note aussi $E = \{\{e, \bar{e}\} \mid e \in \mathbb{E}\}$ l'ensemble des *arêtes géométriques* du graphe. Un *arbre* est un graphe connexe et acyclique. On fixe maintenant $X = (V, \mathbb{E})$ un arbre. Si $x, y \in V$, il existe une unique suite finie de longueur minimale $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ de sommets de X telle que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{E}$ pour tout i. On appelle une telle suite une *géodésique* et on note $[x, y] = \{(x_i, x_{i+1})\}$ l'ensemble des arêtes orientées qui la composent. On note aussi $d(x, y) = n$ la *distance* entre x et y (qui définit bien une distance sur V). Le *groupe d'automorphismes* de l'arbre X est le groupe des isométries de V pour la distance de graphe. On le munit de la topologie de la convergence simple pour en faire un groupe topologique.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert réel des fonctions $\xi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ telles que $\xi(e) = -\xi(\bar{e})$ pour tout $e \in \mathbb{E}$ et $\sum_{e \in \mathbb{E}} |\xi(e)|^2 < \infty$, où le produit scalaire est donné par

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} \xi(e)\eta(e)$$

Proposition 1.17. *Une action de G sur X (un morphisme de G dans le groupe d'automorphismes de X) induit une action de G sur $\mathbb{E}$ donc une représentation orthogonale π_X de G sur $\mathcal{H}$.*

Soient $x, y \in V$ et $[x, y]$ la géodésique qui les joint. On définit $c : V \times V \to \mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{E})$ par

$$c(x,y)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in [x,y] \\ -1 & \text{si } \bar{e} \in [x,y] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme G agit sur X par automorphismes de graphe, on a $\pi_X(g)c(x, y) = c(g \cdot x, g \cdot y)$. Comme X est un arbre, c vérifie aussi $c(x, z) = c(x, y) + c(y, z)$. De plus, $\|c(x, y)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} c(x, y)(e)^2 = d(x, y)$.

Proposition 1.18. *Soit G un groupe qui agit sur un arbre X. Si $H^1(G, \pi_X) = 0$ (en particulier si G a (FH)), alors G doit fixer un sommet ou une arête géométrique de X.*

Pour démontrer cela, on aura besoin d'un lemme :

Lemme 1.19. *Soit G un groupe qui agit sur un arbre X. Si G a une orbite bornée, alors G fixe un sommet ou une arête géométrique.*

Démonstration. Supposons que $H^1(G, \pi_X) = 0$. Pour tout $x \in X$, l'application $b_x : G \to \mathcal{H}$ définie plus haut est un 1-cocycle pour π_X. Ainsi, c'est un 1-cobord, donc b_x est bornée, donc $g \mapsto \|c(g \cdot x, x)\| = d(g \cdot x, x)$ est bornée, donc G a une orbite bornée. Ainsi, G fixe un sommet ou une arête géométrique de X. □

Définition 1.20. Un groupe topologique a la *propriété (FA)* (point Fixe sur les Arbres) de Serre si toute action de G sur un arbre fixe un sommet ou une arête géométrique.

On peut donc reformuler le résultat précédent :

Proposition 1.21. *Un groupe qui est Kazhdan a la propriété (FA).*

Exemple 1.22. On définit le graphe de Cayley du groupe libre à N générateurs $\mathbb{F}_N = \langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ comme le graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathbb{F}_N$ et deux sommets a, b sont reliés s'il existe $b = x_i a$ pour un certain i. Comme $\mathbb{F}_N$ est libre, son graphe de Cayley est un arbre. On a une action naturelle de $\mathbb{F}_N$ sur son graphe de Cayley (donnée par $g \cdot a \mapsto ga$). Cette action ne fixe aucun sommet ni aucune arête géométrique, donc tout sous-groupe infini de $\mathbb{F}_N$ n'a pas la propriété (FA). On en déduit qu'un sous-groupe infini de $\mathbb{F}_N$ n'a pas la propriété (T).

1.3.4 Propriété de Haagerup

Proposition 1.23. *Soit G un groupe discret dénombrable. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le groupe G admet un 1-cocycle propre (i.e. un 1-cocycle $b : G \to \mathcal{H}$ tel que pour tout $R > 0$ l'ensemble $\{s \in G : ||b(s)|| \leq R\}$ est fini.)*
2. *Le groupe G admet une action affine isométrique propre sur un espace de Hilbert (réel).*

Dans ce cas on dit que le groupe G a la *propriété de Haagerup*. Pour les groupes infinis, la propriété de Haagerup peut être vue comme opposée à la propriété (T). On va l'utiliser pour montrer que les groupes libres n'ont pas la propriété (T) (exemple 1.25).

Par définition de la propriété de Haagerup, on a le résultat suivant.

Proposition 1.24. *Si G a la propriété de Haagerup alors tout sous-groupe infini de G n'a pas la propriété (T). En particulier, un groupe avec la propriété de Haagerup et la propriété (T) est fini.*

Pour donner des exemples de groupes ayant la propriété de Haagerup, on montre la construction d'un 1-cocycle sur un groupe qui agit proprement sur un arbre.

Soit G un groupe qui agit sur un arbre $T = (V, \mathbb{E})$ et o une arête de T. On note π la représentation unitaire associée sur $\ell^2(\mathbb{E})$. Définissons $b(s) = c(s, o)$ (où la transformation c est celle définie dans la section 1.3.3). Des calculs montrent que b est un 1-cocycle sur G tel que $||b(s)||^2 = 2d(o, so)$, donc pour l'action propre de G sur T, le 1-cocycle associé est aussi propre.

Exemple 1.25. Comme on a déjà vu (exemple 1.22), les groupes libres de type fini ont la propriété de Haagerup. En effet, $\mathbb{F}_N$ agit proprement sur son graphe de Cayley et le 1-cocycle associé est propre sur $\mathbb{F}_N$. Les groupes libres de type infini sont des unions croissantes de groupes libres de type fini et donc ont aussi la propriété de Haagerup.

On peut naturellement étendre la propriété de Haagerup.

Proposition 1.26 ([BO])**.** *Soit Λ un sous-groupe de G tel qu'il existe une moyenne μ sur $\ell^\infty(G/\Lambda)$ qui est G-invariante à gauche. Si Λ a la propriété de Haagerup, alors G l'a aussi.*

1.4 Programmation semi-définie et la dualité semi-définie

Définition 1.27. On considère un problème de minimisation d'une fonction linéaire. Soient $x \in \mathbb{R}^m$ une variable, $c \in \mathbb{R}^m$ un vecteur donné, et $m+1$ matrices symétriques $F_0, \ldots, F_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ données. On note $F(x) = F_0 + \sum_{i=1,\ldots,n} x_i F_i$.

