

# Introduction au domaine de recherche

## Marche aléatoire simple sur le tore et modèle d'entrelacs aléatoires

ORPHÉE COLLIN

Juin 2022

### Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Présentation du modèle d'entrelacs aléatoires sur <math>\mathbb{Z}^d</math></b>	<b>4</b>
1.1 Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ : capacité, mesure harmonique . . . . .	4
1.2 Caractérisation du modèle d'entrelacs aléatoires $(\mathcal{I}^u)_{u>0}$ . . . . .	6
<b>2 Construction de <math>(\mathcal{I}^u)_{u&gt;0}</math></b>	<b>8</b>
<b>3 Quelques propriétés du modèle d'entrelacs aléatoires</b>	<b>11</b>
<b>4 Variations autour du modèle d'entrelacs aléatoires</b>	<b>12</b>
<b>5 Travaux passés et à venir faisant intervenir les entrelacs aléatoires</b>	<b>15</b>
<b>Références</b>	<b>16</b>

## Introduction

Dans le cadre de ma scolarité à l'ENS, j'ai été amené à travailler sur le modèle d'entrelacs aléatoires : mémoire de master avec Francis Comets sur le modèle d'entrelacs aléatoires bidimensionnel, séjour de recherche avec Wolfgang König sur le condensat de Bose-Einstein, collaborations avec Francis Comets et Serguei Popov sur les entrelacs browniens en dimension 2.

Dans cette *Introduction au domaine de recherche*, je vais présenter le modèle d'entrelacs aléatoires. Il s'agit d'un modèle de percolation dans  $\mathbb{Z}^d$  récent - il fut introduit en 2007 par Alain-Sol Sznitman - qui a suscité une vaste littérature. En physique, il permet par exemple de modéliser la corrosion des métaux. En mathématiques, il présente un intérêt intrinsèque par ses corrélations intéressantes et naturelles et par sa construction à partir d'un processus de Poisson de points dans un espace de trajectoires de la marche aléatoire simple.

Considérons le tore discret  $\mathbb{Z}_N^d := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ , de taille  $N$  et de dimension  $d$ , avec  $d \geq 3$ . Soit  $(X_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}_N^d$ , de premier point choisi uniformément au hasard. Pour  $x \in \mathbb{Z}_N^d$ , nous posons  $\tau_x := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n^{(N)} = x\}$ , le premier instant de visite en  $x$ . Les variables  $\tau_x$  sont de même loi puisque  $X_0^{(N)}$  est de loi uniforme. Une première observation est que pour tout  $n$ ,  $X_n^{(N)}$  est de loi uniforme sur le tore, d'où :

$$\mathbf{P}[\tau_x \leq n] \leq \sum_{i=0}^n \mathbf{P}[X_i^{(N)} = x] \leq \frac{n+1}{N^d}. \quad (1)$$

En utilisant la théorie du potentiel (cf. [3], chapitre 5), on peut en fait montrer que  $\mathbb{E}[\tau_x] \sim R_d N^d$ , où  $R_d$  est une constante positive. En particulier, par l'inégalité de Markov, nous avons

$$\mathbf{P}[\tau_x \geq n] \leq \frac{\mathbb{E}[\tau_x]}{n} \sim R_d \frac{N^d}{n}. \quad (2)$$

Intéressons-nous maintenant à l'image locale de la marche aléatoire sur le tore, c'est-à-dire à la trace laissée par la marche sur un ensemble donné, au bout de  $t_N$  pas. Soit donc  $K$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$  et  $\pi_N : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}_N^d$  la projection canonique. Nous considérons l'ensemble  $\{X_0^{(N)}, \dots, X_{t_N}^{(N)}\} \cap \pi_N(K)$ , pour  $N$  tendant vers l'infini.

Pour des temps d'ordre inférieur à  $N^d$ , i.e.  $\frac{t_N}{N^d} \rightarrow 0$ , en vertu de (1), avec grande probabilité, la marche aléatoire n'a pas encore visité  $\pi_N(K)$ . A contrario, si  $\frac{t_N}{N^d} \rightarrow \infty$ , alors d'après (2), avec grande probabilité,  $\pi_N(K)$  est entièrement couvert par la marche. Nous nous intéressons donc au régime intermédiaire, où  $t_N \sim uN^d$  avec  $u$  un réel strictement positif.

L'entrelac aléatoire  $\mathcal{I}^u$  au niveau  $u$  décrit précisément la limite locale de la trace laissée par la marche aléatoire simple sur le tore, au bout de  $\lfloor uN^d \rfloor$  pas. Plus explicitement,  $\mathcal{I}^u$  est une partie aléatoire de  $\mathbb{Z}^d$ , caractérisée par la loi de sa trace sur toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{Z}^d$ . Cette loi correspond à la loi limite de  $\{X_0^{(N)}, \dots, X_{\lfloor uN^d \rfloor}^{(N)}\} \cap \pi_N(K)$  quand  $N$  tend vers l'infini et fait intervenir la notion de *capacité* et de *mesure harmonique* de  $K$ .

