

# Rapport de stage de M1

Modèle de dimères et lien avec les arbres couvrants

Février-Juin 2024

Anne-Gaëlle VIBERT



Stage réalisé dans l'équipe de probabilité de l'université de Vienne  
Encadré par Nathanaël Berestycki



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>1 Déroulement du stage</b>	<b>1</b>
<b>2 Introduction du sujet</b>	<b>1</b>
<b>3 Présentation des objets mathématiques étudiés</b>	<b>2</b>
3.1 Modèle de dimères . . . . .	2
3.2 Fonction de hauteur . . . . .	3
3.3 Calcul de la fonction de partition : méthode de Kasteleyn . . . . .	4
3.4 Bijection de Temperley . . . . .	5
3.5 Évolution de Schramm-Loewner (SLE) . . . . .	8
3.6 Convergence presque-critique . . . . .	8
<b>4 Problématique étudiée</b>	<b>10</b>
4.1 Énoncé et heuristiques . . . . .	10
4.2 Résultats préliminaires . . . . .	10
4.3 Loi de l'angle de sortie . . . . .	12
4.3.1 Heuristique . . . . .	12
4.3.2 Quelques résultats pour un domaine quelconque . . . . .	12
4.3.3 Cas du cercle . . . . .	15
4.4 Loi de la marche conditionnée à tendre vers une certaine direction . . . . .	16
4.5 Ouverture . . . . .	19
<b>5 Bonus : La vie en dehors du stage</b>	<b>20</b>
<b>Références</b>	<b>20</b>
<b>Annexes</b>	<b>21</b>

# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon encadrant de stage, Nathanaël Berestycki, de m'avoir proposé ce sujet et m'avoir accompagnée pendant ces cinq mois. Je le remercie en particulier pour les discussions que nous avons eues, que ça soit pour m'expliquer le sujet, ou pour m'aider à avancer dans mes recherches, et pour le temps qu'il y a consacré. Je remercie ensuite les autres membres du laboratoire avec qui j'ai eu l'occasion de discuter de mes recherches et qui m'ont parfois permis d'avancer dans la résolution du problème sur lequel j'ai travaillé, en particulier Philibert Courau, Paul Thévenin et Paul de Lambert. Merci aussi à tous ceux qui ont contribué à ce que ce stage se passe dans une ambiance chaleureuse, à ceux qui ont pris le temps de discuter avec moi du métier de chercheur, à ceux qui ont organisé les séminaires et à William Da Silva pour son mini-cours auquel j'ai pu assister. J'adresse également mes remerciements à Valentine Tosel qui a effectué un stage sur le même sujet que moi, et avec qui ce fut un plaisir de travailler. Mes remerciements vont enfin à mon tuteur, Cyril Houdayer, qui m'a permis de trouver ce stage.

## 1 Déroulement du stage

J'ai effectué mon stage du 5 février au 28 juin 2024, dans l'équipe de probabilité de l'Université de Vienne, sous la direction de Nathanaël Berestycki. Le premier mois a principalement été consacré à de la lecture de cours ou articles de mathématiques, ainsi qu'à des discussions avec mon encadrant pour me permettre de comprendre en profondeur le sujet et les objets mathématiques qui lui sont associés. Le mois de février correspond à l'inter-semestre en Autriche. La vie universitaire fonctionnait donc au ralenti, et aucune conférence n'était prévue pendant cette période. Mais dès début mars, les conférences ont repris. Et à mes lectures de cours et d'articles sont venus s'ajouter un ou deux exposés par semaine, notamment ceux du séminaire de probabilités de Vienne (cf liste des exposés).

Fin mars, après que j'ai lu l'un de ses récents articles ([BHS22]), Nathanaël Berestycki m'a proposé d'essayer de résoudre un problème. C'est la résolution de ce problème qui a occupé la majeure partie de mon temps jusqu'à la fin du stage. Je n'ai d'ailleurs pas eu complètement le temps de terminer. Les résultats obtenus sont présentés dans la section 4.

Début avril, une autre stagiaire, Valentine Tosel, est arrivée. A partir du mois de mai, nous avons travaillé ensemble sur ce problème, soit en cherchant chacune de notre côté puis en présentant nos résultats à l'autre, soit en réfléchissant directement ensemble.

Outre le temps passé à travailler avec Valentine, et les échanges avec mon encadrant de stage, j'ai aussi eu l'occasion de discuter du problème sur lequel j'ai travaillé avec d'autres personnes du laboratoire, dont Paul Thévenin qui m'a donné des pistes à plusieurs reprises.

Enfin, j'ai pu suivre un mini-cours intitulé "Introduction à la géométrie planaire aléatoire" donné par William Da Silva.

## 2 Introduction du sujet

Le modèle de dimères est un modèle de mécanique statistique bidimensionnel qui apparaît dans les années 1960, notamment dans les travaux de Kasteleyn dans le cadre de l'étude de la répartition des molécules diatomiques à la surface d'un cristal. Ce modèle consiste à attribuer des poids (ou énergies) aux arêtes d'un graphe, à relier ensuite les points du graphe deux par deux, et à attribuer une probabilité à cette configuration de dimères en fonction des poids des arêtes qu'elle contient. Ce modèle est présenté en détail dans la section 3.1. A chaque configuration de dimères, on peut associer une "fonction de hauteur" définie sur les faces du graphe (ou disons sur les centres des faces). En interpolant cette fonction, on obtient une surface au-dessus du graphe (cf section 3.2). Le modèle de dimères permet donc d'obtenir un modèle de surfaces aléatoires au-dessus d'un graphe.

Kasteleyn montre que, sous certaines hypothèses sur le graphe, ce modèle est "totalement résoluble", c'est-à-dire que les calculs peuvent être faits de manière explicite. La preuve de ce résultat dans le cas d'un graphe planaire, bi-partite et fini est présentée dans la section 3.3.

Cette méthode de calcul explicite permet de mettre en évidence un phénomène de "surface limite". Considérons un réseau du plan complexe, que l'on intersecte avec un domaine  $D$  du plan (un domaine est un ouvert simplement connexe). Le modèle de dimères sur ce graphe nous donne, via la fonction de hauteur, une surface aléatoire au-dessus de  $D$ . En faisant tendre le pas du réseau vers 0, on a une suite de surfaces aléatoires au-dessus de  $D$ . Cette suite de surfaces aléatoires, converge en loi, à remise à l'échelle près, vers une surface limite au-dessus de  $D$ . Ce résultat est présenté dans [Ken09]. Un résultat similaire pour les graphes périodiques est présenté dans [Ton]. Les fluctuations par rapport à cette limite tendent quant à elles vers le "champ libre gaussien". Le champ libre gaussien est un objet probabiliste généralisant la notion de mouvement brownien en dimension 2. On peut le voir comme une surface aléatoire, dont la hauteur en chaque point suit une loi gaussienne. Les cours [BP] et [WP21] présentent de manière détaillée cet objet probabiliste. Pour éviter de surcharger ce rapport, ces résultats ne seront pas présentés ici.

En 1974, Temperley établit une bijection entre les "arbres couvrants" de la grille de taille  $m \times n$  et les configurations de dimères de la grille de taille  $(2m + 1) \times (2n + 1)$  dont on enlève un coin. En 1993, Propp, Burton et Pemantle généralisèrent cette bijection en associant à chaque "arbre couvrant" d'un graphe non dirigé et non pondéré une configuration de dimères sur un graphe associé. Cette bijection a encore été étendue par Kenyon, Propp et Wilson au cas des graphes dirigés et pondérés dans [KPW00]. Ils établirent également un lien entre la fonction de hauteur d'une configuration de dimères, et l'enroulement des branches de "l'arbre couvrant" associé. Ce résultat est présenté dans la section 3.4 de ce rapport. Le modèle de dimères est alors équivalent à un modèle probabiliste sur les "arbres couvrants" d'un autre graphe. On appellera ce modèle l'arbre de Temperley.

L'évolution de Schramm Loewner (SLE) est un modèle permettant de choisir aléatoirement une courbe allant d'un point à un autre en restant dans un domaine du plan. Le SLE vérifie une "propriété de Markov spatiale" et "l'invariance conforme". Une généralisation de ce modèle est "l'évolution de Schramm-Loewner massive". On perd alors "l'invariance conforme" qui est remplacée par une propriété plus faible. Ce modèle est présenté de manière succincte dans la section 3.5.

Dans [BHS22], Berestycki et Haunschmid-Sibitz se servent de la bijection de Temperley (généralisée) pour étudier un autre type de limite dans le cas du modèle de dimères sur le réseau carré et le réseau hexagonal. Il s'agit de la limite "presque-critique". C'est-à-dire qu'en même temps que le pas du réseau tend vers 0, les poids des arêtes du graphe tendent vers 1. La bijection de Temperley généralisée permet de ramener l'étude des fonctions de hauteur de ces modèles de dimères à l'étude des arbres de Temperley respectivement sur le réseau carré et le réseau triangulaire orienté. Berestycki et Haunschmid-Sibitz montrent que l'arbre de Temperley tend, dans la limite "presque critique" vers un arbre dont les branches suivent une évolution de Schramm-Loewner massive. Cela leur permet également de montrer que la fonction de hauteur centrée admet une limite presque-critique. Ces résultats sont présentés dans la section 3.6.

Un des outils utilisé dans les preuves de [BHS22] est la comparaison d'une marche aléatoire driftée (c'est-à-dire une marche aléatoire dont les différentes directions de déplacement ne sont pas équiprobables) et d'une "marche aléatoire massive". Une marche aléatoire massive est une marche aléatoire qui a une certaine probabilité de mourir à chaque fois qu'elle fait un pas. Le problème sur lequel j'ai travaillé durant mon stage est l'étude de la limite d'une marche aléatoire massive conditionnée à sortir d'un certain domaine avant de mourir, quand ce domaine tend vers le plan tout entier. Si cette question n'est pas directement liée à l'étude du modèle de dimères, elle découle naturellement des objets utilisés dans [BHS22], et la preuve fait intervenir la comparaison entre la marche aléatoire massive et la marche aléatoire driftée. Les résultats que j'ai obtenus sont présentés dans la section 4.

### 3 Présentation des objets mathématiques étudiés

Cette section vise à présenter les différents objets mathématiques sur lesquels j'ai travaillé durant ce stage. Ayant lu beaucoup d'articles et de cours, j'ai fait le choix de ne pas présenter certaines de mes lectures (sur le champ libre gaussien notamment) ou d'en présenter certaines de manière succincte (l'évolution de Schramm-Loewner et la convergence presque-critique).

*Notations.* Dans toute la suite, on notera  $G = (V, E)$  un graphe non orienté, planaire, où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  est l'ensemble des arêtes.

#### 3.1 Modèle de dimères

**Définition 3.1.** *Un graphe  $G = (V, E)$  est dit **bipartite** s'il existe  $V_b$  et  $V_n$  disjoints tels que  $V = V_b \cup V_n$  et toute arête de  $G$  relie un sommet de  $V_b$  et un sommet de  $V_n$ .*

Bien que l'on puisse définir le modèle de dimères sur des graphes plus généraux, on supposera dans la suite de ce rapport que le graphe  $G$  est bipartite. Les éléments de  $V_b$  seront appelés les sommets blancs, et les éléments de  $V_n$  les sommets noirs.

**Définition 3.2.** *Une **configuration de dimères** sur  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble  $D$  de  $E$  tel que chaque sommet de  $G$  est contenu dans une et une seule arête de  $D$ . Une arête  $e \in E$  sera appelée **dimère**. On notera  $\Omega_G$  l'ensemble des configurations de dimères sur  $G$ .*

On suppose dans la suite de ce rapport que  $\Omega_G$  est non vide. Cela implique notamment que  $|V_b| = |V_n|$ .

On veut désormais définir une loi de probabilité sur  $\Omega_G$ . Pour cela on attribue un poids  $t_e > 0$  à chaque arête  $e \in E$  (on travaille donc désormais avec un graphe pondéré). On définit le poids d'une configuration de dimère comme étant le produit des poids des arêtes qu'elle contient, et on considère la loi de probabilité  $\pi_{G,t}$  définie par :

$$\pi_{G,t}(D) = \frac{\prod_{e \in D} t_e}{Z} \quad \text{où} \quad Z = Z_{G,t} = \sum_{D \in \Omega_G} \prod_{e \in D} t_e \quad (1)$$

On appelle  $Z$  la **fonction de partition** du modèle.

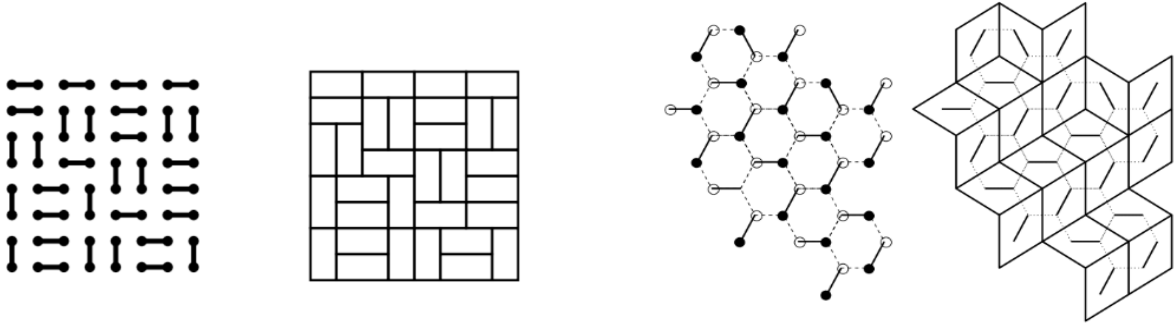


FIGURE 1 – Configurations de dimères sur des sous-graphes des réseaux carrés et hexagonal et pavages associés

Sur un réseau (ou un sous-graphe connexe d'un réseau), on peut associer un pavage du plan (respectivement d'un domaine du plan) à chaque configuration de dimères (cf figure 1). Le modèle de dimères est donc équivalent à un modèle de pavages aléatoires du plan où chaque pavage a la même probabilité que la configuration de dimères associée. Par exemple, dans le cas du réseau carré, le modèle de dimères est équivalent à un modèle de pavage aléatoire du plan par des dominos. Dans le cas du réseau hexagonal, c'est un pavage avec des losanges.

