

Stage à l'Institut de Mathématiques de Toulouse : Cohomologie des algèbres associatives (courbées)

Samuel Kalisz
Encadrant : Joan Bellier-Millès

22 avril – 21 juin 2024

Déroulement du stage

Le stage était constitué principalement par la lecture d'articles et de livres mathématiques. Lors de rendez-vous hebdomadaires avec Joan Bellier-Millès, nous déterminions la suite du stage, quels textes étudier, quels calculs tenter d'effectuer.

Introduction

Lorsqu'on étudie les différentes façons de déformer une algèbre associative, la cohomologie de Hochschild associée à cette algèbre porte des informations importantes sur ces déformations. Il est possible de généraliser cette cohomologie pour une algèbre associative courbée, mais on a alors un problème : la cohomologie est toujours triviale.

Pour mieux décrire les algèbres associatives courbées, on peut utiliser plutôt la cohomologie d'André-Quillen. Sa construction nécessite d'utiliser la notion de catégorie de modèles.

1 Définitions préliminaires

Une *algèbre associative* (A, μ) sur un corps k est un k -espace vectoriel A muni d'une multiplication $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ vérifiant : $\forall a, b, c \in A, \mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$.

Une *algèbre graduée* A est la donnée d'une algèbre A , et d'une décomposition $A = \bigoplus_m A_m$ telle que $\forall a \in A_m, \forall b \in A_n, ab \in A_{m+n}$. Pour $a \in A_m$, on note $|a| = m$. Selon les cas étudiés, m peut être à valeurs dans \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Une *algèbre différentielle graduée* (A, d) , ou *dg-algèbre*, est la donnée d'une algèbre graduée A et d'une application linéaire $d : A \rightarrow A$ de degré -1 (ce qui signifie $d(A_m) \subseteq A_{m-1}$), vérifiant $d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}a(db)$ et $d^2 = 0$.

Une *dg-algèbre courbée* (A, d, θ) vérifie les mêmes hypothèses, à l'exception que l'égalité $d^2 = 0$ est remplacée par l'existence d'une *courbure* $\theta \in A_{-2}$ telle que $d^2a = \theta a - a\theta$, avec $d\theta = 0$.

Un *complexe de chaînes sur un anneau* R est une suite $((X_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (d_n : X_n \rightarrow X_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}})$, où X_n est un R -module, et $d_{n-1}d_n = 0$. Un *morphisme de complexes de chaînes* $f : X \rightarrow Y$ est une suite d'applications R -linéaires $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que $d_n f_n = f_{n-1} d_n$. On note $\text{Ch}(R)$ la catégorie des complexes de chaînes sur l'anneau R .

Pour X un complexe de chaînes, on définit son *homologie* $H_\bullet(X)$ par le quotient : $H_n(X) := \ker(d_n) / \text{im}(d_{n+1})$. Toute flèche $f : X \rightarrow Y$ induit donc un morphisme $H_\bullet(f) : H_\bullet(X) \rightarrow H_\bullet(Y)$.

Une *homotopie de chaînes* entre deux morphismes de complexes de chaînes $f, g : A \rightarrow B$ est une application $h : A_\bullet \rightarrow B_{\bullet+1}$ telle que $d_B h + h d_A = f - g$. L'existence d'une homotopie de chaînes implique $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$.

On définit, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

- $S^m \in \text{Ch}(R)$ tel que $(S^m)_m = R$ et $(S^m)_n = 0$ si $n \neq m$; $d = 0$.
- $D^m \in \text{Ch}(R)$ tel que $(D^m)_m = (D^m)_{m-1} = R$ et $(D^m)_n = 0$ si $n \notin \{m, m-1\}$; $d_m = \text{Id}_M$.
Parfois, pour distinguer les deux copies de R , on notera $D^m = R^{(m)} \oplus R^{(m-1)}$, et $x^{(m)}$, $x^{(m-1)}$ l'élément $x \in R$ vu dans l'un ou l'autre.

2 Théorie de la déformation

2.1 Déformation d'une algèbre associative

La notion de déformation formelle d'une algèbre associative est traitée plus en détail dans [4].

Soit (A, μ) une algèbre associative sur un corps k . Le *complexe de Hochschild* de A est noté $CH^\bullet(A, A) := (\{C^n\}_{n \geq 0}, \partial)$ avec $C^n = \text{hom}(A^{\otimes n}, A)$ et $\partial : C^{n-1} \rightarrow C^n$ défini par :

$$\begin{aligned} \partial^{(n-1)} f(a_1, \dots, a_n) &:= a_1 f(a_2, \dots, a_n) + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + (-1)^n f(a_1, \dots, a_{n-1}) a_n. \end{aligned}$$

L'application ∂ vérifie bien $\partial^2 = 0$. C'est donc une différentielle. Pour $f \in C^{n-2}$, on a :

$$\begin{aligned} \partial^2 f(a_1, \dots, a_n) &= a_1 a_2 f(a_3, \dots, a_n) + a_1 \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i f(a_2, \dots, a_{i+1} a_{i+2}, \dots, a_n) + \\ &a_1 (-1)^n f(a_2, \dots, a_{n-1}) a_n - (a_1 a_2) f(a_3, \dots, a_n) + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i a_1 f(a_2, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left[\sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j f(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + \right. \\ &(-1)^{i-1} f(a_1, \dots, a_{i-1} a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1} a_{i+2}, \dots, a_n) + \\ &\left. \sum_{j=i+2}^{n-1} (-1)^{j-1} f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_n) \right] + \\ &\sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i (-1)^{n-1} f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n-1}) a_n + (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} f(a_1, \dots, a_{n-2}) (a_{n-1} a_n) + \\ &(-1)^n a_1 f(a_2, \dots, a_{n-1}) a_n + (-1)^n \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + \\ &(-1)^n (-1)^{n-1} a_1 f(a_2, \dots, a_{n-1}) a_n = 0. \end{aligned}$$

On pose alors $Z^n := \ker \partial^{(n)}$, $B^n := \text{im } \partial^{(n-1)}$, et on note $HH^n(A, A) = Z^n / B^n$ la *cohomologie de Hochschild* de A .