Le modèle d'entrelacs aléatoires est construit à l'aide d'un *processus de Poisson de points* à valeurs dans un espace de trajectoires doublement infinies dans  $\mathbb{Z}^d$ . L'entrelac est l'ensemble des

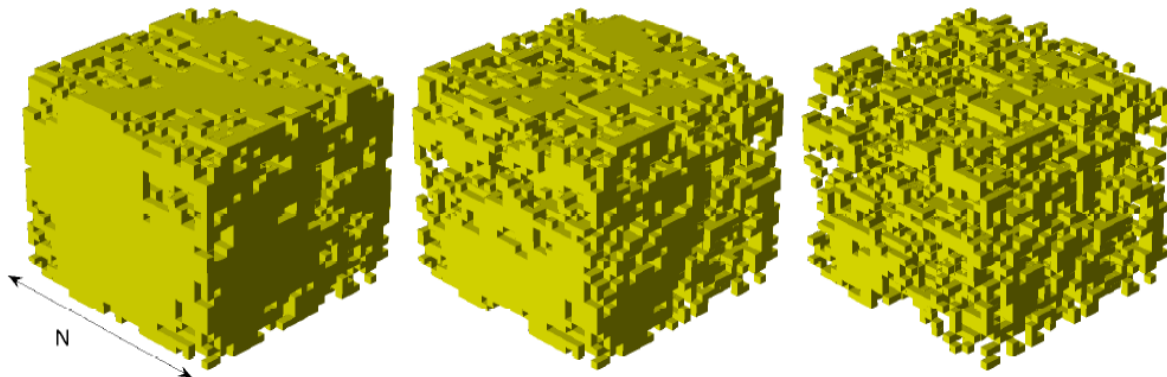


FIGURE 1 – Une réalisation de la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}_N^3$  (simulation due à David Windisch). L'ensemble représenté est l'ensemble laissé vacant par la marche jusqu'au temps  $\lfloor uN^3 \rfloor$ . Il diminue à mesure que le paramètre  $u$  croît (de gauche à droite). Le modèle d'entrelac aléatoire est une limite locale en loi de ce modèle, quand  $N \rightarrow \infty$ .

sites de  $\mathbb{Z}^d$  visités par au moins l'une des trajectoires de ce processus de Poisson. Un étiquetage des trajectoires du processus de Poisson par des réels permet d'intégrer dans l'entrelac au niveau  $u$  une densité de trajectoires correspondant à  $u$  et de définir un couplage des entrelacs aléatoires aux différents niveaux  $u > 0$ , de sorte que  $\mathcal{I}^u \subset \mathcal{I}^v$  dès que  $u \leq v$ . Ce couplage  $(\mathcal{I}^u)_{u>0}$  porte le nom de « modèle d'entrelacs aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$  ».

Je vais présenter le modèle, puis quelques résultats importants ayant été obtenus à son sujet. J'évoquerai les travaux de recherche que j'ai menés et qui touchent au modèle d'entrelacs aléatoires.

# 1 Présentation du modèle d'entrelacs aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$

## 1.1 Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ : capacité, mesure harmonique

Nous notons  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{Z}^d$ . Si  $K$  est une partie de  $\mathbb{Z}^d$ , nous définissons le bord intérieur de  $K$  comme :

$$\partial K := \{x \in K : \exists y \notin K, x \sim y\}.$$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$ . Nous notons  $\mathbf{P}_x$  la loi de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  démarrée de  $x$ , et  $\mathbf{E}_x$  l'espérance correspondante. Si  $\mu$  est une mesure sur  $\mathbb{Z}^d$  (pas nécessairement de probabilité), nous posons  $\mathbf{P}_\mu = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mu(z) \mathbf{P}_z$ . Pour  $K$  une partie de  $\mathbb{Z}^d$ , nous définissons le temps d'atteinte de  $K$  par :

$$\tau(K) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in K\}.$$

Dans cette section, nous allons définir les notions centrales de capacité et de mesure harmonique d'une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ . Commençons par un exemple.

### Capacité d'un point

**Définition 1** (fonction de Green). *La fonction de Green de la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$  est définie sur  $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$  par :*

$$G(x, y) := \mathbf{E}_x \left[ \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{X_n = y} \right] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}_x[X_n = y].$$

Par transience,  $G(x, y) < \infty$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}^d$ . La fonction de Green est symétrique et invariante par translation :  $G(x, y) = G(y, x)$  et  $G(x + z, y + z) = G(x, y)$  pour tous  $x, y$  et  $z$  dans  $\mathbb{Z}^d$ . Aussi, nous posons  $g(x) = G(x, 0) = G(0, x)$ . Nous mentionnons l'équivalent suivant :

$$g(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c_d}{|x|^{d-2}}, \quad \text{où } c_d \text{ est une constant positive.}$$

Par la propriété de Markov appliquée au premier temps de visite en  $y$ , nous avons :

$$G(x, y) = \mathbf{P}_x[\tau(y) < \infty] \cdot G(y, y).$$

Nous obtenons donc pour  $y$  fixé :

$$\mathbf{P}_x[\tau(y) < \infty] = \frac{G(x, y)}{G(y, y)} = \frac{g(x - y)}{g(0)} \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{g(x)}{g(0)}.$$

Ceci est interprété comme le fait que le singleton  $\{y\}$  possède une capacité de  $\frac{1}{g(0)}$ . En effet, il existe une notion de capacité, qui généralise cet équivalent à toutes les parties finies de  $\mathbb{Z}^d$  et « mesure » donc la « taille » d'un ensemble, eu égard à la marche aléatoire simple issue de l'infini.

## Capacité et mesure harmonique d'une partie finie de $\mathbb{Z}^d$

**Définition 2.** Soit  $K$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ .

— La mesure d'équilibre de  $K$  est la mesure définie sur  $\mathbb{Z}^d$  par :

$$e_K(x) := \mathbb{1}_K(x) \cdot \mathbf{P}_x[\forall n \geq 1, X_n \notin K].$$

Elle est portée par  $\partial K$ .

— La capacité de  $K$  est alors la masse totale de  $e_K$  :

$$\text{cap}(K) := e_K(\mathbb{Z}^d) = \sum_{x \in \partial K} \mathbf{P}_x[\forall n \geq 1, X_n \notin K].$$

— La mesure harmonique à l'infini (ou mesure d'équilibre normalisée) de  $K$  est :

$$\text{harm}_K(\cdot) := \frac{e_K(\cdot)}{\text{cap}(K)}.$$

La capacité et la mesure harmonique à l'infini vérifient la proposition suivante, que nous allons admettre. La preuve repose sur la réversibilité de la marche aléatoire simple.

