

Introduction au domaine de recherche

Logique des corps globalement valués

Pablo Destic

Résumé Les corps globalement valués sont des corps munis de nombreuses valuations à valeurs réelles, satisfaisant un analogue de la formule du produit. Plus précisément, un *corps globalement valué* est un corps K muni d'une mesure μ sur un ensemble de représentants de classes d'équivalence de valuations non triviales sur K vérifiant, pour tout $f \in K^\times$:

$$\int v(f) d\mu(v) = 0$$

Une telle structure permet notamment d'associer à un point projectif $[x_0 : \dots : x_n] \in K$ la *hauteur* :

$$h[x_0 : \dots : x_n] := \int \max(v(x_0), \dots, v(x_n)) d\mu(v)$$

qui ne dépend pas du choix de coordonnées homogènes. En fait, il est possible de prouver que la fonction hauteur caractérise la structure de GVF (à isomorphisme près). Cette fonction permet donc d'étudier les corps globalement valués en tant que structures dans la logique continue du premier ordre.

Nous nous intéressons notamment à la notion de clôture existentielle sur ces objets, qui est en quelque sorte une généralisation en théorie des modèles de la notion de clôture algébrique.

Dans [4], les auteurs étudient les propriétés logiques des structures de corps globalement valué sur $k(t)^{\text{alg}}$, pour lesquelles la mesure μ est à support dans l'ensemble des valuations triviales sur k . Ils prouvent que pour chaque $r > 0$, il existe une unique telle structure pour laquelle $h[x : 1] = r$, nommée $k(t)^{\text{alg}}[r]$. Plus crucialement, ils montrent que $k(t)^{\text{alg}}[r]$ est existentiellement clos.

L'objectif de mes recherches est d'adapter la preuve à un contexte plus général, afin de prouver la clôture existentielle d'autres corps globalement valués.

Introduction

Commençons par rappeler quelques faits sur les valeurs absolues, dont un exposé bien plus complet peut être trouvé par exemple dans [1].

Une *valeur absolue* sur un corps K est une application $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant, pour une certaine constante $c \geq 1$:

$$\forall x, y \in K, |xy| = |x||y|$$

$$\forall x, y \in K, |x + y| \leq c \max(|x|, |y|)$$

$$\forall x \in K, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

On dit que deux valeurs absolues $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ sont *équivalentes* s'il existe $\alpha > 0$ tel que $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^\alpha$, ce qui est équivalent à :

$$\forall x \in K, |x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x|_2 \leq 1$$

Une valeur absolue $|\cdot|$ est dite *non-archimédienne* si la constante c peut être choisie égale à 1, ou de manière équivalente si $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas contraire, $|\cdot|$ est dite *archimédienne*, et il existe un plongement $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ pour lequel $|\cdot|$ est équivalente à la restriction à K du module complexe. En particulier, la constante c peut être prise égale à $|2|$. Donc, pour toute valeur absolue $|\cdot|$, la constante $c = \max(1, |2|)$ convient.

Étudions les valeurs absolues de deux corps particuliers.

Exemple 1. *Les valuations non-triviales sur \mathbb{Q} , à équivalence près, sont :*

- la valeur absolue $|\cdot|_\infty$, restriction de la valeur absolue usuelle sur \mathbb{R}
- pour tout nombre premier $p \in \mathbb{P}$, la valeur absolue p -adique définie par $|x|_p := p^{-v_p(x)}$

Notons que $|\cdot|_\infty$ est archimédienne, tandis que $|\cdot|_p$ est non-archimédienne pour tout p premier.

Ces valuations vérifient cruciallement la formule du produit : pour tout $x \in K$ non nul,

$$\prod_{p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} |x|_p = 1$$

et $|x|_p = 1$ sauf pour un ensemble fini de p .

Exemple 2. Soit k un corps quelconque. Considérons le corps $K = k(t)$ des fractions rationnelles à une inconnue à coefficients dans k . Les valuations (non-triviales) sur K/k (i.e. les valuations sur K dont la restriction à k est triviale) sont, à équivalence près :

- la valeur absolue $|\cdot|_\infty$, définie par $|f|_\infty := e^{\deg(f)}$
- pour tout polynôme irréductible $p \in k[t]$, la valeur absolue p -adique définie par $|f|_p := e^{-\deg(p)v_p(f)}$

Dans ce cas, toutes ces valeurs absolues sont non-archimédiennes. Elles vérifient également une formule du produit : pour tout $x \in K$ non nul,

$$|x|_\infty \cdot \prod_{p \in k[t] \text{ irréductible}} |x|_p = 1$$

et $|x|_p = 1$ sauf pour un ensemble fini de p .

En normalisant les valeurs absolues de la bonne manière, cette formule s'applique aussi à des extensions finies de \mathbb{Q} and $k(t)$,

L'objectif de ce mémoire est d'étudier de manière générale les corps munis de valuations vérifiant une telle formule du produit. Afin de pouvoir remplacer les produits par des intégrales, nous préférons la notation additive, c'est-à-dire que nous considérons l'opposé du logarithme des valeurs absolues étudiées ci-dessus. Cela donne lieu à la définition suivante.

Définition 1. Soit K un corps. Une *valuation* (à valeurs réelles) de K est une application $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ satisfaisant :

$$\forall x, y \in K, v(xy) = v(x) + v(y)$$

$$\forall x, y \in K, v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)) + \min(v(2), 0)$$

$$\forall x \in K, v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$$

Notre objectif étant d'étudier des corps valués comme structures en logique continue du premier ordre, un problème apparaît directement. En effet, nous avons remarqué plus haut qu'un corps muni d'une valuation archimédienne se plonge toujours dans \mathbb{C} . Or, lorsqu'on étudie des structures en logique continue, une des constructions les plus importantes est la notion d'hyperproduit, qui implique de pouvoir plonger élémentairement une structure dans une autre structure de cardinal arbitrairement grand. Il est donc impossible d'avoir une borne sur le cardinal de nos structures. Cette remarque motive donc la généralisation suivante :

Définition 2. Soit K un corps. Une *valuation étendue* de K est une application $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ satisfaisant, pour une certaine constante $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in K, v(xy) &= v(x) + v(y) \\ \forall x, y \in K, v(x + y) &\geq \min(v(x), v(y)) - \mathfrak{a} \\ v(0) &= +\infty \text{ et } v(1) = 0 \end{aligned}$$

où l'on considère que l'égalité $\alpha = \infty - \infty$ est toujours vraie quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

La classification archimédienne/non-archimédienne se prolonge naturellement aux valuations étendues.

Définition 3. Soit K un corps et v une valuation étendue de K . v est dite *non-archimédienne* si $v(2) \geq 0$. Dans le cas contraire, v est *archimédienne*.

Ces définitions nous permettent enfin de définir la notion de corps globalement valué.

Définition 4. Soit K un corps. Notons $\mathfrak{EVal}_K \subseteq [-\infty; +\infty]^K$ l'ensemble des valuations étendues de K . Munissons \mathfrak{EVal}_K de la topologie induite par la topologie produit sur $[-\infty; +\infty]^K$. On appelle *mesure globalisante* une mesure borélienne régulière sur \mathfrak{EVal}_K satisfaisant, pour tout $x \in K$ non nul :

$$\int_{\mathfrak{EVal}_K} v(x) d\mu(v) = 0$$

(En particulier, $v(x) \neq \pm\infty$ en dehors d'un ensemble de mesure nulle)

Une telle mesure est dite *non-archimédienne* si son support est inclus dans l'ensemble des valuations non-archimédiennes.

Un *corps globalement valué* est un couple (K, μ) , où K est un corps et μ une mesure globalisante sur \mathfrak{EVal}_K .

Considérons un corps globalement valué (K, μ) . Alors, nous pouvons définir une fonction "hauteur" qui, à un point projectif $\xi = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K)$, associe :

$$h(\xi) := - \int_{\mathfrak{EVal}_K} \min\{v(x_i) : 0 \leq i \leq n\} d\mu(v)$$

En effet, le fait que μ soit une mesure globalisante assure que $h(\xi)$ ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes.

Alors, il est facile de vérifier que h définit bien une structure de hauteur projective sur K , au sens de la définition suivante.

Définition 5. Soit K un corps. Notons $\mathbb{P}(K) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n(K)$. Une *hauteur projective* sur K est une fonction $h : \mathbb{P}(K) \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants, pour une certaine constante $\mathfrak{a} \geq 0$:

- Symétrie : $\forall x \in K^n \setminus \{0\}, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, h[x] = h[\sigma x]$
- Additivité : $\forall x \in K^n \setminus \{0\}, \forall y \in K^m \setminus \{0\}, h[x \otimes y] = h(x) + h(y)$
- Monotonie : $\forall x \in K^n \setminus \{0\}, \forall y \in K, h[x] \leq h[x : y]$
- Inégalité triangulaire :
 $\forall x, y \in K^n \setminus \{0\}, x + y \neq 0 \Rightarrow h[x + y] \leq h[x : y] + \mathfrak{a}$
- Hauteur de l'unité : $h[1 : 1] = 0$

où \otimes désigne le plongement de Segre $\mathbb{P}^n(K) \times \mathbb{P}^m(K) \rightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}(K)$ défini par :

$$[x_0 : \dots : x_n] \otimes [y_0 : \dots : y_m] = [x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_0 y_m : x_1 y_0 : \dots : x_n y_m]$$

Le théorème suivant, dont la preuve reposant notamment sur le théorème de représentation de Riesz n'est pas encore publiée, constitue le point de départ qui nous permet de considérer les corps globalement valués comme des structures du premier ordre. En effet, ce théorème nous autorise à "remplacer" une mesure globalisante par une fonction de hauteur, qui n'est rien d'autre qu'une fonction de K^n à valeurs dans \mathbb{R} .

Théorème 6. Soit K un corps et $h : \mathbb{P}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ une hauteur projective. Alors, il existe une mesure globalisante μ sur \mathfrak{Val}_K telle que h soit la hauteur engendrée par μ .

Clôture existentielle

L'objet principal de ce mémoire est l'étude de la clôture existentielle des corps globalement valués. Bien qu'il soit possible de définir cette notion en utilisant des formules en logique continue, nous l'aborderons ici sous l'angle des ultraproducts.

Proposition et définition 7. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre (voir [3]) sur un ensemble I , et soit $(K_i, h_i)_{i \in I}$ une famille de corps munis de hauteurs projectives. Supposons que la famille $(h_i[2 : 1])_{i \in I}$ est bornée. Soit :

$$L = \prod_{i \in I} K_i$$

Pour un uplet $x \in L^n$, définissons :

$$h[x] := \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} h[x_i]$$

Définissons la relation d'équivalence \sim sur L^n par : $x \sim y \Leftrightarrow \{i \in I : x_i = y_i\} \in \mathcal{U}$. Alors, $\{x \in L : h[x : 1] < \infty\} / \sim$ est un corps, sur lequel h définit une hauteur projective. On nomme cette structure l'*ultraproduit* de la famille $(K_i, h_i)_{i \in I}$ modulo \mathcal{U} , noté :

$$\prod_{\mathcal{U}} (K_i, h_i)$$

ou $\prod_{\mathcal{U}} K_i$ dans le cas où les hauteurs sont implicites.

Si de plus, les (K_i, h_i) sont tous égaux à un même corps avec hauteur (K, h) , l'ultraproduit sera appelé *ultrapuissance* de (K, h) modulo \mathcal{U} et noté $(K, h)^{\mathcal{U}}$, ou encore $K^{\mathcal{U}}$.

Définition 8. On appelle *morphisme de corps avec hauteurs* un morphisme de corps qui préserve la hauteur. On définit inductivement la notion de morphisme n -élémentaire par :

- Tout morphisme de corps avec hauteurs est 0-élémentaire
- $\sigma : K \rightarrow L$ est $(n + 1)$ -élémentaire s'il existe un ultrafiltre \mathcal{U} et un morphisme n -élémentaire $\tau : L \rightarrow K^{\mathcal{U}}$ tel que $\tau \circ \sigma$ soit l'inclusion canonique de K dans $K^{\mathcal{U}}$

Dans le cas d'une inclusion $K \subseteq L$, on notera $K \preceq_n L$ si le morphisme d'inclusion est n -élémentaire. On dit que K est *existentiellement clos* dans L si $K \preceq_1 L$, et que K est une *sous-structure élémentaire* de L si $K \preceq_n L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un corps muni d'une hauteur K est *existentiellement clos* s'il est existentiellement clos dans L pour tout corps avec hauteur $L \supseteq K$.