On appelle un problème

`minimize` $c^\tau x$
`subject to` $F(x) \geq 0$

un *programme semi-défini*. Ici, l'inégalité $F(x) \geq 0$ signifie que $F(x)$ est positivement semi-défini, c'est-à-dire, $z^\tau F(x) z \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

Un programme semi-défini est un problème d'optimisation convexe, car si $F(x) \geq 0$ et $F(y) \geq 0$, on a pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$F(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) \geq 0.$$

La *région réalisable* ou la région *faisable* $\{x : F(x) \geq 0\}$ est donc un ensemble convexe, et la solution x_0 du problème d'optimisation est le point sur le bord de cet ensemble (c'est-à-dire, $F(x_0)$ est singulier). Le bord de l'ensemble réalisable est continu par morceaux et, grosso modo, la solution x_0 est "le point de la région réalisable le plus éloigné de 0 dans la direction $-c$".

Le problème de faisabilité pour un programme semi-défini est de savoir s'il existe un x tel que $F(x) \geq 0$. Autrement dit, un problème se pose si un espace affine intersecte le cône des matrices symétriques réelles positivement semi-définies d'une taille fixe.

Il existe des solveurs numériques pour résoudre des programmes semi-définis et des problèmes de faisabilité. Dans toute la suite, on va utiliser le solveur YALMIP.

La programmation semi-définie permet d'unifier des problèmes classiques, notamment la programmation linéaire, quadratique, etc. De plus, la croissance des efforts pour résoudre un programme semi-défini avec une erreur donnée est au pire polynomiale en fonction de la taille de l'équation.

Exemple 1.28. Un programme linéaire est un problème

`minimize` $c^\tau x$
`subject to` $Ax + b \geq 0$,

avec $A = [a_1 \dots a_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^m$ donnés. L'inégalité ici signifie l'inégalité des composantes.

Un vecteur v est plus grand que 0 par composantes si et seulement si la matrice

$$\operatorname{diag}(v) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

est positivement semi-définie. Donc, un programme linéaire peut être écrit comme un programme semi-défini avec $F(x) = \operatorname{diag}(Ax + b)$, ou, également,

$$F_0 = \operatorname{diag}(b), \quad F_i = \operatorname{diag}(a_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Un *problème dual* associé à un programme semi-défini principal

`minimize` $c^\tau x$
`subject to` $F(x) \geq 0$

est

`maximize` $-\operatorname{Tr} F_0 Z$
`subject to` $\operatorname{Tr} F_i Z = c_i, \quad i = 1, \dots, m,$
$Z \geq 0.$

Ici, la variable est la matrice $Z = Z^\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Le problème dual est aussi un programme semi-défini, il peut être mis dans la même forme que le problème principal et résolu avec des solveurs numériques. La forme precise est presente dans [VB].

2 Propriété (T) et le trou spectral

2.1 Marche aléatoire

Soit X un ensemble non vide. Une *marche aléatoire* sur X est une application

$$\mu : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

telle que pour tout $x \in X$, on a $\sum_{y \in X} \mu(x, y) = 1$. Une telle marche est dite *irréductible* si, pour toute paire (x, y) de X $(x \neq y)$, il existe un entier $n \geq 1$ et une suite $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ d'éléments de X telle que $\mu(x_{j-1}, x_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Une *mesure stationnaire* pour une marche aléatoire μ est une fonction

$$\nu : X \longrightarrow \mathbb{R}_+^\times,$$

telle que $\nu(x)\mu(x, y) = \nu(y)\mu(y, x)$ pour tous $x, y \in X$. Une marche aléatoire est dite *réversible* si elle a une mesure stationnaire.

Proposition 2.1. *Soit μ une marche aléatoire sur un ensemble X. Alors, deux conditions nécessaires et suffisantes pour que μ ait une mesure stationnaire sont :*

1. *Pour tous $x, y \in X$, on a $\mu(y, x) \neq 0$ si et seulement si $\mu(x, y) \neq 0$.*
2. *Pour tout entier $n \geq 3$ et toute suite $x_1, \dots, x_n$ de points de X, on a*

$$\mu(x_1, x_2) \cdots \mu(x_{n-1}, x_n)\mu(x_n, x_1) = \mu(x_n, x_{n-1}) \cdots \mu(x_2, x_1)\mu(x_1, x_n).$$

De plus, si la marche aléatoire μ est irréductible, ces conditions assurent également l'unicité de la mesure stationnaire.

Exemple 2.2. Soit $\Gamma = (X, E)$ un graphe localement fini sans arêtes multiples, mais pouvant avoir des lacets. Pour une arête $e = (x, y)$, on note $e^- = x$ et $e^+ = y$. Le degré d'un sommet $x \in X$ est un entier

$$\deg(x) = |\{y \in X \mid (x, y) \in E\}|.$$

Pour $x, y \in X$, soit

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1/\deg(x) & \text{si } (x, y) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors μ est une marche aléatoire simple sur X et $\nu : x \longrightarrow \deg(x)$ est une mesure stationnaire pour μ. Le cas où $\mu(x, x) \neq 0$ correspond aux lacets dans Γ.

Le cas particulier de cet exemple est une marche aléatoire simple sur un groupe. Soit G un groupe finiment engendré et S son ensemble générateur symétrique (c'est-à-dire $s \in S$ si et seulement si $s^{-1} \in S$). On définit une marche aléatoire sur Γ (ou, également, sur son graphe de Cayley) par

$$\mu(g, g') = \begin{cases} 1/|S| & \text{si } g^{-1}g' \in S \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La marche aléatoire μ est irréductible, car S engendre G. De plus, par définition, μ est symétrique. Donc, les mesures stationnaires pour μ sont les fonctions constantes sur G.

Inversement, pour chaque marche aléatoire μ, on peut aussi définir un graphe $\Gamma_\mu = (X, E_\mu)$ avec l'ensemble des arêtes $E_\mu = \{(x, y) \in X \times X \mid \mu(x, y) > 0\}$. Ce graphe est connexe si et seulement si la marche μ est irréductible.

2.2 Critères spectraux de la propriété (T)

On dit qu'un groupe localement compact G est *unimodulaire* si ses mesures de Haar invariantes à gauche et à droite coïncident. Chaque groupe discret est unimodulaire pour une mesure qui compte les éléments (avec une normalisation quelconque).

Soit X un ensemble et G un groupe unimodulaire agissant sur X. Soit de plus μ une marche aléatoire réversible sur X et ν une mesure stationnaire pour μ. On utilise la notation $\Gamma_\mu = (X, E_\mu)$ pour le graphe défini dans la sous-section précédente.

