

Introduction au domaine de recherche

Systemes désordonnés

Lydia GIACOMIN

27 septembre 2022

Table des matières

1	Bref historique et enjeux	2
2	Un exemple de marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)	2
3	Un exemple tiré de la physique mathématique : la localisation de Anderson	4
3.1	Présentation du modèle	4
3.2	Méthode multi-échelle	5
3.3	Un problème ouvert : localisation multi-corps	6
4	Problèmes d'interfaces aléatoires	6
4.1	Processus d'exclusion simple	7
4.2	Ensemble GUE	8
4.3	Retour sur le TASEP	10

1 Bref historique et enjeux

Notre incapacité à décrire de manière déterministe le comportement microscopique des systèmes de particules en interaction a longtemps poussé les scientifiques vers le développement d'une théorie générale des systèmes étendus, qui ne nécessite pas de connaître les positions et les vitesses de toutes les particules à chaque instant... encore aujourd'hui, aborder ces problèmes par une approche déterministe est impossible, car nos ordinateurs n'ont pas une puissance de calcul suffisante !

Pour voir l'apparition des premiers travaux vrais et propres de mécanique statistique, il faut attendre la deuxième moitié du XIX^e siècle. Naturellement, les premiers scientifiques à jeter les bases cette discipline sont des physiciens. A l'époque, un grand nombre d'entre eux s'attellent à décrire une théorie naissante et en cours de développement : la thermodynamique. L'écossois James Clerk Maxwell en fait partie. Dans un article paru en 1860, il donne la loi de probabilité de la vitesse des particules dans un gaz parfait, et ce faisant, établit sans le savoir la toute première formule de la physique statistique.

En 1864, Ludwig Boltzmann, à l'époque encore étudiant, découvre cet article de Maxwell. Il s'attelle à porter plus loin le travail de Maxwell, à le généraliser et à développer un formalisme mathématique qui permette d'expliquer cette distribution de probabilité. De là naît la formule de Maxwell-Boltzmann, qui donne la distribution d'équilibre des états d'un système étendu en fonction de leur énergie. Boltzmann passera ensuite la majeure partie de sa vie à développer des notions de mécanique statistique à l'équilibre ; il établira par exemple un lien entre entropie et configurations microscopiques d'un système de particules dans une formule qui porte son nom.

En 1884, l'américain Josiah Willard Gibbs est le premier à donner à cette théorie naissante le nom qu'elle porte aujourd'hui. Il regroupe les principes de la mécanique statistique connus des physiciens de l'époque dans un livre intitulé *Elementary principles in Statistical Mechanics*, publié en 1902. Il généralise également la notion d'entropie statistique mise en avant par Boltzmann.

Depuis que ces trois physiciens ont posé les premières pierres de la mécanique statistique, la discipline a connu un essor important, de nombreux problèmes se sont posés et de nombreux scientifiques se sont intéressés à les résoudre, du physicien Wilhelm Lenz à l'origine du très célèbre modèle d'Ising, à Giorgio Parisi qui a obtenu le prix Nobel en 2021.

Dans ce compte-rendu, nous nous limiterons à une discussion des modèles de systèmes étendus dans lesquels une partie des paramètres est aléatoire. On parle alors de *système désordonné*. Commençons par regarder sur un exemple les difficultés posées par ce type de problème.

2 Un exemple de marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)

Imaginons une marche aléatoire (MA) sur \mathbb{Z} issue de 0 avec des poids $\omega(i)$ attribués à chacun des sites, et une probabilité de saut qui dépend de ces poids (voir figure 1). La suite $(\omega(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires iid, à valeurs dans $(0, 1)$ et de loi μ ; on note Ω l'espace sur lequel cette suite est définie et $\mathbb{P} := \mu^{\otimes \mathbb{Z}}$ la loi de la suite.

Ici, notons d'abord que l'on peut adopter plusieurs points de vue sur la marche. On peut tirer une réalisation du désordre et faire évoluer la MA sur le désordre tiré, où les paramètres aléatoires sont gelés dans le temps. La loi de la MA est alors appelée *loi quenched*, notons-la $\mathbb{P}_{0,\omega}$. Ce point de vue est pertinent dans les cas où l'environnement évolue de façon lente par rapport à la vitesse du marcheur (les physiciens appellent cela *l'approximation du régime quasi-statique*).