Dans toute la suite, on supposera  $G$  connexe. L'étude du modèle de dimères sur les graphes non connexes se ramène à l'étude des modèles de dimères pour chacune des composantes connexes de ce graphe.

### 3.2 Fonction de hauteur

Dans cette partie, on cherche à associer à une configuration de dimères  $D$  une fonction  $h_D$  définie sur les faces du graphe et à valeurs réelles. Cette fonction, vue comme une hauteur permet de définir (en interpolant) une surface au-dessus du graphe qui caractérise la configuration de dimères. Pour cela, il est nécessaire de fixer préalablement la hauteur  $h_0$  d'une face de référence  $f_0$  ( $h_0 = 0$  par exemple), et de choisir une fonction de référence  $c : e \in E \mapsto c(e) \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $v \in G : \sum_{e \sim v} c(e) = 1$ .

Pour pouvoir définir cette fonction de hauteur, nous allons avoir besoin du résultat suivant :

**Lemme 3.3.** Soit  $C_{f' \rightarrow f}$  un chemin d'arêtes dans  $G^*$  (le dual de  $G$ ) allant de  $f'$  à  $f$ , et  $\sigma_e$  définie par  $\sigma_e = 1$  si le chemin passe par  $e$  en laissant le sommet noir à droite et le blanc à gauche,  $\sigma_e = -1$  sinon. Alors la valeur

$$S_{C_{f' \rightarrow f}} = \sum_{e \in C_{f' \rightarrow f}} \sigma_e (\mathbb{1}_{e \in D} - c(e)) \quad (2)$$

ne dépend pas du chemin choisi (mais seulement de  $f$  et  $f'$ ).

*Démonstration.* On commence par faire la preuve pour deux faces  $f_1$  et  $f_2$  ayant un sommet  $v$  en commun. On considère deux chemins  $C_{f_1 \rightarrow f_2}^1$  passant juste à gauche de  $v$  et  $C_{f_1 \rightarrow f_2}^2$  passant juste à droite de  $v$ . On numérote  $e_1, \dots, e_n$  les arêtes issues de  $v$ , disons en sens trigonométrique en partant de  $f_1$  (cf figure 2). Si  $f_2$  est comprise

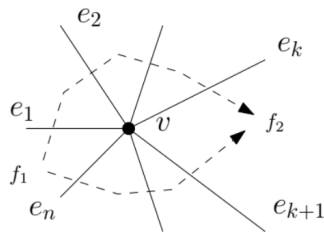


FIGURE 2

entre les arêtes  $e_k$  et  $e_{k+1}$ , on a alors :

$$S_{C_{f_1 \rightarrow f_2}^1} = \sum_{i=1}^k c(e_i) - \mathbb{1}_{e_i \in D} \quad \text{et} \quad S_{C_{f_1 \rightarrow f_2}^2} = \sum_{i=k+1}^n \mathbb{1}_{e_i \in D} - c(e_i)$$

La différence des deux vaut donc :

$$S_{C_{f_1 \rightarrow f_2}^1} - S_{C_{f_1 \rightarrow f_2}^2} = \sum_{i=1}^n c(e_i) - \mathbb{1}_{e_i \in D} = 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{e_i \in D}$$

Comme  $D$  est une configuration de dimères, elle a exactement une arête contenant  $v$ . On a donc

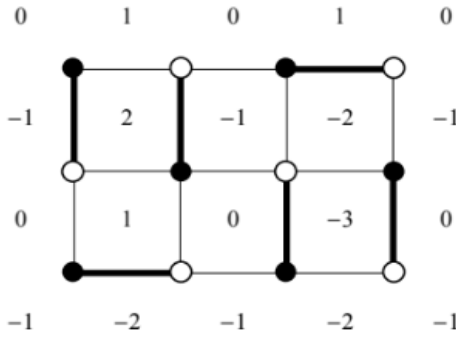
$$S_{C_{f_1 \rightarrow f_2}^1} - S_{C_{f_1 \rightarrow f_2}^2} = 0.$$

Dans le cas général, considérons deux chemins  $C_1$  et  $C_2$  allant d'une face  $f'$  à une face  $f$  (ces faces étant quelconques). Comme on a supposé le graphe planaire, on peut passer du chemin  $C_1$  au chemin  $C_2$  en effectuant plusieurs fois la transformation faite dans la première partie de la preuve, ce qui ne change pas la valeur de  $S_{C_1}$ .  $\square$

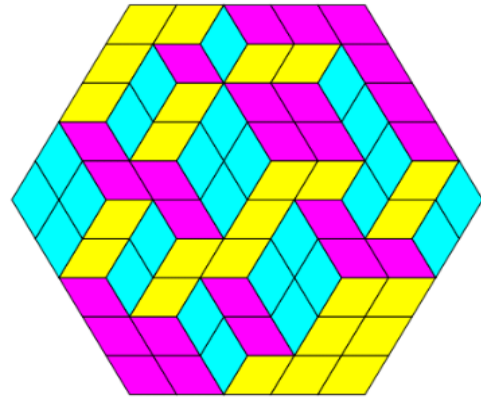
Ce lemme nous permet de donner un sens à la définition suivante :

**Définition 3.4.** On définit la **fonction de hauteur**  $h_D$  associée à la configuration de dimères  $D$  comme étant la seule fonction vérifiant :

- $h_D(f_0) = h_0$
- $h_D(f) - h_D(f') = \sum_{e \in C_{f' \rightarrow f}} \sigma_e (\mathbb{1}_{e \in D} - \mathbb{1}_{e \in D_0})$  pour tout  $C_{f' \rightarrow f}$  chemin d'arêtes dans  $G^*$  allant de  $f'$  à  $f$ .



(a) Fonction de hauteur associée à une configuration de dimères sur le réseau carré. Ici, on a pris  $c = \frac{1}{4}$ , et on a multiplié la fonction de hauteur par 4 pour obtenir des valeurs entières.



(b) Un pavage par des losanges donne une impression de relief correspondant à la fonction de hauteur associée.

FIGURE 3

*Remarque 3.5.*

- i Une fois la fonction  $c : e \mapsto c(e) \in \mathbb{R}$  fixée, on peut retrouver la configuration de dimères à partir de la fonction de hauteur. Autrement dit, l'application :  $D \mapsto h_D$  est injective.
- ii Dans le cas du réseau hexagonal, et en choisissant  $c$  constante égale à  $\frac{1}{3}$ , la fonction de hauteur d'une configuration de dimère correspond visuellement au pavage associé à cette configuration. (cf figure 3b)
- iii Dans le cas d'un graphe  $G$  qui est vu comme étant le sous-graphe d'un réseau, on peut étendre la définition de la fonction de hauteur aux faces du réseau qui contiennent au moins un sommet de  $G$  en utilisant l'équation 2. En fait, si l'on choisit la face de référence  $f_0$  comme étant l'une des faces du bord, et pour  $c$  fixée, la valeur de la fonction de hauteur sur les faces du bord est indépendante de la configuration de dimère à laquelle elle est associée. Elle est déterminée uniquement par la forme du bord (cf figure 3a).

### 3.3 Calcul de la fonction de partition : méthode de Kasteleyn

Une première méthode pour étudier le modèle de dimères est d'effectuer des calculs explicites. Dans le cas d'un graphe fini bipartite, Kasteleyn a mis au point une méthode permettant de calculer explicitement la fonction de partition  $Z$ , via le déterminant d'une matrice bien choisie.

**Définition 3.6.** On appelle **pondération de Kasteleyn** toute famille  $\{\theta_e\}_{e \in E}$  de complexes de module 1 vérifiant : pour toute face  $f$  de  $G$ , si l'on note  $e_1, \dots, e_{2n}$  les arêtes de cette face numérotées dans le sens horaire (ou anti-horaire, cela n'a pas d'importance),

$$\frac{\theta_{e_1} \theta_{e_3} \dots \theta_{e_{2n-1}}}{\theta_{e_2} \theta_{e_4} \dots \theta_{e_{2n}}} = (-1)^{n+1} \quad (3)$$

On admet ici la proposition suivante, dont la preuve se trouve dans [Ton].

**Proposition 3.7.** *Pour tout graphe planaire bipartite, il existe une pondération de Kasteleyn. En fait, on peut même choisir la pondération de sorte à ce que tous les  $\theta_e$  soient à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ .*

*Remarque 3.8.* Lorsque  $n$  est impair, ce qui est le cas pour le réseau hexagonal, on peut choisir la pondération constante égale à 1.

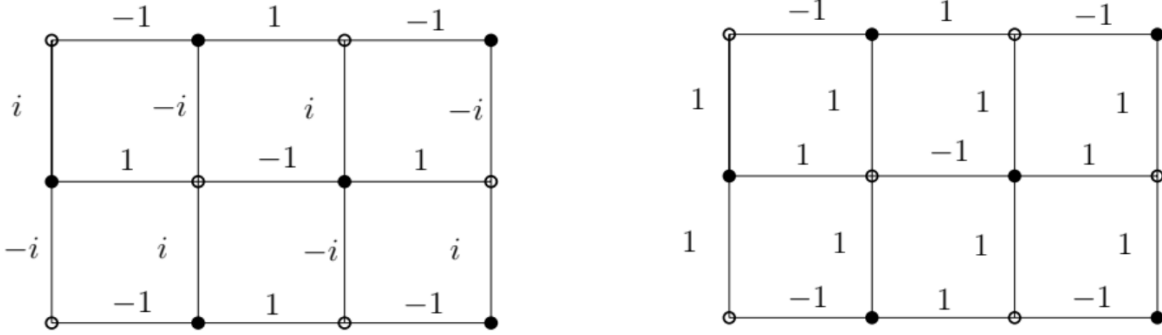


FIGURE 4 – Deux pondérations de Kasteleyn différentes sur le réseau carré

**Définition 3.9.** *Ayant fixé une pondération de Kasteleyn, on définit la **matrice de Kasteleyn**  $K$  comme étant la matrice de taille  $|V_n| \times |V_b|$  dont les lignes et les colonnes sont indexées respectivement par  $V_n$  et  $V_b$  et telle que*

$$K_{n,b} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \text{ et } n \text{ ne sont pas voisins} \\ t_e \theta_e & \text{si } b \text{ et } n \text{ sont reliés par l'arête } e \end{cases} \quad (4)$$

**Théorème 3.10.** *Si  $G$  est un graphe fini, pondéré, bipartite et planaire, alors :*

$$Z = |\det(K)| \quad (5)$$

*Remarque 3.11.*

- i Il existe des généralisations de ce théorème, pour les graphes non-bipartites par exemple, ou pour les graphes sur des tores. On pourra se référer à [Ton] pour plus d'informations.
- ii Cette méthode nous permet par exemple de calculer explicitement le nombre de configurations de dimères sur un quadrillage de taille  $m \times n$ . Ce qui nous donne également le nombre de pavages d'un rectangle par des dominos. Pour les calculs exacts, se référer à [Ken09].

### 3.4 Bijection de Temperley

Une seconde méthode pour étudier ce modèle est de se ramener à l'étude d'un autre modèle via une bijection. C'est ainsi que Temperley établit une correspondance entre les dimères d'un sous-graphe rectangulaire du réseau carré et les arbres couvrants d'un graphe associé. Cette bijection a ensuite été généralisée à une plus grande catégorie de graphes par Kenyon, Propp et Wilson dans [KPW00].

*Notations.* On considère un graphe connexe, planaire, orienté et pondéré  $\tilde{G}$  dont les pondérations sont strictement positives.

**Définition 3.12.** *On dit que  $T$  est un **arbre couvrant orienté** sur  $\tilde{G}$  si  $T$  est une union connexe d'arêtes de  $\tilde{G}$ , sans cycle, et telle que tout sommet de  $\tilde{G}$  sauf un ait exactement une arête sortante dans  $T$ . Ce dernier sommet n'a nécessairement aucune arête sortante (sinon il y a un cycle). On l'appelle la **racine** de l'arbre. On définit le poids de l'arbre comme étant le produit des poids de ses arêtes.*

De même que pour les dimères, on peut définir une loi de probabilité sur l'ensemble des arbres couvrants de  $G$  telle que la probabilité de chaque arbre soit proportionnelle à son poids. On a également une fonction de partition correspondante.

On va construire un graphe  $\mathcal{H}(\tilde{G})$  tel qu'à chaque arbre couvrant de  $\tilde{G}$  on puisse associer une configuration de dimères sur  $\mathcal{H}(\tilde{G})$  de même poids. Pour plus de clarté, nous appellerons **nœuds** les sommets de  $\mathcal{H}(\tilde{G})$ , et **s** ses arêtes. Soit  $S$  l'ensemble des sommets de  $\tilde{G}$ ,  $A$  l'ensemble de ses arêtes, et  $F$  l'ensemble de ses faces.