Pour une arête $e = (e^-, e^+) \in E_\mu$, soit $c(e) = \nu(e^-)\mu(e^-, e^+)$ la *conductance* de e. On observe que $c(\bar{e}) = c(e)$ et, de plus, $\nu(x) = \sum_{e \in E_\mu : e^- = x} c(e)$.

On considère que

— l'action est *continue* ;

— l'action est *propre* : le sous-ensemble $\{g \in G : gF \cap F' \neq \emptyset\}$ est compact pour tous les sous-ensembles F et F' finis de X ;

— l'action est *cofinie* : l'ensemble d'orbites noté $G \setminus X$ est fini ;

— μ et ν sont *G-invariantes* : $\mu(gx, gy) = \mu(x, y)$ et $\nu(gx) = \nu(x)$ pour tous $g \in G$ et $x, y \in X$.

Observation 2.3. Une marche aléatoire simple sur un groupe finiment engendré a toutes ces propriétés.

On choisit une mesure de Haar dg sur G invariante à gauche et à droite. Pour $x \in X$, on note $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ le sous-groupe stabilisateur. Remarquez que, par la continuité de l'action, G_x est un sous-groupe ouvert. La notation $|G_x|$ représente la mesure de Haar de G_x. Observez que $|G_x| < \infty$ car l'action est propre et donc G_x est compact. De plus, $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, car $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

Un *domaine fondamental* de l'action de G sur X est un sous-ensemble T de X tel que $G = \cup_{x\in T} Gx$. Tel T est fini par la cofinie de l'action et $|T| = |G \setminus X|$.

Soit π une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On considère les espaces vectoriels :

$$\mathcal{E}^0_\pi(X) = \{f : X \longrightarrow \mathcal{H} : f(gx) = \pi(g)(f(x)) \text{ pour tous } g \in G, x \in X\}$$

avec le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2\rangle = \sum_{x\in T} \langle f_1(x), f_2(x)\rangle \frac{\nu(x)}{|G_x|} \text{ pour tous } f_1, f_2 \in \mathcal{E}^0_\pi$$

et

$$\mathcal{E}^1_\pi(X) = \{F : E_\mu \longrightarrow \mathcal{H} : F(\bar{e}) = -F(e);\ F(ge) = \pi(g)(F(e)) \text{ pour tous } e \in E_\mu, g \in G\}$$

avec le produit scalaire

$$\langle F_1, F_2\rangle = \sum_{(x,y)\in G\setminus X^2} \langle F_1(x, y), F_2(x, y)\rangle \frac{1}{c(x, y)} \frac{1}{|G_x \cap G_y|} \text{ pour tous } F_1, F_2 \in \mathcal{E}^1_\pi.$$

On définit un opérateur linéaire

$$d : \mathcal{E}^0_\pi(X) \longrightarrow \mathcal{E}^1_\pi(X), \quad (df)(e) = c(e)(f(e^+) - f(e^-)).$$

Les calculs directs donnent alors le résultat suivant.

Proposition 2.4 (Proposition 5.4.3, [BHV]).
L'opérateur d est borné, notamment

$$\|d\| \leq \sqrt{2}.$$

Son adjoint $d^\star : \mathcal{E}^1_\pi(X) \longrightarrow \mathcal{E}^0_\pi(X)$ est donné par

$$(d^\star F)(y) = \frac{1}{\nu(y)} \sum_{x\in X} F(x, y).$$

Soit Δ_μ et M_μ les opérateurs définis sur $\mathcal{E}^0_\pi(X)$ par

$$\Delta_\mu = d^\star d = \mathrm{id}_{\mathcal{E}^0_\pi(X)} - M_\mu.$$

On a alors :

1. $\Delta_\mu \geq 0$ *et* $\|M_\mu\| \leq 1$.
2. *Pour* $f \in \mathcal{E}^0_\pi(X)$, *on a*

$$\langle \Delta_\mu f, f\rangle = \langle df, df\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x\in X\\ y\in T}} \|f(y)-f(x)\|^2 \frac{\nu(x)\mu(x, y)}{|G_y|} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x\in X\\ y\in T\\ g\in S_x}} \|f(y)-\pi(g)f(x)\|^2 \frac{\nu(x)\mu(gx, y)}{|G_y|},$$

où S_x est un ensemble des représentants des classes de G/G_x.

3.

$$(\Delta_\mu f)(x) = f(x) - (M_\mu f)(x) = f(x) - \sum_{y:(x,y)\in E_\mu} f(y)\mu(x, y).$$

Si la marche aléatoire μ est irréductible, alors $\Delta_\mu f = 0$ si et seulement si la fonction f est constante avec la valeur dans le sous-espace $\mathcal{H}^G$ de points $\pi(G)$-fixes.

On appelle les opérateurs Δ_μ et M_μ les opérateurs de Laplace et de Markov, respectivement. Une fonction $f \in \mathcal{E}^0_\pi(X)$ telle que $\Delta_\mu f = 0$ est appelée fonction harmonique.

Démonstration. Nous démontrons seulement la première affirmation du théorème ; les autres se démontrent de la même façon.

Si $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction G-invariante, la valeur de $\sum_{x\in T}\phi$ ne dépend pas du choix du domaine fondamental T dans X, nous notons cette somme finie $\sum_{x\in G\backslash X}\phi$.

Nous avons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 2.5. *Soit $\Phi : X^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction G-invariante pour l'action diagonale de G sur X^2. Si les séries $\sum_{v\in X}\Phi(x,v)$ et $\sum_{u\in X}\Phi(u,y)$ sont absolument convergentes pour tous $x, y \in X$, alors*

$$\sum_{(x,y)\in G\backslash X^2} \frac{1}{|G_x \cap G_y|}\Phi(x,y) = \sum_{x\in T}\frac{1}{|G_x|}\sum_{y\in X}\Phi(x,y) = \sum_{y\in T}\frac{1}{|G_y|}\sum_{x\in X}\Phi(x,y).$$

Un lecteur intéressé trouvera la démonstration dans [BHV].