Notons $A[[t]]$ le $k[[t]]$ -module des séries entières formelles à coefficients dans A . Une *déformation formelle* de A est la donnée d'un produit sur $A[[t]]$, qui coïncide avec la multiplication sur A . Plus formellement :

Définition 2.1. Une déformation formelle à un paramètre de A est une série entière formelle $M = \sum_n \mu_n t^n$, avec $\mu_n \in \text{hom}(A \otimes A, A)$, telle que $\mu_0 = \mu$. La déformation est dite associative si elle munit $A[[t]]$ d'une structure de $k[[t]]$ -algèbre, i.e. : $\forall a, b, c \in A$, $M(M(a, b), c) = M(a, M(b, c))$. On note $A[[t]]_M$ ou A_M la structure obtenue.

On remarque que dans cette définition, M n'est définie que sur $A \otimes A$. Cela suffit pour l'étendre $k[[t]]$ -linéairement sur $A[[t]] \otimes_{k[[t]]} A[[t]]$.

Étant donnés $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$, à quelles conditions peut-on construire une déformation associative dont les premiers termes soient ceux-ci ?

Une déformation M est associative si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in A, \sum_n \sum_{i=0}^n \mu_i(\mu_{n-i}(a, b), c)t^n &= \sum_n \sum_{i=0}^n \mu_i(a, \mu_{n-i}(b, c))t^n \\ \text{i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in A, \sum_{i=0}^n \mu_i(\mu_{n-i}(a, b), c) &= \sum_{i=0}^n \mu_i(a, \mu_{n-i}(b, c)) \\ \text{i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in A, \partial\mu_n &= \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i(\mu_{n-i}(a, b), c) - \mu_i(a, \mu_{n-i}(b, c))). \end{aligned}$$

Si μ_0, \dots, μ_{n-1} vérifient cette relation pour tout $n' < n$ (« $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i t^i$ est associative modulo t^n »), le terme de droite dans la dernière égalité, noté Obs_n , est l'obstruction à étendre $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i t^i$ en une déformation associative modulo t^{n+1} . On peut démontrer que c'est un 3-cocycle de la cohomologie de Hochschild, c'est-à-dire $\partial Obs_n = 0$. Par conséquent, on peut étendre $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i t^i$ si et seulement si l'obstruction est un 3-cobord.

En particulier, si $HH^3(A, A) = 0$, alors toute déformation finie $\sum_{n=0}^N \mu_n t^n$ associative modulo t^{N+1} peut s'étendre en une déformation associative $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n$.

Un autre problème qu'on peut poser concernant les déformations algébriques est celui des morphismes entre déformations d'une même algèbre.

Définition 2.2. Soient A_M et A_N deux déformations associatives de A . Un isomorphisme formel est une application $\Psi : A_M \rightarrow A_N$, $k[[t]]$ -linéaire, pouvant s'écrire : $\Psi(a) = a + \psi_1(a)t + \psi_2(a)t^2 + \dots$. C'est un isomorphisme algébrique si c'est un morphisme d'algèbre, i.e. s'il préserve la multiplication. On dit alors que A_M et A_N sont équivalentes.

Ces morphismes sont bien des isomorphismes, car leur coefficient dominant $\psi_0 = \text{Id}$ est inversible.

Comme précédemment, si l'on suppose que $\psi_0 + \psi_1 t + \dots + \psi_{n-1} t^{n-1}$ est algébrique modulo t^n , alors $\psi_0 + \psi_1 t + \dots + \psi_n t^n$ est algébrique modulo t^{n+1} si et seulement si :

$$\forall a, b \in A, \partial\psi_n(a, b) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i \neq n}} \psi_i(\mu_j(a, b)) - \sum_{\substack{i+j+k=n \\ j, k \neq n}} \nu_i(\psi_j(a), \psi_k(b))$$

Le terme de droite est l'obstruction à la prolongation, c'est cette fois-ci un 2-cocycle. Si toutes les obstructions successives sont des 2-cobords, alors on peut construire $\Psi = \sum \psi_n t^n$ algébrique entre A_M et A_N . En particulier, si $HH^2(A, A) = 0$, alors toutes les déformations de A sont équivalentes à la déformation triviale A_K définie par $K(a, b) = ab$.

2.2 Déformation d'une algèbre courbée

On généralise les définitions vues pour les déformations d'une algèbre associative.

Définition 2.3. Une déformation formelle (A_M, D, Θ) d'une dg-algèbre associative courbée (A, d, θ) est la donnée d'une déformation formelle A_M de l'algèbre A , ainsi que de $D = \sum_n d_n \cdot t^n$, $\Theta = \sum_n \theta_n t^n$, avec $d_n : A_{\bullet} \rightarrow A_{\bullet-1}$, $\theta_n \in A_{-2}$, et $d_0 = d$, $\theta_0 = \theta$.

Une « bonne » propriété pour une telle déformation serait de conserver une structure de dg-algèbre courbée, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} M \text{ associative} \\ D(M(a, b)) = M(Da, b) + (-1)^{|a|} M(a, Db) \\ D^2 a = M(\Theta, a) - M(a, \Theta) \\ D\Theta = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\forall n, \begin{cases} \sum_{i=0}^n \mu_i(\mu_{n-i}(a, b), c) = \sum_{i=0}^n \mu_i(a, \mu_{n-i}(b, c)) \\ \sum_{i=0}^n d_i(\mu_{n-i}(a, b)) = \sum_{i=0}^n (\mu_{n-i}(d_i a, b) + (-1)^{|a|} \mu_{n-i}(a, d_i b)) \\ \sum_{i=0}^n d_i d_{n-i} a = \sum_{i=0}^n (\mu_{n-i}(\theta_i, a) - \mu_{n-i}(a, \theta_i)) \\ \sum_{i=0}^n d_i \theta_{n-i} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Pour construire un complexe de cochaînes adapté, il faut d'abord attribuer un degré cohomologique aux applications k -linéaires $\text{hom}(A^{\otimes n}, A)$. Une application $f \in \text{hom}(A^{\otimes n}, A)$ est de degré m si pour tout m_1, \dots, m_n , on a $f(A_{m_1} \otimes \dots \otimes A_{m_n}) \subseteq A_{m_1 + \dots + m_n + n - m}$. On nomme $\text{hom}(A^{\otimes n}, A)^m$ le module de ces fonctions.