**Définition 3.13.** *On définit  $\mathcal{H}(\tilde{G})$  comme étant le graphe non-orienté, pondéré tel que :*

- les nœuds de  $\mathcal{H}(\tilde{G})$  correspondent soit à un sommet  $s$  de  $\tilde{G}$ , soit à une arête  $a$  de  $\tilde{G}$ , soit à une face  $f$  de  $\tilde{G}$ . On note respectivement  $\bar{s}$ ,  $\bar{a}$  et  $\bar{f}$  ces nœuds, et on les appelle nœuds-sommets, nœuds-arêtes et nœuds-faces ;

- les liens de  $\mathcal{H}(\tilde{G})$  relient chaque arête de  $\tilde{G}$  aux sommets de  $\tilde{G}$  qu'elle contient, et aux faces dont elle est adjacente (cf la figure 5c construite en superposant la figure 5a et la figure 5b);
- le poids d'un lien reliant un nœud-sommet  $\bar{s}$  et un nœud-arête  $\bar{a}$  est le poids de cette arête  $a$  dans le sens sortant de  $s$ , le poids d'un lien reliant un nœud-arête et un nœud-face est 1.

On obtient alors un graphe planaire et bipartite, en prenant  $V_n$  l'ensemble des nœuds-sommets et nœuds-faces de  $\mathcal{H}(\tilde{G})$ , et  $V_b$  l'ensemble des nœuds-arêtes.

*Notations.* Soit  $s^*$  un sommet de  $\tilde{G}$  et  $f^*$  une face de  $\tilde{G}$ . On note  $\mathcal{H}(\tilde{G}; s^*, f^*)$  le sous-graphe de  $\mathcal{H}(\tilde{G})$  obtenu en supprimant les nœuds  $\bar{s}^*$  et  $\bar{f}^*$  (cf figure 5d).

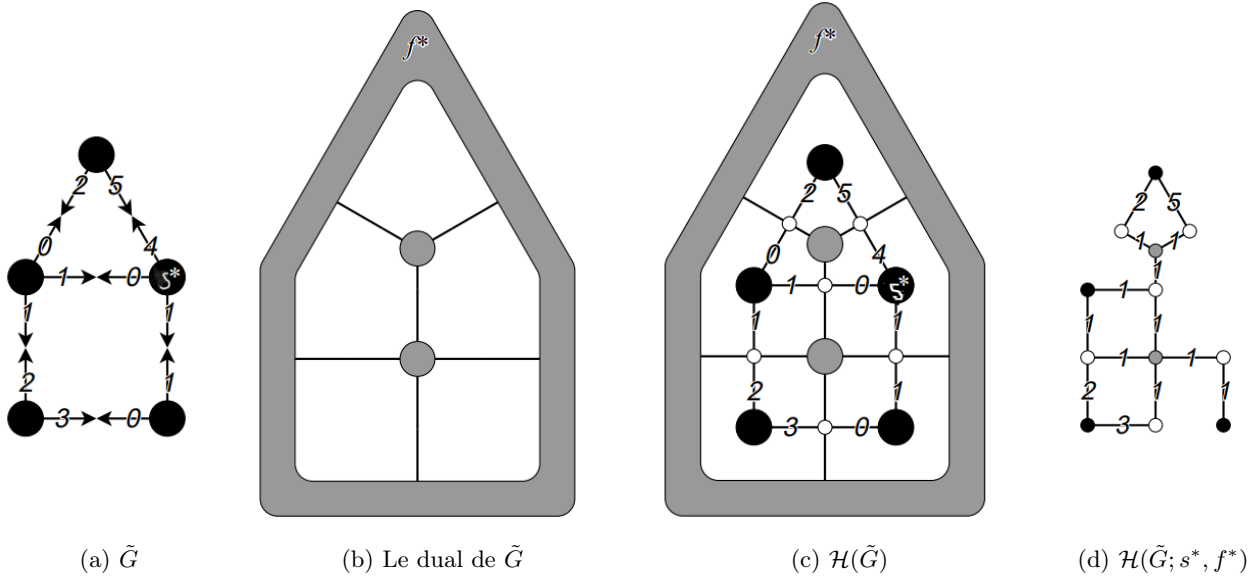


FIGURE 5 – Un exemple de construction de  $\mathcal{H}(\tilde{G})$  et  $\mathcal{H}(\tilde{G}; s^*, f^*)$  à partir d'un graphe orienté pondéré  $\tilde{G}$

**Théorème 3.14.** *Si  $s^*$  est incident à  $f^*$ , il existe une bijection qui préserve les poids entre les arbres couvrants de  $\tilde{G}$  enracinés en  $s^*$ , et les configurations de dimères sur  $\mathcal{H}(\tilde{G}; s^*, f^*)$ .*

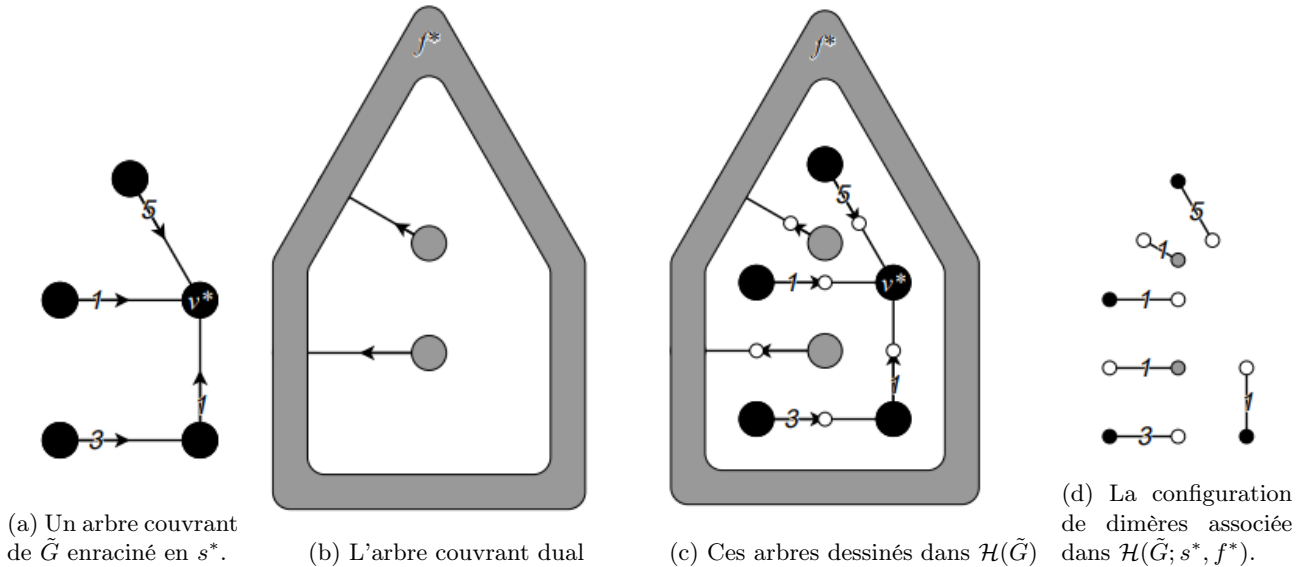


FIGURE 6 – Illustration de la bijection de Temperley par un exemple

Le théorème ci-dessus nous permet de passer de l'étude des arbres couvrants sur un graphe  $\tilde{G}$  à l'étude des configurations de dimères sur un graphe associé  $\mathcal{H}(\tilde{G}; s^*, f^*)$ . En effet, comme la bijection préserve les poids, la probabilité d'un arbre couvrant est la même que celle de la configuration de dimères associée. Or, nous cherchons à faire l'inverse. Partant d'un graphe  $G$ , on aimerait trouver un graphe  $\tilde{G}$  et des sommets incidents  $s^*$  et  $f^*$  tels que  $\mathcal{H}(\tilde{G}; s^*, f^*) = G$ . On pourrait alors transformer l'étude des configurations de dimères sur  $G$  en une étude des arbres couvrants de  $\tilde{G}$  enracinés en  $s$ . Or, il n'est pas toujours possible de trouver un tel  $\tilde{G}$ . Cependant, dans les exemples étudiés ici, c'est-à-dire le cas du réseau carré et le cas du réseau hexagonal, un tel  $\tilde{G}$  existe.

- Dans le cas du réseau carré, il faut prendre le réseau carré avec un pas deux fois plus petit.
- Dans le cas du réseau hexagonal, il faut prendre  $\tilde{G}$  égal au réseau triangulaire orienté (cf figure 7). Ainsi, l'étude du modèle de dimères sur le réseau hexagonal revient à l'étude des arbres couvrants sur le réseau triangulaire orienté.

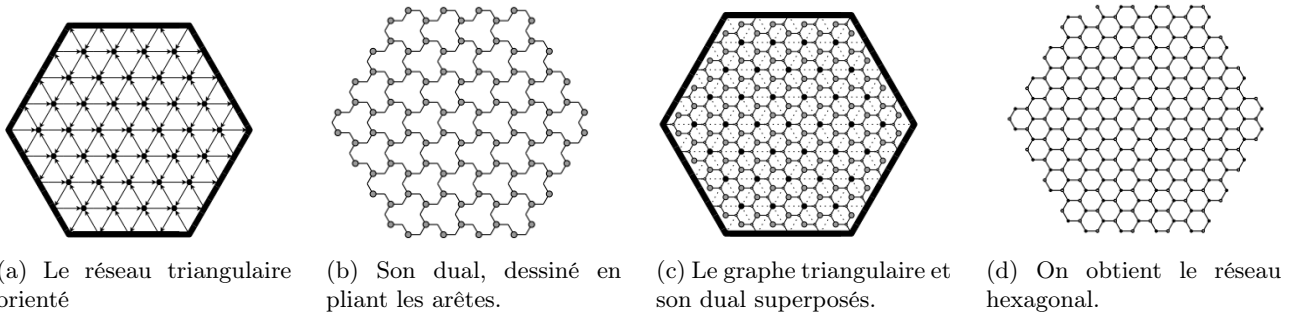


FIGURE 7 – En prenant le réseau triangulaire orienté comme graphe de départ, on obtient, grâce à la transformation de Temperley, le réseau hexagonal.

*Remarque 3.15.* Cette bijection nous donne donc une nouvelle méthode pour compter le nombre de configurations de dimères sur un quadrillage de taille  $m \times n$  : on est ramené à compter le nombre d'arbres couvrants d'un autre graphe. Les calculs sont présentés dans [KPW00].

Dans [KPW00], le théorème 3 donne un lien entre la fonction de hauteur associée à une configuration de dimères sur  $G = \mathcal{H}(\tilde{G}; s^*, f^*)$ , et "l'enroulement" des branches de l'arbre associé sur  $\tilde{G}$ . Ce résultat est énoncé dans un cadre très général, mais avec une définition de la fonction de hauteur qui diffère légèrement de celle utilisée dans ce rapport. Pour pouvoir s'y ramener plus facilement, nous nous contenterons ici d'énoncer le théorème pour  $G$  un sous-graphe du réseau carré ou du réseau hexagonal.

Comme vu dans la remarque 3.5, pour définir une fonction de hauteur, il faut choisir une fonction  $c$ . Nous prenons ici, pour avoir une fonction de hauteur équivalente à celle de [KPW00],  $c$  constante égale à  $\frac{1}{3}$  pour le réseau hexagonal, et  $\frac{1}{4}$  pour le réseau carré.

**Définition 3.16.** Soit  $\gamma$  un chemin orienté dans  $\tilde{G}$ . On définit l'**enroulement** de  $\gamma$ , et on note  $\omega(\gamma)$  la somme des angles de rotation (compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ ) à chaque étape du chemin.

Soit  $\mathcal{T}$  un arbre couvrant de  $\tilde{G}$  enraciné en  $s^*$  et  $D$  la configuration de dimères associée sur  $G$ . Soit  $\gamma = (s_0, s_1, \dots, s_l)$  un chemin orienté dans  $\mathcal{T}$ . On voit désormais  $\gamma$  comme un chemin (deux fois plus long) de  $\mathcal{H}(\tilde{G})$ , et l'on écrit  $\gamma = (\overline{s_0}, \overline{a_0}, \overline{s_1}, \overline{a_1}, \dots, \overline{a_{l-1}}, \overline{s_l})$ . Soit  $f$  une face de  $G$  contenant  $\overline{s_0}$ .

### Cas du réseau carré

On suppose dans ce paragraphe que  $G$  est un sous-graphe du réseau carré. Soit  $F$  la face de  $G$  (ou du bord de  $G$ ) située à gauche de l'arête reliant  $\overline{a_{l-1}}$  et  $\overline{s_l}$  lorsqu'on parcourt l'arête dans ce sens. On appelle  $\tilde{\gamma}$  la concaténation du segment reliant le centre de la face  $f$  et  $s_0$ , de  $\gamma$ , et du segment reliant  $s_l$  et le centre de la face  $F$ .

**Théorème 3.17.** On a la relation suivante entre l'enroulement de  $\tilde{\gamma}$  et les hauteurs des faces  $f$  et  $F$  :

$$2\pi(h_D(F) - h_D(f)) = \omega(\tilde{\gamma}) - \pi \quad (6)$$

### Cas du réseau hexagonal

On suppose dans ce paragraphe que  $G$  est un sous-graphe du réseau hexagonal. Soit  $F$  la face de  $G$  (ou du bord de  $G$ ) qui est traversée par la dernière arête de  $\gamma$ . On appelle  $\tilde{\gamma}$  la concaténation du segment reliant le centre de la face  $f$  et  $s_0$  et de  $\gamma$ .