Montrons maintenant la première affirmation du théorème. Pour $f \in \mathcal{E}^0_\pi(X)$, on a, par le lemme,

$$\sum_{(u,y)\in G\backslash X^2}\|f(y)\|^2\frac{c(u,y)}{|G_u\cap G_y|} = \sum_{y\in T}\|f(y)\|^2\frac{1}{|G_y|}\sum_{u\in X}c(y,u) = \sum_{y\in T}\|f(y)\|^2\frac{\nu(y)}{|G_y|} = \|f\|^2.$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\left|\sum_{(x,y)\in G\backslash X^2}\langle f(y), f(x)\rangle\frac{c(x,y)}{|G_x\cap G_y|}\right| \le \left(\sum_{(u,y)\in G\backslash X^2}\|f(y)\|^2\frac{c(u,y)}{|G_u\cap G_y|}\sum_{(x,v)\in G\backslash X^2}\|f(x)\|^2\frac{c(x,v)}{|G_x\cap G_v|}\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|^2,$$

d'où

$$\langle df, df\rangle = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in G\backslash X^2}\langle f(y), f(y)\rangle\frac{c(x,y)}{|G_x\cap G_y|} + \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in G\backslash X^2}\langle f(x), f(x)\rangle\frac{c(x,y)}{|G_x\cap G_y|} - \\ - \sum_{(x,y)\in G\backslash X^2}\langle f(y), f(x)\rangle\frac{c(x,y)}{|G_x\cap G_y|} \le \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2 + \|f\|^2 = 2\|f\|^2.$$

On a donc $\|d\| \le \sqrt{2}$. □

Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes :

— μ a le *range fini* : on a $|y \in X : \mu(x,y) > 0| < \infty$ pour tout $x \in X$.

— Le groupe G est finiment engendré. Précisément, si T est un domaine fondamental et $x_0 \in T$, alors G est engendré par l'union du sous-groupe compact G_{x_0} et du sous-ensemble compact

$$S = \{s \in G : \mu(x, sy) > 0 \text{ pour } x, y \in T \text{ quelconques}\}.$$

En effet, soit $g \in G$. Le graphe Γ_μ est connexe, donc il existe une suite $x_1, \ldots, x_n = gx_0$ dans X telle que $\mu(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tous $1 \le i \le n$. Soit $y_1, \ldots, y_n$ une suite dans T et $g_1, \ldots, g_n$ une suite dans G telles que $x_i = g_i y_i$. Si $s_i = g_{i-1}^{-1}g_i$ (avec $g_0 = 1$), on a $\mu(y_{i-1}, s_i y_i) = \mu(g_{i-1}y_{i-1}, g_i y_i) > 0$ et donc $s_i \in S$ pour tous $1 \le i \le n$. Donc $\left(\prod_{1\le i\le n} s_i\right) y_n = x_n = gx_0$, d'où $y_n = x_0$ et $g^{-1}\prod_{1\le i\le n} s_i$ est dans G_{x_0}.

Proposition 2.6 (Proposition 5.4.5, [BHV])**.** *Soit X un ensemble et G un groupe unimodulaire localement compact qui agit sur X. Soit μ une marche aléatoire réversible sur X et ν une mesure stationnaire pour μ. Supposons que l'action est continue, propre et cofinie, que μ et ν sont G-invariantes et que, de plus, μ est irréductible et de range fini. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le groupe G a la propriété (T) de Kazhdan.*
2. *Pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G sans vecteurs invariants non-nuls, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*
$$\langle \Delta_\mu f, f \rangle \geq \varepsilon \|f\|^2$$
pour tout $f \in \mathcal{E}_\pi^0(X)$.
3. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G sans vecteurs invariants non-nuls,*
$$\langle \Delta_\mu f, f \rangle \geq \varepsilon \|f\|^2$$
pour tout $f \in \mathcal{E}_\pi^0(X)$.

Corollaire 2.7. *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G sans vecteurs invariants non-nuls et pour tout $f \in \mathcal{E}_\pi^0(X)$,*

$$\langle \Delta_\mu f, f \rangle \geq \varepsilon \|f\|^2.$$

Alors $(S, \sqrt{2\varepsilon})$ est une paire de Kazhdan, où S est l'ensemble de tous $s \in G$ tels que $\mu(x, sy) > 0$ pour $x, y \in T$ quelconques.

Observation 2.8. La marche aléatoire simple sur un groupe finiment engendré a toutes les propriétés nécessaires pour que l'on puisse utiliser ce théorème.

En particulier, cela donne une estimation de la constante de Kazhdan en termes des valeurs propres de l'opérateur de Laplace Δ_μ. Supposons qu'il existe la plus petite valeur non-nulle de l'opérateur de Laplace Δ_{μ_S}. Nous la notons λ_1. Alors

$$\sqrt{\frac{2\lambda_1}{|S|}} \leq \kappa.$$

Il existe une évaluation plus précise pour $\lambda_1 > \frac{1}{2}$.

Théorème 2.9 (Critère de Zuk, [Z]). *Soit G un groupe engendré par un ensemble symétrique fini avec $e \notin S$ et $\Gamma(S)$ le graphe associé à S. Supposons que $\Gamma(S)$ est connexe et que la plus petite valeur non-nulle de l'opérateur de Laplace Δ_{μ_S} pour une marche aléatoire simple sur $\Gamma(S)$ existe et satisfait*

$$\lambda_1(\Gamma(S)) > \frac{1}{2}.$$

Alors G a la propriété (T) de Kazhdan et

$$\sqrt{2\left(2 - \frac{1}{\lambda_1(\Gamma(S))}\right)}$$

est une constante de Kazhdan pour S.

Néanmoins, même l'estimation moins precise permet de démontrer la propriété (T) pour certains groupes ou estimer la constante de Kazhdan. On ne peux pas toujours utiliser le critère de Zuk – par example, ce n'est pas possible pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ pour lequel on sait estimer la constante de Kazhdan sans methodes numeriques ([Sh]). Pour ameliorer cette estimation numeriquement, on utilise Corollaire 2.7 et pas le critère de Zuk.

On appelle la propriété de *trou spectral* l'existence de la plus petite valeur non-nulle de Δ_{μ_S}. Autrement dit, cela signifie que le spectre de Δ_μ est dans $\{0\} \cup [\alpha, +\infty)$ pour un $\alpha > 0$. Si Δ_μ a le trou spectral, alors par la Proposition 2.6, le groupe G a la propriété (T) avec une constante de Kazhdan $\kappa \geq \sqrt{\frac{2\lambda_1}{|S|}}$, où λ_1 est la plus petite valeur non-nulle de Δ_μ. En pratique, on n'utilise que μ_S — la marche aléatoire simple sur le groupe avec respect de l'ensemble générateur S.

2.3 Critères spectraux en langage des algèbres de groupes

Pour les groupes discrets, il est raisonnable et plus utile de considérer un élément de l'algèbre de groupe qui correspond à l'opérateur de Laplace. Soit $\mathbb{R}[G]$ une $\mathbb{R}$-algèbre d'un groupe discret G. On peut imaginer $\mathbb{R}[G]$ comme les sommes formelles finies des éléments de G avec des coefficients dans $\mathbb{R}$, mais pour nos buts, il est plus pratique de la percevoir comme une algèbre d'opérateurs qui s'annulent partout sauf pour un nombre fini d'éléments. Soit $f, g \in \mathbb{R}[G]$. La multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ est définie par $\alpha \cdot f = (x \mapsto \alpha \cdot f(x))$, l'addition par $f + g = (x \mapsto f(x) + g(x))$ et la multiplication des éléments par $f \cdot g = (x \mapsto \sum\limits_{uv=x} f(u)g(v) = \sum\limits_{u\in G} f(u)g(u^{-1}x))$.