Un deuxième point de vue consiste à regarder la dynamique de la marche en moyenne sur le désordre.

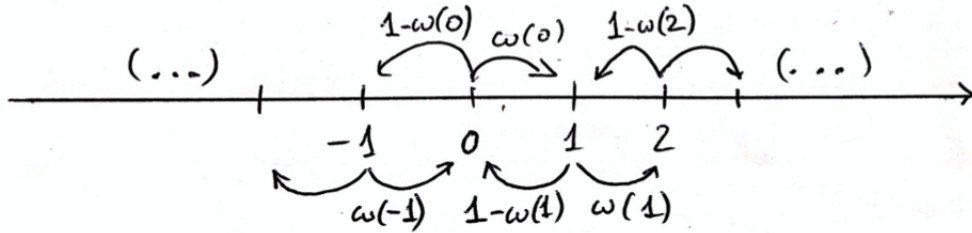


FIGURE 1 – Poids sur chacun des sites de la marche aléatoire

La loi de la MA est alors appelée *loi annealed*, on la notera \mathbb{P}_0 . Peut-on s'attendre à ce que cette dynamique se ramène à celle d'un système non désordonné, par exemple à l'approximation champ moyen associée... ?

On s'interroge donc sur le comportement de cette MA. Les premières choses à faire peuvent être de se demander sous quelles conditions la MA est récurrente ou bien transiente, de calculer ses moments,... De notre côté, pour avoir une idée de ce qu'il se passe, nous allons simplement regarder les quelques premiers pas de la marche.

La loi annealed du premier incrément $X_1 - X_0$ se calcule facilement.

$$\mathbb{P}(X_1 - X_0 = 1) = \int_{\Omega} \omega(0) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mu}[\omega(0)] =: m_1$$

où l'on a noté m_1 le premier moment de μ .

A présent, regardons le second incrément $X_2 - X_1$.

$$\mathbb{P}(X_2 - X_1 = 1) = \int_{\Omega} \omega(0)\omega(1) + (1 - \omega(0))\omega(1) d\mathbb{P}(\omega) = m_1$$

Jusqu'ici, la loi annealed des incréments de la MA semble être celle de l'approximation champ moyen associée à notre modèle (dans laquelle le poids $\omega(i)$ sur chaque site est remplacé par sa moyenne). Cependant, en regardant le troisième incrément $X_3 - X_2$, on voit que les choses se compliquent.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_3 - X_2 = 1) &= \int_{\Omega} \omega(0)\omega(1)\omega(2) + \omega(0)(1 - \omega(1))\omega(0) + (1 - \omega(0))\omega(0)\omega(1) + (1 - \omega(0))(1 - \omega(-1))\omega(-2) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= m_1^3 + m_2(1 - m_1) + m_1(m_1 - m_2) + (1 - m_1)^2 m_1 \\ &= m_1 + (1 - 2m_1)(m_2 - m_1^2) \end{aligned}$$

Ici, prenons $m_1 > 1/2$. Ce cas est celui d'une dérive moyenne de la MA vers la droite. Nous voyons alors que $\mathbb{P}(X_3 - X_2 = 1) \leq m_1$. On en déduit que la dérive vers la droite de la MA en milieu aléatoire est **ralentie** par rapport à une MA en milieu non désordonné.

L'heuristique de ce phénomène très classique tient à l'existence de zones de "piégeage" le long de la chaîne. La présence de désordre fait que, dans certaines parties plus ou moins étendues de la chaîne, la probabilité de faire un pas vers la gauche peut être élevée, même si en moyenne la MA présente un drift

vers la droite. Il est difficile pour la MA de sortir de ces zones, elle peut donc y rester piégée longtemps, d'où le nom de zone de piégeage, ce qui ralentit le drift.