**Théorème 3.18.** On a la relation suivante entre l'enroulement de  $\tilde{\gamma}$  et les hauteurs des faces  $f$  et  $F$  :

$$2\pi(h_D(F) - h_D(f)) = \omega(\tilde{\gamma}) \quad (7)$$

Or, chaque face  $f$  de  $G$  admet (exactement) un nœud qui est un nœud-sommet. On le note  $s_f$ . On considère alors  $\gamma_f$  l'unique chemin de  $\mathcal{T}$  allant de  $s_f$  à  $s^*$ . En utilisant les deux théorèmes précédents, on peut donc exprimer la hauteur de la face  $f$  en fonction de l'enroulement de  $\gamma_f$  et de la hauteur d'une face du bord de  $G$ . Or on a vu dans la remarque 3.5 que si l'on choisit la face de référence  $f_0$  comme étant l'une des faces du bord, la hauteur des autres faces du bord est déterminée par la forme du bord en lui-même. Ainsi, connaître  $\mathcal{T}$  nous permet de calculer la fonction de hauteur sur tout le graphe.

### 3.5 Évolution de Schramm-Loewner (SLE)

Le modèle de SLE (pour Schramm-Loewner evolution) est une loi de probabilité sur des chemins dans les domaines du plan complexe, qui vérifie à la fois un théorème d'invariance conforme, et une "propriété de Markov spatiale". La définition de cette loi de probabilité et son étude nécessitent de nombreux outils mathématiques et résultats techniques. Nous nous contenterons ici de d'expliquer les idées principales de manière très peu formelle. Pour plus de détail, voir [BN23] et [Wer03]. Dans toute cette partie, on note  $\mathbb{H}$  le demi-plan supérieur de  $\mathbb{C}$ .

Dans les années 1920, Charles Loewner étudie les courbes  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  tracées sur  $\mathbb{H}$  en leur associant une fonction continue à valeurs réelles  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  : la **transformée de Loewner** de  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ . Cette transformée de Loewner est obtenue en étudiant certains isomorphismes conformes entre les domaines  $K_t = \mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$  et  $\mathbb{H}$ . Informellement, la transformée de Loewner indique "dans quelle direction va la courbe à l'instant  $t$ ". Réciproquement, à toute fonction  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles, on peut associer une famille croissante  $(K_t)_{t \geq 0}$  de domaines du plan. Dans certains cas,  $(K_t)_{t \geq 0}$  est "engendrée" par un chemin  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  :

**Définition 3.19.** Soit  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  un chemin continu dans  $\mathbb{H}$ , et  $(K_t)_{t \geq 0}$  une famille strictement croissante de domaines de  $\mathbb{H}$ . On dit que  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  engendre  $(K_t)_{t \geq 0}$  si pour tout  $t \geq 0$ ,  $K_t$  est la composante non bornée de  $\mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$ .

Schramm utilisa ensuite la théorie de Loewner en y ajoutant de l'aléa. Plutôt que de prendre un processus  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  déterministe, il choisit de travailler en prenant pour tout  $t \geq 0$ ,  $\xi_t = \sqrt{\kappa} \cdot B_t$ , où  $\kappa > 0$  et  $(B_t)_{t \geq 0}$  est le mouvement brownien standard. Rohde et Schramm montrent que presque sûrement, il existe un chemin  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  dans  $\mathbb{H}$  qui engendre  $(K_t)_{t \geq 0}$ , la famille de domaines de  $\mathbb{H}$  associée à  $(\xi_t)_{t \geq 0}$ . On obtient ainsi un chemin aléatoire sur  $\mathbb{H}$ , partant de 0. On appelle un tel chemin aléatoire un SLE( $\kappa$ ) sur  $\mathbb{H}$ . On peut de plus montrer que presque sûrement,  $|\gamma_t|$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  est un chemin aléatoire de 0 à  $+\infty$ .

Si  $\mathbf{D} = (D, a, b)$  est un domaine bi-pointé du plan complexe, avec  $a$  et  $b$  appartenant à la "frontière de Martin" de  $D$ , on peut définir le SLE( $\kappa$ ) sur  $\mathbf{D}$  en utilisant la définition du SLE( $\kappa$ ) sur  $\mathbb{H}$  et les isomorphismes conformes de domaines bi-pointés. On obtient alors un modèle de chemins aléatoires sur  $D$  allant de  $a$  à  $b$ . Il existe également une version "radiale" du SLE, c'est-à-dire que le point  $a$  est à l'intérieur du domaine  $D$ .

Une généralisation du modèle de SLE est le SLE massif, pour une masse  $m \geq 0$  fixée (le cas du SLE simple correspondant à  $m = 0$ ) On perd alors des propriétés importantes du modèle de SLE.

Le modèle de SLE peut être vu, pour certaines valeurs de  $\kappa$  comme la "limite d'échelle" de certains modèles connus bien avant le SLE. Dans ce rapport de stage, seule la valeur  $\kappa = 2$  nous intéresse. En 2001, Loewler, Schramm et Werner prouvent dans [LSW04] que la "limite d'échelle de la marche aléatoire à boucle effacée sur le réseau carré" est le SLE(2) radial. Ainsi, dans la figure 8, la marche aléatoire à boucle effacée dessinée en rouge est une approximation de SLE(2). Chelkak et Wan prouvèrent en 2019 que la "limite d'échelle de la marche aléatoire massive à boucle effacée sur le réseau carré" est le SLE(2) massif radial (cf [CW19]). Berestycki et Haunschmid-Sibitz adaptèrent ce résultat au réseau triangulaire orienté dans [BHS22].

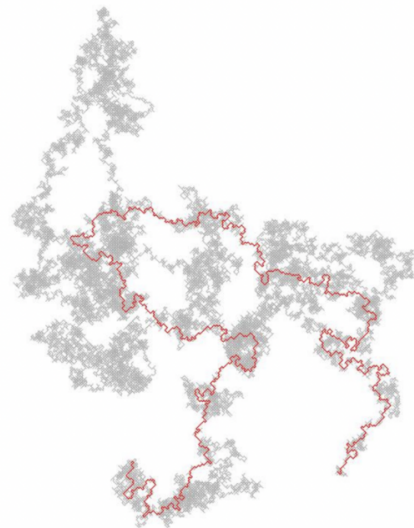


FIGURE 8 – Une marche aléatoire avec et sans ses boucles.

### 3.6 Convergence presque-critique

Plutôt que d'utiliser la méthode de calcul explicite de Kasteleyn, Berestycki et Haunschmid-Sibitz se servent de la bijection de Temperley généralisée pour étudier la convergence de la fonction de hauteur. Ils prouvent dans [BHS22] des résultats concernant la convergence "presque-critique" de la fonction de hauteur sur des sous-graphes du réseau carré et du réseau hexagonal avec des "pondérations bi-périodiques". Nous présentons ici les grandes étapes du résonnement.

Soit  $\delta > 0$ . Soit  $D$  un domaine du plan. On considère  $D^\delta$  un sous-graphe du réseau carré (resp hexagonal) de pas  $\delta$  qui approxime le domaine  $D$ . On le pondère comme sur la figure 9, où  $s_i = 1 + \delta c_i$  pour  $i \in \{1, \dots, 4\}$  (resp  $a_i = 1 + \delta d_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ). On suppose de plus que  $\sum_i s_i = 4$  (resp  $\sum_i a_i = 3$ ). On pose  $\Delta = \frac{c_1 + c_2 i + c_3 i^2 + c_4 i^3}{4}$  dans le cas du réseau carré, et  $\Delta = \frac{d_1 + d_2 \tau + d_3 \tau^2}{3}$  où  $\tau = e^{2i\pi/3}$  dans le cas du réseau triangulaire. Dans l'article [BHS22], Berestycki et Haunschmid-Sibitz étudient la convergence de la fonction de hauteur de  $D^\delta$  quand  $\delta$  tend vers 0. Le poids des arêtes tend vers 1 en même temps que le pas du réseau tend vers 0 : c'est ce que nous appelons ici la convergence presque-critique.

Multiplier le poids de toutes les arêtes adjacentes à un seul sommet donné par une même constante  $k$  ne change pas le modèle. En effet, comme toutes les configurations de dimères contiennent exactement une telle

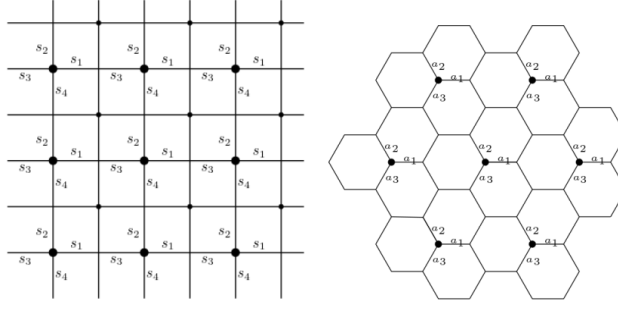


FIGURE 9

arête, le poids de toutes les configurations est multiplié par une même constante, ce qui ne modifie pas la loi de probabilité. Ainsi, on peut remplacer les  $s_i$  par les  $q_i := \frac{s_i}{4}$  et les  $a_i$  par les  $p_i := \frac{a_i}{3}$  de sorte que  $\sum_i q_i = 1$  et  $\sum_i p_i = 1$  sans changer la loi de probabilité.

Comme vu dans la partie 3.4, l'étude des configurations de dimères sur  $D^\delta$  revient à l'étude des arbres de Temperley sur une approximation de  $D$  par un sous-graphe du réseau carré de pas  $\frac{\delta}{2}$  (resp. un sous-graphe du réseau triangulaire orienté de pas  $\delta$ ).

L'algorithme de Wilson est un algorithme qui permet de construire un arbre de Temperley en utilisant des "marches aléatoires driftées à boucles effacées".

Une **marche aléatoire driftée** est une marche aléatoire pour laquelle, à chaque pas, les directions de déplacement possibles ne sont pas équiprobables. Ici, on prendra pour le réseau carré la marche aléatoire driftée qui a une probabilité  $q_1$  d'aller à droite,  $q_2$  d'aller en haut,  $q_3$  d'aller à gauche et  $q_4$  d'aller en bas. Pour le réseau triangulaire orienté, on prend la marche driftée qui a une probabilité  $p_1$  d'aller à droite,  $p_2$  d'aller en haut à gauche et  $p_3$  d'aller en bas à gauche. Une **marche aléatoire driftée à boucles effacées** d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  du graphe est une marche aléatoire driftée partant de  $a$ , qu'on arrête lorsqu'elle atteint  $b$  pour la première fois, et à laquelle on enlève toutes les boucles qu'elle a effectuées dans l'ordre chronologique.

Voici une description de **l'algorithme de Wilson** :

- On numérote les sommets du graphe.
- On initialise l'arbre comme étant le premier sommet du graphe, avec aucune arête.
- On prend le premier sommet du graphe qui n'appartient pas à l'arbre. On considère la marche aléatoire driftée à boucles effacées partant de ce sommet, et on l'arrête dès qu'elle atteint un sommet qui est déjà dans l'arbre. On rajoute alors tous les sommets et arêtes parcourus par cette marche à l'arbre.
- On réitère l'étape précédente tant que tous les sommets du graphe ne font pas partie de l'arbre. Ceci nous assure d'obtenir un arbre couvrant à la fin de l'algorithme.

On admet que l'arbre aléatoire obtenu est un arbre de Temperley associé au modèle de dimères sur le réseau carré (resp. hexagonal). L'étude de l'arbre de Temperley peut donc passer par l'étude de la convergence presque-critique des marches aléatoires driftées à boucles effacées.

Pour cela, Berestycki et Haunschmid-Sibitz comparent la marche aléatoire driftée avec une "marche aléatoire massive", pour une masse  $m$  qui dépend du drift. Une **marche aléatoire massive** de masse  $m$  est une marche aléatoire qui, à chaque pas, a une chance  $m^2$  de mourir. Ces résultats (appelés transformée de Girsanov discrète) sont présentés dans la section 4.2 de ce rapport.

Or, comme vu dans la section 3.5, la marche aléatoire massive converge en loi, dans cette limite presque-critique, vers une transformation de Schramm-Loewner massive pour  $\kappa = 2$ . C'est ainsi que Berestycki et Haunschmid-Sibitz prouvent le théorème suivant :

**Théorème 3.20.** *Notons  $\mathcal{T}^\delta$  l'arbre de Temperley associé au modèle de dimères sur  $D^\delta$ . Quand  $\delta$  tend vers 0,  $\mathcal{T}^\delta$  converge "au sens de Schramm" vers un arbre limite  $\mathcal{T}$ . Chaque branche de cet arbre partant d'un point  $z \in D$  suit la loi suivante : on choisit un point  $y$  du bord de  $D$  selon la loi de sortie de  $D$  d'un "mouvement brownien de drift  $\Delta$ ", et étant donné  $y$ , la branche de  $z$  à  $y$  suit la loi d'une évolution de Schramm-Loewner massive de masse  $m = |\Delta|$  pour  $\kappa = 2$ .*

Or, dans [BLR20], Berestycki, Laslier et Ray montrent que la convergence de l'arbre de Temperley implique celle de la fonction de hauteur. Berestycki et Haunschmid-Sibitz obtiennent du théorème précédent le corollaire suivant :

**Corollaire 3.21.** *Soit  $h^\delta$  la fonction de hauteur sur  $D^\delta$ . La fonction de hauteur centrée  $h^\delta - \mathbb{E}(h^\delta)$  converge en loi quand  $\delta$  tend vers 0.*

## 4 Problématique étudiée

Cette partie vise à présenter le problème de recherche sur lequel j'ai travaillé avec Valentine Tosel, sous la supervision de Nathanaël Berestycki, ainsi que les différents éléments de preuve auxquels nous sommes parvenus. Ce problème de recherche n'est pas directement en lien avec le modèle de dimères, mais avec des résultats de [BHS22] utilisés pour étudier le modèle de dimères.