On équipe l'algèbre d'opérateurs $\mathbb{R}[G]$ d'une norme d'opérateurs et d'une involution $\star$ donnée par $(\sum_g c_g g)^\star = \sum_g c_g g^{-1}$, ce qui donne à $\mathbb{R}[G]$ une structure de sous-algèbre de l'algèbre $C^\star$-maximale $C^\star G$.

On appelle un *élément de Laplace* un élément de $\mathbb{R}[G]$ tel que son action sur $l^2(G)$ par la représentation régulière (exemple 1.2) correspond à l'opérateur de Laplace. Un élément de Laplace est donc de forme $\Delta_\mu = \frac{1}{2} \sum\limits_{x\in G} \mu(x)(1-x)^\star(1-x) = 1 - \sum\limits_{x\in G} \mu(x)x$, où G est un groupe discret et μ est une mesure de probabilité symétrique avec le support fini définie par la marche aléatoire simple sur le groupe. Consultez [P] pour les détails concernant les $C^\star$-algèbres, que nous omettons dans ce texte.

On peut reformuler en termes d'éléments de Laplace un des résultats précédents pour estimer la constante de Kazhdan :

Théorème 2.10. *Un groupe G finiment engendré a la propriété (T) de Kazhdan si et seulement si un élément de Laplace $\Delta \in \mathbb{R}[G]$ a le trou spectral. De plus, si $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre non nulle, alors on a la suivante estimation de la constante de Kazhdan κ :*

$$\sqrt{\frac{2\lambda_1}{|S|}} \leq \kappa$$

Également, $\Delta_\mu^2 - \kappa\Delta_\mu \geq 0$ dans l'algèbre $C^\star$-maximale $C^\star G$.

On définit l'idéal d'augmentation $I[G] = \{\sum_i c_i g_i : g_i \in G, c_i \in \mathbb{R}, \sum_i c_i = 0\}$. Pour construire un algorithme numérique, on utilise le résultat suivant.

Théorème 2.11 (Critère d'Ozawa, [Oz])**.** *Soient G, μ et Δ_μ comme avant. Alors le groupe G a la propriété (T) de Kazhdan si et seulement si il existe une constante $\lambda > 0$ et une suite finie $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans $I[G] \subset \mathbb{R}[G]$ telles que $\Delta_\mu^2 - \lambda\Delta_\mu = \sum\limits_i \xi_i^\star \xi_i$. De plus, si G a la propriété (T), μ prend les valeurs rationnelles et $\kappa > 0$ est un nombre rationnel tel que le spectre de Δ_μ dans $C^\star G$ est contenu dans $\{0\} \cup (\lambda, +\infty)$, alors*

$$\Delta_\mu^2 - \lambda\Delta_\mu \in \left\{ \sum_{i=1..n\in\mathbb{N}} r_i \xi_i^\star \xi_i : r_i \in \mathbb{Q}^+, \xi_i \in \mathbb{Q}[G] \right\}.$$

3 La propriété (T) de Kazhdan et la programmation semi-définie

L'intérêt pratique du résultat d'Ozawa est que, en fait, les méthodes numériques de résolution des SDP basés sur son critére permettent d'améliorer les estimations de la constante de Kazhdan ou même de démontrer qu'un groupe a la propriété (T). Dans toute la suite, on utilise l'élément de Laplace non normalisé dans l'algèbre de groupe :

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{g\in S} (1-g)^\star(1-g) = |S| - \sum_{g\in S} g,$$

où S est l'ensemble générateur choisi.

3.1 Méthode de matrice de Gram

Soit A une $\star$-algèbre sur $\mathbb{R}$ et $W \subset A$ un sous-ensemble de dimension finie. On voudrait vérifier si un élément $a \in A$ est dans le cône $\star$-positif

$$\Sigma^2 W = \left\{ \sum_{i=1\ldots n} w_i^\star w_i \mid n \in \mathbb{N}, w_i \in W \right\}.$$

Pour cette vérification, on utilise la *méthode de matrice de Gram.* Fixons une base $a_1, \ldots, a_m$ de W. Une matrice $P \in M_m(\mathbb{R})$ est une *matrice de Gram pour* a si

$$a = (a_1^\star, \ldots, a_m^\star) P (a_1, \ldots, a_m)^\tau.$$

Tous les éléments de $\Sigma^2 W$ sont hermitiens (également, $a^\star = a$). On note qu'un élément $a \in A$ est hermitien si et seulement s'il a une matrice de Gram symétrique. Plus généralement, en utilisant la forme des éléments du cône, on obtient le résultat suivant.

Observation 3.1. Un élément $a \in \Sigma^2 W$ si et seulement s'il admet une matrice de Gram positivement semi-définie.

Remarque 3.2. Pour une matrice semi-définie positivement P, il existe toujours une matrice carrée Q telle que $P = QQ^\tau$. On a donc

$$(a_1^\star, \ldots, a_m^\star) P (a_1, \ldots, a_m)^\tau = (aQ)^\star (aQ)^\tau = \sum_{i=1\ldots n} \xi_i^\star \xi_i.$$

3.2 Algorithme

Plus généralement, le problème d'optimisation peut être écrit comme un problème SDP

$$\begin{array}{ll} \texttt{minimize} & -\lambda \\ \texttt{subject to} & (a_1^\star, \ldots, a_m^\star) P (a_1, \ldots, a_m)^\tau = \Delta^2 - \lambda\Delta \\ & \lambda \geq 0 \\ & P \geq 0, \end{array}$$

L'existence d'une solution (λ, P) telle que $\lambda > 0$ vérifie la propriété (T) de Kazhdan pour un groupe G. Mais, comme la solution numérique n'est pas exacte et demande des efforts de calcul, il y a deux problèmes clés : le choix de W et la différence entre la solution numérique et la solution exacte.

3.2.1 Le choix de W

Il semble naturel d'inclure $\langle S \rangle = \langle B_1(e, S) \rangle$ dans W. En général, pour estimer l'exactitude de (P, λ) obtenus par l'algorithme numérique (regardez ci-dessus) pour $W = B_d(e, S)$, on a besoin de la table de multiplication de $B_d(e, S)$, ce qui demande la génération de $B_{2d}(e, S)$. Donc pour les groupes, par exemple, de croissance exponentielle, la dimension de W augmente exponentiellement avec d.