**Proposition 1.1.** Nous avons l'équivalent :

$$\mathbf{P}_x[\tau(K) < \infty] \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} g(x) \text{cap}(K), \quad (3)$$

et la limite (si  $K$  est non-vide) :

$$\mathbf{P}_x[X_{\tau(K)} = y | \tau(K) < \infty] \underset{|x| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \text{harm}_K(y), \quad y \in K. \quad (4)$$

Ces deux résultats peuvent également s'écrire :

$$\mathbf{P}_x[\tau(K) < \infty, X_{\tau(K)} = y] \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} g(x) e_K(y), \quad y \in K. \quad (5)$$

Ainsi, la capacité permet de contrôler la probabilité de visite de  $K$  par la marche issue d'un point éloigné de l'origine, tandis que  $\text{harm}_K$  décrit la distribution du point d'entrée dans  $K$  de la marche lorsque cet événement se réalise.

En utilisant ces deux propriétés, nous pouvons démontrer le résultat suivant.

**Proposition 1.2.** Considérons  $K \subset K'$  deux parties finies de  $\mathbb{Z}^d$ . Alors :

$$\mathbf{P}_{\text{harm}_{K'}}[\tau(K) < \infty] = \frac{\text{cap}(K)}{\text{cap}(K')}$$

et

$$\mathbf{P}_{\text{harm}_{K'}}[X_{\tau(K)} = y | \tau(K) < \infty] = \text{harm}_K(y), \quad y \in K.$$

Ces deux résultats s'écrivent aussi, en termes de mesures d'équilibre :

$$\mathbf{P}_{e_{K'}}[\tau(K) < \infty, X_{\tau(K)} = y] = e_K(y), \quad y \in K.$$

En d'autres termes, la marche aléatoire démarrée sous  $\text{harm}_{K'}$  visite  $K$  avec une probabilité égale à  $\text{cap}(K)/\text{cap}(K')$  et, conditionnellement à cet événement, la mesure d'entrée de la marche dans  $K$  est  $\text{harm}_K$ .

*Démonstration.* Soit  $y$  dans  $K$ . Pour  $x$  en dehors de  $K'$ , nous pouvons écrire en décomposant selon la première visite éventuelle de  $K'$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x[\tau(K) < \infty, X_{\tau(K)} = y] &= \mathbf{P}_x[\tau(K') < \infty] \\ &\times \sum_{z \in K'} \mathbf{P}_x[X_{\tau(K')} = z | \tau(K') < \infty] \mathbf{P}_z[\tau(K) < \infty, X_{\tau(K)} = y]. \end{aligned}$$

Or nous observons, grâce à la proposition 1.1, que le membre de gauche est équivalent à  $g(x)e_K(y)$  tandis que le membre de droite est équivalent à

$$g(x) \text{cap}(K') \sum_{z \in K'} \text{harm}_{K'}(z) \mathbf{P}_z[\tau(K) < \infty, X_{\tau(K)} = y] = g(x) \mathbf{P}_{e_{K'}}[\tau(K) < \infty, X_{\tau(K)} = y].$$

Nous obtenons l'identité voulue en identifiant les coefficients de ces développements asymptotiques.  $\square$

## 1.2 Caractérisation du modèle d'entrelacs aléatoires $(\mathcal{I}^u)_{u>0}$

### Heuristique

Considérons un ensemble  $K$  fini de  $\mathbb{Z}^d$ , et  $N$  très grand. À quoi la trace sur  $\pi_N(K)$  de la marche aléatoire sur le tore devrait-elle ressembler au bout de  $\lfloor uN^d \rfloor$  pas? Nous découpons la marche en excursions de la manière suivante. Fixons deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $2 < \alpha < \beta < d$  et posons  $l := \lfloor N^\beta \rfloor$  et  $l^* := \lfloor N^\beta \rfloor + \lfloor N^\alpha \rfloor$ . Nos excursions sont les suites  $(X_{kl^*}^{(N)}, \dots, X_{kl^*+l}^{(N)})$  pour  $0 \leq k \leq \lfloor \frac{\lfloor uN^d \rfloor}{l^*} \rfloor - 1$ . Le nombre d'excursions est d'environ  $\frac{uN^d}{N^\beta}$ .

Le temps de mélange de la marche aléatoire simple sur le tore étant d'ordre inférieur ou égal à  $N^2$ , ces excursions peuvent être considérées comme indépendantes (et démarrées selon la loi uniforme) car séparées d'une durée  $N^\alpha$ , avec  $\alpha > 2$ . Par ailleurs, avec grande probabilité, la marche ne visite pas  $\pi_N(K)$  en dehors de ces excursions (car le nombre de pas concerné est  $\lfloor N^\alpha \rfloor \frac{uN^d}{N^\beta} = o(N^d)$ ), tandis que l'on peut établir que chacune des excursions visite  $\pi_N(K)$  avec probabilité de l'ordre de  $\frac{N^\beta}{N^d} \text{cap}(K)$ . De là :

$$\mathbf{P}_{\nu_N} \left[ \left\{ X_0^{(N)}, \dots, X_{\lfloor uN^d \rfloor}^{(N)} \right\} \cap \pi_N(K) = \emptyset \right] \approx \left( 1 - \frac{N^\beta}{N^d} \text{cap}(K) \right)^{u \frac{N^d}{N^\beta}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp(-u \text{cap}(K)), \quad (6)$$

et plus généralement, d'après la loi des événements rares, le nombre d'excursions visitant  $\pi_N(K)$  suit, à la limite, une loi de Poisson de paramètre  $u \text{cap}(K)$ .

Le membre de droite de l'équation (6) permet de définir une unique mesure de probabilité  $\mathbf{P}^u$  sur l'ensemble des parties de  $\mathbb{Z}^d$ , dont l'existence sera démontrée par la construction exposée à la section 2.