Considérons à présent une marche aléatoire symétrique, avec $m_1 = 1/2$. Si notre MA n'avait pas été désordonnée, en vertu du théorème centrale limite, les fluctuations typiques autour de la moyenne auraient été d'ordre $N^{-1/2}$. On peut alors se demander si, dans la limite d'un petit désordre, cet ordre de grandeur reste vrai.

En réalité, on sait calculer ces estimées sur les marches aléatoires en milieu aléatoire depuis plusieurs années déjà. Sinai, en 1982, a établi qu'en un temps N , la marche désordonnée couvre une étendue spatiale d'ordre $\log^2 n$. On tentera de donner une heuristique de ce résultat.

Prenons une zone de taille $(\epsilon \log n)^2$. Le théorème centrale limite veut que les zones de piégeage dans ce cas soient de taille typique $\mathcal{O}(\epsilon \log n)$.

Or, le temps typique de sortie d'une zone de piégeage à L sites est de l'ordre de $\exp(L)$... ce qui signifie, dans ce cas précis, que la marche aléatoire met un temps polynomial à sortir d'une zone de piégeage, et que l'exposant de ce polynôme peut être rendu arbitrairement petit en jouant sur la valeur de ϵ . La sortie des zones de piégeage se fait donc dans un temps très petit devant n , ce qui explique que la MA va avoir le temps de parcourir toute l'étendue de taille $(\epsilon \log n)^2$ en un temps n . A noter que plusieurs points de ce raisonnement demandent à être clarifiés avant d'aboutir à une preuve vraie et propre, mais notre heuristique donne une bonne idée du comportement de la MA.

Nous avons donc identifié un cas de système désordonné dont le comportement est très fortement modifié par la présence de désordre. La théorie des systèmes désordonnés est un domaine aujourd'hui très actif regroupant un vaste ensemble de problèmes et qui vise à expliquer le comportement de certains objets en présence de désordre stochastique. Se posent alors les questions suivantes, par exemple :

1. Quelle est la dynamique annealed ?
2. Peut-on regarder une asymptotique du problème ?
3. Comment décroissent les fluctuations liées au désordre dans cette asymptotique, et quelle est leur loi ?
4. ...

3 Un exemple tiré de la physique mathématique : la localisation de Anderson

3.1 Présentation du modèle

Pour rester sur les marches aléatoires en milieu aléatoire, nous nous proposons de poursuivre notre discussion par une version appliquée d'un problème de marche aléatoire sur un réseau. Les premières constatations expérimentales de la localisation de Anderson datent des années 1950 environ. Ces premières observations, réalisées sur des semiconducteurs, semblent montrer que ces matériaux se comportent comme des isolants à condition que le nombre d'impuretés ou de défauts (que l'on modélisera par du désordre) soit suffisamment grand. Le résultat de localisation de Anderson est cependant bien plus général et ne s'applique pas uniquement à des semiconducteurs, mais bien à toute particule chargée sur un réseau D -dimensionnel. On modélise l'état du système par une fonction dans

$\mathcal{L}^1(\Lambda)$ où $\Lambda \subset \mathbb{Z}^D$ est un ensemble fini (on se place sur une portion finie du réseau). Son évolution est donnée par le Hamiltonien

$$H = J_0(-\Delta - 2\text{Id}) + V \quad (1)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien et V est un opérateur diagonal sur le réseau, dont les entrées v_x associées à chaque point du réseau sont des variables aléatoires iid.

V représente ici le potentiel électrostatique sur chacun des sites, et J_0 le couplage entre deux sites voisins du réseau. L'aléa des entrées de V est une manière de modéliser la présence de défauts à des endroits inconnus du réseau (à chaque site, la valeur du potentiel est légèrement modifiée, ou non, par la présence de défauts).

Dans la version non désordonnée de ce modèle, les vecteurs propres sont simplement ceux de l'équation de la chaleur, c'est à dire une combinaison linéaire de fonctions sin et cos, avec une condition d'invariance par translation d'un site à un autre du réseau. Dans le cas non désordonné on a donc transport de l'énergie. Il est alors naturel de se demander si cette propriété survit lorsque l'on passe à la version désordonnée du problème. En fait, on peut montrer que, pour un désordre suffisamment grand, les corrélations entre deux sites sont exponentiellement petites en fonction de la distance entre eux, ce qui constitue la définition d'un isolant.