Les résultats numériques montrent ([KN]) que, comme on pouvait le prévoir, presque toujours le choix de W le plus grand correspond à la meilleure estimation de λ. Mais pour des raisons de complexité et de temps, on essaye de ne pas prendre W trop grand. En pratique, on n'utilise que $W = \langle B_d(e, S) \rangle$ pour $d \leq 5$.

3.2.2 L'estimation d'erreur numerique

L'optimisation numérique laisse toujours ouvertes des questions d'exactitude. Pour un problème de la décomposition de $\Delta^2 - \lambda\Delta$, la solution numérique (λ_0, P_0) est une approximation

$$\Delta^2 - \lambda_0 \Delta - x^\star P_0 x = r, \quad \|r\|_1 \leq \epsilon_0.$$

Pour obtenir une borne exacte sur λ, on peut modifier la solution de la façon suivante.

1. Calculer $Q = \mathrm{Re}(\sqrt{P_0})$.
2. Approcher Q par une matrice proche rationnelle $Q_{\mathbb{Q}}$.
3. Approcher $Q_{\mathbb{Q}}$ par $Q_{\mathbb{Q}}^{\omega}$, une matrice proche avec la somme des lignes égale à 0 (pour que ce soit bien un élément de l'idéal d'augmentation).
4. Calculer la décomposition $\sum \xi_i^\star \xi_i = a^\star Q_{\mathbb{Q}}^{\omega}(Q_{\mathbb{Q}}^{\omega})^\tau a^\tau$ et l'erreur
$$r = \Delta^2 - \lambda_0\Delta - \sum \xi_i^\star \xi_i.$$
5. Estimer avec l'erreur obtenue la valeur minimale possible de la constante de Kazhdan et la comparer avec 0.

Exemple 3.3 ([NT],[KN])**.** On considère un groupe $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et une $\star$-algèbre $A = \mathbb{R}[\Gamma]$ avec l'involution donnée par $(\sum_g c_g g)^\star = \sum_g c_g g^{-1}$.

Soient $M_1, \dots, M_{12}$ les générateurs élémentaires de Γ (c'est-à-dire les matrices de forme $\mathrm{id} + E_{ij}$, où le seul coefficient de E_{ij} non nul est $e_{ij} = \pm 1$, $i \neq j$). On regarde tous les produits d'au plus deux M_i. Sans répétitions, cela donne 121 matrices A_i. Soit W engendré par ces 121 éléments de $\mathbb{R}[\Gamma]$ avec $a_i = A_i$ pour base naturelle.

L'opérateur de Laplace non normalisé est
$$\Delta = 12 - \sum_{i=1\dots 12} M_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1\dots 12}(1 - M_i)^\star(1 - M_i) \in A.$$

On résout numériquement le problème suivant :

$\texttt{minimize}\ -\lambda$
$\texttt{subject to}\ (a_1^\star, \dots, a_m^\star)P(a_1, \dots, a_m)^\tau = \Delta^2 - \lambda\Delta$
$\lambda \geq 0$
$P \geq 0.$

La solution numérique (λ_0, P_0) n'est pas exacte, donc il faut obtenir une borne pour λ exacte. On calcule $Q_{\mathbb{Q}}^{\omega}$ correspondant à P_0 et on définit
$$P = Q_{\mathbb{Q}}^{\omega}(Q_{\mathbb{Q}}^{\omega})^\tau.$$
Avec cette matrice P, on calcule la somme des carrés
$$b = (a_1^\star, \dots, a_m^\star)P(a_1, \dots, a_m)^\tau$$
dans l'algèbre de groupe. Par la définition de P, l'élément b est dans l'idéal d'augmentation $I[G]$. La différence $s = a - b$ est hermitienne et reste dans l'idéal d'augmentation $I[G]$. De plus, chaque élément de groupe dans le support de c est le produit d'au plus quatre générateurs M_i car chaque a_i est le produit d'au plus deux générateurs. Un lemme technique montre que
$$c + 2^{2d-1}\|c\|_1 \cdot \Delta \in \Sigma^2\mathbb{R}[G],$$
où d est la longueur maximale de la base de $I[G]$ (et qui est égale à deux dans notre cas). On a
$$a + 2^{2d-1}\|c\|_1 \Delta = b + c + 2^{2d-1}\|c\|_1 \Delta = \Delta^2 - (\lambda_0 - 2^{2d-1}\|c\|_1)\Delta,$$
donc on compte $\|c\|_1$ et on vérifie que $\lambda_0 - 2^{2d-1}\|c\|_1 > 0$.

Remarque 3.4. Le premier article proposant cette approche est [NT]. Avec les solveurs SDP numériques, les auteurs résolvent, en fait, un problème de faisabilité et non d'optimisation. De plus, on cherche une matrice P symétrique semi-positivement définie *quelconque* telle que $(a_1^\star, \dots, a_m^\star)P(a_1, \dots, a_m)^\tau = \Delta^2 - \lambda\Delta$ pour un $\lambda > 0$. Ce problème peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\texttt{find } P\\
&\texttt{subject to } (a_1^\star, \ldots, a_m^\star) P (a_1, \ldots, a_m)^\tau = \Delta^2 - \lambda\Delta\\
&\qquad\qquad\quad \lambda \geq 0\\
&\qquad\qquad\quad P \geq 0.
\end{aligned}$$

Avec la matrice P obtenue, on estime le trou spectral. En pratique, pour formuler le problème de faisabilité dans le solveur numérique, on minimise une fonction arbitraire (par exemple, constante) pour vérifier si une solution est infinie ou non.

$$\begin{aligned}
&\texttt{minimize } 1\\
&\texttt{subject to } (a_1^\star, \ldots, a_m^\star) P (a_1, \ldots, a_m)^\tau = \Delta^2 - \lambda\Delta\\
&\qquad\qquad\quad \lambda \geq 0\\
&\qquad\qquad\quad P \geq 0.
\end{aligned}$$

Une solution infinie dans ce cas signifie l'absence de P satisfaisant les conditions.

Néanmoins, cette approche ne permet pas d'estimer la constante de Kazhdan avec la même exactitude qu'en résolvant le problème de minimisation. La forme du problème décrit dans l'exemple précédent est due à M. Kaluba et P. W. Nowak ([KN]).

3.2.3 Diminution de la complexité

Pour des raisons techniques, on souhaiterait réduire la taille et la complexité des calculs du problème d'optimisation. Les premiers résultats nouveaux concernant la propriété (T) pour $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_N)$, $N \geq 6$, sont présents dans [KKN]. Les auteurs réduisent le temps des calculs par ordinateur en décomposant l'élément du Laplacien carré.