### 4.1 Énoncé et heuristiques

*Notations.* Soit  $\Gamma$  l'ensemble des chemins partant de l'origine sur le réseau triangulaire orienté. On définit une distance sur  $\Gamma$  de la manière suivante : si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont dans  $\Gamma$ , on pose  $d(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{\inf\{k \in \mathbb{N} \mid \gamma_1(k) \neq \gamma_2(k)\}}$ .

**Définition 4.1.** On dit que  $(X_n^m)_{n \geq 1}$  est une **marche aléatoire massive** de masse  $m$  sur un graphe  $G = (V, E)$ , dont le degré de chaque sommet est fini, si c'est une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q_m$  sur le graphe  $G \cup e_m$ , où  $e_m$  est appelé l'état mort,  $Q_m(z, e_m) = m^2$  pour tout  $z \in V$ , et si  $(y, z) \in E$ ,  $Q_m(y, z) = \frac{1-m^2}{\deg(y)}$ . C'est-à-dire que  $(X_n^m)_{n \geq 1}$  est une marche aléatoire sur  $G$  qui a une probabilité  $m^2$  de mourir à chaque pas. On notera  $\mathbb{P}^m$  sa loi.

**Définition 4.2.** Si  $D$  est un domaine du plan complexe, on définit le **bord** de  $D$  comme étant les points  $z$  du réseau triangulaire tels que  $z \notin D$  et qu'il existe  $y \in D$  tel que  $(y, z)$  est une arête du réseau.

**Énoncé.** Soit  $0 < m < 1$ . Soit  $D$  un domaine du plan complexe contenant 0 (qui vérifie certaines hypothèses à déterminer). Pour  $R \geq 0$ , on pose  $(X_n^{RD})_{n \geq 1}$  la marche aléatoire massive sur le réseau triangulaire orienté, conditionnée à sortir de  $RD$  avant de mourir. Montrer que  $(X_n^{RD})_{n \geq 1}$  converge en loi, quand  $R \rightarrow \infty$  vers une variable aléatoire  $(\tilde{X}_n^D)_{n \geq 1}$  à déterminer.

*Notations.* On notera  $\tau^*$  le temps où la marche aléatoire massive meurt.

Si l'on compare  $\mathbb{P}^m(\gamma)$  à une marche aléatoire classique, le fait de conditionner à sortir du domaine avant de mourir va favoriser les chemins les plus courts. En effet, à chaque pas, la marche aléatoire massive a une chance strictement positive de mourir. Pour survivre jusqu'à sortir du domaine, il faut donc qu'elle fasse le moins de pas possibles. Ainsi, à la limite,  $(X_n^{RD})_{n \geq 1}$  suivrait à peu près une ligne droite, et ne pourrait pas s'écarter trop et trop souvent de cette ligne. Le chemin se dirigerait alors vers une direction particulière. On voudrait donc écrire la loi de  $(\tilde{X}_n^D)_{n \geq 1}$  comme étant le choix d'un angle aléatoire, puis, conditionnellement à cet angle, d'une certaine loi sur les chemins qui vont dans la direction de cet angle. Ces deux lois dépendent a priori du domaine  $D$  et de  $m$ . En notant  $\tilde{\mathbb{P}}^D$  la loi de  $(\tilde{X}_n^D)_{n \geq 1}$ , on voudrait donc trouver  $\tilde{\mathbb{P}}^D$  de la forme :

$$d\tilde{\mathbb{P}}^D = \int_{\mathbb{T}} d\tilde{\mathbb{P}}_{|\theta}^D d\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\theta) \quad (8)$$

où  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$ , la loi limite de l'angle de sortie, et  $\tilde{\mathbb{P}}_{|\theta}^D$ , la loi limite d'un chemin sachant que son angle limite est  $\theta$ , sont à déterminer.

Cela semble également nécessaire de mettre une hypothèse sur le domaine  $D$ , pour garantir que pour chaque angle, il y a un seul point de la frontière (au sens topologique du terme) du domaine dans la direction de l'angle.

**Hypothèse.** On suppose désormais que  $D$  est tel que pour toute valeur de  $\theta$ , il existe un unique point de la frontière de  $D$  dans la direction  $\theta$ .

### 4.2 Résultats préliminaires

Pour résoudre ce problème, le lemme 2.3 et le corollaire 2.4 de [BHS22] vont nous être utiles à plusieurs reprises. Nous présentons ici une version adaptée à notre problème dans le lemme 4.3 et le corollaire 4.4. Ils permettent de comparer la loi d'une marche aléatoire massive et celle d'une marche aléatoire driftée, sous réserve que la masse et le drift vérifient une certaine relation. Il faut pour cela introduire quelques notations.

*Notations.*

- Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  des réels strictement positifs tels que  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . On pose  $\Delta = p_1 + \tau p_2 + \tau^2 p_3$  où  $\tau = \exp(2i\frac{\pi}{3})$ . On dit que  $(X_n^{(\Delta)})_{n \geq 1}$  est une marche aléatoire driftée de drift  $\Delta$  si les  $X_{n+1}^{(\Delta)} - X_n^{(\Delta)}$  sont indépendants et identiquement distribués, et que  $\mathbb{P}(X_{n+1}^{(\Delta)} - X_n^{(\Delta)} = 1) = p_1$ ,  $\mathbb{P}(X_{n+1}^{(\Delta)} - X_n^{(\Delta)} = \tau) = p_2$  et  $\mathbb{P}(X_{n+1}^{(\Delta)} - X_n^{(\Delta)} = \tau^2) = p_3$ . On note  $\mathbb{P}^{(\Delta)}$  la loi associée.
- Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on pose  $\alpha_i = \ln(p_i)$ , et  $\alpha = \alpha_1 + \tau \alpha_2 + \tau^2 \alpha_3$ . On définit également  $\beta$  comme étant l'unique réel positif tel que  $\exp(-\beta^2) = 27 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ , qui existe d'après l'inégalité arithmético-géométrique.

**Lemme 4.3.** Soit  $\gamma$  un chemin sur le réseau triangulaire orienté, partant de l'origine. On a :

$$\frac{\mathbb{P}^{(\Delta)}(\gamma)}{\mathbb{P}^{(0)}(\gamma)} = \exp(M_\gamma + \frac{1}{2}V_\gamma) \quad (9)$$

avec

$$M_\gamma = \frac{2}{3}\langle \alpha, z_\gamma \rangle \quad \text{et} \quad V_\gamma = \frac{2}{3}n(\gamma)\beta^2 \quad (10)$$

où  $n(\gamma)$  est la longueur du chemin  $\gamma$  et  $z_\gamma$  est le dernier sommet de  $\gamma$ .

Cette relation va nous permettre de comparer  $\mathbb{P}^m(\gamma)$  et  $\mathbb{P}^{(\Delta)}(\gamma)$  pour certains drifts  $\Delta$  bien choisis.

Supposons que l'on a  $p_1, p_2$  et  $p_3$  qui vérifient la relation suivante :

$$\frac{1 - m^2}{3} = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3)^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

On a alors que  $\beta$  vérifie la relation :

$$1 - m^2 = \exp\left(-\frac{\beta^2}{3}\right) \quad (12)$$

**Corollaire 4.4.** On suppose que la relation 11 est vérifiée. Soit  $\gamma$  un chemin sur le réseau triangulaire orienté, partant de l'origine. Soit  $Z_{RD}$  le point du bord par lequel la marche aléatoire sort de  $RD$ . Alors pour tout  $z$  appartenant au bord de  $RD$ , on a :

$$\mathbb{P}^m(\gamma \mid Z_{RD} = z) = \mathbb{P}^{(\Delta)}(\gamma \mid Z_{RD} = z) \quad (13)$$

On peut également déduire du lemme 4.3 le corollaire suivant :

**Corollaire 4.5.** Sous les mêmes hypothèses que le corollaire précédent, on a :

$$\frac{\mathbb{P}^{(\Delta)}(\gamma)}{\mathbb{P}^m(\gamma)} = \exp(M_\gamma) \quad (14)$$

Étant donné  $0 < m < 1$  fixé, on aimerait savoir s'il existe  $p_1, p_2$  et  $p_3$  des entiers positifs tels que  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  et que la relation 11 soit vérifiée. En fait, on a un résultat beaucoup plus fort :

**Lemme 4.6.** Soit  $0 < m < 1$ . Pour tout  $\theta \in \mathbb{T}$ , il existe un et un seul triplet  $(p_1, p_2, p_3)$  tel que  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ,  $\frac{1-m^2}{3} = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3)^{\frac{1}{3}}$ , et si  $\Delta$  est le drift associé à ce triplet,  $\arg(\Delta) = \theta$ . On notera  $(p_1(\theta), p_2(\theta), p_3(\theta))$  ce triplet,  $\Delta(\theta)$  le drift associé, et  $\alpha(\theta)$  le  $\alpha$  associé.

*Démonstration.* Soit  $0 < m < 1$ . On veut montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{T}$  le système suivant a une et une seule solution telle que les  $p_i$  soient positifs :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1-m^2}{3} \\ \arg(p_1 + \tau p_2 + \tau^2 p_3) = \theta \end{cases} \quad (15)$$

Existence : Les deux premières équations nous donnent :

$$\begin{cases} p_3 = 1 - p_2 - p_1 \\ p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2 - p_1) = A \end{cases} \quad (16)$$

où  $A = \left(\frac{1-m^2}{3}\right)^3 \leq \frac{1}{27}$ . Ainsi, si  $p_1$  est tel que  $1 - \frac{4A}{p_1(1-p_1)^2} \geq 0$ , alors :

$$p_2 = \frac{1 - p_1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A}{p_1(1-p_1)^2}} \right) \quad (17)$$

En étudiant la fonction  $p_1 \mapsto 1 - \frac{4A}{p_1(1-p_1)^2} \geq 0$ , on peut voir que sur  $[0, 1]$ , elle est positive sur un intervalle  $I_A = [p_{min}, p_{max}]$  avec  $p_{min} < \frac{1}{3} < p_{max}$ , et négative ailleurs. Supposons  $p_1 \in I_A$  et  $p_2 \leq p_3$ . On a donc

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1 - p_1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4A}{p_1(1-p_1)^2}} \right) \\ p_3 &= \frac{1 - p_1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4A}{p_1(1-p_1)^2}} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Or,  $f : p_1 \mapsto \arg(p_1 + \tau p_2 + \tau^2 p_3)$  est continue par rapport à  $p_1$  (car  $p_2$  et  $p_3$  le sont), vaut 0 en  $p_{max}$  (car alors  $p_2 = p_3$ , et  $p_{max} > \frac{1}{3}$ ) et  $\pi$  en  $p_{min}$ , et est à valeurs dans  $[0, \pi]$  car  $p_2 \geq p_3$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle atteint toute valeur de  $\theta$  comprise dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . Cela nous donne l'existence pour  $\theta \in [0, \pi]$ . En supposant ensuite  $p_2 \leq p_3$  on obtient l'existence pour toutes les autres valeurs de  $\theta$ .

Unicité : On a déjà vu que connaître  $p_1$  et le demi-cercle (supérieur ou inférieur) où se trouve  $\theta$  (ie savoir si  $p_2 \geq p_3$ ) déterminait complètement  $p_2$  et  $p_3$ . Il reste donc à montrer que connaître  $\theta$  détermine  $p_1$ . Supposons  $\theta$  dans le demi-cercle supérieur, ie  $p_2 \geq p_3$ . On veut montrer que  $f$  atteint une seule fois chaque valeur de  $\theta$ . Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est strictement croissante. Or, en utilisant les expressions de  $p_2$  et  $p_3$  en fonction de  $p_1$  trouvées précédemment, on a :

$$f(p_1) = \arg\left(\frac{3}{2}p_1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(1-p_1)\sqrt{1 - \frac{4A}{p_1(1-p_1)^2}}\right) \quad (19)$$

Pour  $p_1 \neq \frac{1}{3}$ , on a donc

$$\tan(f(p_1)) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-p_1)\sqrt{1 - \frac{4A}{p_1(1-p_1)^2}}}{\frac{3}{2}p_1 - \frac{1}{2}}. \quad (20)$$

En étudiant cette fonction sur les deux intervalles de définition ( $[p_{min}, \frac{1}{3}[$  et  $]\frac{1}{3}, p_{max}]$ ), on obtient le résultat voulu.  $\square$

### 4.3 Loi de l'angle de sortie

Dans toute la suite de ce rapport,  $0 < m < 1$  est fixé. On cherche dans cette section à montrer que l'angle de sortie de  $(X_n^{RD})_{n \geq 1}$  converge en loi quand  $R$  tend vers  $+\infty$  vers une variable aléatoire à déterminer.

#### 4.3.1 Heuristique

Pour une marche aléatoire simple, l'angle de sortie d'un domaine  $D$  tend vers une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette loi limite est la loi de l'angle de sortie de  $D$  pour le mouvement brownien. Mais en considérant une marche aléatoire massive conditionnée à sortir de  $RD$  avant de mourir, on favorise fortement les chemins courts par rapport à la marche simple. On peut donc supposer que seuls les angles correspondant aux chemins les plus courts pourront être atteints à la limite.

C'est pourquoi, notre première hypothèse a été de supposer que seuls les angles correspondant aux points de  $D$  les plus proches de l'origine pour la distance usuelle dans  $\mathbb{C}$  pourraient être atteints. En prenant  $D$  égal au disque unité, l'on pensait donc dans un premier temps que la loi limite serait la loi uniforme, et que pour un domaine quelconque, ça serait une loi ponctuelle.