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\substack{\text{vecteurs} \\ \text{propres}} \mathbf{E} \in \mathbb{Z}^D} \langle \mathbf{x}, \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{E}, \mathbf{y} \rangle \right] \leq C \exp \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\xi} \right) \quad (2)$$

où $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$, $\mathbf{x} = (\delta_{x,n})_{n \in \Lambda}$ et $\mathbf{y} = (\delta_{y,n})_{n \in \Lambda}$.

Deux méthodes de résolution du problème de localisation de Anderson sont connues aujourd'hui : la méthode de la résolvante, et la méthode multi-échelle. C'est de cette dernière que nous allons parler.

3.2 Méthode multi-échelle

Dans cette méthode, le but est de diagonaliser le Hamiltonien H en effectuant des changements de base successifs, de manière à ce que la partie hors-diagonale du Hamiltonien tende vers 0 avec ces changements de base.

Appelons $(\mathbf{x}^{(1)})_{\mathbf{x} \in \Lambda}$ la famille de vecteurs que l'on obtient après notre premier changement de base. D'après la théorie des perturbations, cette nouvelle base vérifie :

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle \mathbf{y}^{(1)}, H\mathbf{x} \rangle}_{=v_y \langle \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{x} \rangle + o(\|J\|)} &= \langle \mathbf{y}^{(1)}, V\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}^{(1)}, J\mathbf{x} \rangle \\ &= v_x \langle \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, J\mathbf{x} \rangle \\ \text{i.e. } \langle \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{y}, J\mathbf{x} \rangle}{v_y - v_x} + o(\|J\|) \end{aligned} \quad (3)$$

et si l'on appelle $A^{(1)}$ la matrice définie par ses entrées $\langle \mathbf{y} | A^{(1)} \mathbf{x} \rangle := \frac{\langle \mathbf{y}, J\mathbf{x} \rangle}{v_y - v_x}$, en posant le changement de base $|\mathbf{x}^{(1)}\rangle := e^{A^{(1)}} |\mathbf{x}\rangle$ on a :

$$\begin{aligned}
H^{(1)} &:= e^{A^{(1)}} H e^{-A^{(1)}} = \sum_0^\infty \frac{(\text{ad } A^{(1)})^n}{n!} H \\
&= H_0 + J + \sum_1^\infty \frac{(\text{ad } A^{(1)})^n H_0}{n!} + \frac{(\text{ad } A^{(1)})^n J}{n!} \\
&= H_0 + \cancel{J} - \cancel{J} + (\text{ad } A^{(1)})J + \sum_2^\infty -\frac{(\text{ad } A^{(1)})^{(n-1)} J}{n!} + \frac{(\text{ad } A^{(1)})^n J}{n!} \\
&= \underbrace{H_0}_{:=H_1} + \underbrace{(\text{ad } A^{(1)})J + \sum_1^\infty n \frac{(\text{ad } A^{(1)})^n J}{(n+1)!}}_{:=J^{(1)}}
\end{aligned} \tag{4}$$

où $\text{ad } A^{(1)} = [A^{(1)}, \cdot]$. La partie hors diagonale $J^{(1)}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\|J\|^2)$. On itère ensuite ce raisonnement, et en contrôlant le shift des vecteurs propres à chaque étape, on parvient à démontrer le résultat de localisation.

Pour montrer la localisation de Anderson, il n'est pas nécessaire de déterminer exactement les vecteurs propres et valeurs propres du Hamiltonien désordonné. Il suffit en fait de borner la différence entre les vecteurs propres du Hamiltonien désordonné et les suites $(\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in \Lambda}$, pour avoir une borne supérieure sur les corrélations entre les sites.

L'idée est de fixer un seuil ϵ tel que le dénominateur $v_x - v_y$ dans l'équation (3) soit de norme plus grande que ϵ avec grande probabilité (whp). La matrice $A^{(1)}$ introduite plus haut vérifie alors $\|A^{(1)}\| < J_0/\epsilon$. On voit ici apparaître le rapport entre l'intensité du couplage et l'intensité du désordre, cohérent avec le fait que le shift subi par les vecteurs propres lors du premier changement de base est petit dans le cas d'un désordre important... Il faut encore contrôler les changements de base suivants pour finalement obtenir le résultat de localisation voulu.