On peut alors prendre pour complexe $C^m := \prod_{n \geq 0} \text{hom}(A^{\otimes n}, A)^m = \text{hom}(\bigoplus_{n \geq 0} A^{\otimes n}, A)^m$. Un élément de C^m est de la forme $f = \{f_n\}_{n \geq 0}$. On prend alors pour différentielle $\partial f = \{g_n\}_{n \geq 0}$,

$$\begin{aligned} g_n(a_1, \dots, a_n) := & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f_{n+1}(a_1, \dots, a_{i-1}, \theta, a_i, \dots, a_n) + (-1)^{n+1} df_n(a_1, \dots, a_n) + \\ & \sum_{i=1}^n (-1)^{\sum_{j < i} |a_j| + m} f_n(a_1, \dots, a_{i-1}, da_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + \\ & (-1)^{(n-1-m)|a_1|} a_1 f_{n-1}(a_2, \dots, a_n) + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f_{n-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n) + (-1)^n f_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) a_n \end{aligned}$$

Dans ce contexte, $\theta_n \oplus d_n \oplus \mu_n \in C^2$, et (1) se reformule en une égalité de la forme $\partial(\theta_n \oplus d_n \oplus \mu_n) = \text{Obs}$, où Obs est un 3-cocycle dépendant des termes d'ordre inférieur à $n - 1$.

2.3 Limites de cette cohomologie

Cependant, cette cohomologie pose problème. En effet, le résultat suivant, présenté dans [2] (en tant que Théorème 1.5) et admis dans le cadre de ce stage, implique que la cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative courbée ne porte aucune information sur l'algèbre elle-même.

Théorème 2.4. *Pour toute algèbre associative courbée A , on a $HH^\bullet(A) = 0$.*

Par conséquent, il faut chercher un autre outil pour caractériser une algèbre associative courbée par une cohomologie.

3 Catégories de modèles

3.1 Définition des catégories de modèles

Les définitions et résultats généraux de cette section sont tirés de [6] et [3]. Soient \mathcal{C} , \mathcal{D} deux catégories, où \mathcal{D} est petite. On définit $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ la *catégorie des foncteurs de \mathcal{D} vers \mathcal{C}* , ou des *diagrammes dans \mathcal{C} de forme \mathcal{D}* , comme la catégorie dont les objets sont les foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, et dont les morphismes sont les transformations naturelles. En particulier, pour $\mathcal{D} = a \rightarrow b$, $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ est la *catégorie des morphismes de \mathcal{C}* , notée $Mor(\mathcal{C})$.

Si X et Y sont deux objets d'une catégorie \mathcal{C} , on dit que X est un *rétracte de Y* s'il existe deux morphismes $i : X \rightarrow Y$, $r : Y \rightarrow X$ tels que $ri = \text{Id}_X$. Dans le cas de la catégorie des morphismes d'une catégorie \mathcal{C} , cela signifie l'existence de i, i', r, r' tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ Y & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{r'} & Y \end{array}$$

On définit le foncteur $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ par $\Delta(X) : Y \in \mathcal{D} \mapsto X$, $f \mapsto \text{Id}_X$, et pour $g : X \rightarrow X'$, $\Delta(g)$ associe le morphisme g à tout objet Y de \mathcal{D} .

Soit $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Une *colimite* de F est un objet C de \mathcal{C} muni d'une transformation naturelle $t : F \rightarrow \Delta(C)$, tel que pour tout objet X de \mathcal{C} et toute transformation naturelle $s : F \rightarrow \Delta(X)$, il existe un unique morphisme $s' : C \rightarrow X$ telle que $\Delta(s')t = s$.

Dualement, une *limite* de F est un objet L de \mathcal{C} muni d'une transformation naturelle $t : \Delta(L) \rightarrow F$, tel que pour tout objet X de \mathcal{C} et toute transformation naturelle $s : \Delta(X) \rightarrow F$, il existe un unique morphisme $s' : X \rightarrow L$ telle que $t\Delta(s') = s$.

Les limites et colimites sont uniques à isomorphisme près, on peut donc parler de « la » limite ou colimite d'un diagramme.

Quelques cas particuliers, dans le cas où ces limites et colimites existent :

- Si \mathcal{D} est la catégorie sans morphismes dont les objets sont les éléments de l'ensemble I , alors un foncteur $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ correspond à une famille $(X_i)_{i \in I}$. La colimite est alors appelée *coproduit*, et notée $\coprod_{i \in I} X_i$.
- Si $\mathcal{D} = \{b \leftarrow a \rightarrow c\}$, alors la colimite C d'un foncteur $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est appelée la *somme amalgamée* du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \longrightarrow & F(c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(b) & \dashrightarrow & C \end{array}$$

- Si \mathcal{D} est la catégorie vide, alors le seul objet de $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ est le foncteur vide. Sa colimite, notée \emptyset , est un objet initial : $\forall X, \exists! \emptyset \rightarrow X$. Sa limite, notée $*$, est un objet terminal : $\forall X, \exists! X \rightarrow *$.