Cependant, le réseau sous-jacent rend certaines directions moins probables que d'autres. En effet, pour atteindre un point à distance  $R$  de l'origine dans les directions  $0, \frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$ , il faut faire au moins  $R$  pas, alors que dans les directions  $\frac{\pi}{3}, \pi$  et  $\frac{5\pi}{3}$ , il faut faire au moins  $2R$  pas. Cela peut donc laisser supposer que pour  $D$  égal au disque unité, à la limite, les seuls angles atteignables sont en fait  $0, \frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$ .

Si l'on prend  $D$  égal à la boule unité pour la distance de graphe, tous les points du bord de  $2RD$  sont atteignables en un même nombre minimal de pas (en l'occurrence  $2R$ ). Mais il y a beaucoup plus de façons d'atteindre les points situés dans les directions  $\frac{\pi}{3}, \pi$  et  $\frac{5\pi}{3}$  en  $2R$  pas (exactement  $\binom{2R}{R}$  chemins), que de façons d'atteindre les points situés en  $0, \frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$  (une seule possibilité). On peut donc supposer que pour ce domaine  $D$ , à l'inverse, seuls les points situés en  $\frac{\pi}{3}, \pi$  et  $\frac{5\pi}{3}$  peuvent être atteints à la limite.

#### 4.3.2 Quelques résultats pour un domaine quelconque

Soit  $\mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}$  la loi de l'angle de sortie de  $RD$  de  $(X_n^{RD})_{n \geq 1}$ . On veut montrer la convergence en loi de  $\mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}$  vers une certaine loi  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$  à déterminer, ie que pour toute fonction réelle  $\phi$  continue et bornée sur  $\mathbb{T}$ , on a :

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(\theta) d\mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}(\theta) = \sum_{\theta \in [0, 2\pi[} \phi(\theta) \mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}(\theta) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}} \phi(\theta) d\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\theta) \quad (21)$$

*Notations.* On note  $r_D(\theta)$  la distance entre l'origine et le point de la frontière (au sens topologique du terme) de  $D$  dans la direction  $\theta$ . Pour  $\theta \in \mathbb{T}$ , on pose  $f^D(\theta) = r_D(\theta)\langle \alpha(\theta), e_\theta \rangle$ .

Dans le cas général, nous n'allons pas déterminer explicitement la loi limite ni prouver la convergence, car la durée du stage n'a pas permis de traiter complètement ce problème. Dans la suite de cette partie, nous allons cependant prouver le résultat suivant :

**Proposition 4.7.** *Sous réserve de l'existence de la loi limite  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$ , le support de  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$  est inclus dans l'ensemble des  $\theta \in \mathbb{T}$  qui sont des minima de  $f^D$ .*

En notant  $\partial(RD)$  le bord de  $RD$ , on peut écrire :

$$\sum_{\theta \in [0, 2\pi[} \phi(\theta) \mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}(\theta) = \sum_{z \in \partial(RD)} \phi(\arg(z)) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) = \sum_{z \in \partial(RD)} \phi(\arg(z)) \frac{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^m(\tau_* \geq \tau_{RD})} \quad (22)$$

Or, pour tout  $z' \in \partial(RD)$ ,  $\mathbb{P}^m(\tau_* \geq \tau_{RD}) \geq \mathbb{P}^m(Z_{RD} = z')$ , donc :

$$\sum_{\theta \in [0, 2\pi[} \phi(\theta) \mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}(\theta) \leq \sum_{z \in \partial(RD)} \phi(\arg(z)) \frac{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z')} \quad (23)$$

Soit  $z$  un point de  $\partial(RD)$ . Alors d'après le corollaire 4.5, pour tout drift  $\Delta$  qui vérifie la relation 11, on a :

$$\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z) = \sum_{\gamma \text{ tq } z_\gamma = z} \mathbb{P}^m(\gamma) \quad (24)$$

$$= \sum_{\gamma \text{ tq } z_\gamma = z} \mathbb{P}^{(\Delta)}(\gamma) \exp(-M_\gamma) \quad (25)$$

$$= \sum_{\gamma \text{ tq } z_\gamma = z} \mathbb{P}^{(\Delta)}(\gamma) \exp\left(-\frac{2}{3}\langle \alpha, z \rangle\right) \quad (26)$$

$$= \mathbb{P}^{(\Delta)}(Z_{RD} = z) \exp\left(-\frac{2}{3}\langle \alpha, z \rangle\right) \quad (27)$$

Notre but est de pouvoir comparer ces valeurs pour différents  $z$ . Or, pour  $\Delta$  dans la direction de  $z$ , nous verrons que  $\mathbb{P}^{(\Delta)}(Z_{RD} = z)$  est "grand devant"  $\exp(-\frac{2}{3}\langle \alpha, z \rangle)$ . On est alors ramené à comparer les valeurs de  $\exp(-\frac{2}{3}\langle \alpha, z \rangle)$ . Nous prendrons donc  $\Delta = \Delta(\theta_z)$  où  $\theta_z = \arg(z)$

Ainsi, si  $z'$  est un autre point du bord de  $RD$ , on a :

$$\frac{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z')} = \frac{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta_{z'}))}(Z_{RD} = z')} \exp\left(\frac{2}{3}\left(\langle \alpha(\theta_{z'}), z' \rangle - \langle \alpha(\theta_z), z \rangle\right)\right) \quad (28)$$

On écrit  $z = (R \cdot r_D(\theta_z) + \epsilon_D(z)) \cdot e_{\theta_z}$  où  $|\epsilon_D(z)| \leq 1$  et  $e_{\theta_z}$  est le vecteur unitaire dans la direction  $\theta_z$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z')} &= \frac{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta_{z'}))}(Z_{RD} = z')} \exp\left(\frac{2}{3}R\left(r_D(\theta_{z'})\langle \alpha(\theta_{z'}), e_{\theta_{z'}} \rangle - r_D(\theta_z)\langle \alpha(\theta_z), e_{\theta_z} \rangle\right)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(\frac{2}{3}\left(\epsilon_D(z')\langle \alpha(\theta_{z'}), e_{\theta_{z'}} \rangle - \epsilon_D(z)\langle \alpha(\theta_z), e_{\theta_z} \rangle\right)\right) \end{aligned} \quad (29)$$

Or, comme  $|\epsilon_D(z)| \leq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{2}{3}\left(\epsilon_D(z')\langle \alpha(\theta_{z'}), e_{\theta_{z'}} \rangle - \epsilon_D(z)\langle \alpha(\theta_z), e_{\theta_z} \rangle\right)\right) &\leq \exp\left(\frac{2}{3}\left(|\langle \alpha(\theta_{z'}), e_{\theta_{z'}} \rangle| + |\langle \alpha(\theta_z), e_{\theta_z} \rangle|\right)\right) \\ &= C(\theta_z, \theta_{z'}) \end{aligned} \quad (30)$$

Et comme  $\theta \times \theta' \mapsto C(\theta, \theta')$  est définie sur  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$  qui est compact, et est continue, elle est majorée par une constante  $C > 0$ .

On cherche, dans ce paragraphe, à obtenir une minoration "sous-exponentielle" de  $\mathbb{P}^{(\Delta(m, \theta_z))}(Z_{RD} = z)$ .

*Notations.*

- Notons  $\tau_R$  le temps de sortie de  $RD$ .
- On écrit la marche aléatoire driftée comme  $(X_n^{(\Delta(\theta))})_{n \geq 1} = ((Y_n^\theta, Z_n^\theta))_{n \geq 1}$  où  $Y_n^\theta$  est la coordonnée dans la direction du drift, et  $Z_n^\theta$  est la coordonnée perpendiculaire au drift.
- On pose également  $V(\theta) = \text{Var}(Z_1^\theta)$ .

**Lemme 4.8.** *Il existe  $K > 0$  tel que, pour  $R$  assez grand, pour tout  $z \in \partial(RD)$ ,  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}(Z_{RD} = z) \geq K \left(M(\theta_z)\right)^{2\sqrt{R} \ln R}$ , où  $M(\theta) = \min(p_1(\theta), p_2(\theta), p_3(\theta))$ .*

*Démonstration.* On a :

$$\mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}(Z_{RD} = z) \geq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}\left(Z_{RD} = z \text{ et } |Z_{\tau_{R-1}}^{\theta_z}| \leq \sqrt{R} \ln(R) \text{ et } Y_{\tau_{R-1}}^{\theta_z} \geq 0\right) \quad (31)$$

$$\geq \left(M(\theta_z)\right)^{2\sqrt{R} \ln R} \cdot \mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^{\theta_z}| \leq \sqrt{R} \ln(R) \text{ et } Y_{\tau_{R-1}}^{\theta_z} \geq 0\right) \quad (32)$$

où l'inégalité 32 est obtenue en utilisant la propriété de Markov forte, et le fait que pour tout point de sortie de la boule de rayon  $R - 1$  vérifiant que ses coordonnées selon la direction du drift et perpendiculairement à la direction du drift sont respectivement positive et comprise entre  $-\sqrt{R}\ln(R)$  et  $\sqrt{R}\ln(R)$ , il existe un chemin de longueur au plus  $2\sqrt{R}\ln(R)$  pas de ce point à  $z$  et que ce chemin a donc une probabilité au moins égale à  $\left(M(\theta_z)\right)^{2\sqrt{R}\ln R}$ .

Or, pour tout  $\theta$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^\theta| \leq \sqrt{R}\ln(R) \text{ et } Y_{\tau_{R-1}}^\theta \geq 0\right) \\ &= \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^\theta| \leq \sqrt{R}\ln(R)\right) + \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Y_{\tau_{R-1}}^\theta \geq 0\right) - \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^\theta| \leq \sqrt{R}\ln(R) \text{ ou } Y_{\tau_{R-1}}^\theta \geq 0\right) \quad (33) \\ &\geq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^\theta| \leq \sqrt{R}\ln(R)\right) + \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Y_{\tau_{R-1}}^\theta \geq 0\right) - 1 \end{aligned}$$

On montre que  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^\theta| \leq \sqrt{R}\ln(R)\right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1$  uniformément en  $\theta$  en utilisant la proposition 2.1 de [Fre75] pour passer de la 3<sup>ème</sup> ligne à la 4<sup>ème</sup> ligne du calcul :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Z_{\tau_{R-1}}^\theta \geq \sqrt{R}\ln(R)\right) \leq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(\tau_{R-1} \geq R\ln R\right) + \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Z_{\tau_{R-1}}^\theta \geq \sqrt{R}\ln(R) \text{ et } \tau_{R-1} < R\ln R\right) \\ &= \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(\tau_{R-1} \geq R\ln R\right) + \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Z_{\tau_{R-1}}^\theta \geq \sqrt{R}\ln(R) \text{ et } \tau_{R-1} < R\ln R\right) \\ &\leq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(\tau_{R-1} \geq R\ln R\right) + \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(\exists n \leq \tau_{R-1} \text{ tq } Y_n^\theta \geq \sqrt{R}\ln(R) \text{ et } nV(\theta) \leq R\ln(R) \cdot V(\theta)\right) \\ &\leq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(\tau_{R-1} \geq R\ln R\right) + \exp\left(-\frac{R(\ln R)^2}{2(\sqrt{R}\ln R + R\ln(R) \cdot V(\theta))}\right) \\ &\lesssim \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(\tau_{R-1} \geq R\ln R\right) + \exp\left(-\frac{\ln R}{2V(\theta)}\right) \end{aligned}$$

Or, comme  $V$  est continue sur le compact  $\mathbb{T}$ , elle admet un minimum  $V_{min}$ . De plus,  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(\tau_{R-1} \geq R\ln R\right) \leq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Y_{R\ln R}^\theta \leq R - 1\right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$  uniformément en  $\theta$  en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, le fait que  $\mathbb{E}(Y_n^\theta) = n\|\Delta(\theta)\|$  et le même argument de continuité sur un compact de la majoration obtenue, pour avoir l'uniformité. Donc  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Z_{\tau_{R-1}}^\theta \geq \sqrt{R}\ln(R)\right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$  uniformément en  $\theta$ , et ainsi, en utilisant l'invariance par symétrie de la loi de  $Y_n^\theta$ , on obtient  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|S_{\tau_{R-1}}^{Z, \theta}| \leq \sqrt{R}\ln(R)\right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1$  uniformément en  $\theta$ .

De même, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a que  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Y_{\tau_{R-1}}^\theta \geq 0\right)$  tend vers 1 quand  $R$  tend vers  $+\infty$  uniformément en  $\theta$ . Soit  $0 < K < 1$ .