3.3 Un problème ouvert : localisation multi-corps

Une extension du problème de la localisation de Anderson consisterait à montrer la localisation de l'énergie sur une chaîne de spins légèrement en interaction, de Hamiltonien

$$H = \sum_{-K}^{K'} h_i S_i^z + \sum_{i=-K}^{K'} \gamma S_i^x + \sum_{i=-K-1}^{K'} J_i S_i^z S_{i+1}^z \tag{5}$$

La piste actuelle pour résoudre ce problème consiste à appliquer une méthode multi-échelle, de manière analogue à ce qui a été fait dans le cas de la localisation de Anderson. Ce cas est beaucoup plus difficile à traiter que le précédent, car le nombre d'états est beaucoup plus grand (2^N états pour une chaîne de spins de taille N).

4 Problèmes d'interfaces aléatoires

Pour notre dernier exemple de système désordonné, considérons un problème très classique : les interfaces à croissance aléatoire. Le cadre est simple, il s'agit d'une interface dont la croissance est

déterminée par des processus stochastiques. On se propose d'étudier le comportement asymptotique d'un tel processus en regardant le profil de l'interface aux temps longs.

Nous allons nous placer dans le cadre particulier où la croissance de notre interface est définie par une certaine classe de processus appelé *processus d'exclusion simple* (SEP). C'est un cas bien connu des mathématiciens. Dans cette partie, nous nous proposons d'introduire des éléments sur les matrices aléatoires en lien avec notre problème de croissance d'interface. Ce sera l'occasion d'aborder quelques propriétés bien connues, et de regarder quelques asymptotiques intéressantes.

4.1 Processus d'exclusion simple

Imaginons une chaîne de particules sur \mathbb{Z} . Sur chaque site il y a soit une particule, soit zéro particules. Les particules sautent vers un site voisin avec un taux exponentiel de paramètre 1 : à droite avec une probabilité p , et à gauche avec une probabilité $1 - p$. Cependant, avant de sauter, une particule doit vérifier si le site vers lequel elle saute est libre. S'il ne l'est pas, elle ne saute pas et reste sur son site d'origine, d'où le nom de *processus d'exclusion*.

Trois cas se profilent :

1. Si $p = 1/2$, les particules sautent à droite ou à gauche de manière équiprobable. Ce processus s'appelle le SSEP (Symmetric Simple Exclusion Process).
2. Si $p \neq 1/2$, on crée un drift dans le comportement moyen des particules. Le processus résultant s'appelle le ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process).
3. Dans les cas limite $p = 0$ et $p = 1$, les particules ne sautent que vers la droite ou vers la gauche. On appelle ce processus TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process).

C'est le cas 3. qui va nous intéresser ici, plus précisément celui où les particules sautent vers la droite. En faisant une intégration spatiale du nombre de particules sur la chaîne, on peut construire une interface aléatoire croissante qui vérifie les deux conditions suivantes.

1. Une composante stochastique intervient dans l'équation de la dynamique ;
2. La limite aux temps longs est déterministe.

Soit $\eta_t \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ la distribution de particules au temps t ($\eta_t(x) = 1$ si le site x est occupé, $\eta_t(x) = 0$ sinon). On définit la fonction hauteur $H(x, t)$ de la manière suivante.

$$H(x, t) := 2N_t + \begin{cases} \sum_{y=1}^x 1 - 2\eta_t(x) & \text{if } x \geq 1 \\ - \sum_{y=x+1}^0 1 - 2\eta_t(x) & \text{if } x < 1 \end{cases} \quad (6)$$

où N_t est le nombre de particules qui transitent à travers le site 0 pendant le temps t .

De ce fait, on voit que si une particule saute du site x au site $x + 1$, alors le profil de la hauteur croît au point x , comme c'est illustré sur la figure ci-dessous.