Soient $i : X \rightarrow Y$, $p : X' \rightarrow Y'$. On dit que i a la *propriété de relèvement à gauche (LLP) relativement à p* , et que p a la *propriété de relèvement à droite (RLP) relativement à i* , si pour tout diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

il existe un relèvement $h : Y \rightarrow X'$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

Définition 3.1. Une catégorie de modèles est une catégorie \mathcal{C} munie de trois classes de morphismes, stables par composition et comprenant les identités : les équivalences faibles \mathcal{W} , les cofibrations Cof , et les fibrations Fib . Elle doit vérifier les axiomes suivants :

1. Pour toute catégorie finie \mathcal{D} , tout diagramme dans \mathcal{C} possède limite et colimite.
2. Pour toutes flèches composables f et g , si deux flèches parmi f , g et $f \circ g$ sont dans \mathcal{W} , alors la troisième également (« propriété du deux sur trois »).
3. \mathcal{W} , Cof et Fib sont stables par rétracte.
4. (a) $Cof \cap \mathcal{W}$ a LLP relativement à Fib .
(b) Cof a LLP relativement à $Fib \cap \mathcal{W}$.
5. Toute flèche f peut se factoriser :
(a) en $f = pi$ avec $i \in Cof$, $p \in Fib \cap \mathcal{W}$;
(b) en $f = pi$ avec $i \in Cof \cap \mathcal{W}$, $p \in Fib$.

On appelle *cofibrations triviales* les flèches de $Cof \cap \mathcal{W}$, et *fibrations triviales* les flèches de $Fib \cap \mathcal{W}$

Lemme 3.2 (Argument du rétracte). Supposons $f = pi$, où f a LLP relativement à p . Alors f est un rétracte de i . Dualement, si $f = pi$ a RLP relativement à i , alors f est un rétracte de p .

Démonstration. Le diagramme suivant montre la manière de montrer le second point. Le premier se démontre de la même manière.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow i & \nearrow \exists r & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{p} & C \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow f & & \downarrow p & & \downarrow f \\ C & \xlongequal{\quad} & C & \xlongequal{\quad} & C \end{array} \end{array}$$

□

L'argument du rétracte permet de déduire que l'axiome (4) est en réalité une caractérisation de Cof , Fib , $Cof \cap \mathcal{W}$ et $Fib \cap \mathcal{W}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in Cof \iff f \text{ a LLP relativement à } Fib \cap \mathcal{W} \\ f \in Cof \cap \mathcal{W} \iff f \text{ a LLP relativement à } Fib \\ f \in Fib \iff f \text{ a RLP relativement à } Cof \cap \mathcal{W} \\ f \in Fib \cap \mathcal{W} \iff f \text{ a RLP relativement à } Cof \end{array} \right.$$

Par exemple, pour prouver la première équivalence, prenons f ayant LLP relativement à Fib . Par l'axiome (5b), on factorise $f = pi$, avec $i \in Cof \cap \mathcal{W}$, $p \in Fib$. Alors par l'argument du rétracte, f est un rétracte de p , et donc $f \in Cof \cap \mathcal{W}$ par l'axiome (3).

À partir d'une structure de catégorie de modèle, on peut définir la catégorie homotopique associée.

Notons d'abord $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{W}^{-1})$ la catégorie libre engendrée par \mathcal{C} et par les inverses des flèches de \mathcal{W} . Ses objets sont les objets de \mathcal{C} , et ses morphismes sont de la forme (f_1, \dots, f_n) , où les f_i sont des flèches composables, et sont des morphismes de \mathcal{C} ou des inverses de morphismes dans \mathcal{W} . La catégorie homotopique $\text{Ho}\mathcal{C}$ est le quotient de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{W}^{-1})$ par la relation d'équivalence \sim engendrée par les relations :

$$\begin{cases} (\text{Id}_A) \sim \text{Id}_A \\ (f, g) \sim g \circ f \text{ si } f, g \text{ flèches de } \mathcal{C} \\ (w, w^{-1}) \sim \text{Id}, (w^{-1}, w) \sim \text{Id} \text{ si } w \in \mathcal{W} \end{cases}$$

Certains foncteurs, dits « foncteurs de Quillen », préservent les structures de catégories de modèles, dans le sens décrit ci-après.

Définition 3.3. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories de modèles.

- $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur de Quillen à gauche si c'est un adjoint à gauche, et s'il préserve les cofibrations et les cofibrations triviales.
- $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur de Quillen à droite si c'est un adjoint à droite, et s'il préserve les fibrations et les fibrations triviales.
- L'adjonction (F, U) est une adjonction de Quillen si F est un foncteur de Quillen à gauche, et U un foncteur de Quillen à droite.

3.2 Catégories de modèles cofibrement engendrées

L'axiome (4) des catégories de modèles implique que pour définir une catégorie de modèles, il suffit de connaître \mathcal{W} et Cof . Formaliser cette méthode nécessite des définitions préalables.

Tout ordinal λ peut être vu comme la petite catégorie dont les objets sont les éléments de λ , et dont les flèches sont les inclusions.

Définition 3.4. Soit \mathcal{C} une catégorie ayant limites et colimites associées à toute petite catégorie (« \mathcal{C} a des petites limites et colimites »). Soit λ un ordinal. Une λ -suite est un foncteur $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ préservant les colimites. On la note :

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_\beta \rightarrow X_{\beta+1} \rightarrow \dots$$

La flèche $X_0 \rightarrow \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$ donnée par la définition de la colimite est appelée la composition transfinie de la suite.

Définition 3.5. Pour tout cardinal κ , un ordinal limite α est κ -filtré si :

$$\forall A \subseteq \alpha, |A| \leq \kappa \Rightarrow \sup A < \alpha$$

Soit \mathcal{D} une collection de morphismes. Un objet A d'une catégorie \mathcal{C} est κ -petit relativement à \mathcal{D} si pour tout ordinal λ κ -filtré, et pour toute λ -suite X dont les flèches $X_\beta \rightarrow X_{\beta+1}$ sont dans \mathcal{D} , on a : $\text{colim}_{\beta < \lambda} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, X_\beta) \xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta)$.

Un objet est petit s'il est κ -petit relativement à $\text{hom}_{\mathcal{C}}$ tout entier pour un certain cardinal κ .

Soit I une classe de flèches dans une catégorie \mathcal{C} .