Dans [KNO], les auteurs démontrent que $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_5)$ a la propriété (T), en réduisant la complexité de l'algorithme par l'utilisation des symétries dérivées de la structure du groupe. Ils s'intéressent au groupe fini $\Sigma_W = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_5)) : \sigma(\Delta) = \Delta, \sigma(W) = W\}$.

Dans [N], l'auteur utilise la dualité des SDP (voir la fin de la section 1.4) et donne une interprétation géométrique d'un problème dual, précisément dans les termes de 1-cocycles définis dans la section 1.3.2. Théoriquement, cela conduit au résultat suivant : soit l'élément de Laplace a un trou spectral, soit il existe une représentation orthogonale et un 1-cocycle non trivial c tel que $\sum_{s \in S} c(s) = 0$. Cette approche simplifie la démonstration numérique du fait que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a (T) pour $n \geq 3$ et permet de démontrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4)$ a la propriété de Kazhdan. De plus, en même temps, le SDP dual des cocycles améliore essentiellement les estimations du trou spectral et donc celles de la constante de Kazhdan.

4 Applications

On donne maintenant une application de l'estimation du trou spectral et constante de Kazhdan autre que la demonstration de la propriete (T). Un group avec la propriete (T) de Kazhdan peut servir à construire des familles de graphes expanseurs, qui sont des graphes connexes mais sans trop d'arêtes. Le trou spectral (ou, egalement, la constante de Kazhdan) dans ce cas permet d'estimer 'la conductance' de ces graphes.

4.1 Graphes expanseurs

On présente une construction de graphes expanseurs due à Margulis.

Définition 4.1. Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe localement fini et $A \subset V$ un sous-ensemble de ses sommets. On appelle *frontière de* A et on note ∂A l'ensemble des sommets dans $V \setminus A$ liés avec les sommets dans A par une arête $\partial A = \{y \in V \setminus A \quad | \quad \exists x \in A : (x, y) \in E\}$.

La *constante d'expansion* ou la *constante isopérimétrique* de Γ est le nombre

$$h(\Gamma) = \min\left\{ \frac{\#\partial A}{\min\{\#A, \#(V \setminus A)\}} \quad \Big| \quad A \subsetneq V, 0 < \#A < \infty \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

La constante d'expansion d'un graphe montre « à quel point le graphe est connexe ». Remarquons $h(\Gamma_0 = (V, E_0)) \leq h(\Gamma_0 = (V, E_0 \cup E_1))$. Si on regarde le graphe Γ comme un modèle de réseau de communication, alors $h(\Gamma)$ est un moyen de mesurer la vitesse de transmission d'information dans le réseau.

Exemple 4.2.

1. Pour un cycle avec n sommets, $h = 2/\left[\frac{n}{2}\right]$.
2. Pour un arbre régulier de degré $k \geq 2$, $h = k - 2$.

On peut maintenant définir les graphes expanseurs.

Définition 4.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Une famille $\Gamma_n = (V_n, E_n)$ des graphes finis connexes est une famille de (k, ε)-*expanseurs* si

1. $\lim_{n \longrightarrow \infty} \# V_n = \infty$.
2. $\deg(x) \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in V_n$.
3. $h(\Gamma_n) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La constante ε est appelée une *constante d'expansion* de $(\Gamma_n)_n$.

Une famille de (k, ε)-expanseurs existe toujours pour $k \geq 5$ et $\varepsilon = 1/2$ ([L]). On donne une construction explicite d'une famille de graphes expanseurs en utilisant la propriété (T). Pour la préparation on construit le graphe de Schreier associé à un sous-groupe H d'un groupe finiment engendré G.

Soit S un ensemble générateur de G tel que $S^{-1} = S$ et soit V un ensemble sur lequel G agit. Alors le graphe de Schreier $\Gamma(V, S)$ est un graphe dont V est l'ensemble des sommets et E son ensemble d'arêtes où $(x, y) \in E$ si et seulement si $y = sx$ pour un certain $s \in S$. Le graphe $\Gamma(V, S)$ est connexe si et seulement si l'action de G sur V est transitive.

Le graphe de Schreier $\Gamma(G/H, S)$ correspond a l'action naturelle de G sur G/H. Il est toujours connexe. Plus encore, chaque graphe de Schreier connexe $\Gamma(V, S)$ est de la forme $\Gamma(G/H, S)$ pour un sous-groupe H de G. Là on identifie V avec G/H pour H le stabilisateur d'un élément fixé v de V.

On note π_V la représentation de G sur $l^2(V)$ définie par

$$\pi_V(G)\xi(x) = \xi(g^{-1}x), \quad \xi \in l^2(V), x \in V, g \in G.$$

Si V est fini, les fonctions constantes sur V sont dans $l^2(V)$. De plus, le sous-espace

$$l_0^2(V) = \{\xi \in l^2(V) : \sum_{x \in V} \xi(x) = 0\} = \{1_V\}^{\perp}$$

est G-invariant. La représentation π_V^0 de G sur $l_0^2(V)$ n'a pas de vecteurs invariants non-nuls. Le lemme suivant établit un lien entre la constante d'expansion du graphe $\Gamma(V, S)$ et la constante de Kazhdan associée à S et π_V^0. De plus, on va montrer qu'une famille de graphes de Schreier connexes est une famille d'expanseurs s'il n'y a pas de vecteurs presque invariants dans $l_0^2(V)$ non-nuls.

Lemme 4.4 ([BHV])**.** On a $h(\Gamma(V, S)) \geq \frac{\kappa(G, S, \pi_V^0)}{4}$, ou $\kappa(G, S, \pi_V^0)$ est la constante de Kazhdan associée à S et π_V^0.

Théorème 4.5. *Soit G un groupe avec un ensemble générateur fini S tel que $S = S^{-1}$. Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ une famille de sous-groupes d'indice fini de G telle que* $\lim_{n \to \infty} \#(G/H_n) = \infty$.

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n il n'y a pas de vecteur (S, ε)-invariant dans $l_0^2(G/H_n)$. Alors la famille de graphes de Schreier $\Gamma(G/H_n, S)$ est une famille de (k, ε)-expanseurs où $k = \#S$.

Démonstration. Il n'y a pas de vecteur (S, ε)-invariant dans $l_0^2(G/H_n)$, donc pour tout $\xi \in l_0^2(G/H_n)$ tel que $\|\xi\| = 1$ on a $\max_{s \in S} \|\pi_{G/H_n}\xi - \xi\| \geq \varepsilon$. On déduit $h(\Gamma_n) \geq \varepsilon^2/4$ par le lemme précédent. $\square$

Soit G un groupe avec la propriété (T) qui admet un ensemble générateur fini S tel que $S = S^{-1}$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que (S, ε) est une paire de Kazhdan. Par le lemme précédent pour un sous-groupe H de G d'indice fini on a $h(\Gamma(G/H, S)) \geq \varepsilon^2/4$ pour le graphe de Schreier associé.