En redimensionnant la hauteur, l'interface admet une limite déterministe aux temps longs :

$$h_{\text{macro}}(\xi, \tau) := \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} H(\xi L, \tau L) \quad (7)$$

Par analogie avec la loi des grands nombres, h_{macro} est la limite du profil de hauteur H redimensionné de telle sorte que les fluctuations soient écrasées dans la limite des temps longs. Ce profil limite se trouve être **déterministe**, dans la mesure où il ne dépend pas de l'aléa des paramètres du modèle.

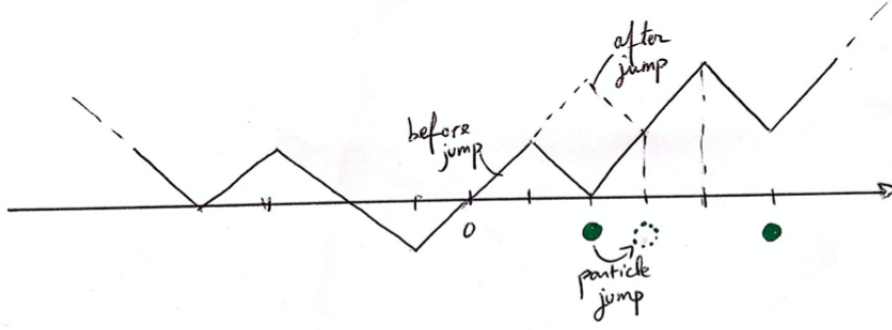


FIGURE 2 – Exemple d'évolution du profil de hauteur pour le TASEP

Nous pouvons donner une intuition de l'équation (7) en prenant une distribution stationnaire du TASEP. Sur chaque site de la chaîne, on tire une variable de Bernoulli $X_n \sim \mathcal{B}(1/2)$. Si $X_n < 1/2$ on dit qu'il y a une particule au site n , et sinon, on dit qu'il n'y en a pas. Le TASEP est invariant par cette distribution de probabilité, et l'on peut montrer que le courant de particules à-travers l'origine est non nul, c'est-à-dire que la vitesse de croissance de l'interface à l'origine est non nulle également, et donc que la hauteur de l'interface est de l'ordre du temps t . Par invariance par translation de la distribution de probabilité choisie, cette propriété s'étend à toute l'interface.

4.2 Ensemble GUE

A présent, faisons un petit détour du côté des matrices aléatoires. Ce sera l'occasion d'évoquer la notion de processus ponctuel déterminantal, et d'établir la loi de l'hémicercle. Ce point nous sera utile par la suite lorsque nous reviendrons sur le TASEP.

Définissons des entrées $(Z_{i,j})_{1 \leq i < j \leq N} \in \mathbb{C}^{N(N+1)/2}$ et $(Y_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$, telles que

$$\begin{cases} \Re(Z_{ij}) \sim \Im(Z_{ij}) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}) \\ Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{cases} \quad (8)$$

On définit par ailleurs

$$H^{(N)} := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} Y_1 & Z_{1,2} & \dots & Z_{1,N} \\ \overline{Z_{1,2}} & Y_2 & \dots & Z_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{Z_{1,N}} & \dots & \overline{Z_{N-1,N}} & Y_N \end{pmatrix} \quad (9)$$

Les matrices de cette forme font partie du Gaussian Unitary Ensemble (GUE).

Une caractérisation des matrices GUE, qui permet par ailleurs d'écrire la loi de probabilité sous forme plus compacte, est donnée dans l'équation (10) (où, pour des raisons de lisibilité, nous avons abrégé $H^{(N)}$ en H).

$$\mathbb{P}(H \in dH) = C e^{-\frac{N}{2} \text{Tr } H^2} dH \quad (10)$$

avec $dH = \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{1 \leq i, j \leq N} d\Re H_{ij} d\Im H_{ij}$.

Il est important de noter que cette mesure de probabilité est invariante sous toutes les transformations unitaires.