Définition 3.6. Une flèche f est :

- I -injective si elle a RLP relativement à I , on note $f \in I\text{-inj}$.
- I -projective si elle a LLP relativement à I , on note $f \in I\text{-proj}$.
- une I -cofibration si elle a LLP relativement à $I\text{-inj}$, on note $f \in I\text{-cof}$.
- une I -fibration si elle a RLP relativement à $I\text{-proj}$, on note $f \in I\text{-fib}$.

Une flèche f est un complexe I -cellulaire si c'est une composition transfinie de sommes amalgamées d'éléments de I , on note $f \in I\text{-cell}$.

Lemme 3.7. Si \mathcal{C} a des petites colimites, alors $I\text{-cell} \subseteq I\text{-cof}$.

Théorème 3.8 (Argument du petit objet). Supposons que les domaines des flèches de I sont petits relativement à $I\text{-cell}$. Alors il existe deux foncteurs $\gamma, \delta : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$ tels que toute flèche f de \mathcal{C} vérifie : $f = \delta(f) \circ \gamma(f)$, $\gamma(f) \in I\text{-cell}$, $\delta(f) \in I\text{-inj}$.

Démonstration. Soit κ un cardinal tel que le domaine de toute flèche de I soit κ -petit relativement à $I\text{-cell}$. Soit λ un ordinal κ -filtré.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une flèche de \mathcal{C} . Par induction transfinie, on commence par construire une λ -suite $Z^f : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ fonctorielle en f , avec $Z_0^f = X$, et une transformation naturelle $\rho^f : Z^f \rightarrow Y$

telle que f se factorise en $X = Z_0^f \rightarrow Z_\beta^f \xrightarrow{\rho_\beta^f} Y$:

- $Z_0^f = X$, $\rho_0^f = f$
- Si β est un ordinal limite, $Z_\beta^f = \text{colim}_{\alpha < \beta} Z_\alpha^f$, et ρ_β^f est induite par les ρ_α , $\alpha < \beta$.
- Soit β un ordinal pour lequel on a construit Z_β^f et ρ_β^f . Construisons $Z_{\beta+1}^f$ et $\rho_{\beta+1}^f$.
Posons S_β l'ensembles des diagrammes commutatifs s de la forme :

$$\begin{array}{ccc} A_s & \longrightarrow & Z_\beta^f \\ g_s \downarrow & & \downarrow \rho_\beta^f \\ B_s & \longrightarrow & Y \end{array}$$

tels que $g_s \in I$. On définit alors $Z_{\beta+1}^f$ comme le pushout :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{s \in S_\beta} A_s & \longrightarrow & Z_\beta^f \\ \coprod_{s \in S_\beta} g_s \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{s \in S_\beta} B_s & \longrightarrow & Z_{\beta+1}^f \end{array}$$

et $\rho_{\beta+1}^f$ est induite par ρ_β^f .

On peut alors poser $\gamma(f)$ la composition de Z^f , et $\delta(f) : E_f = \text{colim} Z^f \rightarrow Y$ induite par ρ^f . Cette définition donne directement $\delta(f) \circ \gamma(f) = f$ et $\gamma(f) \in I\text{-cell}$. Il reste à vérifier $\delta(f) \in I\text{-inj}$.

Soit $g \in I$, et prenons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & E_f \\ g \downarrow & & \downarrow \delta(f) \\ B & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

Par hypothèse, A est κ -petit relativement à $I\text{-cell}$. Il existe donc $\beta < \lambda$ tel que h se factorise en

$A \xrightarrow{h_\beta} Z_\beta^f \rightarrow E_f$. Le relèvement est donné par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h} & E_f \\
 \downarrow g & \searrow h_\beta & \nearrow \delta(f) \\
 & Z_\beta^f & \\
 & \downarrow & \\
 & Z_{\beta+1}^f & \\
 \nearrow k_\beta & & \searrow \rho_{\beta+1}^f \\
 B & \xrightarrow{k} & Y
 \end{array}$$

où k_β est donné par la construction de $Z_{\beta+1}^f$. □

Définition 3.9. Une catégorie de modèles \mathcal{C} est dite cofibrement engendrée s'il existe deux ensembles de flèches I, J tels que :

1. Les domaines de I sont petits relativement à I -cell (i.e. I permet l'argument du petit objet).
2. Les domaines de J sont petits relativement à J -cell (i.e. J permet l'argument du petit objet).
3. $\text{Fib} = J\text{-inj}$.
4. $\text{Fib} \cap \mathcal{W} = I\text{-inj}$.

L'ensemble I est appelé ensemble des cofibrations génératrices, et l'ensemble J , ensemble des cofibrations triviales génératrices.

Proposition 3.10. Si \mathcal{C} est une catégorie de modèles cofibrement engendrée, avec I et J respectivement les ensembles des cofibrations génératrices et des cofibrations triviales génératrices, alors on a les propriétés suivantes :

1. $\text{Cof} = I\text{-cof}$.
2. $\text{Cof} \cap \mathcal{W} = J\text{-cof}$.
3. Toute cofibration est un rétracte d'un complexe I -cellulaire.
4. Toute cofibration triviale est un rétracte d'un complexe J -cellulaire.
5. Les domaines de I sont petits relativement à Cof .
6. Les domaines de J sont petits relativement à $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$.

Pour une telle catégorie de modèles, la seule connaissance de \mathcal{W}, I et J suffit à caractériser la structure toute entière.

Théorème 3.11. Soit \mathcal{C} une catégorie ayant des petites limites et colimites, ainsi qu'une classe \mathcal{W} et deux ensembles I, J de flèches. Il existe une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée, avec \mathcal{W} comme équivalences faibles, I comme cofibrations génératrices et J comme cofibrations triviales génératrices, si et seulement si :

1. \mathcal{W} vérifie la propriété du deux sur trois et est clos par rétracte
2. Les domaines de I sont petits relativement à I -cell
3. Les domaines de J sont petits relativement à J -cell
4. $J\text{-cell} \subseteq \mathcal{W} \cap I\text{-cof}$
5. $I\text{-inj} \subseteq \mathcal{W} \cap J\text{-inj}$
6. $\mathcal{W} \cap I\text{-cof} \subseteq J\text{-cof}$ ou $\mathcal{W} \cap J\text{-inj} \subseteq I\text{-inj}$.