**Définition 3.** *Considérons l'ensemble  $P = P(\mathbb{Z}^d)$  des parties de  $\mathbb{Z}^d$ , muni de la tribu  $\mathcal{P}$  engendrée par les parties  $\{I \subset \mathbb{Z}^d : x \in I\}$ , pour  $x$  décrivant  $\mathbb{Z}^d$ . Il s'agit de la tribu contenant les informations relatives à la trace de  $I$  sur les parties finies de  $\mathbb{Z}^d$ . Elle est engendrée par le  $\pi$ -système des parties  $\{I \subset \mathbb{Z}^d : I \cap K = \emptyset\}$ , pour  $K$  décrivant l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{Z}^d$ . Par conséquent, nous pouvons définir une mesure de probabilité sur cet espace mesurable de la manière suivante.*

*Pour  $u > 0$ , la loi de l'entrelac aléatoire au niveau  $u$  dans  $\mathbb{Z}^d$  est la mesure  $\mathbf{P}^u$  définie sur  $(P, \mathcal{P})$  par :*

$$\mathbf{P}^u(\{I \subset \mathbb{Z}^d : I \cap K = \emptyset\}) = \exp(-u \operatorname{cap}(K)),$$

*pour toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{Z}^d$ .*

*Le modèle d'entrelacs aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$ , que nous allons construire, est une famille aléatoire  $(\mathcal{I}^u)_{u>0}$  de parties de  $\mathbb{Z}^d$ , définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{O}, \mathbb{P})$ , telle que, sous  $\mathbb{P}$  :*

- presque sûrement, pour tous  $0 < u \leq v$ ,  $\mathcal{I}^u \subset \mathcal{I}^v$  ;*
- pour tout  $u > 0$ ,  $\mathcal{I}^u$  suit la loi  $\mathbf{P}^u$ , i.e. :*

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}^u \cap K = \emptyset) = \exp(-u \operatorname{cap}(K)), \quad \text{pour toute partie finie } K \text{ de } \mathbb{Z}^d. \quad (7)$$

*$\mathcal{I}^u$  est l'entrelac aléatoire au niveau  $u$ . Nous posons  $\mathcal{V}^u = \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{I}^u$ , l'ensemble vacant au niveau  $u$ . La formule ci-dessus s'écrit également :*

$$\mathbb{P}(K \subset \mathcal{V}^u) = \exp(-u \operatorname{cap}(K)).$$

**Remarque.** *Nous pouvons exprimer explicitement la loi de  $\mathcal{I}^u \cap K$  pour  $K$  partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ . En effet, si  $K' \subset K$ , l'identité :*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathcal{I}^u \cap K = K'} &= \mathbb{1}_{\mathcal{I}^u \cap (K \setminus K') = \emptyset} \cdot \prod_{x \in K'} (1 - \mathbb{1}_{x \notin \mathcal{I}^u}) \\ &= \mathbb{1}_{\mathcal{I}^u \cap (K \setminus K') = \emptyset} \cdot \sum_{K'' \subset K'} (-1)^{|K''|} \prod_{x \in K''} \mathbb{1}_{x \notin \mathcal{I}^u} \\ &= \sum_{K'' \subset K'} (-1)^{|K''|} \mathbb{1}_{\mathcal{I}^u \cap ((K \setminus K') \cup K'') = \emptyset} \end{aligned}$$

*donne, en prenant l'espérance :*

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}^u \cap K = K') = \sum_{K'' \subset K'} (-1)^{|K''|} \exp(-u \operatorname{cap}((K \setminus K') \cup K'')).$$

## 2 Construction de $(\mathcal{I}^u)_{u>0}$

Ainsi que mentionné en introduction, le modèle d'entrelacs aléatoires est construit à partir d'un ensemble de trajectoires dans  $\mathbb{Z}^d$ , qui doivent être comprises comme les excursions de la marche aléatoire simple sur le tore. Ces trajectoires sont doublement infinies, c'est-à-dire indéxées par  $\mathbb{Z}$ . La construction de l'ensemble des trajectoires intersectant une partie finie  $K$  peut s'exprimer simplement. Elle consiste à :

- choisir  $\text{Poi}(u \text{cap}(K))$  particules et les placer indépendamment sur  $\partial K$  selon la mesure  $\text{harm}_K$  ;
- attacher à chaque particule une marche aléatoire indéxée par  $\mathbb{Z}$  conditionnée à entrer dans  $K$  à l'instant 0 en visitant la particule en question.

L'élément essentiel de la construction de Snitzman est que cette procédure peut être rendue, grâce à un processus de Poisson de points, cohérente pour toutes les parties finies  $K$ , à condition de considérer les trajectoires à translation temporelle près. Nous exposons maintenant cette construction.

Soit  $W^+$  l'espace des trajectoires transientes dans  $\mathbb{Z}^d$  :

$$W^+ = \{w: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^d \text{ tel que } w(n) \sim w(n+1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ \text{et } \{n: w(n) = x\} \text{ est fini pour tout } x \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Soit  $W$  l'espace des trajectoires doublement infinies et transientes dans  $\mathbb{Z}^d$  :

$$W = \{w: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^d \text{ tel que } w(n) \sim w(n+1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}, \\ \text{et } \{n: w(n) = x\} \text{ est fini pour tout } x \in \mathbb{Z}^d\}.$$

$W^+$  (resp.  $W$ ) est muni de la tribu  $\mathcal{W}$  engendrée par les applications coordonnées  $W \rightarrow \mathbb{Z}^d, w \mapsto w(n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  (resp.  $n \in \mathbb{Z}$ ).