Il est naturel, pour des matrices aléatoires, de regarder la distribution des valeurs propres. Par un changement de variable sur l'équation (10), on obtient

$$\mathbb{P}(\lambda \in d\lambda) = C \Delta_N(\lambda) \prod_{i=1}^N e^{-\frac{N}{2} \lambda_i^2} d\lambda_i \quad (11)$$

avec $\Delta_N(\lambda) := \det (\lambda_i^{j-1})_{(1 \leq i, j \leq N)}$ le déterminant de Vandermonde des λ_i .

On introduit également la distribution empirique des valeurs propres.

Définition 1. (*Distribution empirique*) Soit $\lambda_1^N \leq \lambda_2^N \leq \dots \leq \lambda_N^N$ les N valeurs propres (réelles) d'une matrice hermitienne. La distribution de probabilité

$$L_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^N} \quad (12)$$

est appelée *distribution empirique des valeurs propres de la matrice*.

A noter que cette mesure est une **mesure aléatoire**.

Là où l'ensemble GUE devient intéressant, c'est lorsqu'on le regarde dans la limite des grandes tailles de la matrice. Dans cette limite, la distribution empirique des valeurs propres se comporte particulièrement bien, puisqu'elle converge (en un certain sens, que nous expliciterons prochainement) vers une loi limite qui, de plus, est déterministe. Cette loi limite s'appelle la loi de l'hémicercle.

Théorème 1. *Pour des matrices aléatoires GUE, la mesure empirique L_N des valeurs propres converge faiblement en loi vers la loi de l'hémicercle μ_{sc} , de densité $\sigma(x) := \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbb{1}_{|x| \leq 2}$ sur \mathbb{R} . Plus précisément,*

$$\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \forall \epsilon > 0, \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} (|L_N(f) - \mu_{sc}(f)| > \epsilon) = 0$$

Distinguons bien les deux types de convergence dans l'équation ci-dessus : la convergence de L_N vers μ_{sc} en tant que suite de mesures, et la convergence de $L_N(f)$ vers $\mu_{sc}(f)$ en tant que suite de variables aléatoires.

Nous avons évoqué plus tôt qu'il est intéressant, quand on regarde des matrices aléatoires, de s'intéresser aux fluctuations autour de la loi limite. Intéressons-nous donc aux moments d'ordre supérieur sur les valeurs propres du GUE, et regardons les corrélations entre les valeurs propres.

Définition 2. (*Fonction de corrélation à n points des valeurs propres*) La fonction de corrélation à n points $\rho^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la densité de probabilité de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en tant que valeurs propres de $H^{(N)}$, sans ordre sur les λ_i .

On arrive à montrer que le processus des valeurs propres a une forme très particulière : il est **déterminantal**, c'est-à-dire que ses fonctions de corrélation s'écrivent sous la forme :

$$\rho^{(n)} = \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n} \quad (13)$$

La fonction $K_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle le **noyau** du processus. Dans le cas des valeurs propres des matrices GUE, ce noyau s'écrit sous la forme $K_N(x, y) = \sqrt{\omega(x)\omega(y)} \sum_{k=0}^{N-1} q_k(x)q_k(y)$ avec $\omega(x) = e^{-N \frac{x^2}{2}}$ un

poids gaussien, et $(q_k)_{1 \leq k \leq N}$ les polynômes orthogonaux par rapport à ce poids (appelés polynômes de l'Hermite).

Une fois établi que notre processus des valeurs propres prend cette forme sympathique, nous avons déjà fait la quasi-totalité du travail nécessaire pour avoir une idée des fluctuations du GUE. Par exemple, regardons les fluctuations au bord de l'hémicercle. Plaçons-nous en $x = 2$ (le cas $x = -2$ se traite ensuite par symétrie). Au voisinage de cet endroit, l'espacement typique des valeurs propres n'est pas proportionnel à N^{-1} : puisque la densité de probabilité de l'hémicercle est nulle en ce point, cet espacement typique est forcément plus petit. Près du bord, le nombre de valeurs propres compris dans l'intervalle $(2 - \epsilon, 2)$ peut être approximé comme suit.

$$\int_{2-\epsilon}^2 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{\lambda_k} = \int_{2-\epsilon}^2 NL_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} \int_0^\epsilon N\sqrt{x} dx \approx N\epsilon^{3/2}$$