Corollaire 4.6. *Soit G un groupe résiduellement fini, infini qui a la propriété (T) avec un ensemble générateur fini S tel que $S = S^{-1}$ et une constante de Kazhdan $\varepsilon > 0$.*

Pour chaque suite décroissante $(H_n)_n$ de sous-groupes d'indices finis de G telle que $\cap_n H_n = \{1\}$, la famille de graphes de Schreier $\Gamma(G/H_n, S)$ est une famille de $(k, \varepsilon^2/4)$-expanseurs, où $k = \#S$.

On décrit deux exemples de familles de graphes expanseurs qui utilisent la propriété (T). La deuxième construction est la construction originale de Margulis dans [Ma].

Exemple 4.7. Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ avec l'ensemble générateur $S = \{E_{ij}^{\pm 1} \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$, où $E_{ij}^{\pm 1} = E_{ij}(\pm 1)$ est une matrice élémentaire. C'est bien connu que G a la propriété (T) et l'estimation la plus precise pour l'instant de la constante de Kazhdan pour l'ensemble S est obtenue par les metodes numeriques dans [KN]. Cette estimation est $\varepsilon \approx 0.216$.

Soit $G(p) = \{A \in G | A \equiv I_3 \mod p\}$ pour un nombre premier p. De manière équivalente, $G(p)$ est le noyau du morphisme surjectif $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ donné par la réduction modulo p. Comme $G/G(p) \cong \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, le sous-groupe $G(p)$ est d'indice fini et donc la famille de graphes de Schreier $(\Gamma(G/G(p), S))_p$ est une famille de (k, ε')-expanseurs avec $k = \#S = 12$, $\varepsilon' = \varepsilon^2/4 \approx 0.012$.

4.2 Questions ouvertes

- **?** Comment la dualité des SDP permet-elle d'améliorer les estimations du problème de Kazhdan ? Peut-on interpréter le programme dual en termes de propriété de Haagerup ou de la propriété (FH) ?
- **?** Comment peut-on améliorer numériquement les estimations de la constante de Kazhdan pour les groupes possédant des "symétries" quelconques ?
- **?** Peut-on obtenir un critère similaire à celui d'Ozawa mais pour la propriété de point fixe sur L^p ? À quel algorithme numérique de vérification correspondrait-il ?

Références

[BHV] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette. *Kazhdan's Property (T). New Mathematical Monographs*, Series Number 11, 1st Edition. 2007.

[BO] N. P. Brown, Narutaka Ozawa. *C*-algebras and finite dimensional approximations. Graduate Studies in Mathematics*, vol. 88. 2008.

[CH1] C. Houdayer. *Ergodic group theory.* https ://cyrilhoudayer.com/wp-content/uploads/2022/04/egt-orsay.pdf

[CH2] C. Houdayer. *Dynamical systems* https ://cyrilhoudayer.com/wp-content/uploads/2024/01/dynamical-systems-ens.pdf

[D] P. Delorme. *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus et représentations. Bull. Soc. Math. France*, vol. 105, p. 281–336. 1977.

[FK] K. Fujivara, Y. Kabaya. *Computing Kazhdan constants by semidefinite programming. Exp. Math.* 2019.

[Ka] D.A. Kazhdan. *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. Funkcional. Anal. i Prilozen.*, vol. 1. 1967.

[Kas] M. Kassabov. *Kazhdan constants for* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 15, p. 971-995. 2005.

[KKN] M. Kaluba, D. Kielak, P. Nowak. *On property (T) for* $\mathrm{Aut}\,\mathbb{F}_n$ *and* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ *Math. Ann.*, vol. 193 :2, p. 539-562. 2021.

[KN] M. Kaluba, P. W. Nowak. *Certifying numerical estimates of spectral gaps. Groups Complexity Cryptology*, vol. 10 :1. 2018

[KNO] M. Kaluba, P. W. Nowak, N. Ozawa. Aut($\mathbb{F}_5$) *has property (T) Math. Ann.*, vol. 375, p. 169-1191. 2019.

[L] A. Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures. Birkhauser.* 1994.

[LW] A. Lubotzky, B. Weiss. *Groups and expanders. Expanding graphs, DIMACS Series in Discrete Mathematics*, vol. 10, p. 95–109. 1993.

[Ma] G.A. Margulis. *Explicit constructions of concentrators. Problems of Inform. Transm.*, vol. 10, p. 325–332. 1975. [Original russe : *Problemy Peredaci Informacii*, vol. 9 :4, p. 71–80. 1973.]

[Ma2] G.A. Margulis. *Explicit constructions of graphs without short cycles and low degree.* Combinatorica, vol. 2(1), p. 71–78. 1982.

[Ma3] G.A. Margulis. *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics.* 1991

[N] M. Nitsche. *Computer proofs for Property (T), and SDP duality.* Preprint, 2020. https ://arxiv.org/abs/2009.05134

[NT] T. Netzer, A. Thom. *Kazhdan's Property (T) via semidefinite optimization.* Preprint, 2014. https ://arxiv.org/abs/1411.2488

[Oz] N. Ozawa. *Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan's property (T) Inst. Math. Jussieu,* vol. 15, p. 85–90. 2016.

[Oz2] N. Ozawa. *About the connes embedding conjwcture - algebraic approaches. Jpn. J. Math.*, vol. 8, p. 147–183. 2013

[P] I. F. Putnam . *Lecture Notes on $C^\star$-algebras.* https ://web.uvic.ca/ ifputnam/ln/C*-algebras.pdf

[Rud] W. Rudin. *Fourier Analysis on Groups. Interscience Tracts in Pure and Applied Math.*, vol. 12. 1962.

[Sh] Y. Shalom. *Bounded generation and Kazhdan's property (T). Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 90. 1999.

[V] Y. C. de Verdiere. *Le trou spectral des graphes et leurs propriétés d'expansion. Cours de l'institut Fourier*, tome 22, p. 24-37. 1993-1994.

[Va] A. Valett. *Minimal projections, integrable representations and property (T). Arch. Math* vol. 43, p. 397–406. 1984.

[VB] L. Vandenberghe, S. Boyd. *Semidefinite programming. SIAM Review*, vol. 38 :1, p. 49-95. 1996.

[Z] A. Zuk. *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups. Geometric and Functional Analysis*, vol. 13 :3, p. 643-670. 2003.

Département de mathématiques et applications, École normale supérieure,
45 rue d'Ulm, Paris, France 75005
irina.mamsurova@ens.psl.eu