Pour toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{Z}^d$ , posons pour  $w \in W$ ,  $H_K(w) = \inf\{n \in \mathbb{Z}: w(n) \in K\}$  le premier temps d'entrée de la trajectoire  $w$  dans  $K$ . Définissons également  $W_K = \{w \in W: \exists n, w(n) \in K\}$ , l'ensemble des trajectoires touchant  $K$ , ainsi que  $W_K^0 = \{w \in W: H_K(w) = 0\}$  l'ensemble des trajectoires entrant dans  $K$  pour la première fois à l'instant 0.

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , définissons un opérateur de translation temporelle  $\Theta_k$  sur  $W$ , tel que  $\Theta_k(w)(n) = w(n+k)$  pour  $w \in W$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $R$  la relation d'équivalence définie sur  $W$  par :

$$wRw' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, w' = \Theta_k(w),$$

et  $W^* = W/R$  l'espace quotient de  $W$  par  $R$ , c'est-à-dire l'espace des trajectoires définies ci-dessus vues à translation temporelle près. Soit  $\pi: W \rightarrow W^*$  la projection canonique, et  $\mathcal{W}^*$  la tribu induite :

$$\mathcal{W}^* = \{A \subset W^*: \pi^{-1}(A) \in \mathcal{W}\}.$$

Nous posons également  $W_K^* = \pi(W_K)$ , pour  $K$  partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ .

Nous allons construire un processus de Poisson sur  $(W^* \times \mathbb{R}^+, \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$  : la donnée d'un ensemble aléatoire de trajectoires à translation temporelle près étiquetées par un réel positif permettra de définir  $\mathcal{I}^u$  comme la réunion de ces trajectoires. Définissons :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i^*, u_i)}, \text{ où } w_i^* \in W^*, u_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \omega(W_K^* \times [0, u]) \\ \text{est fini pour toute partie finie } K \text{ de } \mathbb{Z}^d \text{ et } u \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} \quad (8)$$

et munissons  $\Omega$  de la tribu  $\mathcal{O}$  engendrée par les applications  $\omega \mapsto \omega(D)$ , pour  $D \in \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ .

Définissons donc une mesure  $\nu$  sur  $(W^*, \mathcal{W}^*)$ . Pour cela, nous définissons une mesure  $Q_K$  sur  $(W, \mathcal{W})$ , supportée par  $W_K^0$  et de masse totale  $\text{cap}(K)$  par :

$$Q_K[(X_{-n})_{n \geq 0} \in A, X_0 = x, (X_n)_{n \geq 0} \in B] = \mathbf{P}_x[A | \forall n \geq 1, X_n \notin K] e_K(x) \mathbf{P}_x[B],$$

pour  $x \in \mathbb{Z}^d$  et  $A, B \in \mathcal{W}^+$ . Normalisée, cette mesure correspond à loi de la marche aléatoire telle que  $X_0$  soit distribué selon la mesure  $\text{harm}_K$  et conditionnée à ne pas visiter  $K$  aux temps négatifs.

**Proposition 2.1.** *Il existe une mesure  $\sigma$ -finie  $\nu$  sur  $(W^*, \mathcal{W}^*)$  telle que pour toute partie finie  $K$  de  $\mathbb{Z}^d$  on ait*

$$\mathbb{1}_{W_K^*} \nu = \pi \circ Q_K,$$

*c'est-à-dire que pour tout partie mesurable  $A$  de  $W^*$  telle que  $A \subset W_K^*$  on ait*

$$\nu(A) = Q_K(\pi^{-1}(A)).$$

*Démonstration.* Par le théorème d'extension de Kolmogorov, l'existence de  $\nu$  équivaut à la condition de compatibilité suivante : pour toutes parties finies  $K \subset K'$  de  $\mathbb{Z}^d$ ,

$$\pi \circ (\mathbb{1}_{W_{K'}^*} \cdot Q_{K'}) = \pi \circ Q_K, \quad (9)$$

autrement dit, que pour toute partie mesurable  $A$  de  $W^*$  telle que  $A \subset W_K^*$  :

$$Q_{K'}(\pi^{-1}(A)) = Q_K(\pi^{-1}(A)).$$

La preuve de cette propriété de compatibilité est longue, nous renvoyons à l'article fondateur d'Alain-Sol Sznitman [13]. Elle repose sur des considérations analogues à celles de la preuve de la propriété 1.2 ci-dessus.  $\square$

Nous allons maintenant construire la famille aléatoire  $(\mathcal{I}^u)_{u > 0}$ . Munissons  $\Omega$  de la loi  $\mathbb{P}$  d'un processus de Poisson sur  $(W^* \times \mathbb{R}^+, \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$  de mesure d'intensité  $\nu \otimes du$ , où  $du$  est la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^+$ . Pour  $w^* \in W^*$ , nous posons  $\text{Range}(w^*) = \{w(n); n \in \mathbb{Z}\}$ , où  $w \in W$  est un représentant quelconque de  $w^*$ . À  $\omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i^*, u_i)}$ , associons l'entrelac et l'ensemble vacant au niveau  $u$  :

$$\mathcal{I}^u(\omega) = \bigcup_{i: u_i \leq u} \text{Range}(w_i^*),$$

$$\mathcal{V}^u(\omega) = \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{I}^u(\omega).$$

### Trace de l'entrelac sur une partie finie de $\mathbb{Z}^d$

Soit  $u > 0$  et  $K$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ . Nous avons :

$$\mathcal{I}^u(\omega) \cap K = \emptyset \Leftrightarrow \omega(W_K^* \times [0, u]) = 0.$$

Or, sous  $\mathbb{P}$ ,  $\omega(W_K^* \times [0, u])$  suit la loi de Poisson de paramètre  $(\nu \otimes du)(W_K^* \times [0, u]) = u \text{cap}(K)$ , nous obtenons donc la formule (7). Le modèle d'entrelacs aléatoires  $(\mathcal{I}^u)_{u>0}$  ainsi construit satisfait à la définition 3.