Pour  $R$  assez grand, on a donc que pour tout  $\theta$ ,  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^\theta| \leq \sqrt{R}\ln(R)\right) > \frac{K+1}{2}$  et  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(Y_{\tau_{R-1}}^\theta \geq 0\right) > \frac{K+1}{2}$ . Donc  $\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}\left(|Z_{\tau_{R-1}}^\theta| \leq \sqrt{R}\ln(R) \text{ et } Y_{\tau_{R-1}}^\theta \geq 0\right) > K$ . □

*Démonstration.* (de la proposition)

Pour tout entier  $k > 0$ , on note  $O_k = \{\theta \mid f^D(\theta) > \min(f^D) + \frac{1}{k}\}$ . Pour  $R > 0$ , soit  $z_R \in \partial(DR)$  tel que  $f^D(\theta_{z_R}) < \min(f^D) + \frac{1}{2k}$ , qui existe toujours pourvu que  $R$  soit assez grand. On commence par montrer que

$$\mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}(O_k) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(O_k) &\leq \sum_{z \in \partial(RD) | \theta_z \in O_k} \phi(\arg(z)) \frac{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^m(Z_{RD} = z_R)} \\
&= \sum_{z \in \partial(RD) | \theta_z \in O_k} \phi(\arg(z)) \frac{\mathbb{P}^{\Delta(\theta_z)}(Z_{RD} = z)}{\mathbb{P}^{\Delta(\theta_{z_R})}(Z_{RD} = z_R)} \exp\left(\frac{2}{3} \left( \langle \alpha(\theta_{z_R}), z_R \rangle - \langle \alpha(\theta_z), z \rangle \right)\right) \\
&\leq \sum_{z \in \partial(RD) | \theta_z \in O_k} \phi(\arg(z)) \frac{1}{K(M(\theta_z))^{2\sqrt{R} \ln R}} \exp\left(\frac{2}{3} R (f^D(\theta_{z_R}) - f^D(\theta_z))\right) \cdot C \\
&\leq \sum_{z \in \partial(RD) | \theta_z \in O_k} \phi(\arg(z)) \frac{C}{K(M(\theta_z))^{2\sqrt{R} \ln R}} \exp\left(\frac{2}{3} R \left( \min(f^D) + \frac{1}{2k} - \left( \min(f^D) + \frac{1}{k} \right) \right)\right) \quad (34) \\
&\leq \sum_{z \in \partial(RD) | \theta_z \in O_k} \max(\phi) \frac{C}{K(M(\theta_z))^{2\sqrt{R} \ln R}} \exp\left(-\frac{R}{3k}\right) \\
&\leq \#\{z \in \partial(RD) | \theta_z \in O_k\} \cdot \max(\phi) \frac{C}{K} \exp\left(-2\sqrt{R} \ln(R) \cdot \ln\left(\min_{\theta \in \mathbb{T}}(M(\theta))\right) - \frac{R}{3k}\right) \\
&\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

Or, comme  $\mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}$  converge vers  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$ , on a que pour tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{T}$ ,  $\limsup_{R \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}(O) \geq \tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(O)$ .

Donc pour tout entier  $k > 0$ ,  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(O_k) = 0$ .

En posant  $O = \{\theta \mid f^D(\theta) > \min(f^D)\}$ , on a  $O = \bigcup_{k>0} O_k$ . Et donc  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(O) = 0$ . Le support de  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$  est donc inclus dans le complémentaire de  $O$ .  $\square$

*Remarque 4.9.* Pour de nombreux domaines, le support de  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$  ne contient que quelques points. Pour espérer avoir  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il faut choisir un domaine  $D$  tel que  $f^D(\theta)$  soit constante, ie  $r_D(\theta) = \frac{c}{\langle \alpha(\theta), \frac{\Delta(\theta)}{\|\Delta(\theta)\|} \rangle}$ . Pour savoir si dans ce cas  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$  est effectivement continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il faudrait alors comparer les  $\mathbb{P}^{\Delta(\theta_z)}$  pour les différents  $z$ .

### 4.3.3 Cas du cercle

On s'intéresse ici au cas où  $D = \mathbb{D}$ . On a alors pour tout  $\theta \in \mathbb{T}$ ,  $r_D(\theta) = 1$ , et donc  $f^D(\theta) = \langle \alpha(\theta), e_\theta \rangle = \langle \alpha(\theta), \frac{\Delta(\theta)}{\|\Delta(\theta)\|} \rangle$ .

Or,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \Delta \rangle &= \langle \ln(p_1) + \tau \ln(p_2) + \tau^2 \ln(p_3), p_1 + \tau p_2 + \tau^2 p_3 \rangle \\
&= \ln(p_1)(p_1 - \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_3) + \ln(p_2)(p_2 - \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_3) + \ln(p_3)(p_3 - \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2) \\
&= \sum_i \ln(p_i)(p_i - \frac{1}{2}(1 - p_i)) = \frac{1}{2} \sum_i \ln(p_i)(3p_i - 1) \quad (35) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_i p_i \ln p_i \right) - \ln A \right)
\end{aligned}$$

Et

$$\|\Delta\|^2 = \langle p_1 + \tau p_2 + \tau^2 p_3, p_1 + \tau p_2 + \tau^2 p_3 \rangle = \frac{1}{2} \sum_i p_i(3p_i - 1) = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_i 3p_i^2 \right) - 1 \right) \quad (36)$$

Ainsi,

$$f^D(\theta) = \frac{\frac{1}{2} \left( \left( \sum_i p_i(\theta) \ln(p_i(\theta)) \right) - \ln A \right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left( \left( \sum_i 3(p_i(\theta))^2 \right) - 1 \right)}} \quad (37)$$

Nous n'avons pas réussi à calculer les minima de cette fonction. En revanche, nous avons tracé cette courbe (cf figure 10 en annexe), et pour toute valeur de  $m$ , les minima de  $f^D(\theta)$  semblent être atteints en  $0$ ,  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$ . Nous admettons ce résultat pour la suite de cette partie.

**Proposition 4.10.** Si  $D = \mathbb{D}$ ,

$$\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D = \frac{1}{3} (\mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_{\frac{2\pi}{3}} + \mathbb{1}_{\frac{4\pi}{3}}) \quad (38)$$

*Démonstration.* Le support de  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$  est inclus dans  $\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ . Donc  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(0) + \tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\frac{2\pi}{3}) + \tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\frac{4\pi}{3}) = 1$ . Or, par symétrie, on a  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(0) = \tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\frac{2\pi}{3}) = \tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\frac{4\pi}{3})$ . D'où le résultat.  $\square$

#### 4.4 Loi de la marche conditionnée à tendre vers une certaine direction

On admet dans toute cette partie la convergence en loi de l'angle de sortie vers une certaine loi  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$ . Soit  $\Gamma$  l'ensemble des chemins sur le réseau triangulaire partant de 0. Soit  $\psi$  une fonction continue bornée définie sur  $\Gamma$  et à valeurs réelles. On veut montrer que :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{RD}(\gamma) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \psi(\gamma) d\tilde{\mathbb{P}}^D \quad \text{où} \quad d\tilde{\mathbb{P}}^D = \int_{\mathbb{T}} d\tilde{\mathbb{P}}_{|\theta}^D d\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\theta) \quad (39)$$

et où  $\tilde{\mathbb{P}}_{|\theta}^D$  est une loi à déterminer.

Or, en utilisant le corollaire 4.4, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{RD}(\gamma) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{z \in \partial(RD)} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{RD}(\gamma | Z_{RD} = z) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{z \in \partial(RD)} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}(\gamma | Z_{RD} = z) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) \\ &= \sum_{z \in \partial(RD)} \phi^{RD}(\theta_z) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) \end{aligned} \quad (40)$$

où  $\phi^{RD}(\theta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta_z))}(\gamma | \arg(Z_{RD}) = \theta)$  est défini pour les  $\theta$  pour lesquels ça a un sens.

**Lemme 4.11.**  $\phi^{RD}(\theta)$  converge vers  $\phi(\theta) = \int_{\Gamma} \psi(\gamma) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma)$  uniformément en  $\theta$ .

**Lemme 4.12.** La fonction  $\phi$  est continue.

Admettons pour le moment ces deux lemmes, et prouvons la convergence en loi de  $(X_n^{RD})_{n \geq 1}$ .

**Proposition 4.13.**  $(X_n^{RD})_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $(\tilde{X}_n^D)_{n \geq 1}$  de loi  $d\tilde{\mathbb{P}}^D = \int_{\mathbb{T}} d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))} d\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\theta)$ .

*Démonstration.* Soit  $\psi$  une fonction continue bornée définie sur  $\Gamma$  et à valeurs réelles.

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma) \tilde{\mathbb{P}}^D(\gamma) &= \sum_{z \in \partial(RD)} \phi^{RD}(\theta_z) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) \\ &= \sum_{z \in \partial(RD)} \phi(\theta_z) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) + \sum_{z \in \partial(RD)} (\phi^{RD}(\theta_z) - \phi(\theta_z)) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) \end{aligned} \quad (41)$$

Or,

$$\left| \sum_{z \in \partial(RD)} (\phi^{RD}(\theta_z) - \phi(\theta_z)) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) \right| \leq \|\phi^{RD} - \phi\|_{\infty} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0, \quad (42)$$

et comme  $\mathbb{P}_{\text{angle}}^{RD}$  converge vers  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D$ , et que  $\phi$  est continue (lemme 4.12) et bornée (car  $\psi$  l'est), on a :

$$\sum_{z \in \partial(RD)} \phi(\theta_z) \mathbb{P}^{RD}(Z_{RD} = z) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}} \phi(\theta) d\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\theta). \quad (43)$$

Ainsi,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma) \tilde{\mathbb{P}}^D(\gamma) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}} \int_{\Gamma} \psi(\gamma) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma) d\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\theta) = \int_{\Gamma} \psi(\gamma) \int_{\mathbb{T}} d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma) d\tilde{\mathbb{P}}_{\text{angle}}^D(\theta) \quad (44)$$

$\square$

Nous allons tout d'abord prouver le lemme 4.12.

*Notations.* Pour alléger les notations, on notera désormais  $X_n^{(\Delta(\theta))}$  comme un chemin aléatoire  $\tilde{\gamma}$ , et on notera  $\tilde{\gamma}[0, k] = (\tilde{\gamma}(0), \dots, \tilde{\gamma}(k)) = (X_0^{(\Delta(\theta))}, \dots, X_k^{(\Delta(\theta))})$ .

Si  $\gamma$  est un chemin, on notera  $|\gamma|$  sa taille.

*Démonstration.* (du lemme 4.12)

Soit  $\theta' \in \mathbb{T}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\psi$  est continue sur un compact, elle est en fait uniformément continue. Il existe donc  $\delta > 0$  tel que pour tous  $\gamma, \gamma'$  vérifiant  $d(\gamma, \gamma') \leq \delta$ , on ait  $|\psi(\gamma) - \psi(\gamma')| \leq \varepsilon$ . Soit  $K \geq \frac{1}{\delta}$ . Les chemins qui coïncident sur les  $K$  premiers pas sont à distance au plus  $\delta$  les uns des autres. On a donc :

$$|\phi(\theta) - \int_{\Gamma} \psi(\gamma[0, K]) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma)| = \left| \int_{\Gamma} (\psi(\gamma) - \psi(\gamma[0, K])) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma) \right| \leq \varepsilon \quad (45)$$

Or,

$$\int_{\Gamma} \psi(\gamma[0, K]) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma) = \sum_{\gamma' \in \Gamma \mid |\gamma|=K} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma') \quad (46)$$

Comme  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont continus par rapport à  $\theta$ , il existe  $\delta'$  tel que pour tout  $\theta'$  vérifiant  $|\theta - \theta'| \leq \delta'$ , pour tout chemin  $\gamma'$  de taille  $K$ ,  $|\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma') - \mathbb{P}^{(\Delta(\theta'))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma')| \leq \varepsilon$ . Ainsi :

$$\left| \sum_{\gamma' \in \Gamma \mid |\gamma|=K} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma') - \sum_{\gamma' \in \Gamma \mid |\gamma|=K} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta'))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma') \right| \leq \|\psi\|_{\infty} \cdot \varepsilon. \quad (47)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\phi(\theta) - \phi(\theta')| &\leq \left| \phi(\theta) - \int_{\Gamma} \psi(\gamma[0, K]) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma) \right| \\ &+ \left| \int_{\Gamma} \psi(\gamma[0, K]) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma) - \int_{\Gamma} \psi(\gamma[0, K]) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta'))}(\gamma) \right| + \left| \int_{\Gamma} \psi(\gamma[0, K]) d\mathbb{P}^{(\Delta(\theta'))}(\gamma) - \phi(\theta') \right| \\ &\leq \varepsilon + \|\psi\|_{\infty} \cdot \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned} \quad (48)$$

□

Le lemme 4.11 peut se comprendre de la manière suivante : "La marche aléatoire driftée conditionnée à sortir de  $RD$  dans la direction du drift converge en loi vers la marche aléatoire driftée sur  $\mathbb{Z}^2$ ".

*Notations.* Soit  $R > 0$ . Si  $\theta$  est tel qu'il existe un point  $z_{\theta}$  du bord de  $RD$  dans la direction  $\theta$ , on note  $E_R^{\theta} = \{Z_{RD} = z_{\theta}\}$ .

La marche aléatoire driftée est une chaîne de Markov sur  $\mathbb{Z}^2$ . On note  $p$  sa matrice de transition.

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(X_{n+1} = z' \mid X_n = z, \dots, X_1 = x_1, X_0 = 0, E_R^{\theta}) &= \frac{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(X_0 = 0, X_1 = x_1, \dots, X_n = z, X_{n+1} = z', E_R^{\theta})}{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(X_0 = 0, X_1 = x_1, \dots, X_n = z, E_R^{\theta})} \\ &= \frac{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(X_0 = 0, X_1 = x_1, \dots, X_n = z) p(z, z') \mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})}{\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(X_0 = 0, X_1 = x_1, \dots, X_n = z) \mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})} \\ &= p(z, z') \frac{\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})}{\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})}. \end{aligned} \quad (49)$$

Cela nous dit que la marche aléatoire driftée conditionnée à sortir dans la direction du drift est une chaîne de Markov, et que sa matrice de transition est  $Q$  avec :

$$Q(z, z') = \begin{cases} 0 & \text{s'il n'y a pas d'arête de } z \text{ vers } z' \text{ dans le réseau} \\ p(z, z') \frac{\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})}{\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})} & \text{sinon} \end{cases} \quad (50)$$

**Lemme 4.14.** *Si  $z$  et  $z'$  sont voisins,  $\frac{\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})}{\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^{\theta})}$  tend vers 1 uniformément en  $\theta$  quand  $R$  tend vers  $+\infty$ .*

Ainsi, quand  $R$  tend vers  $+\infty$ , la marche aléatoire driftée et la marche aléatoire driftée conditionnée à sortir de  $RD$  dans la direction du drift ont des probabilités de transition presque identiques. Les deux marches vont donc être égales sur les premiers pas avec une probabilité qui tend vers 1. On admet temporairement le lemme 4.14 pour prouver le lemme 4.11.