Démonstration. Si $\mathcal{C}, \mathcal{W}, I$ et J induisent une catégorie de modèles cofibrement engendrée, alors ces propriétés sont bien satisfaites. Il suffit de montrer le sens réciproque. Supposons les six propriétés, et montrons que $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, Fib = J\text{-inj}, Cof = I\text{-cof})$ est bien une catégorie de modèles cofibrement engendrée.

Les axiomes 1 et 2 des catégories de modèles sont ici supposés, et l'axiome 3 découle du fait que les rétractes préservent les relèvements. Il suffit donc de montrer les axiomes 4 et 5.

L'argument du petit objet, appliqué pour I et J , donne les factorisations de l'axiome 5.

Pour l'axiome 4, on utilise le point 6, et ses deux cas se traitent de façon semblable. Supposons donc $\mathcal{W} \cap J\text{-inj} \subseteq I\text{-inj}$.

- Soit $i \in Cof = I\text{-cof}, p \in \mathcal{W} \cap Fib = \mathcal{W} \cap J\text{-inj}$. Alors $p \in I\text{-inj}$, et donc p a LLP relativement à i .
- Soit $i \in \mathcal{W} \cap Cof = \mathcal{W} \cap I\text{-cof}, p \in Fib = J\text{-inj}$. Par l'argument du petit objet, on factorise $i = \delta(i) \circ \gamma(i)$, avec $\gamma(i) \in J\text{-cell} \subseteq \mathcal{W} \cap I\text{-cof}$ et $\delta(i) \in J\text{-inj}$. Par la propriété du deux sur trois, $\delta(i) \in \mathcal{W} \cap J\text{-inj}$: c'est une fibration triviale. D'après le point précédent, i a LLP relativement à $\delta(i)$. Par l'argument du rétracte, i est donc un rétracte de $\gamma(i)$, d'où $i \in J\text{-cof}$ (car $\gamma(i) \in J\text{-cof}$). Donc i a LLP relativement à $p \in J\text{-inj}$.

La catégorie \mathcal{C} , munie de $\mathcal{W}, Fib = J\text{-inj}$ et $Cof = I\text{-cof}$, est bien une catégorie de modèles. Pour vérifier qu'elle est cofibrement générée, il suffit de vérifier $Fib \cap \mathcal{W} = I\text{-inj}$, i.e. $\mathcal{W} \cap J\text{-inj} = I\text{-inj}$.

Par le point 5, on a l'inclusion $I\text{-inj} \subseteq \mathcal{W} \cap J\text{-inj}$. Réciproquement, soit f une fibration triviale. Alors f a RLP relativement à Cof , donc f a aussi RLP relativement à I , d'où $f \in I\text{-inj}$. \square

Sous certaines hypothèses, une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée peut être « transportée » par une adjonction. Le résultat suivant est présenté dans la section 11.3 de [5].

Théorème 3.12 (Transfert de catégories de modèles cofibrement engendrées). *Soit \mathcal{C} catégorie de modèles cofibrement engendrée, avec I et J ensembles des cofibrations génératrices et des cofibrations triviales génératrices respectivement. Soit \mathcal{D} une catégorie ayant des petites limites et colimites, et $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ une adjonction. Notons $FI = \{Fu | u \in I\}$, $FJ = \{Fu | u \in J\}$. Si :*

1. FI, FJ permettent l'argument du petit objet
2. $U(FJ\text{-cell}) \subseteq \mathcal{W}$

alors il existe une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée sur \mathcal{D} , où :

- les équivalences faibles sont $U^{-1}(\mathcal{W})$
- les cofibrations génératrices sont FI
- les cofibrations triviales génératrices sont FJ

3.3 Application aux complexes de chaînes et aux dg-algèbres

3.3.1 Catégorie de modèles des complexes de chaînes

Proposition 3.13. *Prenons I l'ensemble des flèches $S^{m-1} \rightarrow D^m$, et J l'ensemble des flèches $0 \rightarrow D^m$, $m \in \mathbb{Z}$. Alors, on peut appliquer le théorème 3.11 pour construire une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée sur $\text{Ch}(R)$, avec $Cof = I\text{-cof}$, $Fib = J\text{-inj}$, et où les équivalences faibles sont les flèches f telles que $H_\bullet(f)$ est un isomorphisme.*

- Les limites et colimites peuvent être calculées degré par degré, ce qui ramène le problème de leur existence au cas de la catégorie des R -modules, et cette dernière a des petites limites et colimites.
- \mathcal{W} vérifie la propriété du deux sur trois, par functorialité de l'homologie.
- I et J permettent l'argument du petit objet, car tout objet de $\text{Ch}(R)$ est petit.
- Il reste à montrer $J\text{-cell} \subseteq \mathcal{W} \cap J\text{-cof}$, $I\text{-inj} \subseteq \mathcal{W} \cap J\text{-inj}$, et $\mathcal{W} \cap J\text{-inj} \subseteq I\text{-inj}$. Ces points nécessitent une étude plus détaillée de cette hypothétique structure de modèles sur $\text{Ch}(R)$.

Proposition 3.14. *Une flèche $p : X \rightarrow Y$ est une fibration si et seulement si elle est surjective.*

Démonstration. La flèche p est une fibration si et seulement si tout diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

admet un relèvement $g : D^n \rightarrow X$. Or, un tel diagramme est entièrement déterminé par un paramètre $y \in Y$ défini par $y = f_n(1)$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow \\ Y_{n+1} & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Y_{n-1} & \longrightarrow & Y_{n-2} \end{array}$$

puisque $f_{n-1} = df_n$.

De plus, un relèvement g de ce diagramme correspond à un $x \in X$, défini de manière similaire à y par $x = g_n(1)$, tel que $px = y$. Par conséquent, tout diagramme admet un relèvement si et seulement si tout $y \in Y$ admet un antécédent par p , i.e. p est surjective. \square

Proposition 3.15. *L'ensemble des fibrations triviales est I -inj, i.e. I -inj = $\mathcal{W} \cap J$ -inj.*

Démonstration. Une flèche p appartient à I -inj si et seulement si tout diagramme de la forme suivante admet un relèvement :

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Un tel diagramme est entièrement déterminé par un paramètre (x, y) défini par $x = f(1)$, $y = g(1^{(n)})$ dans $\{(x, y) \in Z_{n-1}X \oplus Y_n \mid px = dy\}$, et un relèvement correspond à un élément $z \in X_n$ tel que $pz = x$, $dz = y$.

- Supposons $p \in I$ -inj, alors un relèvement existe toujours.
- Considérons le diagramme donné par le paramètre $(0, y)$ (correspondant au cas $f = 0$). On a alors un $z \in X_n$ tel que $pz = y$ et $dz = 0$. Donc $Z_n p : Z_n X \rightarrow Z_n Y$ est surjective, et $H_n p$ également.
- Soit $y \in Y_n$. Alors $dy \in Z_{n-1}Y$, donc $\exists x \in Z_{n-1}X$, $px = dy$. Le diagramme paramétré par (x, y) admet un relèvement, paramétré par $z \in X_n$, et $pz = y$. Donc p est surjective.
- Soit $x \in Z_n X$ tel que la classe de x dans $H_n X$ soit dans $\ker H_n p$, i.e. $\exists y \in Y_{n+1}$, $px = dy$. Alors le diagramme paramétré par (x, y) admet un relèvement : $\exists z \in Z_{n+1}$, $dz = x$, donc $x \in B_n X$. Donc $H_n p$ est injective.

La flèche p est alors bien une fibration et une équivalence faible.

- Supposons que p est une fibration triviale. Soit $(x, y) \in Z_{n-1}X \oplus Y_n$ tel que $px = dy$. Montrons : $\exists z \in X_n$, $pz = y$, $dz = x$.

Puisque p est surjective, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{p} Y \rightarrow 0$. Puisque p est une équivalence faible, $H_\bullet K = 0$. On trouve alors z par chasse au diagramme dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{p} & Y_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} & \xrightarrow{p} & Y_{n-1} \longrightarrow 0. \end{array}$$

\square

3.3.2 Catégorie de modèles des dg-algèbres associatives

Considérons l'adjonction (F, U) entre $\text{Ch}(R)$ et la catégorie dg-alg des dg-algèbres associatives, telle que :

- $F : \text{Ch}(R) \rightarrow \text{dg-alg}$ est le foncteur d'algèbre associative libre : $F(A) = TA = \bigoplus_{n \geq 1} A^{\otimes n}$, muni du produit \otimes ;
- $U : \text{dg-alg} \rightarrow \text{Ch}(R)$ est le foncteur d'oubli.

Proposition 3.16. *L'adjonction (F, U) permet de transférer la structure de catégorie de modèles cofibrement engendrés de $\text{Ch}(R)$ sur dg-alg.*

Démonstration. Vérifions les hypothèses du théorème 3.12.

Tout objet de dg-alg est petit, donc FI et FJ permettent l'argument du petit objet. Il reste à montrer que $U(FJ\text{-cell}) \subseteq \mathcal{W}$.

$FJ = \{0 \rightarrow TD^n | n \in \mathbb{Z}\}$, avec $TD^n = \bigoplus_{k \geq 1} (R \oplus R)^{\otimes k}$, et pour degré : $|a \oplus 0| = n - 1$, $|0 \oplus a| = n$.

Soit $(f : A \rightarrow B) \in FJ\text{-cell}$. Il existe donc une λ -suite X dans dg-alg telle que f soit la composition de λ , et que pour tout $\beta+1 < \lambda$, $(X_\beta \rightarrow X_{\beta+1})$ est un pushout d'une flèche $0 \rightarrow TD^{n_\beta}$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ TD^{n_\beta} & \longrightarrow & X_{\beta+1} \end{array}$$

ce qui signifie que $X_{\beta+1} = X_\beta \amalg TD^{n_\beta}$, et donc que $f : A \rightarrow B = A \amalg \coprod_{\beta+1 < \lambda} TD^{n_\beta}$.

Montrons d'abord que $H_n(U(\coprod_{\beta+1 < \lambda} TD^{n_\beta})) = 0$. On va pour cela utiliser la notion d'homotopie de chaînes.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $h_n : D_\bullet^n \rightarrow D_{\bullet+1}^n$ définie comme l'identité entre D_{n-1}^n et D_n^n , et la fonction nulle aux autres degrés. On a alors : $dh_n + h_n d = \text{Id}$. La fonction h est donc une homotopie de chaîne entre Id et la fonction nulle.

Passons à TD^n . On a $TD^n = \bigoplus_{k \geq 1} (D^n)^{\otimes k}$, et pour $x_1, \dots, x_k \in D^n$, chacun ayant un degré unique,

$$d(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{|x_1| + \dots + |x_{j-1}|} x_1 \otimes \dots \otimes x_{j-1} \otimes dx_j \otimes x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_k.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons $\tilde{h}_n : TD^n \rightarrow TD^n$ défini par $\tilde{h}_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = h_n(x_1) \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k$. On a alors :

$$\begin{aligned} (d\tilde{h}_n + \tilde{h}_n d)(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) &= (dh_n + h_n d)(x_1) \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k + \\ &\quad \sum_{j=2}^k (-1)^{|h_n(x_1)| + |x_2| + \dots + |x_{j-1}|} h_n(x_1) \otimes \dots \otimes dx_j \otimes \dots \otimes x_k + \\ &\quad \sum_{j=2}^k (-1)^{|x_1| + \dots + |x_{j-1}|} h_n(x_1) \otimes \dots \otimes dx_j \otimes \dots \otimes x_k \\ &= x_1 \otimes \dots \otimes x_k \end{aligned}$$

Donc \tilde{h}_n est une homotopie de chaînes entre Id_{TD^n} et 0.

Le cas de $\coprod_{\beta+1 < \lambda} TD^{n_\beta}$ se traite de manière similaire. Déterminons d'abord d'expression de ce coproduit.

Proposition 3.17. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de dg-algèbres associatives. Alors, en notant \tilde{X} l'algèbre libre engendrée par l'union disjointe des X_i , le coproduit de cette famille est le quotient de \tilde{X} par la relation d'équivalence engendrée par : $\forall i \in I, \forall x_i, y_i \in X_i, x_i \otimes y_i \sim x_i y_i$.*

Démonstration. Soit $(f_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$. Montrons qu'il existe un unique $f : \tilde{X} / \sim \rightarrow Y$ tel que pour tout $i \in I$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y \\ \downarrow & \nearrow f & \\ \coprod_{i \in I} X_i & & \end{array}$$

Tout d'abord, $(\tilde{X} / \sim) = \bigoplus_{\substack{k \geq 1 \\ i_1, \dots, i_k \in I, i_{j+1} \neq i_j}} (X_{i_1} \otimes \dots \otimes X_{i_k})$. Nécessairement, $f(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = f(x_1) \dots f(x_k)$, d'où, pour $x_n \in X_{i_n} : f(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = f_{i_1}(x_1) \dots f_{i_k}(x_k)$. On a l'unicité, et l'existence car un f ainsi défini fonctionne bien. \square

Par conséquent,

$$\prod_{i \in I} TD^{n_i} = \bigoplus_{\substack{k \geq 1 \\ i_1, \dots, i_k \in I, i_{j+1} \neq i_j}} (TD^{n_{i_1}} \otimes \dots \otimes TD^{n_{i_k}})$$

On pose alors $\tilde{h} : \prod_{i \in I} TD^{n_i} \rightarrow \prod_{i \in I} TD^{n_i}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_k) \in TD^{n_{i_1}} \times \dots \times TD^{n_{i_k}}, \tilde{h}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \tilde{h}_{n_{i_1}}(x_1) \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k$$

De même que précédemment, \tilde{h} est une homotopie de chaîne entre Id et 0.

L'application f est donc de la forme $A \rightarrow A \amalg \Delta$, où Δ admet une homotopie de chaîne \tilde{h} entre Id_Δ et 0. Montrons que $H_\bullet(f)$ est bijective.

Le complexe de chaînes $U(A \amalg \Delta)$ est la somme directe de tous les complexes de chaînes de la forme $(A \otimes \Delta)^{\otimes k}$, $(\Delta \otimes A)^{\otimes k}$, $\Delta \otimes (A \otimes \Delta)^{\otimes k}$, et $A \otimes (\Delta \otimes A)^{\otimes k}$, avec $k \geq 0$; l'application f est l'injection de A dans cette somme directe. Il suffit donc de montrer que chacun des autres complexes de chaînes a une homologie triviale.

Soit Y un tel complexe. C'est un produit tensoriel de k copies de A ou Δ , comportant au moins un Δ à l'indice $i_0 : \forall x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in Y, x_{i_0} \in \Delta$. On définit alors

$$\hat{h} : x_1 \otimes \dots \otimes x_k \mapsto (-1)^{|x_1| + \dots + |x_{i_0-1}|} x_1 \otimes \dots \otimes \tilde{h}(x_{i_0}) \otimes \dots \otimes x_k$$

L'application \hat{h} est une homotopie de chaînes entre Id_Y et 0, donc $H_\bullet Y = 0$, et donc $H_\bullet(A \amalg \Delta) = H_\bullet A$. Par conséquent, Uf est bien une équivalence faible.

Par le théorème 3.12, On peut munir la catégorie des dg-algèbres associatives d'une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée, d'équivalences faibles $U^{-1}(\mathcal{W})$, de cofibrations génératrices FI , et de cofibrations triviales génératrices FJ . \square

3.3.3 Extension aux dg-algèbres associatives courbées

Pour munir la catégorie des dg-algèbres associatives courbées d'une structure de modèles, une possibilité est d'appliquer le théorème de transfert entre cette catégorie et celle des *dg-modules filtrés*, ou *gr-dg-mod*, définie ainsi :

Définition 3.18. Un module filtré (M, F_\bullet, d_M) est la donnée d'un dg-module (M, d_M) et d'une décomposition $M = F_0 M \supseteq F_1 M \supseteq F_2 M \supseteq \dots$, vérifiant :

- La décomposition est complète : $M = \lim_n F_0 M / F_n M$
- $d_M^2(F_\bullet M) \subseteq F_{\bullet+1} M$.

On définit $Gr_\bullet : M \mapsto F_\bullet M / F_{\bullet+1} M$ le foncteur gradué de *gr-dg-mod* vers *dg-mod*.

Le foncteur Gr permet de définir des quasi-isomorphismes sur *gr-dg-mod* : f est un quasi-isomorphisme si $Gr_\bullet(f)$ en est un dans *dg-mod*. On peut de plus montrer que ces quasi-isomorphismes sont induits par une structure de modèles cofibrement engendrée sur *gr-dg-mod*.

3.4 Motivation : vers la cohomologie d'André-Quillen

À partir d'une catégorie de modèles, on peut définir une cohomologie associée à la catégorie, dite cohomologie d'André-Quillen. Le procédé est notamment décrit dans [1], mais la durée du stage n'a pas permis de l'étudier en détail. Cependant, cette cohomologie n'aurait a priori pas les problèmes de la cohomologie de Hochschild.

Références

- [1] Joan Bellier-Millès and Sinan Yalin. André-Quillen cohomology in the context of curved algebras, 2024.
- [2] Andrei Căldăraru and Junwu Tu. Curved A_∞ algebras and Landau-Ginzburg models. *The New York Journal of Mathematics [electronic only]*, 19, 01 2013.
- [3] W. G. Dwyer and J. Spalinski. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. Amsterdam : North-Holland, 1995.
- [4] Thomas F. Fox. An introduction to algebraic deformation theory. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 84 :17–41, 1993.
- [5] Philip S. Hirschhorn. Model categories and their localizations. 2003.
- [6] M. Hovey. *Model Categories*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2007.