### 3 Quelques propriétés du modèle d'entrelacs aléatoires

Le modèle d'entrelacs aléatoires a été étudié de manière intensive depuis sa conception. Voici un certain nombre des résultats obtenus.

1. L'entrelac aléatoire au niveau  $u$  peut être vu comme un modèle de percolation sur  $\mathbb{Z}^d$ , avec :

$$\mathbb{P}[x \in \mathcal{I}^u] = e^{-\frac{u}{g(0)}},$$

et des corrélations décroissant polynomialement :

$$\text{Cov}[\mathbb{1}_{x \in \mathcal{I}^u}, \mathbb{1}_{y \in \mathcal{I}^u}] \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C(d, u)}{|x - y|^{d-2}}, \quad \text{où } C(d, u) > 0.$$

2. L'entrelac aléatoire au niveau  $u$  vérifie l'inégalité de Harris-FKG.
3.  $\mathbb{P}$  est invariante par les translations  $\tau_x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d, y \mapsto x + y$ , pour  $x \in \mathbb{Z}^d$ . De plus, si  $x \neq 0$ ,  $\tau_x$  est ergodique pour  $\mathbb{P}$ .
4. Pour tout  $u > 0$ , presque sûrement,  $\mathcal{I}^u$  est connexe et infini, et  $\mathcal{V}^u$  est infini.
5. Il existe un réel  $u_d^* \in ]0, \infty[$  tel que :
  - pour tout  $u < u_d^*$ , presque sûrement, il existe exactement une composante connexe infinie dans  $\mathcal{V}^u$  ;
  - pour tout  $u > u_d^*$ , presque sûrement, il n'existe aucune composante connexe infinie dans  $\mathcal{V}^u$ .
6. Presque sûrement, entre deux points quelconques de  $\mathcal{I}^u$ , il existe un chemin dans  $\mathcal{I}^u$  empruntant au plus  $\lceil d/2 \rceil$  trajectoires de l'entrelac.

De nombreuses autres propriétés des entrelacs aléatoires ont été étudiées, par exemple le comportement proche de  $u_d^*$  de la probabilité que l'origine soit reliée à l'infini dans  $\mathcal{V}^u$ , les propriétés de graphe de l'entrelac, la capacité de l'entrelac, ou encore le comportement de la marche aléatoire sur  $\mathcal{I}^u$ .

## 4 Variations autour du modèle d'entrelacs aléatoires

### Entrelacs aléatoires en temps continu : lien avec le champ libre gaussien

Considérons une version continue en temps de l'entrelac aléatoire. Chaque trajectoire doublement infinie se voit affectée d'une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètre 1 correspondant au temps entre chaque saut. En collectant les temps locaux d'occupation de chaque site par ces trajectoires, on obtient un champ aléatoire de réels sur  $\mathbb{Z}^d$ . En dimension 3, celui-ci est relié au champ libre gaussien sur  $\mathbb{Z}^2$  accroché à l'origine, cf. [12].

### Entrelacs browniens

Il existe une version continu en temps et en espace du modèle d'entrelacs aléatoires. Il s'agit du modèle d'entrelacs browniens et s'obtient en remplaçant la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  par le mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$ . Il a été introduit par Alain-Sol Sznitman dans [11] et est une limite d'échelle de l'entrelac aléatoire discret. Des résultats de percolation existent pour la saucisse de Minkowski de l'entrelac brownien, voir par exemple [9].

### Entrelacs aléatoires en dimension 2 : Points tardifs de la marche aléatoire sur le tore bidimensionnel

La trace locale de la marche aléatoire simple sur le tore présente un comportement qualitativement différent en dimension 2 de celui qu'elle présente en dimension supérieure, en raison de sa récurrence. Le temps d'atteinte d'un point quelconque du tore est bien d'ordre  $N^2$ , mais si un site est visité avant le temps  $\lfloor uN^2 \rfloor$ , alors avec grande probabilité tous les points du voisinage sont également visités. Au contraire si le point n'a pas été visité au bout du temps  $\lfloor uN^2 \rfloor$  alors tout son voisinage est également vacant, avec grande probabilité.

Et en effet, on constate qu'en dimension 2, l'entrelac aléatoire tel que construit précédemment ne présente aucun intérêt car il est entièrement vacant.

Dans [7], Francis Comets, Serguei Popov et Marina Vachkovskaia ont néanmoins considéré un modèle d'entrelacs aléatoires sur  $\mathbb{Z}^2$ , qui n'est pas trivial et qui possède de surcroît une interprétation en terme de trace locale de la marche aléatoire simple. Cet entrelac (voir figure 2) est construit à partir d'une autre brique de base : la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^2$  « conditionnée à ne pas toucher 0 ». Il s'agit de la chaîne de Markov transiente définie sur  $\mathbb{Z}^2$  par les probabilités de transition

$$p_{x,y} = \frac{a(y)}{4a(x)} \mathbb{1}_{x \sim y},$$

où  $a$  est l'unique (à constante multiplicative près) fonction harmonique qui soit bornée sur  $\mathbb{Z}^2$  et s'annule en 0. Une notion de capacité adaptée à cette chaîne de Markov est utilisée et ce modèle d'entrelacs aléatoires vérifie la définition 3 pour cette capacité.

Le temps de couverture du tore  $\mathcal{T}_N^{(2)} = \sup\{\tau_x, x \in \mathbb{Z}_N^2\}$  possède une espérance (cf. [1]) :

$$\mathbb{E} \left[ \mathcal{T}_N^{(2)} \right] \sim \frac{4}{\pi} N^2 \ln^2(N),$$

et de plus (cf. [8]), en probabilité,

$$\frac{\mathcal{T}_N^{(2)}}{\mathbb{E}[\mathcal{T}_N^{(2)}]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

L'entrelac aléatoire bidimensionnel au niveau  $u$  est une limite pour  $N \rightarrow \infty$  de l'ensemble des points visités jusqu'au temps  $\lfloor \frac{4u}{\pi} N^2 \ln^2(N) \rfloor$  par la marche aléatoire simple sur le tore  $\mathbb{Z}_N^2$  conditionnée à éviter l'origine. Cet entrelac aléatoire décrit donc le voisinage local d'un point tardif, i.e. un point non encore visité au bout d'un temps proportionnel à  $\mathcal{T}_N^{(2)}$ . Mentionnons l'existence d'une transition de phase pour la finitude de l'ensemble vacant, au paramètre  $u = 1$ , correspondant précisément au coefficient du terme dominant de l'asymptotique de  $\mathcal{T}_N^{(2)}$ .