*Démonstration.* (du lemme 4.11)

Soit  $\theta \in \mathbb{T}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . En reprenant le même  $K$  que dans la preuve de la continuité de  $\phi$ , et en utilisant les équation 45 et 46, on a :

$$|\phi(\theta) - \sum_{\gamma' \in \Gamma \mid |\gamma|=K} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma')| \leq \varepsilon. \quad (51)$$

De même, grâce à l'uniforme continuité de  $\psi$ , on a pour tout  $R > 0$

$$|\phi^{RD}(\theta) - \sum_{\gamma' \in \Gamma \mid |\gamma|=K} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma' \mid E_R^\theta)| \leq \varepsilon \quad (52)$$

Or, en utilisant le lemme 4.14, on a que la probabilité que la marche aléatoire driftée et la marche aléatoire driftée conditionnée à sortir de  $RD$  par  $z_\theta$  soient égales sur les  $K$  premiers pas tend vers 1 uniformément en  $\theta$ . Ainsi, il existe  $M > 0$  (indépendant de  $\theta$ ) tel que pour tout  $R \geq M$ , pour tout chemin  $\gamma'$  de taille  $K$ ,  $|\mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma' \mid E_R^\theta) - \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma')| \leq \varepsilon$ . Ainsi,

$$\left| \sum_{\gamma' \in \Gamma \mid |\gamma|=K} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma' \mid E_R^\theta) - \sum_{\gamma' \in \Gamma \mid |\gamma|=K} \psi(\gamma) \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\tilde{\gamma}[0, K] = \gamma') \right| \leq \|\psi\| \cdot \varepsilon. \quad (53)$$

Donc, pour  $R \geq M$ ,

$$|\phi(\theta) - \phi^{RD}(\theta)| \leq \varepsilon + \|\psi\| \cdot \varepsilon + \varepsilon. \quad (54)$$

□

Il nous reste désormais le lemme 4.14 à prouver. Pour cela, nous allons coupler deux marches aléatoires driftées, partant respectivement d'un point  $z$  du réseau, et d'un point  $z'$  voisin de  $z$ . On les notera  $(X_n^z)_{n \geq 0}$  et  $(X_n^{z'})_{n \geq 0}$ . Le but est que sous ce couplage, avec grande probabilité les deux marches se rejoignent (on dira qu'elles coalescent) avant d'atteindre le bord de  $RD$ . Si elles ont coalescé, alors l'une vérifiera l'événement  $E_R^\theta$  si et seulement si l'autre le vérifie aussi. Cela nous amène donc à choisir le couplage suivant, en supposant par exemple que  $p_1 \geq p_2 \geq p_3$  :

- Pendant que la marche aléatoire issue de  $z$  effectue son premier pas, la marche aléatoire issue de  $z'$  ne bouge pas. Sur le graphe triangulaire orienté, les points peuvent être séparés en trois classes de points selon la congruence modulo 3 de leur distance de graphe à l'origine. Cette première étape permet de mettre les deux marches dans la même classe. (NB :  $(X_n^{z'})_{n \geq 0}$  ne sera donc une marche driftée qu'à partir du temps 1, ce qui n'a pas d'influence sur son point de sortie).
- Tant que les deux marches n'ont pas la même coordonnée verticale, à chaque pas leur déplacement suit le tableau suivant :

proba	$(X_n^z)_{n \geq 0}$	$(X_n^{z'})_{n \geq 0}$
$p_1$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$p_3$	$\swarrow$	$\swarrow$
$p_3$	$\searrow$	$\searrow$
$p_2 - p_3$	$\swarrow$	$\swarrow$

- Une fois que les deux marches sont à la même hauteur, leur écart horizontal est un multiple de 3 (car les deux marches sont dans la même classe de point). A chaque ensemble de trois pas, la marche issue de  $z'$  fait la même chose que celle issue de  $z$  sauf si celle issue de  $z$  fait l'une des combinaisons de 3 pas suivantes :  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$  ou  $\swarrow \triangle \searrow$ . Dans ce cas, la marche issue de  $z'$  se déplace suivant le tableau ci-dessous :

proba	$(X_n^z)_{n \geq 0}$	$(X_n^{z'})_{n \geq 0}$
$p_1 p_2 p_3$	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\swarrow \triangle \searrow$
$p_1 p_2 p_3$	$\swarrow \triangle \searrow$	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$
$p_1^3 - p_1 p_2 p_3$	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$

Lors de la deuxième étape, l'écart vertical entre les deux marches suit une marche aléatoire centrée. Il augmente de  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  avec une probabilité  $p_3$  et diminue de  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  avec une probabilité  $p_3$ . On peut montrer que la probabilité de ne pas avoir coalescé verticalement au bout de  $n$  pas est équivalente à  $\frac{c_v}{\sqrt{R}}$  pour une certaine constante  $c_v$ . Une façon de le prouver est d'utiliser le théorème limite local [She64]. Durant toute cette étape, leur écart horizontal ne change pas. Lors de la troisième étape, de même, la probabilité de ne pas avoir coalescé horizontalement au bout de  $n$  pas est équivalente à  $\frac{c_h}{\sqrt{R}}$  pour une certaine constante  $c_h$ .

*Notations.* On note  $\tau_{coal}$  le temps que mettent les deux marches à coalescer,  $\tau_{coal}^v$  le temps qu'elles mettent à coalescer verticalement, et  $\tau_{coal}^h$  le temps qu'elles mettent à coalescer horizontalement.

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{coal} \geq n) &\leq \mathbb{P}(\tau_{coal}^v \geq \frac{n}{2}) \text{ où } \mathbb{P}(\tau_{coal}^v \geq \frac{n}{2}) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau_{coal}^v \geq \frac{n}{2}) + (\mathbb{P}(\tau_{coal}^h \geq \frac{n}{2})) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}(c_v + c_h)}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Montrer que  $\frac{\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)}{\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)}$  tend vers 1 est équivalent à montrer que :

$$|\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) - \mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)| \underset{R \rightarrow +\infty}{=} o(\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)). \quad (56)$$

Or,

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) - \mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)| &= |\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta \cap \tau_{coal} \geq \frac{R}{2}) - \mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta \cap \tau_{coal} \geq \frac{R}{2})| \\ &\leq \mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta \cap \tau_{coal} \geq \frac{R}{2}) + \mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta \cap \tau_{coal} \geq \frac{R}{2}) \end{aligned} \quad (57)$$

En utilisant la propriété de Markov forte, on a :

$$\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta \cap \tau_{coal} \geq \frac{R}{2}) \leq \mathbb{P}(\tau_{coal} \geq \frac{R}{2}) \sup_{x \in B(z, \frac{R}{2})} \mathbb{P}_x^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta). \quad (58)$$

Et pour  $R$  assez grand, on a  $B(z, \frac{R}{2}) \subset B(0, \frac{3R}{4})$ . Donc :

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{z'}^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) - \mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)| &\leq \mathbb{P}(\tau_{coal} \geq \frac{R}{2}) \cdot 2 \cdot \sup_{x \in B(0, \frac{3R}{4})} \mathbb{P}_x^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) \\ &\lesssim \frac{2(c_v + c_h)}{\sqrt{R}} \cdot \sup_{x \in B(0, \frac{3R}{4})} \mathbb{P}_x^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) \end{aligned} \quad (59)$$

On est donc ramené à montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \sup_{x \in B(0, \frac{3R}{4})} \mathbb{P}_x^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) \underset{R \rightarrow +\infty}{=} o(\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)). \quad (60)$$

Il paraît raisonnable de supposer que  $\sup_{x \in B(0, \frac{3R}{4})} \mathbb{P}_x^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) \leq \mathbb{P}_y^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta)$  où  $y \approx \frac{3R}{4} \cdot r_D(\theta) \cdot e_\theta$ .

Or  $\mathbb{P}_y^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) \leq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\text{sortir de } B(y, \frac{R}{4}) \text{ en } z_\theta) = \mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta)$ .

Et si  $\gamma_0$  est un chemin de  $z$  à  $0$ , on a

$$\mathbb{P}_z^{(\Delta(\theta))}(E_R^\theta) \geq \mathbb{P}^{(\Delta(\theta))}(\gamma_0) \cdot \mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta). \quad (61)$$

Ainsi il suffit de montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta) \underset{R \rightarrow +\infty}{=} o(\mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta)). \quad (62)$$

Or, la marche aléatoire driftée prend un temps de l'ordre de  $R$  pour sortir de  $RD$ . Le théorème central limite peut donc nous faire penser que  $Z_n^\theta$  est étalé de l'ordre de  $\sqrt{R}$  lorsque la marche sort de  $RD$ .  $\mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta)$  serait donc de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{R}}$ , ce qui permettrait de conclure. Nous n'avons malheureusement pas réussi à prouver que  $\mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta)$  était de l'ordre de  $\sqrt{R}$ . Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de terminer cette preuve pendant le stage. Il faudrait pour conclure montrer les 3 éléments suivants :

- $\sup_{x \in B(0, \frac{3R}{4})} \mathbb{P}_x^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta) \leq \mathbb{P}_y^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta)$  où  $y \approx \frac{3R}{4} \cdot r_D(\theta) \cdot e_\theta$
- $\frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta) \underset{R \rightarrow +\infty}{=} o(\mathbb{P}_0^{(\Delta(\theta))}(E_{\frac{R}{4}}^\theta))$
- L'uniformité dans le lemme 4.14.

## 4.5 Ouverture

Je n'ai traité le problème que dans le cas du réseau triangulaire orienté. La méthode utilisée ici n'est *a priori* pas utilisable telle quelle pour le réseau carré. En effet, les résultats 4.3, 4.4 et 4.5 sont faux dans le cas du réseau carré. Des résultats similaires sont prouvés dans [BHS22], mais ils ne sont vrais que dans certaines limites (la masse  $m$  tend vers 0 en même temps que  $\delta$ ).

Cependant, en utilisant une méthode très différente de celle présentée ici, Valentine Tosel a, durant la fin de son stage, prouvé le résultat sur le réseau carré pour des domaines  $D$  particuliers. Elle a également établi une correspondance entre la marche aléatoire massive et la marche aléatoire driftée pour un drift vérifiant une certaine relation dans le cas du réseau carré.

## 5 Bonus : La vie en dehors du stage

Ces cinq mois passés à Vienne m'ont également permis de découvrir cette très belle ville et ses alentours, ainsi que de progresser en langue. J'ai en effet eu la chance de pratiquer l'anglais et l'allemand grâce aux nombreuses personnes que j'ai rencontrées sur place. A Vienne, j'ai pu visiter des musées, aller à l'opéra et à des concerts, me promener dans la forêt viennoise, découvrir les spécialités culinaires locales et le patrimoine culturel en visitant les différents grands monuments de la ville.

J'ai également eu l'occasion d'aller à Budapest, Bratislava, Innsbruck et Munich.

## Références

- [BHS22] Nathanaël Berestycki and Levi Haunschmid-Sibitz. Near-critical dimers and massive SLE. *arXiv :2203.15717v1*, 2022.
- [BLR20] Nathanaël Berestycki, Benoît Laslier, and Gourab Ray. Dimers and imaginary geometry. *The Annals of Probability*, 2020.
- [BN23] N. Berestycki and J.R. Norris. Lectures on Schramm–Loewner Evolution, 2023.
- [BP] Nathanael Berestycki and Ellen Powell. Gaussian free field and liouville quantum gravity.
- [CW19] Dmitry Chelkak and Yijun Wan. On the convergence of massive loop-erased random walks to massive SLE(2) curves. <http://arxiv.org/abs/1903.08045>, 2019.
- [Fre75] David A Freedman. On tail probabilities for martingales. *Annals of Probability*, 1975.
- [Ken09] Richard Kenyon. Lectures on dimers. *arxiv :0910.3129v1*, 2009.
- [KPW00] Richard W. Kenyon, James G. Propp, and David B. Wilson. Trees and matchings. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2000.
- [LSW04] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Annals of probability*, 2004.
- [She64] L. A. Shepp. A local limit theorem. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1964.
- [Ton] Fabio Lucio Toninelli. Lecture notes on the dimer model.
- [Wer03] Wendelin Werner. Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions. *arXiv :math/0303354*, 2003.
- [WP21] Wendelin Werner and Ellen Powell. Lecture notes on the Gaussian Free Field. *arXiv :2004.04720v2*, 2021.

# Annexes





FIGURE 10 – Valeurs de  $3p_1$ ,  $3p_2$ ,  $3p_3$  et  $f^D(\theta)$  en fonction de  $3p_1(\theta)$  pour différentes valeurs de  $m$

**Légende :**

- Violet :  $3p_1$
- Rouge :  $3p_2$
- Jaune :  $3p_3$
- Bleu :  $f^D(\theta)$

On remarque que dans les 3 cas ci-dessus,  $f^D(\theta)$  semble atteindre son minimum en deux points : l'un où  $p_1 = p_3$ , ce qui correspond à  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , et l'autre pour  $p_2 = p_3 < p_1$ , ce qui correspond à  $\theta = 0$ . Or, ici, on a supposé  $p_2 \geq p_3$ . En inversant le rôle de  $p_2$  et  $p_3$ , on obtient aussi un minimum en  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ .