

Polymères en interaction avec des interfaces

Elric Angot

19 octobre 2022

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Plan de l'IDR	2
1.2	Définition de la marche aléatoire simple	2
1.3	Exemple de polymère dans le cas attractif	4
1.4	Plus formellement	4
1.5	Convention de cette IDR	5
2	Outil mathématiques utilisés dans cette théorie	5
2.1	Le mouvement Brownien	6
2.2	Théorie du renouvellement et notations	6
2.3	Idée principale : passage de la mesure du renouvellement à la mesure du polymère	8
2.3.1	Intuition sur l'idée principale	8
2.3.2	Utilisation de l'idée principale	8
2.4	Energie libre	8
3	Interfaces attractives	9
3.1	Comportement du polymère à l'infini	10
4	Interfaces répulsives	10
4.1	Comportement du polymère à l'infini	10
5	Annexe	12
5.1	Un exemple d'utilisation de l'idée principale	12

1 Introduction

Cette IDR étudie la modélisation de polymères dans l'espace. C'est une étude de marches aléatoires dans \mathbb{Z}^d et de leur comportement lorsque le nombre de points de la marche tend vers l'infini, sachant que la marche est biaisée par l'interaction avec des interfaces. Ici, nous ne travaillerons que dans \mathbb{Z} . Un polymère est une chaîne de monomères — c'est-à-dire des molécules simples — ayant une forme dans l'espace, et cette forme influe sur les propriétés physiques du polymère. Ici, nous cherchons à connaître la forme du polymère lorsqu'il est placé dans des interfaces qui attirent ou repoussent ces monomères — par exemple, ces interfaces peuvent être considérées comme des lignes de niveaux où le magnétisme est élevé, et repousserait ou attirerait le polymère. Dans les premières études sur ce sujet, une seule interface qui attirait ou repoussait le polymère était considérée [4] [5], mais ce modèle a été étendu en multipliant le nombre d'interfaces. On représente donc ce phénomène physique avec la marche aléatoire simple : chaque point de la marche correspond à un monomère, et l'ensemble de la marche correspond à la chaîne d'atomes. Ainsi, en notant S_n la marche représentant le polymère, le point (n, S_n) donne la position du n -ième monomère. Nous modéliserons l'attraction ou la répulsion de ces interfaces grâce à des outils de la mécanique statistique. Dans cette introduction, nous présenterons les principaux résultats de ce domaine, puis nous donnerons un aperçu d'une extension de domaine sur laquelle je travaille.

1.1 Plan de l'IDR

Tout d'abord, nous présenterons, dans cette introduction, le modèle ainsi que différentes figures l'explicitant. Dans la partie 2, nous évoquerons les notions mathématiques qui sont essentielles pour comprendre les polymères. Nous présenterons dans la partie 3 le cas attractif présent dans [2], puis la partie 4 verra les résultats du domaine dans le cas répulsif présent dans [1]. Nous présenterons enfin dans la dernière partie une extension de modèle sur laquelle je travaille.

1.2 Définition de la marche aléatoire simple

La marche aléatoire simple est définie comme suit :

Définition 1. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoire indépendantes, toutes définies de la manière suivante : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On définit $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \text{ lorsque } n \geq 1.$$

(S_n) est alors appelée la marche aléatoire simple.

D'un point de vue plus heuristique, on peut voir la marche aléatoire simple comme un point démarrant en $(0,0)$, puis montant ou descendant de 1 (soit allant en $(1,1)$ ou en $(1,-1)$ avec probabilité $1/2$, puis montant ou descendant de 1 avec probabilité $1/2$,



FIGURE 1 – Exemple d’environnement dans lequel le polymère évolue ayant des interfaces espacées de 5 unités

etc Cela nous donne une trajectoire dans l’espace : cette trajectoire correspond au polymère.

Il existe une présentation du modèle dans [2] pour le modèle attractif ou dans [1] pour le modèle répulsif. On considère les N premiers pas de la marche aléatoire simple dans \mathbb{Z} , puis on biaise la probabilité d’obtenir cette marche de la manière suivante : à chaque fois qu’elle atteint $T_N\mathbb{Z}$ avec $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ une suite d’entiers positifs tendant vers l’infini, elle est récompensée (ou pénalisée dans le cas répulsif) d’un facteur e^δ (avec $\delta > 0$ dans le cas attractif, et $\delta < 0$ dans le cas répulsif).

1.3 Exemple de polymère dans le cas attractif

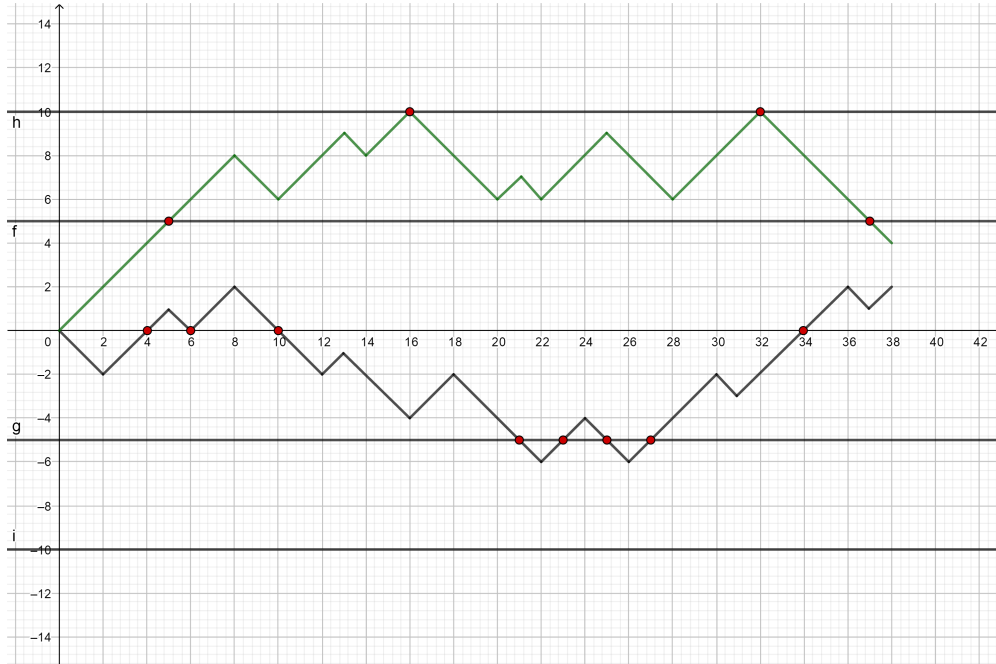


FIGURE 2 – Exemple de polymère avec $\delta = \log 2$

Dans le cas ci-dessus, on a $T = 5$, $N = 38$ et on prend $\delta = \log 2$. Le polymère noir touche 7 fois des interfaces, et le polymère vert seulement 4 fois. Ainsi, le polymère noir a $2^{8-4} = 16$ fois plus de chance d'être pris sous la mesure du polymère que le polymère vert.

1.4 Plus formellement

Nous nous demandons quel est le comportement à l'infini du polymère en fonction de $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$. Le cadre de la mécanique statistique permet de modéliser cela. Nous introduisons donc le Hamiltonien, qui permet de biaiser la marche formellement :

$$H_{N,\delta}^T(S) := \delta \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{S_i \in T\mathbb{Z}\}},$$

et les marches seront prises suivant la loi de probabilité suivante :

$$\frac{d\mathbb{P}_{N,\delta}^T}{d\mathbb{P}}(S) := \frac{\exp(H_{N,\delta}^T(S))}{Z_{N,\delta}^T},$$

où $Z_{N,\delta}^T$ est une constante de normalisation appelée la fonction de partition valant $\mathbb{E}(\exp(H_{N,\delta}^T(S)))$, et la loi de probabilité du dénominateur, \mathbb{P} , est celle de la marche aléatoire simple. Ainsi, le poids d'une marche S sera $\exp(H_{N,\delta}^T(S))$, et sera donc $e^k \delta$, où k est le nombre de contact avec une interface qu'à cette marche.

[2] et [1] cherchent à étudier le comportement des polymères lorsque $N \rightarrow \infty$: dépend-il de T_N ? Si oui, de quelle manière ? Nous verrons que oui : dans tous les cas, il existe des transitions de phases en fonction de la manière dont T_N tend vers l'infini. Une transition de phase désigne la transformation d'un état vers un autre, induite par la variation d'un paramètre. Par exemple, dans le cas attractif, si $T_N \ll \log N$, alors, correctement normalisé, le monomère final aura un comportement semblable à une loi normale. A contrario, si $T_N \gg \log N$, alors le polymère n'aura de contacts qu'avec l'interface initiale, qui est l'axe des abscisses.

Nous remarquons que travailler avec cette loi de probabilité n'est pas pratique, car si nous prenons $T_N = T$ pour tout N , alors les N premiers pas du polymère avec $N+1$ éléments ne suivent pas la même loi que le polymère avec N éléments. Nous utiliserons la théorie du renouvellement pour pallier à ce problème.

1.5 Convention de cette IDR

Dans cette section, nous introduisons les conventions propres à cette IDR :

- Si, à un moment, un entier est demandé mais qu'il y a un réel, alors, par soucis de simplicité et de lisibilité, nous n'écrirons pas $\lfloor \cdot \rfloor$. Ainsi, on ne mettra pas le symbole $\lfloor \cdot \rfloor$ à la racine carré dans l'exemple suivant :

$$\sum_{i=0}^{\sqrt{N}} u_i.$$

- $u_n \ll v_n$ signifiera que $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$. De même, $u_n \gg v_n$ signifiera que $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \infty$.
- Pour (S_n) une suite de variables aléatoire définies sous la loi de probabilité \mathbb{P} et v_n une suite de réels positifs, $S_n \asymp v_n$ signifiera que ces deux suites ont le même ordre de grandeur à l'infini, c'est-à-dire que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \mathbb{P}(|S_N/a_N| > M) \leq \epsilon \quad \text{pour } N \text{ grand}$$

et

$$\exists \nu > 0, \exists \rho \in]0, 1[, \mathbb{P}(|S_N/a_N| > \nu) \geq \rho \quad \text{pour } N \text{ grand.}$$

2 Outil mathématiques utilisés dans cette théorie

Dans cette partie, nous introduisons toutes les outils mathématiques standards utilisés dans le modèle dans lequel je travaille.

2.1 Le mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est compliqué à présenter pour une IDR. Il représente une espèce de limite renormalisée de la marche aléatoire simple afin de la rendre continue, et la compréhension de son comportement nous aidera fortement pour comprendre comment une marche aléatoire se comporte lorsqu'elle devient immense. Pour une présentation brève, il s'agit de modéliser le mouvement du pollen dans l'eau. On obtient ainsi le processus suivant :

Définition 2. Le **mouvement brownien** est un processus stochastique $(B_t)_t \geq 0$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. **Accroissements indépendants** : Pour tout $t > s$ deux temps, $B_t - B_s$ est indépendant de B_s .
2. **Accroissements Gaussiens et Stationnaires** : Pour tout $t > s$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
3. **Continuité** : Le mouvement brownien est presque sûrement continue

2.2 Théorie du renouvellement et notations

La théorie du renouvellement est profondément liée à l'étude des polymères. Elle s'intéresse à l'étude des processus de renouvellement.

Définition 3. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires entières i.i.d. et $Z_N = X_1 + \dots + X_N$. On dit alors que (Z_N) est un **processus de renouvellement**.

Voilà les différentes notations utilisées dans cette IDR :

Définition 4. La notation τ_j^T représente le temps pris par le polymère entre la $j - 1$ ème interface touchée et la j -ème. Elle est définie comme suit :

$$\tau_j^T := \inf\{n > \tau_{j-1}^T / S_n - S_{\tau_{j-1}^T} \in \{-T, 0, T\}\},$$

avec $\tau_0^T = 0$. Ici, nous parlons du polymère. Quand nous utiliserons la notation τ_j , le T sera sous entendu et cela sera lié à la marche aléatoire simple. τ_j désigne donc le temps pris entre le $j - 1$ ème point de contact avec une interface et le j -ème point de contact avec une interface pour la marche aléatoire simple. Nous conserverons cette convention tout au long de cette IDR.

Définition 5. $Q_T(\lambda)$ représente la transformée de Laplace du temps de contact de la prochaine interface. On a donc $Q_T(\lambda) := \mathbb{E}(\exp(-\lambda\tau_1))$. Nous remarquons qu'elle est analytique et bijective sur son ensemble de définition (λ appartient à $[\lambda_0, +\infty]$, avec λ_0 dépendant de T).

Cette transformée nous sera très utile, et pour plusieurs raisons. La première est qu'elle est fortement liée à l'énergie libre (ce sera la sous partie suivante), qui à son tour est profondément liée à la mesure du renouvellement. Ainsi, son étude approfondie permettra de bien comprendre notre polymère. La seconde est que, en l'étudiant d'une

certaine manière faite dans [3], cela nous fournit des données sur $\mathbb{P}(\tau_1 = n)$ pour la marche aléatoire simple, ce qui nous est indispensable dans le cas répulsif.

On introduit une notation pour connaître les changements d'interface :

Définition 6. Pour $j > 0$, nous définissons

$$\epsilon_j^T = \frac{S_{\tau_j^T} - S_{\tau_{j-1}^T}}{T}.$$

Cette variable aléatoire indique si le polymère est monté d'une interface, s'il est resté sur la même ou s'il est descendu. Lorsque l'on usera de la notation ϵ_j , ce sera pour la marche aléatoire simple.

Définition 7. Soit $j \in \{-1, 0, 1\}$. On introduit les notations suivantes :

1. $Q_T^j(\lambda) := \mathbb{E}(\exp(-\lambda\tau_1)\mathbf{1}(S_{\tau_1} = jT))$
2. $q_T^j(n) := \mathbb{P}(\tau_1 = n, \epsilon_1 = j)$ qui représente la probabilité que le premier contact d'interface se fasse au temps n et que cette interface soit celle du dessus (si $j = 1$), celle d'où la marche est partie (si $j = 0$) ou celle du dessous (si $j = -1$). La symétrie de la marche aléatoire simple nous donne que $q_T^1 = q_T^{-1}$.
3. $q_T(n) = q_T^1(n) + q_T^0(n) + q_T^{-1}(n)$ représente la probabilité, sous la marche aléatoire simple, que le premier contact avec une interface se fasse à l'instant n .

Nous tenons à souligner qu'ici, nous parlons de la marche aléatoire simple.

On définit maintenant la constante suivante :

Définition 8. $\lambda_{\delta,T}$ est définie comme unique solution de l'équation suivante :

$$Q_T(\lambda_{\delta,T}) = e^{-\delta}.$$

Enfin, nous introduisons une nouvelle loi de probabilité sur $\mathbb{Z} \times \{-1, 0, 1\}$: cette loi sera la mesure du renouvellement.

Définition 9. La mesure du renouvellement prend deux arguments, ζ et ϵ . ζ correspond au temps que met la marche aléatoire à toucher une interface, et ϵ nous donne l'information si elle monte d'une interface (si $\epsilon = 1$), si elle reste sur la même (si $\epsilon = 0$) ou si elle descend d'une interface (si $\epsilon = -1$). La loi est la suivante :

$$\mathbb{P}_{\delta,T}((\zeta_1, \epsilon_1) = (n, j)) := e^\delta q_T^{|j|}(n) e^{-\lambda_{\delta,T} n}$$

On remarque que c'est bien une loi de probabilité. On définit ensuite $\tau_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$ pour $n \leq 1$ et $\tau_0 = 0$. Nous voyons ici que, sous $\mathbb{P}_{\delta,T}$, (τ_n) est un processus de renouvellement classique car

$$(\tau_n - \tau_{n-1}) \stackrel{i.i.d.}{\sim} \tau_1,$$

avec τ_1 de loi

$$\mathbb{P}_{\delta,T}(\tau_1 = n) = e^\delta q_T(n) e^{-\lambda_{\delta,T} n}.$$

Définition 10. L_N représente le nombre d'interfaces touchées avant le point N pour la mesure du renouvellement. On a donc :

$$L_N = \sup\{j \geq 0 / \tau_j \leq N\}$$

2.3 Idée principale : passage de la mesure du renouvellement à la mesure du polymère

Dans cette section, nous parlons de l'idée capitale qui permet de passer de la mesure du renouvellement à la mesure du polymère.

Proposition 1. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(t_i, \sigma_i)_{1 \leq i \leq k} \in (\mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\})^k$. On a*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N,\delta}^T((\tau_i^T, \epsilon_i^T) = (t_i, \sigma_i), 1 \leq i \leq k | S_N \in T\mathbb{Z}) = \\ \mathbb{P}_{\delta,T}((\tau_i, \epsilon_i) = (t_i, \sigma_i), 1 \leq i \leq k | S_N \in T\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

2.3.1 Intuition sur l'idée principale

En substance, cette proposition nous dit que, si on connaît les points où le polymère touche les interfaces — symbolisée par (τ_i^T, ϵ_i^T) — et que l'extrémité droite du polymère est contrainte à avoir un contact avec une interface — symbolisée par $|N \in T\mathbb{Z}$, alors la probabilité de tirer un polymère avec la mesure du polymère est la même que la probabilité de tirer une marche aléatoire selon la mesure du renouvellement. C'est plus que fondamental.

2.3.2 Utilisation de l'idée principale

Voici la manière d'utiliser l'idée principale. Elle nous permet de faire des calculs d'abord sur la mesure du renouvellement, ce qui est plutôt aisé car la théorie du renouvellement a été beaucoup étudiée. Ensuite, il nous faut adapter ces calculs en contraignant la marche aléatoire à avoir un contact avec une interface à son extrémité droite. Après, nous pouvons lier cela à la mesure du polymère contrainte à atteindre une interface à l'extrémité droite, puis il nous faudra faire correspondre cela à la mesure du polymère globale. Il est important de remarquer que, dans la formule de la proposition 1, ce n'est pas la mesure du polymère à proprement parler, mais la mesure qui contraint le N -ème élément du polymère à avoir un contact avec une interface.

Ce sera d'ailleurs la structure de la preuve des trois points du théorème 2 : la preuve de chacun de ces trois points se fera en quatre temps. Nous prouverons d'abord le résultat sur la mesure du renouvellement, puis sur la mesure du renouvellement contrainte, puis sur le polymère contraint, puis sur le polymère. Ainsi, l'essentiel du travail dans cette théorie des polymères est de comprendre cette mesure.

En annexe, le lecteur intéressé verra concrètement comment fonctionne une utilisation de la proposition 1.

2.4 Energie libre

L'étude de l'énergie libre du système est importante. En effet, cette énergie libre est présente dans de nombreux calculs. Par exemple, les constantes c_δ et C_δ dans le théorème 2 apparaissent grâce à l'énergie libre.

Définition 11. Soit $\mathbb{T} = (T_N)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers ayant comme limite T_∞ . **L'énergie libre du système** est définie comme suit :

$$\phi(\delta, \mathbb{T}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(\delta, T_N),$$

où

$$\phi_N(\delta, T_N) := \frac{1}{N} \log Z_{N,\delta}^{T_N}.$$

L'existence d'une telle limite sera prouvée grâce au théorème 1. L'énergie libre est aussi intéressante car sa dérivée nous donne l'espérance du nombre d'interfaces touchées pour un polymère de longueur N , et donc le temps moyen passé sur chaque interface. En effet, en notant L_{N,T_N} le nombre de fois où le polymère a touché une interface avant N ($L_{N,T_N} := \sum_{i=1}^N \mathbf{1}(S_i \in T\mathbb{Z})$), on a :

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \phi_N(\delta, T_N) = \mathbb{E}_{N,\delta}^{T_N} \left(\frac{L_{N,T_N}}{N} \right).$$

Nous pouvons calculer la valeur exacte de l'énergie libre grâce à un théorème de [2] :

Théorème 1. On note T_∞ la limite de (T_N) . L'énergie libre $\phi(\delta, \mathbb{T}) = \phi(\delta, T_\infty)$ ne dépend que de δ et T_∞ , et vaut :

$$\phi(\delta, T_\infty) = \begin{cases} (Q_{T_\infty})^{-1} (e^{-\delta}) & \text{si } T_\infty < +\infty \\ (Q_{T_\infty})^{-1} (e^{-\delta} \wedge 1) & \text{si } T_\infty = +\infty \end{cases}$$

Pour prouver le théorème 1, l'idée principale repose sur le fait de montrer que

$$Z_{N,\delta}^T \approx Z_{N,\delta}^{T,c},$$

où $Z_{N,\delta}^{T,c} = \mathbb{E}(\exp[H_{N,\delta}^T(S)] \mathbf{1}\{S_N \in T\mathbb{Z}\})$. Ensuite, la proposition 1 nous permet de lier cela à une espérance concernant la mesure du renouvellement, puis l'utilisation d'un théorème du renouvellement (le théorème 2 de [6]) nous permet de conclure.

Remarque 1. Notre mesure de renouvellement est donc

$$\mathbb{P}_{\delta,T}((\zeta_1, \epsilon_1) = (n, j)) := e^\delta q_T^{|j|}(n) e^{-\phi(\delta,T)n}.$$

Ainsi, le lien entre le renouvellement et l'énergie apparaît, ce qui souligne l'importance de comprendre cette énergie libre. Pensez : dans l'extension du modèle dans lequel je travaille, il m'est parfois nécessaire de pousser de développement limité de ladite énergie à l'ordre 2 ou 3 pour obtenir des informations intéressantes sur mon modèle.

3 Interfaces attractives

Dans cette partie, nous exposerons le résultat principal de [2]. Ici, nous avons donc $\delta > 0$ car nous sommes dans le cas attractif.

3.1 Comportement du polymère à l'infini

Le résultat principal est le théorème ci-dessous :

Théorème 2. *Soit $\delta > 0$ et $\mathbb{T} = (T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ tel que $T_N \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$.*

(i) *Si $T_N - \frac{\log N}{c_\delta} \rightarrow -\infty$ quand $N \rightarrow \infty$, alors, sous $P_{N,\delta}^{T_N}$ quand $N \rightarrow \infty$, on a :*

$$\frac{S_N}{C_\delta \left(e^{-\frac{c_\delta}{2} T_N} T_N \sqrt{N} \right)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),$$

$$\text{avec } C_\delta = (1 - e^{-\delta}) \sqrt{\frac{2e^\delta}{2 - e^{-\delta}}} \text{ et } c_\delta = \frac{\delta}{2} + \log \sqrt{2 - e^{-\delta}}.$$

(ii) *S'il existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tel que $T_{N'} - \frac{\log N'}{c_\delta} \rightarrow \zeta$ sous une sous suite N' , alors, sous $P_{N,\delta}^{T_N}$ quand $N \rightarrow \infty$, on a :*

$$\frac{S_{N'}}{T_{N'}} \xrightarrow{\mathcal{L}} S_\Gamma,$$

où Γ est une variable aléatoire indépendante de (S_i) qui suit une loi de Poisson de paramètre $t_{\delta,\zeta} = 2e^\delta \frac{(1 - e^{-\delta})^2}{2 - e^{-\delta}} \cdot e^{-c_\delta \zeta}$.

(iii) *Si $T_N - \frac{\log N}{c_\delta} \rightarrow +\infty$ quand $N \rightarrow \infty$, alors le polymère n'aura pas d'autres contacts avec des interfaces si ce n'est celle de $T = 0$, c'est-à-dire que*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N}(|S_N| > L) = 0.$$

Le premier point nous indique que, correctement normalisé, $\frac{S_N}{C_{T_N}}$ a le même comportement à l'infini que la marche aléatoire simple si T_N croît relativement peu (c'est-à-dire moins que $c \log N$).

Le deuxième point nous dit que, si T_N a la bonne croissance, alors le nombre d'interfaces visitées suit une loi de Poisson.

Enfin, le troisième point nous dit que si T_N croît plus vite que $c_\delta \log N$, alors le polymère ne visitera que l'interface liée à $T = 0$, et son extrémité sera très probablement proche de cette interface.

4 Interfaces répulsives

Nous avons ensuite étudié [1]. La modélisation est la même que celle de la partie attractive, mais avec $\delta < 0$: la loi de probabilité est la même, l'Hamiltonien est le même.

4.1 Comportement du polymère à l'infini

Nous observons, dans ce modèle, deux transitions de phases en fonction de T_N . La première se produit lorsqu'on passe de $T_N \ll N^{1/3}$ à $N^{1/3} \ll T_N \ll \sqrt{N}$, et la seconde lorsque $T_N \ll \sqrt{N}$. Voilà le résultat principal de [1] :

Théorème 3. Soit $\delta < 0$ et $(T_N)_{N \in \mathbb{N}} \in (2\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ tel que $T_N \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$. Alors :

- (i) Si $T_N \ll N^{1/3}$, alors $S_N \asymp \sqrt{N/T_N}$. Plus précisément, il existe $0 < c_1 < c_2 < \infty$ tel que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, pour N assez grand,

$$c_1 \mathbb{P}[a < Z \leq b] \leq \mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N} \left(a < \frac{S_N}{C_\delta \sqrt{\frac{N}{T_N}}} \leq b \right) \leq c_2 \mathbb{P}[a < Z \leq b],$$

où Z suit la loi normale centrée réduite et $C_\delta := \pi/\sqrt{e^{-\delta} - 1}$.

- (ii) Si $T_N \sim \text{cst} N^{1/3}$, alors nous avons $S_N \asymp T_N$. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux constantes $M, \eta > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N}(|S_N| \leq MT_N) \geq 1 - \epsilon, \quad \mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N}(|S_N| \leq \eta T_N) \geq 1 - \epsilon.$$

- (iii) Si $N^{1/3} \ll T_N \leq \text{cst} \sqrt{N}$, alors $S_N \asymp T_N$. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe trois constantes $L, \eta > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N}(0 < |S_n| < T_N \forall n \in \{L, \dots, N\}) \geq 1 - \epsilon, \quad \mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N}(|S_N| \leq \eta T_N) \geq 1 - \epsilon.$$

- (iv) Si $T_N \gg \sqrt{N}$, alors $S_N \asymp \sqrt{N}$. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe trois constantes $L, M, \eta > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N}(0 < |S_n| < M\sqrt{N} \forall n \in \{L, \dots, N\}) \geq 1 - \epsilon, \quad \mathbb{P}_{N,\delta}^{T_N}(|S_N| \leq \eta\sqrt{N}) \geq 1 - \epsilon.$$

Quelques commentaires sur ce théorème :

- Pour le premier point de ce théorème, les auteurs de [1] conjecturent que le résultat est plus fort et qu'il y a convergence en loi vers la loi normale centrée réduite. Ils peuvent le prouver pour $N \ll N^{1/6}$, mais le problème pour $N^{1/6} \ll T_N \ll N^{1/3}$ reste ouvert.
- Si T_N tend vers T réel, alors le résultat du premier point du théorème est vrai. Simplement, une dépendance selon T apparaît dans la constante C_δ .
- Dans le régime (iii) et (iv), le polymère ne touche qu'un nombre fini de fois l'interface.
- Pour résumer ce théorème, on peut écrire que

$$S_N \asymp \begin{cases} N^{(1-a)/2} & \text{si } 0 \leq a \leq 1/3, \\ N^a & \text{si } 1/3 \leq a \leq 1/2, \\ \sqrt{N} & \text{si } a \geq 1/2. \end{cases}$$

5 Annexe

5.1 Un exemple d'utilisation de l'idée principale

L'objectif de cette partie est de montrer comment on passe de la mesure du renouvellement à la mesure du polymère grâce à la proposition 1 au travers d'un exemple qui est la preuve du premier point du théorème 2.

Tout d'abord, pour prouver le premier point, il nous faut prouver que, avec

- C une constante dépendant de T_N et δ
- L_N le nombre d'interfaces touchées (avec multiplicité)
- Y_{L_N} une marche aléatoire qui monte ou descend de 1 avec probabilité $P_{\delta,T}(\epsilon_1 = 1)$, et reste constant avec probabilité $P_{\delta,T}(\epsilon_1 = 0)$,

on a :

$$\mathbb{P}_{\delta,T_N} \left(\frac{Y_{L_N}}{C\sqrt{N}} \leq x \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} P(\mathcal{N}(0,1) \leq x).$$

Cette preuve se fait avec des techniques classiques, et ce résultat reste vrai si on change Y_{L_N} en $Y_{L_{N-\sqrt{T_N}}}$.

L'étape ou nous voulons utiliser la proposition 1 est celle qui passe de la mesure du renouvellement — c'est l'équation ci-dessus — à la mesure du polymère. Pour ce faire, il nous faut décomposer la mesure du renouvellement de la manière suivante : $N - \sqrt{T_N} - t$ représente le dernier temps où la marche aléatoire liée au processus de renouvellement a touché une interface avant $N - \sqrt{T_N}$ et r le premier temps où elle a touché une interface après $N - \sqrt{T_N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\delta,T_N} \left(\frac{Y_{L_{N-\sqrt{T_N}}}}{C\sqrt{N}} \leq x \mid N \in T_N\mathbb{Z} \right) = \\ \frac{1}{\mathbb{P}_{\delta,T_N}(N \in T\mathbb{Z})} \sum_{t=0}^{N-\sqrt{T_N}t+\sqrt{T_N}} \sum_{r=t+1} \mathbb{P}_{\delta,T_N} \left(\frac{Y_{L_{N-\sqrt{T_N}}}}{C\sqrt{N}} \leq x, N - \sqrt{T_N} - t \in T_N\mathbb{Z} \right) \\ \cdot \mathbb{P}_{\delta,T_N}(\tau_1 = r) \cdot \mathbb{P}_{\delta,T_N} \left(t + \sqrt{T_N} - r \in T_N\mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

On voit que cette décomposition permet d'utiliser la proposition 1, et ainsi permet de passer à la mesure du polymère. Ce genre de décomposition est sous-jacente à chaque preuve de chaque théorème de cette IDR. Il faut trouver le point où nous décomposerons. Par exemple, ici, le point est $N - \sqrt{N}$. Dans le cas répulsif, ce point est pris différemment, mais l'idée est la même.

Références

- [1] Francesco Caravenna and Nicolas Pétrélis. Depinning of a polymer in a multi-interface medium, 2009.

- [2] Francesco Caravenna and Nicolas Pétrélis. A polymer in a multi-interface medium. *The Annals of Applied Probability*, 19(5) :1803–1839, Oct 2009.
- [3] William Feller. An introduction to probability theory and its applications, 1968.
- [4] Giambattista Giacomin. *Random polymer models*. Imperial College Press, 2007.
- [5] Giambattista Giacomin. *Disorder and Critical Phenomena Through Basic Probability Models : École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XL–2010*, volume 2025. Springer, 2011.
- [6] VV Kalashnikov. Uniform estimation of the convergence rate in a renewal theorem for the case of discrete time. *Theory of Probability & Its Applications*, 22(2) :390–394, 1978.