### Complément : points tardifs de la marche aléatoire sur le tore en dimension $d \geq 3$

En dimension  $d \geq 3$ , le temps de couverture du tore est aussi bien compris : nous avons, quand  $N \rightarrow \infty$ ,  $\mathbb{E}[\mathcal{T}_N^{(d)}] \sim g(0)N^d \ln(N^d)$ , et en probabilité,  $\mathcal{T}_N^{(d)}/\mathbb{E}[\mathcal{T}_N^{(d)}] \rightarrow 1$  (cf. [4], par exemple). De plus, les points tardifs de la marche aléatoire simple sur le tore ont été étudiées. Dans [10], est démontrée l'existence d'un  $u^* > 0$  tel que pour tout  $u > u^*$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , l'ensemble  $\mathcal{V}^u$  des points du tore non visités à l'instant  $u\mathbb{E}[\mathcal{T}_N^{(d)}]$  peut être couplé avec deux ensembles de Bernoulli  $\mathcal{B}^-$  et  $\mathcal{B}^+$  de paramètres  $n^{-(u \pm \epsilon)d}$ , de sorte que  $\mathcal{B}^- \subset \mathcal{V}^u \subset \mathcal{B}^+$  avec grande probabilité.

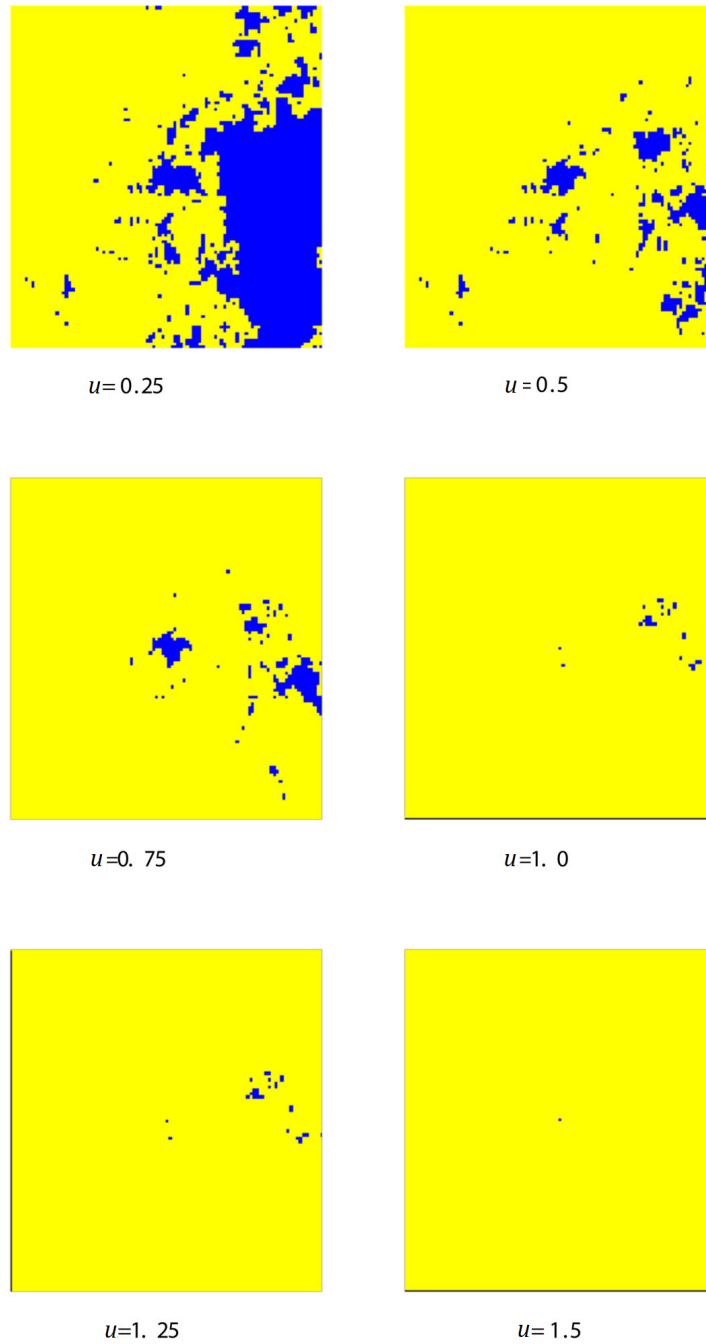


FIGURE 2 – Une réalisation de l’entrelac aléatoire bidimensionnel pour différentes valeurs de  $u$  (simulation due à Darcy Camargo). L’entrelac est en jaune, l’ensemble vacant en bleu. Pour  $u = 1.5$ , le seul site vacant dans la fenêtre considérée est l’origine.

## 5 Travaux passés et à venir faisant intervenir les entrelacs aléatoires

Le modèle d'entrelacs aléatoires bidimensionnel (ou planaire) possède également un analogue continu, dont la brique élémentaire est le mouvement brownien conditionné à éviter la boule unité. Avec Francis Comets, nous avons publié un article ([5]) sur la vitesse de fuite de ce processus. Un autre travail est en cours avec Serguei Popov, portant sur des propriétés du modèle d'entrelacs aléatoires planaire : par exemple pour démontrer une loi du 0-1 pour ce modèle, bien qu'il ne présente pas d'invariance par translation.

Par ailleurs, dans le cadre de ma thèse, je travaille avec Wolfgang König sur un modèle de condensation de Bose-Einstein. Nous étudions (cf. [2], [6]) un modèle de physique statistique sur le tore, dont j'expose ici une version simplifiée : il s'agit de la marche aléatoire sur le tore pénalisée par la somme des carrés des temps locaux. Nous considérons la marche aléatoire sur le tore  $X = (X_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ , de loi  $\mathbb{P}^{(N)}$ . Nous définissons le Hamiltonien suivant :

$$\Phi_{N,L}(X) = \sum_{0 \leq i, j \leq L} \mathbb{1}_{X_i = X_j} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} T_{L,x}(X)^2,$$

où  $T_{L,x}(X) = \#\{i = 0, \dots, L : X_i = x\}$  est le temps local en  $x$  de la marche  $X$  entre les instants 0 et  $L$ . Notre objectif est de comprendre, dans la limite thermodynamique où  $N \rightarrow \infty$  et  $L_N$  est proportionnel au cardinal du tore, l'ensemble  $\{X_0, \dots, X_{L_N}\}$  sous la loi modifiée  $\mathbb{P}_{N,L_N}$  donnée par

$$\frac{d\mathbb{P}_{N,L_N}}{d\mathbb{P}^{(N)}}(X) = e^{-\Phi_{N,L_N}(X)}.$$

L'objet limite devrait faire intervenir le modèle d'entrelacs aléatoires, et devrait permettre de décrire le *condensat* dans un gaz de Bose.

## Références

- [1] Yoshihiro ABE. « Second-Order Term of Cover Time for Planar Simple Random Walk ». In : *Journal of Theoretical Probability* (mai 2020). DOI : [10.1007/s10959-020-01011-2](https://doi.org/10.1007/s10959-020-01011-2). URL : <https://doi.org/10.1007/s10959-020-01011-2>.
- [2] Stefan ADAMS, Andrea COLLEVECCHIO et Wolfgang KÖNIG. « A variational formula for the free energy of an interacting many-particle system ». In : *The Annals of Probability* 39.2 (mar. 2011). DOI : [10.1214/10-aop565](https://doi.org/10.1214/10-aop565). URL : <https://doi.org/10.1214/10-aop565>.
- [3] David ALDOUS et James Allen FILL. *Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs*. brouillons non publiés, disponibles ici : <http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/RWG/book.html>. 2002.
- [4] David BELIUS. « Gumbel fluctuations for cover times in the discrete torus ». In : *Probability Theory and Related Fields* 157.3-4 (jan. 2013), p. 635-689. DOI : [10.1007/s00440-012-0467-7](https://doi.org/10.1007/s00440-012-0467-7). URL : <https://doi.org/10.1007/s00440-012-0467-7>.
- [5] Orphée COLLIN et Francis COMETS. « Rate of escape of conditioned Brownian motion ». In : *Electronic Journal of Probability* 27 (2022), p. 1-26. DOI : [10.1214/21-EJP737](https://doi.org/10.1214/21-EJP737). URL : <https://doi.org/10.1214/21-EJP737>.
- [6] Orphée COLLIN, Benedikt JAHNEL et Wolfgang KÖNIG. « The free energy of a box-version of the interacting Bose gas ». prépublication (jan. 2022) disponible ici <http://arxiv.org/abs/arXiv:2201.05085>.
- [7] Francis COMETS, Serguei POPOV et Marina VACHKOVSKAIA. « Two-Dimensional Random Interacements and Late Points for Random Walks ». In : *Communications in Mathematical Physics* 343.1 (déc. 2015), p. 129-164. DOI : [10.1007/s00220-015-2531-5](https://doi.org/10.1007/s00220-015-2531-5). URL : <https://doi.org/10.1007/s00220-015-2531-5>.
- [8] Amir DEMBO, Yuval PERES, Jay ROSEN et Ofer ZEITOUNI. « Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions ». In : *Annals of Mathematics* 160.2 (sept. 2004), p. 433-464. DOI : [10.4007/annals.2004.160.433](https://doi.org/10.4007/annals.2004.160.433). URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2004.160.433>.
- [9] Xinyi LI. *Percolative properties of Brownian interacements and its vacant set*. 2016. DOI : [10.48550/ARXIV.1610.08204](https://arxiv.org/abs/1610.08204). URL : <https://arxiv.org/abs/1610.08204>.
- [10] Perla SOUSI et Sam THOMAS. « Chen–Stein method for the uncovered set of random walk on  $\mathbb{Z}_n^d$  for  $d \geq 3$  ». In : *Electronic Communications in Probability* 25.none (2020), p. 1-11. DOI : [10.1214/20-ECP331](https://doi.org/10.1214/20-ECP331). URL : <https://doi.org/10.1214/20-ECP331>.
- [11] Alain-Sol SZNITMAN. « On scaling limits and Brownian interacements ». In : *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 44.4 (déc. 2013), p. 555-592. DOI : [10.1007/s00574-013-0025-7](https://doi.org/10.1007/s00574-013-0025-7). URL : <https://doi.org/10.1007/s00574-013-0025-7>.
- [12] Alain-Sol SZNITMAN. « Random interacements and the Gaussian free field ». In : *The Annals of Probability* 40.6 (nov. 2012). DOI : [10.1214/11-aop683](https://doi.org/10.1214/11-aop683). URL : <https://doi.org/10.1214/11-aop683>.

- [13] Alain-Sol SZNITMAN. « Vacant set of random interacements and percolation ». In : *Annals of Mathematics* 171.3 (avr. 2010), p. 2039-2087. DOI : [10.4007/annals.2010.171.2039](https://doi.org/10.4007/annals.2010.171.2039). URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2010.171.2039>.