Chirurgie géométrique et algébrique

Marcus Nicolas

9 juin 2023

Dans ce document, les variétés sont fermées (compactes sans bord) et lisses sauf mention expresse du contraire.

1 Existence de structures lisses

Les variétés, tout du moins lisses [1], sont homotopiquement équivalentes à des CW-complexes finis. Se pose alors naturellement la question de la réciproque : à quelle condition un CW-complexe fini possède-t-il une structure lisse, autrement dit quels sont les CW-complexes X ayant le type d'homotopie d'une variété différentielle ?

Exemple 1.1. Tout groupe possédant une description finie par générateurs et relations est le groupe fondamental d'un certain CW-complexe fini de dimension 2. Il doit donc exister parmi ceux-ci des CW-complexes qui ne possèdent pas de structure lisse, car les groupes fondamentaux de surfaces fermées sont en nombre dénombrable.

On peut se restreindre au cas où X est connexe. Si $\pi_1(X)$ est nul et s'il existe une équivalence d'homotopie $f\colon M \simeq X$ avec M^n une variété, alors M est orientable (car simplement connexe), et le choix d'une classe fondamentale $[M] \in H_n(M)$ fournit par produit cap des isomorphismes

$$[M] \cap -\colon H^{n-k}(M) \simeq H_k(M)$$

C'est la *dualité de Poincaré*. Remarquons qu'alors, par naturalité, la classe $[X] := f_*[M]$ induit une dualité de Poincaré sur X, au sens où l'on a des isomorphismes

$$[X] \cap -\colon H^{n-k}(X) \simeq H_k(X)$$

Si l'hypothèse sur $\pi_1(X)$ est levée, alors M puis X vérifient quand même une dualité, seulement cette fois *à coefficients tordus*. On ne rentre pas dans plus de détails, mais l'existence d'une structure lisse sur X permet de choisir une classe fondamentale à coefficients tordus $[X] \in H_n\big(X; \mathbf{Z}^{\mathscr{O}}\big)$ pour un certain système local $\mathbf{Z}^{\mathscr{O}}\colon \Pi(X) \to \mathsf{Ab}$. Un tel choix munit X d'une structure de CW-complexe de Poincaré.

L'équivalence d'homotopie f permet de rajouter encore davantage de structure sur X. On a besoin pour cela de parler de fibrés vectoriels stables.

1. C'est également vrai pour les variétés topologiques lorsque la dimension est différente de 4. Le cas de la dimension 4 est ouvert.

Définition 1.2. Un fibré vectoriel stable sur un espace topologique B est une classe pour la relation d'équivalence engendrée par les relations d'isomorphisme et $\sim$, où

$$p \sim p \oplus \underline{\mathbf{R}}$$

pour tout fibré vectoriel p sur B et où $\underline{\mathbf{R}}$ désigne le fibré vectoriel trivial canonique de rang 1 au-dessus de B.

1.3. *Fibré normal* — Étant donnée une variété riemannienne (X, g), une immersion $i\colon M \looparrowright X$ permet de définir

$$NM(i,g) := \left\{ \ (x,u) \ \middle| \ x \in M \text{ et } u \in (\operatorname{Im} T_x i)^{\perp} \ \right\} \subseteq i^*TX$$

La projection sur la première coordonnée fait en fait de $NM(i,g)$ un fibré vectoriel au-dessus de M, appelé fibré normal de l'immersion i. Pour le voir, on peut remarquer que $NM(i,g)$ n'est autre que le noyau du morphisme surjectif de fibrés vectoriels

$$i^*TX \simeq i^*T^*X \twoheadrightarrow T^*M$$

donné au-dessus de $x \in M$ par la formule $u \mapsto (v \mapsto g(u, T_x i(v)))$.

Si maintenant (Y, g') est une variété riemannienne pointée, alors le fibré normal de l'immersion

$$i'\colon M \looparrowright X \times \{*\} \hookrightarrow X \times Y$$

est tout simplement

$$NM(i', g \oplus g') \simeq NM(i,g) \oplus \underline{T_* Y}$$

Autrement dit $NM(i', g \oplus g')$ et $NM(i,g)$ définissent le même fibré stable.

Si l'on note $n := \dim M$, alors il existe des immersions $i\colon M \looparrowright \mathbf{R}^p$ pour $p \geq 2n-1$. Deux telles immersions sont de plus régulièrement homotopes (reliées par un chemin d'immersions) dès que $p \geq 2n+1$ par un théorème de Whitney.

En admettant que le fibré $NM(i)$ ne dépend à isomorphisme près que de la classe d'homotopie régulière de i, il vient finalement que le fibré stable NM qu'il représente [2] ne dépend plus que de M. C'est le fibré normal stable de M.

Si l'on revient à notre problème, l'équivalence $f\colon M \simeq X$ induit un fibré vectoriel stable privilégié $(f^{-1})^*NM$ au-dessus de X. Une fois prise en compte, cette structure supplémentaire permet en fait de mesurer le défaut d'une flèche d'une variété vers un CW-complexe à être une équivalence d'homotopie.

L'énoncé du résultat nécessite la définition suivante :

Définition 1.4. Si M est une variété de dimension n, et X un CW-complexe de Poincaré de dimension formelle n munie d'un fibré vectoriel stable E, alors une application normale de degré un de M vers X est un couple (f, α) où f est une flèche

$$f\colon M \to X$$

vérifiant $f_*[M] = [X]$ et où α est un isomorphisme stable $f^*E \simeq NM$.

2. Ici la stabilisation est induite par les inclusions $\mathbf{R}^p \times \{0\} \subseteq \mathbf{R}^{p+1}$ pour p parcourant $\mathbf{N}$.

Théorème 1.5 (Wall)**.** *Soit X un CW-complexe de Poincaré connexe pointé de dimension formelle n. Une application normale de degré un*

$$(f, \alpha)\colon M \to X$$

donne lieu à un élément

$$\sigma_*(f, \alpha) \in L_n(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])$$

vivant dans un certain groupe abélien $L_n(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])$ de L-théorie ne dépendant que de la classe de n modulo 4.

Il est nul dès que (f, α) est cobordant *à une équivalence d'homotopie. La réciproque est vraie lorsque $n \geq 5$. En particulier dans ce cas, il existe des structures lisses sur X dès que $\sigma_*(f, \alpha) = 0$.*

Pour que cet énoncé soit pleinement satisfaisant, encore faut-il définir la notion de cobordisme, et à plus forte raison celle de cobordisme entre applications normales... Il faut aussi donner une description des groupes $L_n(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])$. C'est l'objet des deux sections qui suivent. On décrira ensuite l'obstruction dans le cas n divisible par 4 et X simplement connexe.

Remarque 1.6. La condition $n \geq 5$ provient de l'utilisation dans la preuve du théorème de l'*astuce de Whitney*. On passe sur l'énoncé exact de ce résultat, mais il n'est pas valable en général en dimension 4. C'est un thème récurrent en topologie différentielle d'avoir des preuves qui cessent de fonctionner dans les « petites dimensions ».

2 Cobordisme et chirurgie sur les variétés

Le cobordisme est une relation d'équivalence sur les variétés qui permet de les comparer plus grossièrement qu'à difféomorphisme près.

Définition 2.1. Deux variétés M et N de même dimension n sont cobordantes s'il existe une variété à bord $(W, \partial W)$ de dimension $n+1$ telle que $\partial W \simeq M \amalg N$.

Exemple 2.2. Une variété est cobordante à $\varnothing$ si et seulement si elle réalise le bord d'une variété à bord.

2.3. *Chirurgie* — Étant donnée M^n une variété et $0 \leq k \leq n-1$, la donnée d'un plongement

$$j\colon S^k \times D^{n-k} \hookrightarrow M$$

permet de définir une nouvelle variété

$$N := \Big(M - j\big(S^k \times \mathring{D}^{n-k}\big)\Big) \cup_j D^{k+1} \times S^{n-k-1}$$

dite obtenue à partir de M par chirurgie le long de j.

Les variétés M et N sont cobordantes, et un cobordisme est réalisé par

$$W := M \times [0,1] \cup_{j \times \{1\}} D^{k+1} \times D^{n-k} \times \{1\}$$

On dit que W est la trace de la chirurgie. D'un point de vue homotopique, remarquons que

$$W \simeq M \cup_j D^{k+1}$$

On en déduit (par approximation cellulaire) que l'inclusion $M \subseteq W$ est k-connexe, autrement dit elle induit des isomorphismes $\pi_r(M) \simeq \pi_r(W)$ pour $r < k$ et une surjection

$$\pi_k(M) \twoheadrightarrow \pi_k(W)$$

manifestement nulle sur les classes représentant j dans $\pi_k(M)$ (pour n'importe quel chemin reliant le point base $* \in M$ à $j(*)$). De même $\pi_r(N) \simeq \pi_r(W)$ pour $r < n - k - 1$.

Finalement si $2k + 1 < n$, alors $\pi_r(M) \simeq \pi_r(N)$ pour $r < k$ et il existe une surjection

$$\pi_k(M) \twoheadrightarrow \pi_k(N)$$

tuant les représentants de j.

Exemple 2.4. Un cobordisme sur S^2 réalisé sur un plongement $S^0 \times D^2 \hookrightarrow S^2$ donne un tore ou une bouteille de Klein, selon si les deux disques ont une orientation opposée ou identique.

En fait, on peut voir la trace d'une chirurgie comme un *cobordisme élémentaire*, en vertu de :

Théorème 2.5 (Milnor)**.** *Deux variétés sont cobordantes si et seulement s'il est possible de passer de l'une à l'autre par chirurgies successives.*

2.6. *Cobordisme normal* — La relation du cobordisme donnée ci-dessus peut être raffinée en rajoutant de la structure. Par exemple, si l'on travaille avec des variétés orientés, alors on dispose d'une relation de *cobordisme orienté* défini comme suit : deux variétés orientées M et N sont en relation s'il existe une variété à bord $(W, \partial W)$ orientée et un difféomorphisme orienté

$$\partial W \simeq M - N$$

(on a renversé l'orientation de N pour garantir la réflexivité).

De même, on peut incorporer la structure normale dans la définition d'un cobordisme orienté [3] à coefficients tordus pour obtenir la relation de *cobordisme normal*. Plus précisément, deux applications normales de degré un

$$(f, \alpha)\colon M \to X \quad \text{et} \quad (g, \beta)\colon N \to X$$

sont cobordantes s'il existe une variété « orientée » à bord $(W, M - N)$ et un couple

$$(F, \eta)\colon W \to X$$

où F prolonge f et g, et $\eta\colon F^*E \simeq NW$ prolonge α et β modulo les identifications

$$NW|_M \simeq NM \oplus \underline{\mathbf{R}} \quad \text{et} \quad NW|_N \simeq NN \oplus \underline{\mathbf{R}}$$

données respectivement par la normale entrante et la normale sortante.

Il est maintenant naturel de se demander s'il existe un analogue de la chirurgie pour construire des cobordismes normaux, une *chirurgie normale* en somme. Déjà, il faut plus que la simple donnée d'un plongement $S^k \times D^{n-k} \hookrightarrow M$ pour

3. Le choix d'une classe fondamentale à coefficients tordus est en quelque sorte le choix d'une orientation du revêtement d'orientation. On reste volontairement dans le flou pour ne pas se perdre dans des détails techniques.

opérer une application normale $f\colon M^n \to X$. En effet, prolonger f à la trace d'une éventuelle chirurgie revient homotopiquement à résoudre le problème suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f"'] & & M \cup_{S^k} D^{k+1} \arrow[dl, dashed] \\ & X & \end{tikzcd}$$

La donnée qu'exige un tel relèvement s'exprime dans le langage de l'homotopie relative.

2.7. *Groupes d'homotopie relatifs* — Une application continue pointée

$$f\colon X \to Y$$

entre espaces pointés donne lieu par fonctorialité à des flèches

$$f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$$

pour $n \geq 0$.

On peut en fait dire mieux : en définissant $\pi_n(f)$ comme étant l'ensemble des classes d'homotopies pointées de diagrammes

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d] & D^n \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

pour $n \geq 1$, alors ces morphismes s'inscrivent dans une suite exacte longue d'ensembles pointés

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \longrightarrow \pi_n(f) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

et même de groupes en amont du terme $\pi_1(Y)$. On parle pour les $\pi_n(f)$ de groupes d'homotopie relatifs de la flèche f (même si ce ne sont des groupes qu'à partir de $n = 2$).

Si X et Y sont connexes par arcs, alors en particulier f est une équivalence faible si et seulement si $\pi_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Étant donnée une classe de $\pi_{k+1}(f)$, la question qui se pose désormais est s'il est possible d'en extraire un plongement $S^k \times D^{n-k} \hookrightarrow M$. On admet pour cela le résultat classique suivant :

Théorème 2.8 (Smale–Hirsch)**.** *Si $(M, \partial M)$ et N sont des variétés telles que*

(i) M est compacte

(ii) $M - \partial M$ n'est pas compacte

(iii) N est sans bord mais pas nécessairement compacte

alors on dispose d'une équivalence faible

$$\mathrm{Imm}(M, N) \simeq \mathrm{Mon}(TM, TN)$$

donné par la formule $f \mapsto (Tf\colon TM \to f^*TN)$, où[4]

4. On met de côté la question technique des topologies sur ces deux ensembles, que l'on utilisera de façon « intuitive » pour parler des π_0.

— $\mathrm{Imm}(M,N)$ *est l'ensemble des immersions* $M \looparrowright N$ *;*
— $\mathrm{Mon}(TM,TN)$ *désigne l'ensemble des morphismes* $TM \to TN$ *injectifs fibre à fibre.*

Ce théorème est l'un des nombreux avatars du *h-principe*. Grossièrement, il dit qu'il revient au même de se donner une immersion $M \looparrowright N$ et une *immersion formelle*. Avant de pouvoir énoncer l'application qui nous intéresse, commençons par un lemme.

Lemme 2.9. *Un fibré vectoriel V de rang $r > k$ au-dessus d'une variété B^k est trivial si et seulement s'il est stablement trivial.*

Démonstration

On munit V d'une métrique riemannienne et $\mathbf{R}$ du produit scalaire classique, et on suppose $V \oplus \underline{\mathbf{R}}$ trivial (il suffit de traiter ce cas). Soit donc $(e_1, \ldots, e_{r+1})$ une trivialisation orthonormale.

Les coordonnées de $1 \in \mathbf{R}$ dans cette trivialisation fournissent alors une application lisse

$$u\colon B \to S^r$$

Le théorème de Sard garantit la non-surjectivité de u, et il existe un certain point $y \in S^r - u(B)$. Si L est désigne le fibré des repères tangents au-dessus de S^r, alors u^*L est trivial car u factorise par l'inclusion de l'espace contractile $S^r - \{y\} \subset S^r$.

En particulier u^*L possède des sections, or la fibre au-dessus de $b \in B$ correspond aux repères de V_b, car $V_b = \mathbf{R}^\perp$.

Proposition 2.10. *Soit $(f, \alpha)\colon M^n \to X$ une application normale. Une classe $\omega \in \pi_{k+1}(f)$ avec $k \leq n-2$ détermine une immersion*

$$j(\omega, \alpha)\colon S^k \times D^{n-k} \looparrowright M$$

à homotopie régulière près, dont la restriction au cœur $S^k \times \{0\}$ est homotope[5] *à $\partial\omega \in \pi_k(M)$.*

Démonstration

On fixe un représentant de ω :

$$\begin{tikzcd} S^k \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\partial\omega"'] & D^{k+1} \arrow[d, "\eta"] \\ M \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Le fibré stable η^*E est trivial car D^{k+1} est contractile, d'où la chaîne d'isomorphismes stables

$$\begin{aligned} \partial\omega^*TM &\simeq \partial\omega^*TM \oplus i^*\eta^*E \\ &\simeq \partial\omega^*TM \oplus \partial\omega^* f^*E \\ &\simeq \partial\omega^*(TM \oplus NM) \\ &\simeq \underline{0} \end{aligned}$$

5. Homotopie à extrémités libres.

où le passage de la deuxième à la troisième ligne utilise crucialement l'isomorphisme α. Le lemme précédent garantit alors la trivialité du fibré $\partial\omega^*TM$, d'où un isomorphisme

$$p^*\partial\omega^*TM \simeq \underline{\mathbf{R}^n} \simeq T\big(S^k \times D^{n-k}\big)$$

avec $p\colon S^k \times D^{n-k} \twoheadrightarrow S^k$ la projection. Le membre de droite est bien trivial car $n-k \geq 1$ et $NS^k \simeq \underline{\mathbf{R}}$ pour l'inclusion canonique $S^k \subset \mathbf{R}^{k+1}$.

L'hypothèse $n \geq k+2$ garantit que les choix que l'on a fait n'influent pas sur la composante connexe de $\mathrm{Mon}\big(T(S^k \times D^{n-k}), TM\big)$ dans laquelle on atterit. Le théorème de Smale–Hirsch permet de conclure.

2.11. *Chirurgie normale* — Soit $(f,\alpha)\colon M^n \to X$ une application normale et $\omega \in \pi_{k+1}(f)$ avec $k \leq n-2$. Supposons que la classe d'immersions $j(\omega,\alpha)$ contienne un plongement

$$j\colon S^k \times D^{n-k} \hookrightarrow M$$

et notons W la trace de la chirurgie sur M le long j. L'équivalence d'homotopie $e\colon M \cup_j D^{k+1} \simeq W$ et la donnée de ω permettent de prolonger f à W en une flèche

$$F\colon W \to X$$

de manière essentiellement unique. On met de côté les questions d'orientation à coefficients tordus et de degré.

Reste alors la question de la structure normale. Il s'agit d'exhiber un isomorphisme stable

$$(Fe)^*E \simeq e^*NW$$

entre fibrés au-dessus de $M \cup_j D^{k+1}$. On prend α au-dessus de M. La restriction de α à S^k est une trivialisation stable

$$\partial\omega^*NW \simeq \partial\omega^*f^*E \simeq \underline{0}$$

induite, en reprenant les notations de la preuve de la proposition ci-dessus, par la restriction de la trivialisation $\eta^*E \simeq \underline{0}$ au bord du disque. Cette même trivialisation permet donc de prolonger α à tout D^{k+1}.

Si $(g,\beta)\colon N \to X$ désigne l'application normale de degré un obtenue par chirurgie normale sur (f,α) le long de j et si $2k+1 < n$, alors on a de manière analogue à la chirurgie classique des isomorphismes $\pi_r(f) \simeq \pi_r(g)$ pour $r \leq k$ et une surjection

$$\pi_{k+1}(f) \twoheadrightarrow \pi_{k+1}(g)$$

tuant ω.

Concrètement si $(f,\alpha)\colon M^n \to X$ est une application normale de degré un, alors on cherche par chirurgies normales successives sur (f,α) à obtenir une équivalence d'homotopie. Les espaces M et X en jeu étant des CW-complexes connexes, cela revient à essayer de tuer les $\pi_n(f)$ pour $n \geq 1$. Bien sûr ce n'est pas possible en général, mais on peut en fait le faire jusqu'à la *dimension moitié*.

2.12. *Chirurgie sous la mi-dimension* — Si $2k+1 \leq n$, alors toute application $S^k \to M^n$ est homotope à un plongement, par transversalité. Le bord $\partial\omega$

d'une classe $\omega \in \pi_{k+1}(f)$ est en particulier homotope à extrémités libres à un plongement $S^k \hookrightarrow M$.

On peut par conséquent choisir un représentant

$$j\colon S^k \times D^{n-k} \looparrowright M$$

de $j(\omega, \alpha)$ qui induit un plongement par restriction au cœur. Mais alors j est aussi un plongement près du cœur, et on peut supposer que j est un plongement quitte à rétrécir les fibres D^{n-k} (ce qui correspond à suivre un chemin d'immersions).

Si $2k + 2 \leq n$, alors on peut tuer ω par chirurgie le long de j. En admettant que le plus petit $\pi_k(f)$ non nul est de type fini (c'est une conséquence du théorème du théorème d'Hurewicz, que l'on énoncera plus tard), alors itérer ce procédé permet construire un cobordisme normal entre (f, α) et une application normale (g, β) avec $\pi_k(g) = 0$ pour $k \leq n/2$.

3 Formes quadratiques et groupe de Witt

Si A est un anneau commutatif unifère et M un A-module, une forme symétrique sur M est une forme bilinéaire

$$\varphi\colon M \times M \to A$$

vérifiant $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous x et y dans M. Elle est dite unimodulaire lorsque la flèche induite $M \to M^*$ est un isomorphisme.

Si 2 est inversible dans A, alors la forme quadratique induite par φ est l'application

$$q\colon M \to A$$

définie par

$$q(x) := \frac{\varphi(x, x)}{2}$$

En général cependant, 2 ne sera pas inversible dans l'anneau A. Ce n'est déjà pas le cas pour $\mathbf{Z}$ par exemple (cas simplement connexe).

Comment définir une forme quadratique dans le cas général ? On introduit pour ce faire la notion suivante :

Définition 3.1. Soit (M, φ) un A-module muni d'une forme symétrique. Une application $q\colon M \to A$ satisfaisant aux axiomes

(i) $\varphi(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$

(ii) $q(ax) = a^2 q(x)$

est un raffinement quadratique de φ.

Remarque 3.2. Un raffinement quadratique q de (M, φ) vérifie

$$\varphi(x, x) = 2q(x)$$

pour tout x, ce qui impose $q(x) = \varphi(x, x)/2$ lorsque 2 est inversible.

En fait on n'a pas le choix du raffinement quadratique dès que A est intègre et $2 \neq 0$. Dire dans ce cas que φ possède un raffinement quadratique revient à demander $\varphi(x, x) \in 2A$ pour tout x.

Définition 3.3. Une forme quadratique[6] sur un A-module M est la donnée d'une forme symétrique φ sur M et d'un raffinement quadratique de φ. Elle est dite unimodulaire lorsque φ l'est.

3.4. *Formes hyperboliques* — Le module A^2 muni de la forme quadratique unimodulaire (λ, μ) définie par les relations

$$\lambda(u, v) = 1$$

et

$$\mu(u) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(v) = 0$$

où (u, v) désigne la base canonique, est le *module hyperbolique*[7] libre de rang 2. On le note $H_{\%}(A)$.

On construit maintenant un module hyperbolique de rang $2n$ via la somme orthogonale

$$H_{\%}(A^n) := H_{\%}(A) \oplus \cdots \oplus H_{\%}(A)$$

où $H_{\%}(A)$ apparaît n fois dans le membre droit.

Le résultat élémentaire suivant va nous permettre de définir l'invariant de l'anneau A qui nous intéresse : son groupe de Witt.

Lemme 3.5. *Soit (M, φ, q) un module quadratique libre de rang $2n$. Si q (et donc φ) s'annule sur un sous-module L de M libre de rang n et si φ induit un isomorphisme*

$$M/L \simeq L^*$$

alors $(M, \varphi, q) \simeq H_{\%}(A^n)$.

Démonstration

On fixe une base $(y_1, \ldots, y_n)$ de L. La base duale induit alors via φ une base $([x_1], \ldots, [x_n])$ de M/L. Si x_i représente la classe $[x_i]$, alors

$$\varphi(x_i, y_j) = \delta_{ij}$$

pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

La famille $\mathscr{B} := (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est manifestement génératrice, et elle est libre car si l'on dispose de scalaires $\lambda_i \in A$ tels que

$$z := \sum_i \lambda_i x_i \in L$$

alors

$$\lambda_j = \varphi(z, y_j) = 0$$

pour tout $1 \leq j \leq n$, puis $z = 0$. Par conséquent $\mathscr{B}$ est une base de M.

Les changements de variables successifs

$$x_i' := x_i - \sum_{j<i} \varphi(x_i, x_j) y_j \quad \text{puis} \quad x_i'' := x_i' - q(x_i') y_i$$

6. Il y a d'autres définitions, mais qui sont équivalentes à celle-ci dès que M est projectif de type fini (i.e. facteur direct d'un module libre de rang fini), ce qui sera le cas pour les formes quadratiques que l'on considérera plus bas.

7. L'adjectif *hyperbolique* résulte du fait que $\mu(su + tv) = st$, et donc l'ensemble des points $x \in A^2$ vérifiant $\mu(x) = 1$ « dessine » une *hyperbole*.

permettent de supposer $x_i \perp x_j$ pour $i \neq j$, puis $q(x_i) = 0$ pour tout i. Si $H_i \subseteq M$ désigne le sous-module engendré par x_i et y_i pour $1 \leq i \leq n$, alors

$$M = \bigoplus_i H_i$$

et on a écrit M comme somme orthogonale de modules hyperboliques libres de rang 2.

Définition 3.6. Un A-module M est stablement libre si $M \oplus A^n$ est libre pour un certain n.

Remarque 3.7. Il est possible pour un module d'être stablement libre sans être libre. Par exemple si A désigne l'anneau des fonctions lisses $S^2 \to \mathbf{R}$, alors le A-module $\Gamma(E)$ des sections lisses d'un fibré vectoriel $E \to S^2$ est libre de rang fini si et seulement si E est trivial.

Le théorème de la boule chevelue montre que le fibré tangent TS^2 n'est pas trivial, mais l'inclusion $S^2 \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ donne :

$$TS^2 \oplus \underline{\mathbf{R}} \simeq \underline{\mathbf{R}^3}$$

autrement dit le A-module $\Gamma(TS^2)$ est stablement libre mais pas libre.

Cependant lorsque A est principal (comme par exemple $\mathbf{Z}$) alors un sous-module d'un module libre est libre. En particulier dans ce cas les notions de modules libres, stablement libres et projectifs coïncident. On a introduit la notion pour ne pas donner de fausses définitions.

3.8. *Groupe de Witt* — Les classes de modules quadratiques *unimodulaires* stablement libres de type fini pour la relation d'équivalence engendrée par les isomorphismes et $\sim$, où

$$M \sim M \oplus H_{\%}(A)$$

forment un ensemble $W(A)$. En effet, la catégorie des A-modules de type fini est déjà essentiellement petite...

L'ensemble $W(A)$ muni de la somme orthogonale $\oplus$ devient un monoïde commutatif, dont le neutre est donné par la classe des modules hyperboliques. On va montrer que c'est un groupe. Fixons à cette fin une classe $[M, \varphi, q]$ de $W(A)$. Quitte à rajouter un module hyperbolique de rang suffisamment grand, on peut supposer le représentant (M, φ, q) libre, de rang disons n. Notons

$$H := (M, \varphi, q) \oplus (M, -\varphi, -q)$$

C'est un module quadratique libre de rang $2n$, et le raffinement quadratique $q \oplus -q$ s'annule sur le sous-module diagonal

$$\Delta := \{\ (x, x) \mid x \in M\ \} \subseteq H$$

isomorphe à M et donc libre de rang n. Il découle de l'unimodularité de φ que la forme $\varphi \oplus -\varphi$ induit un isomorphisme

$$H/\Delta \simeq \Delta^*$$

Le lemme s'applique et la classe $[H]$ est nulle dans $W(A)$, donc $[M, \varphi, q]$ est inversible.

Le groupe abélien $W(A)$ est appelé groupe de Witt de l'anneau A. Une définition de la L-théorie de A en dimension $4n$ est alors

$$L_{4n}(A) := W(A)$$

pour $n \geq 0$.

Remarque 3.9. La définition « correcte » de $L_{4n}(A)$ ne suppose pas A commutatif et mais requiert une involution sur A, autrement dit une involution de A en tant que groupe abélien

$$\iota\colon A \simeq A$$

vérifiant de plus $\iota(1) = 1$ et $\iota(ab) = \iota(b)\iota(a)$ pour tous a et b.

Le cas décrit plus haut correspond à l'involution identité sur un anneau commutatif mais l'involution sur $\mathbf{Z}[G]$ n'est pas triviale en général, même lorsque G est abélien. Le groupe $L_{4n}(\mathbf{Z}[G])$ apparaissant dans le théorème de Wall n'est donc pas exactement le groupe de Witt $W(\mathbf{Z}[G])$ tel qu'on l'a défini en général. Il n'y a en revanche pas ce problème dans le cas simplement connexe, i.e. G trivial.

3.10. *Signature* — La *signature* fournit un morphisme

$$\mathrm{sign}\colon W(\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$$

qui s'avère être injectif. En fait, un théorème d'Arf montre que l'image de sign est exactement $8\mathbf{Z}$. Ainsi $W(\mathbf{Z})$ possède une description simple malgré sa définition abstraite.

4 Obstruction en chirurgie

Nous sommes maintenant prêts à décrire $\sigma_*(f, \alpha)$ pour une application normale de degré un de dimension paire

$$(f, \alpha)\colon M^{2n} \to X$$

avec $2n \geq 4$ et X simplement connexe. Quitte à opérer des chirurgies normales successives en dimension inférieure à $n-1$, on peut supposer $\pi_k(f) = 0$ pour $k \leq n$. En particulier M est simplement connexe.

4.1. *Homologie relative* — De la même façon que dans le cas des groupes d'homotopie relatifs, les morphismes

$$f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$$

induits par une application $f\colon X \to Y$ s'inscrivent dans une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(Y) \longrightarrow H_n(f) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

De même, on peut définir des groupes abéliens $H^n(f)$ de cohomologie relative, où cette fois

$$\cdots \longrightarrow H^n(f) \xrightarrow{\partial} H^n(Y) \xrightarrow{f_*} H^n(X) \longrightarrow H^{n+1}(f) \longrightarrow \cdots$$

Les groupes d'homotopie et d'homologie relatifs sont reliés entre eux de façon analogue au cas absolu, via le théorème d'Hurewicz.

Théorème 4.2 (Hurewicz)**.** *Si $k \geq 1$ et si*

$$f\colon X \to Y$$

est une flèche k-connexe entre espaces simplement connexes, alors $H_r(f) = 0$ pour $r \leq k$ et il existe un isomorphisme

$$\pi_{k+1}(f) \simeq H_{k+1}(f)$$

de groupes abéliens.

L'hypothèse que f est de degré un est nécessaire pour le résultat de scindage qui suit :

Proposition 4.3. *Pour tout k, on a des décompositions*

$$H_k(M) \simeq H_{k+1}(f) \oplus H_k(X) \quad \text{et} \quad H^k(M) \simeq H^{k+1}(f) \oplus H^k(X)$$

respectées par les isomorphismes de Poincaré.

En particulier, on a pour tout k des isomorphismes

$$H^{k+1}(f) \simeq H_{2n-k+1}(f)$$

induits par dualité de Poincaré.

Dans notre situation, le théorème d'Hurewicz implique $H_k(f) = 0$ pour $k \leq n$, et

$$\pi_{n+1}(f) \simeq H_{n+1}(f)$$

On montre alors à l'aide du théorème des coefficients universels [8] que $H^k(f) = 0$ pour $k \leq n$ et

$$H^{n+1}(f) \simeq H_{n+1}(f)^*$$

La dualité de Poincaré fournit alors une forme bilinéaire

$$\lambda\colon H_{n+1}(f) \simeq H_{n+1}(f)^*$$

sur $H_{n+1}(f)$. On peut en fait montrer dans ces conditions que le $\mathbf{Z}$-module $H_{n+1}(f)$ de type fini est libre (en fait stablement libre dans le cas général).

Lorsqu'on explicite λ, on obtient en fait la restriction $H^{n+1}(M)$ de la forme d'intersection sur M

$$\lambda_M\colon H_n(M) \times H_n(M) \to \mathbf{Z}$$

qui est donnée par le produit cup, modulo les identifications $H_n(M) \simeq H^n(M)$ et $H^{2n}(M) \simeq \mathbf{Z}$ induites par la classe fondamentale $[M]$. En particulier, la forme unimodulaire λ est symétrique dès que n est *pair*. Pour qu'elle définisse une classe dans $W(\mathbf{Z})$, il nous faut montrer que cette forme est paire.

4.4. *Auto-intersections* — On sait qu'un élément $x \in H_{n+1}(f) \simeq \pi_{n+1}(f)$ détermine une immersion

$$j(x)\colon S^n \looparrowright M$$

à homotopie régulière à extrémités libres près. Quand on remonte à la définition du morphisme de Hurewicz, on obtient en fait

$$\lambda(x, y) = \varphi(j(x), j(y))$$

8. L'homologie relative de f se lit sur en fait sur un complexe de $\mathbf{Z}$-modules libres $\mathrm{Cone}(f)$, et la cohomologie relative peut se lire sur son complexe dual (modulo un décalage).

où φ est la forme qui compte le nombre d'intersections sur des représentants transverses de $j(x)$ et $j(y)$. Pour être plus précis, si u et v sont des immersions $S^n \looparrowright M$, on peut les déformer par un chemin d'immersions (car être une immersion est une propriété ouverte) pour les rendre *transverses*. En particulier, l'espace des intersections

$$I(u,v) := \{\ (s,t) \in S^n \times S^n \mid u(s) = v(t)\ \}$$

est un ensemble fini de points. On définit alors

$$\varphi(u,v) := \sum_{P \in I(u,v)} \varepsilon_P$$

où $\varepsilon_P \in \{\pm 1\}$ vaut 1 si la base de l'espace tangent de M en P induite par la mise bout à bout de celles sur les espaces tangents des deux sphères respecte l'orientation de M, et -1 sinon. Bien que cela ne saute pas aux yeux, ce nombre d'intersections ne dépend que des classes d'homotopie régulière des immersions u et v. C'est une forme symétrique car n est pair.

Fixons maintenant $x \in H_{n+1}(f)$. L'objection est d'expliquer grossièrement pourquoi $\varphi(j(x), j(x))$ est pair. L'immersion $j := j(x) \colon S^n \looparrowright M$ peut être, là encore par transversalité, supposée auto-transverse. Cela signifie que les intersections $j(s) = j(t)$ sont transverses dès que $s \neq t$. En décalant j d'un vecteur fixé z de D^n (on utilise ici que j est le cœur d'une immersion $S^n \times D^n \looparrowright M$) on obtient une immersion $j' \colon S^n \looparrowright M$ pour laquelle l'ensemble $I(j, j')$ ne rencontre pas la diagonale de $S^n \times S^n$. Si z est suffisamment petit, alors les intersections de j et j' sont situées « proches » des auto-intersections de j, et restent transverses. Chacune de ces auto-intersections $(s,t) \in S^n \times S^n$ de j va créer deux intersections entre j et j' : l'une proche de (s,t) et l'autre de (t,s). Finalement le nombre d'intersections entre j et j' doit être pair.

L'obstruction est alors définie comme

$$\sigma_*(f,\sigma) := [H_{n+1}(M), \lambda] \in W(\mathbf{Z})$$

En admettant que la décomposition de $H_n(M)$ donnée plus haut respecte le produit cup, il vient que

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \sigma_*(f,\sigma) &= \operatorname{sign} \lambda_M - \operatorname{sign} \lambda_X \\ &= \operatorname{sign} M - \operatorname{sign} X \end{aligned}$$

si bien que l'obstruction de l'application normale (f,α) ne dépend pas de α lorsque f est n-connexe.

5 Chirurgie algébrique

Bien que le cas de la dimension $2n$ avec n impair ressemble à ce que l'on a fait, la différence majeure étant que la forme d'intersection est cette fois anti-symétrique, la description de l'obstruction en dimension impaire $2n+1$ est très différente, plus complexe, et dépend là aussi de la parité de l'entier n.

On imagine sans mal que le fait d'avoir quatre définitions possibles pour l'obstruction rend difficile de démontrer des choses dessus, par exemple de donner des formules pour l'obstruction d'une composition ou encore d'un produit.

Un autre problème de cette définition est la difficulté de calcul : en effet, la description concrète de l'obstruction comme forme d'intersection géométrique sur des sphères immergées requiert d'avoir une application normale hautement connexe.

Pour travailler avec cette obstruction, il existe en fait un cadre algébrique plus commode qui résout ces problèmes : c'est la théorie de la *chirurgie algébrique*. L'idée est la suivante : plutôt que de devoir travailler avec des applications hautement connexes pour pouvoir définir l'obstruction de Wall comme une forme quadratique (ou d'autres objets relativement simples), pourquoi ne pas voir ces concepts comme des avatars d'une structure, fatalement plus complexe, définie directement au niveau des complexes singuliers. Rien n'est jamais gratuit, donc ce que l'on gagne à avoir une définition plus conceptuelle de l'obstruction de Wall se paie par plus d'algèbre homologique et moins de géométrie.

On se restreint à travailler au-dessus de $\mathbf{Z}$, mais ce qui suit s'adapte dès que l'on a un anneau muni d'une involution.

5.1. *Complexes symétriques, quadratiques* — Si C est un complexe de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini, le produit slant [9] induit naturellement un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(C, C^{-\bullet}) \simeq C^{-\bullet} \otimes C^{-\bullet}$$

où $C^{-\bullet}$ est le complexe de chaînes donné par $[C^{-\bullet}]_r := C^{-r}$ et de différentielle d^* au signe près.

De manière analogue à ce qu'il se passe chez les modules, on a envie de dire qu'une forme symétrique sur C est un cycle du complexe $C^{-\bullet} \otimes C^{-\bullet}$ invariant sous l'action T de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ consistant à échanger les coordonnées (modulo un changement de signe pour bien avoir un morphisme de complexes). Malheureusement cette définition est trop « rigide ». Les formes symétriques sur C sont en fait les cycles du complexe

$$W^{\%}(C^{-\bullet}) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}\big(W, C^{-\bullet} \otimes C^{-\bullet}\big)$$

où W est le complexe cellulaire canonique de S^∞ muni de l'action antipodale. Remarquons que la seule différence entre cette définition et la précédente est que l'on a remplacé le point Δ^0 par W.

Une n-forme symétrique sur C est donc en fait un n-cycle φ_0 de $C^{-\bullet} \otimes C^{-\bullet}$ qui ne vérifie pas nécessairement la condition rigide $\varphi_0 = T\varphi_0$, mais il existe $\varphi_1 \in \big(C^{-\bullet} \otimes C^{-\bullet}\big)_{n+1}$ tel que

$$d\varphi_1 = (1 - T)\varphi_0$$

Moralement φ_1 réalise une homotopie entre φ_0 et $T\varphi_0$. Il existe ensuite φ_2 qui réalise une homotopie entre φ_1 et $-T\varphi_1$ et ainsi de suite...

Pour éviter d'avoir à considérer le dual $C^{-\bullet}$ dans toute la suite, on parlera de forme symétrique sur C pour parler des cycles de $W^{\%}(C)$.

La notion de forme quadratique se généralise également : là où les formes symétriques sont des formes quasiment invariantes sous l'action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, les formes quadratiques sont des « quasi-coinvariants ». Ce sont là aussi des cycles d'un certain complexe $W_{\%}(C)$.

9. On ne rentre volontairement pas dans les détails, mais il est défini au signe près exactement de la même façon que sur les modules.

La raison pour laquelle cette définition est la bonne est le fait fondamental suivant, qui aurait été faux avec la définition naïve :

Proposition 5.2. *Les foncteurs $W^{\%}(-)$ et $W_{\%}(-)$ sont invariants par homotopie.*

5.3. *Complexes de Poincaré* — Une n-forme symétrique φ sur un complexe C se projette en particulier sur un n-cycle φ_0 de $C \otimes C$, qui induit par produit slant une flèche

$$\mathrm{ev}(\varphi)\colon C^{n-\bullet} \to C$$

bien définie seulement à homotopie près, car on peut faire varier φ_0 par un bord. On parle de complexe de Poincaré dans le cas où cette évaluation est une équivalence d'homotopie. On pense alors à (C, φ) comme à une variété.

Suivant un thème que l'on a déjà rencontré par deux fois auparavant, les constructions $W^{\%}(-)$ et $W_{\%}(-)$ possèdent des versions relatives. Si $f\colon C \to D$ est un morphisme de complexes, alors une $(n+1)$-forme symétrique $(\delta\varphi, \varphi)$ sur f induit des évaluations

$$\mathrm{ev}(\delta\varphi, \varphi)\colon D^{n+1-\bullet} \to \mathrm{Cone}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{ev}(\delta\varphi, \varphi)\colon \mathrm{Cone}(f)^{n+1-\bullet} \to D$$

La paire f est de Poincaré si ce sont des équivalences d'homotopie. Les paires de Poincaré sont en quelque sorte l'analogue algébrique des variétés à bord.

Une n-forme quadratique ψ (dans le cas absolu ou relatif) induit par *symétrisation* une n-forme symétrique $(1+T)\psi$. On dit que ψ est de Poincaré si et seulement si $(1+T)\psi$ l'est.

On peut maintenant définir un relation de cobordisme directement sur les complexes, de la manière suivante :

5.4. *Cobordisme algébrique* — Étant donnés deux complexes de Poincaré (C, φ) et (C', φ') de dimension n, un cobordisme de C vers C' est la donnée d'une $(n+1)$-paire de Poincaré $f\colon C \oplus C' \to D$ de bord $(C \oplus C', \varphi \oplus -\varphi')$. La définition dans le cas quadratique est analogue.

Bien que la transitivité ne soit pas du tout évidente, le cobordisme algébrique est conformément à l'intuition une relation d'équivalence sur les complexes de Poincaré symétriques et quadratiques. Les classes d'équivalences munies de la somme directe $\oplus$ forment des groupes abéliens $L^n(\mathbf{Z})$ et $L_n(\mathbf{Z})$.

Les L-groupes quadratiques $L_n(\mathbf{Z})$ sont 4-périodiques et correspondent aux groupes apparaissant dans le théorème d'obstruction de Wall en chirurgie.

De la même façon qu'en géométrie, il existe une opération permettant de construire des cobordismes algébriques, appelée *chirurgie algébrique*. On n'a pas la place de la décrire ici, mais notons toutefois que le théorème de Milnor a un équivalent :

Théorème 5.5. *Deux complexes de Poincaré sont cobordants si et seulement si l'on peut passer de l'un à l'autre par chirurgie algébrique et équivalence d'homotopie.*

Remarque 5.6. Il est quasiment immédiat que deux complexes de Poincaré homotopiquement équivalents sont cobordants, ce qui marque une différence majeure par rapport au cas géométrique.

En règle générale, les invariants que l'on construit par des méthodes algébriques et vivant dans des groupes de L-théorie sont quasiment automatiquement invariants par homotopie.

Le résultat suivant est l'analogue algébrique de la chirurgie sous la dimension moitié :

Proposition 5.7. *Un complexe de Poincaré quadratique* (C, ψ) *de dimension* $2n$ *(resp.* $2n+1$*) est cobordant à un complexe concentré en degré* n *(resp. en degrés* n *et* $n+1$*).*

Remarque 5.8. Ça serait vrai aussi en remplaçant quadratique par symétrique, mais c'est spécifique à l'anneau $\mathbf{Z}$.

5.9. *Lien avec la géométrie* — Un CW-complexe de Poincaré X simplement connexe (car on travaille dans $\mathbf{Z}$) de dimension formelle n donne lieu à un complexe symétrique de Poincaré de dimension n :

$$\sigma^*(X) := (C(X), \varphi_X)$$

où $C(X)$ est l'homologie singulière de X et tel que l'évaluation

$$\mathrm{ev}(\varphi_X) \colon C(X)^{n-\bullet} \to C(X)$$

induit en homologie les isomorphismes de Poincaré $H^{n-k}(X) \simeq H_k(X)$.

Si $f \colon M^n \to X$ est une application de degré un, alors on a une équivalence d'homotopie

$$\sigma^*(M) \simeq \sigma^*(f) \oplus \sigma^*(X)$$

pour un certain complexe symétrique de Poincaré $\sigma^*(f)$. Autrement dit, la forme symétrique $\sigma^*(M)$ est scindée *à homotopie près.*

Si (f, α) est une application normale, alors la forme $\sigma^*(f)$ provient en fait d'une forme quadratique $\sigma_*(f, \alpha)$ de dimension n, autrement dit

$$\sigma^*(f) = (1+T)\sigma_*(f, \alpha)$$

Comme le suggère la notation, cette forme quadratique est en fait l'obstruction de Wall, qui est définie ici de manière plus *synthétique* et sans dépendre de la dimension.