Ce calcul nous permet d'établir une heuristique sur la loi d'échelle des fluctuations. En effet, pour que le nombre de valeurs propres soit de l'ordre de 1 dans l'intervalle, il faut prendre $\epsilon = \mathcal{O}(N^{-2/3})$, et c'est à cette échelle que nous allons voir apparaître des fluctuations. On redimensionne donc le noyau K_N de la manière pertinente, comme suit.

$$\tilde{K}_N^{edge} = N^{-2/3} K_N(2 + \xi N^{-2/3}, 2 + \zeta N^{-2/3}) \quad (14)$$

En prenant la limite des grandes matrices aléatoires, on trouve à partir de là que la distribution de la plus grande valeur propre du GUE admet une limite en loi lorsque $N \rightarrow \infty$. La loi limite est appelée **loi de Tracy-Widom**. Cela confirme notre heuristique qui voulait que les fluctuations soient d'ordre $N^{-2/3}$: en effet, en redimensionnant les valeurs propres par ce facteur, on trouve une limite nontriviale en loi.

4.3 Retour sur le TASEP

Le point remarquable de cette discussion, aujourd'hui bien connu des mathématiciens travaillant dans le domaine, c'est que les méthodes que l'on vient d'utiliser pour déterminer les fluctuations des valeurs propres du GUE peuvent être appliquées telles quelles au TASEP pour en calculer les fluctuations. Cette étape est un peu technique, nous n'entrerons donc pas dans les détails. Nous dirons simplement qu'il est possible, en partant de la loi jointe pour n particules du TASEP, de construire un processus ponctuel qui soit déterminantal, tout comme les valeurs propres du GUE, sauf que dans le cas du TASEP, ce processus dépend des conditions initiales.

Il s'agit alors d'estimer le drift moyen vers la droite d'une particule du TASEP pour des conditions initiales données, et de regarder les lois d'échelles pour lesquelles on aboutit au temps longs à une limite nontriviale en loi. Regardons ici deux possibilités de conditions initiales différentes.

Step initial conditions Dans ce cas de figure, à $t = 0$, on a une particule sur chaque site indiqué par un nombre négatif ou nul. On numérote les particules en partant de 0, de telle sorte à ce que, au temps $t = 0$, la k^e particule soit sur le site $x_k(0) = -k$.

Sous ces conditions initiales, on peut quantifier le drift en montrant qu'aux temps longs, la particule indiquée par αt (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) se trouve en moyenne à une distance $(1 - 2\sqrt{\alpha})t$ de l'origine :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_{\alpha t}}{t} = 1 - 2\sqrt{\alpha} \quad (15)$$

Par ailleurs, les fluctuations sont d'ordre $\mathcal{O}(t^{1/3})$. En redimensionnant le processus correspondant à la position d'une particule comme dans l'équation (16), on trouve une limite en loi nontriviale.

$$X_t(u) := \frac{x_{\alpha t}(t) - (1 - 2\sqrt{\alpha})t}{-t^{1/3}} \quad (16)$$

Pour t grand, $X_t(u)$ converge en loi vers la loi de Tracy-Widom.

Flat initial conditions Pour illustrer la forte dépendance du TASEP en les conditions initiales, nous évoquons ici un deuxième type de conditions initiales. Cette fois-ci, les particules se trouvent initialement sur les sites $x_k(0) = 2k$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Le profil initial de l'interface est plat, d'où le nom *flat initial conditions*.

Dans ce cas, les fluctuations autour de la position moyenne d'une particule donnée sont également d'ordre $t^{1/3}$, mais la distribution aux temps longs des fluctuations est différente (elle s'écrit en fonction d'un processus appelé processus d'Airy 1).

Références

- [1] Notes de cours "Random matrices and related problems" de Patrik Ferrari (Université de Bonn), Beg Rohu Summer School 2008
- [2] John Z. Imbrie, *Multi-scale Jacobi method for Anderson localization*, Commun. Math. Phys., 2014
- [3] Yakov G. Sinai, *The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium*, Theory of Probability and its Applications, Volume XXVII Number 2, 1982