Afin de prouver la clôture existentielle d'un corps globalement valué, nous utiliserons plutôt la caractérisation que nous définissons à présent.

Définition 9. Soit $K \subseteq L$ une inclusion de corps avec hauteurs, et soit $x \in L^n$ un uplet. Le *type sans quantificateurs* de x sur K , noté $\text{tp}_0(x/K)$, est la famille $(h[f_0(x) : \dots : f_m(x)] : m \in \mathbb{N}^*, f_0, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n])$, avec la convention $h[0] = -\infty$.

On note $\mathcal{S}_n(K)$ l'ensemble des $\text{tp}_0(x/K)$ pour tout n -uplet x vivant dans une extension de K . On munit $\mathcal{S}_n(K)$ de la topologie engendrée par les ensembles de la forme $\{\text{tp}(x/K) : |h[f_0(x) : \dots : f_m(x)] - \alpha| < \varepsilon\}$, pour $f_0, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n]$, $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ et $\varepsilon > 0$.

Un type $p \in \mathcal{S}_n(K)$ est dit *réalisé* dans $L \supseteq K$ s'il existe $x \in L^n$ tel que $\text{tp}(x/K) = p$.

Alors, on a la caractérisation suivante de la clôture existentielle, qui découle d'un résultat général en logique continue.

Proposition 10. *Soit $K \subseteq L$ une extension de corps avec hauteurs. Alors, on a $K \preceq_1 L$ si et seulement si tout type dans $\mathcal{S}_n(K)$ réalisé dans L peut être approché arbitrairement près par des types réalisés dans K .*

Notons que si x est un uplet vivant dans une extension de K , $\text{tp}_0(x/K)$ est entièrement déterminé par la restriction de h à $K(x)$, qui est un corps finiment engendré au-dessus de K . Cette caractérisation permet donc de se restreindre à l'étude d'extensions finiment engendrées, et donc de faire appel à de nombreux outils en géométrie algébrique.

Résultats et projets de recherche

Considérons à nouveau la structure standard de corps globalement valué sur \mathbb{Q} , définie dans l'exemple 1. En réalité, il s'avère que cette structure est unique à multiplication par une constante près (théorème 3 de [2]). Nous notons donc, pour tout $r > 0$, $\mathbb{Q}[r]$ l'unique structure de corps globalement valué sur \mathbb{Q} telle que $h[2 : 1] = r$. Comme remarqué précédemment, cette structure s'étend canoniquement à toute extension finie de \mathbb{Q} , donc également à sa clôture algébrique. Notons $\mathbb{Q}^{\text{alg}}[r]$ cette extension.

De la même façon, pour tout corps k , notons $k(t)[r]$ l'unique structure de corps globalement valué sur $k(t)/k$ telle que $h[t : 1] = r$ (voir exemple 2). Cette structure s'étend canoniquement à sa clôture algébrique, et nous noterons $k(t)^{\text{alg}}[r]$ ce corps globalement valué.

Dans la prépublication [4], les auteurs montrent le principal résultat de ce domaine naissant, c'est-à-dire la clôture existentielle de ce dernier.

Théorème 11 (Ben Yaacov, Hrushovski). *Pour tout $r > 0$, le corps globalement valué $k(t)^{\text{alg}}[r]$ est existentiellement clos.*

Mes recherches visent actuellement à tenter d'adapter les outils utilisés dans cette preuve au cas de $\mathbb{Q}^{\text{alg}}[r]$, le principal obstacle est la présence de valuations archimédiennes. L'objectif final est de montrer :

Conjecture 12. *Pour tout $r > 0$, le corps globalement valué $\mathbb{Q}^{\text{alg}}[r]$ est existentiellement clos.*

Plus généralement, ces recherches visent une tentative de caractérisation des corps globalement valués existentiellement clos.

Références

- [1] Emil Artin. *Algebraic numbers and algebraic functions*. AMS Chelsea Publishing, 1951.
- [2] Emil Artin and George Whaples. Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations. 1945.
- [3] John L. Bell. *Models and ultraproducts : an introduction*. Dover Publications, 2006.
- [4] Itai Ben Yaacov and Ehud Hrushovski. Globally valued function fields : existential closure, 2022.